第 15 卷第 4 期
2006 年 11 月

数 学 教 育 学 报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION

Vol.15, No.4
Nov., 2006

高中生对实无穷概念的理解

汪晓勤[1]，周保良[2]

（1．华东师范大学 数学系，上海 200062；2．江苏省昆山市陆家中学，江苏 昆山 215331）

摘要：自古希腊时期开始直到 19 世纪，实无穷这个概念一直困扰着数学家．亚里士多德只接受潜无穷，伽利略认为两个无穷集合无法比较大小，波尔察诺提出“包含关系”准则，康托尔最终才提出“一一对应关系”的准则．高中生对实无穷的理解、困惑以及所用的策略与历史上的数学家的理解、困惑以及所用策略是相似的．因而印证了 M·克莱因的论断——“历史是教学的指南”．

关键词：实无穷；无穷集合；包含关系；一一对应关系

中图分类号：G632.0 **文献标识码**：A **文章编号**：1004–9894（2006）04–0090–04

1 引 言

无穷包含潜无穷和实无穷两种模式．如果一个变量不论取了多大的有限值，它总可以取更大的值，则该变量称为潜无穷．取一条线段的中点，再取 1/2 段的中点，再取 1/4 段的中点，这样一直取下去，不论取了多少个分点，总可以再取下一个分点，因而分点个数就是一个潜无穷．实无穷则是由无穷多个元素所组成的集合．例如，当我们把一条线段看作是无穷多个点所构成的集合，它就是一个实无穷．自然数、有理数或实数的全体都是实无穷之例．

希尔伯特（D.Hilbert，1862—1943）曾说过[1]：“在现实中是找不到无穷的，不论通过什么样的经验、观察和知识．”在无穷的世界里，我们的经验和直觉不再可靠．无穷的反直觉性导致了学生的理解困难．因此，国外有关学者对无穷的理解以及无穷概念教学方面的研究文献很多，D’Amore 早在 1996 年就列出过三百五十余种[2]．10 年过去了，数字显然还在增加．

Tsamir 研究发现，职前教师往往会错误地将有限集合的性质（如整体大于部分）赋予无穷集合[3]．Fischbein，Tirosh 和 Hess[4]，Fischbein，Tirosh 和 Melamed[5]，Duval[6]，Moreno 和 Waldegg[7]，Tall[8]等都发现，学生在处理无穷集合时都遇到了相当大的困难．由于国内相关研究文献并不多见，我们还不了解我们的中学生对实无穷的理解状况；另一方面，新课程选修系列 3 已将“康托尔的集合论——对无限的理解”列入数学史专题之中，因而有关的研究就变得很有意义．本文的研究问题是：高中生是如何理解实无穷的，他们的理解与历史上数学家的理解是否具有相似性．

2 研究工具与被试

本研究主要通过测试和访谈来收集数据．测试问题取自文献[6]和文献[7]，让学生比较两个无穷集合元素的多少．在每一个问题中，两个无穷集合 A 和 B 都满足：（1）A 和 B 都是无穷集合；（2）B 是 A 的真子集；（3）A 和 B 的元素之间存在一一对应关系．各题信息如表 1 所示，具体问题见附录．

表 1 问卷诸题中的两个无穷集合

情 境	题次	集合 A	集合 B
算 术	1	正整数集	平方数集
	2	正整数集	偶数集
几 何	3	线段 CD	线段 AB
	4	线段 CD	线段 AB
算术＋几何	5	区间[0, 2]	区间[0, 1]

被试为江苏省某中学高二、高三两个年级各一个班，共 94 人．他们只具有一些初步的集合和元素的知识，尚未接触过无穷集合的知识，也不曾阅读过有关康托尔集合论方面的书籍．

3 测试结果

诸题的回答情况如表 2 所示．

表 2 诸题的回答情况

题次	A		B		C	
	人数	百分比	人数	百分比	人数	百分比
1	16	17	66	70	12	13
2	34	36	51	54	9	10
3	22	23	53	57	19	20
4	16	17	51	54	25	29
5	43	46	23	24	28	30

对于第 1 题，选 A 者给出的解释有“正整数集包含平方数集”、“平方数呈跳跃状”等．选 B 者给出的解释有：“自然数与平方数都是无穷多个，没有具体数量，没法比较”；“每一自然数都有一个平方数和它对应”；“都有无穷多个，所以是同样多”；“不能求出最后一个自然数，也不能求出最后一个平方数”；“正整数集合{1，2，3，4，5，6，…}和平方数集合{1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，6^2，…}一一对应”．选 C 者给出的解释是：“省略号，谁知道到哪为止”；“都是无穷的，无法比较”；“都无限个，无所谓多少”．

对于第 2 题，选 A 者给出的解释是：“自然数由奇数和偶数组成的，因此自然数多于偶数”；“在有限范围内，自然数个数多”；“偶数集是正整数集的一部分”．选 B 者给出的解释有：“都是无限的，应该是一样多”；“每一个自然数对应着一个偶数”；“两者都是无穷的，没有在一定范围内，无法进行比较”；“将正整数集中的数乘以 2 就得偶数集”．选

收稿日期：2006–06–14
作者简介：汪晓勤（1966—），男，浙江开化人，博士，副教授，主要从事数学史与数学教育研究．

C 者给出的解释有："两个数集的范围不确定"；"两集合中无法找出最大数，无法判断"；"都是无限的，无需比较多少"；"两者都是无穷多个，无法比较"；"省略号表示无穷尽，谁也说不清楚".

对于第 3 题，选 A 者给出的解释有："线段都是由无穷多个点组成的"；"线段 *CD* 的长度大于线段 *AB* 的长度，而线段由点组成，所以线段越长点就越多"；选 B 者给出的解释是："不一定，要看点的大小，如果线段 *AB* 上的点比线段 *CD* 上的点小，那么 *AB* 上的点就有可能一样多"；"也有可能比它少，也有可能比它多，线段 *AB* 与线段 *CD* 上点的疏密关系不同". 选 C 者给出的解释是："点无所谓大小，所以无所谓多少"；"不知道，点都是无限多，无法判断"；"不确定，点为一个球，有大小之分".

对于第 4 题，选 A 者给出的解释是"*CD* 比 *AB* 长"、"*CD* 上的空间比 *AB* 上的空间大". 选 B 者给出的解释有："点的疏密程度不知道"；"点有大小之分，可能 *CD* 由许多大点组成，而 *AB* 反之"；"谁都不清楚哪条上的点多，但它们上面的点数都是无限的"；"*CD* 上所有点在 *AB* 上有对应的点，所有 *CD* 上的点和 *AB* 上的点一样多"；"*CD* 与 *AB* 上的点都是无穷尽的，因此一样多". 选 C 者给出的解释是："点的大小无法确定"；"都有无限多，无法比较"；"点与点之间的间隔不同"；"不确定，有可能多于，有可能少于，也有可能相等".

对于第 5 题，选 A 者给出的解释有："集合 *A* 中的元素在集合 *B* 中都有与之对应的元素"；"数都是无穷的，是相等的"；选 B 者给出的解释有："*B* 的范围比 A 的范围大"；"都有无穷多个点"；"2 在集合 *N* 中但不在集合 *M* 中，所以不一样多". 选 C 者给出的解释有："两个集合都有无穷多个点构成，因此无法知道"；"无穷与无穷之间能相互比较吗？"

4　比较无穷集合所用的策略

对学生的解释进行分类，我们大致可以得到 4 种策略类型：

类型 I　集合 *A* 与集合 *B* 中的元素个数均为无穷，所以元素一样多.

在被试对各题中"*A* 和 *B* 元素一样多"所作的解释中，这一类型占了相当大的比例. 如，第 1 题中正整数集和平方数集"都有无穷多个数，自然数个数=平方数个数=无数个"；第 2 题"自然数个数＝偶数个数＝无穷个"；第 4 题"*CD* 与 *AB* 上的点都是无穷尽的，因此一样多"；第 5 题集合 *A* 和 *B* 中"数都是无穷的，是相等的"，等等.

类型 II　集合 *A* 与集合 *B* 的元素都是无穷多，无法比较.

这是被试对"*A* 和 *B* 的元素不一样多"或"*A* 的元素不比 *B* 的元素多"的很典型的解释. 如对于第 1 题中的正整数集与平方数集中的元素个数，"因为数字无穷多，无法比较"；"数有无限个，无所谓多少，无法比较"；第 2 题正整数和偶数个数"两者都是无穷大的，无法进行比较"；第 3 题 *AB* 和 *CD* 上的点"都是无限多，无法判断"；第 5 题"无穷和无穷之间能相互比较吗？"等.

类型 III　集合 *B* 是集合 *A* 的真子集，集合 *A* 中的元素比集合 *B* 中的元素多.

这是被试对"*A* 中的元素比 *B* 中的元素多"的典型解释. 如对于第 1 题中两个集合的元素个数，"正整数集合包含平方数集合"、"平方数呈跳跃状"；第 2 题"偶数集是正整数集的一部分"；第 3 题 *CD* 上的点多于 *AB*，因为"*CD* 比 *AB* 长"；第 5 题中 *N* 的元素多于 *M*，因为"*N* 的范围比 *M* 的范围大"，等等.

类型 IV　集合 *A* 与 *B* 之间存在一一对应关系，两个集合中的元素一样多.

这是被试对"*A* 中的元素和 *B* 中的元素一样多"的典型解释. 如对于第 1 题中的正整数与平方数一样多，因为"一个自然数对应有一个平方数，是一一对应的"、"正整数集合{1，2，3，4，5，6，…}和平方数集合{1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，6^2，…}一一对应"；第 2 题自然数与偶数一样多，因为"将正整数集中的数乘以 2 就得偶数集"；第 4 题 *CD* 上的点和 *AB* 上的点一样多，因为"*AB* 上的点和 *CD* 上的点一一对应"；第 5 题中 *N* 的元素和 *M* 的元素一样多，因为"集合 *M* 中的元素在集合 *N* 中都有与之对应的元素"，等等.

5　历史相似性

历史上，古希腊哲学家很早就已经接触到"无穷"这个概念. 公元前 5 世纪，厄利亚学派的芝诺（Zeno）所提出的 4 个著名悖论，充分反映了当时人们对于无穷概念的困惑. 此后的二千多年间，无穷这个概念一直困扰着数学家们. 公元前 4 世纪，古希腊哲学家亚里士多德（Aristotle，前 384—前 322）已经区分了潜无穷和实无穷[9]，在亚里士多德看来，数学上的无穷都是潜无穷，而实无穷是不存在的. 亚里士多德的观点对后世影响深远，如普罗克拉斯（Proclus，411—485）就只接受潜无穷而不接受实无穷.

17 世纪意大利著名天文学家和数学家伽利略（G.Galilei，1564—1642）在其《关于两门新科学的对话》（1638）中讨论无穷大和无穷小. 他注意到：两条不相等的线段 *AB* 和 *CD* 上的点可以构成一一对应；他又注意到，正整数集和正整数平方所构成的集合之间可以建立一一对应关系. 这就导致"矛盾"——部分与整体"相等". 伽利略没能解决这个矛盾，他认为无穷大量都是一样的，不能比较大小，即不能将"大于"、"小于"和"等于"这样的词用于无穷大量[9~10].

直到 19 世纪，德国著名数学家高斯（C.F.Gauss，1777—1855）、法国著名数学家柯西（A.L.Cauchy，1789—1857）、德国著名数学家魏尔斯特拉斯（K.Wierestrass，1815—1897）等仍然不接受无穷集合，因为他们和伽利略一样，无法解决"部分等于整体"这个矛盾[9].

真正把实无穷引入数学，是从捷克著名数学家波尔察诺（B.Bolzano，1781—1848）开始的. 在《无穷的悖论》（*Paradoxes of the Infinite*）中，波尔察诺认为要将实无穷引入数学，关键在于解决两个无穷集合大小比较问题. 他认为，如果一个无穷集合是另一个无穷集合的子集，那么有两种可能对它们进行比较：第一种是在两个无穷集合之间建立起一一对应关系；第二种是像有限集合那样，在两个无穷集合的元素间建立起"部分—整体"的关系，即包含关系. 尽管他肯定了一个集合与其真子集能够建立起一一对应关系，但他并不认为这两个集合的元素"个数"就一定相等. 因此，他

最后选择了包含关系作为比较两个无穷集合的准则："如果集合 A 是集合 B 的真子集，即 A 包含于 B 而不等于 B，那么 A 的元素个数少于 B 的元素个数．"[10]

德国著名数学家康托尔（G.Cantor，1845—1918）创立集合论，将实无穷作为一个概念引入数学．康托尔认为，如果一个集合能够和它的真子集构成一一对应，它就是无穷的．他定义了"势"（基数）这个概念，并提出比较两个无穷集合的"一一对应"准则："两个集合 A 和 B 具有相同的势（基数），当且仅当在 A 和 B 之间存在一一对应．"[7, 10] 因此，平方数集、三角形数集与正整数集具有相同的基数．康托尔还证明了有理数集与正整数集也具有相同的基数．康托尔认为，一个无穷集合可以和它的真子集具有一样多的元素，这正是无限集区别于有限集的本质特征．康托尔还证明：单位线段上点的集合与单位正方形所含点的集合是等势的，与单位立方体所含点的集合也是等势的．这个结果出人意料，就连康托尔本人也觉得不可信．他于1877年写信给戴德金（R.Dedekind，1831—1916）说："笔者看见了，但笔者就是不信！"[11]

本次测试结果表明，高中生在比较无穷集合时，遇到的困惑、所使用的比较策略与历史上数学家的困惑和比较策略是十分相似的．

类型 I"集合 A 与集合 B 中的元素个数均为无穷，所以元素一样多"和类型 II"集合 A 与集合 B 的元素都是无穷多，无法进行比较"实际上完全重复了伽利略对无穷量的看法．伽利略在《关于两门新科学的对话》中说："我们试图用有限的思维去讨论无穷，并赋予它以有限或有界的性质，但我觉得这是错误的，因为我们不能说一个无穷的量大于、小于或等于另一个无穷的量．"[7]因而在伽利略看来，正整数集与平方数集的大小是无法比较的．对于两条线段，伽利略说："一条线段并不含有比另一条线段更多或更少的点，或者与另一条线段一样多的点，每一条线段都含有无穷多个点．"[7]

在许多认为无穷集合"无法比较"或"不知道能否比较"的被试所给出的解释中明显有着亚里士多德思维的影子．"没有限定范围，自然数和平方数可以无限大下去"、"不能求出最后一个自然数，也不能求出最后一个平方数"、"省略号，谁知道到哪为止"、"两集合中无法找出最大数，无法判断"等回答表明，被试和我们的希腊先哲一样，接受的是潜无穷而不是实无穷．

类型 III"集合 B 是集合 A 的真子集，集合 A 中的元素比集合 B 中的元素多"与即为波尔察诺的无穷集合比较法．有趣的是，许多被试以"CD 比 AB 长"作为 CD 上的点更多的理由，认为线段越长，其上的点越多，这与波尔察诺的思维如出一辙．波尔察诺在《无穷的悖论》中如是说："我们必须赋予两端无限延伸的直线以无限的长度，其上点的数目是单位线段上点的数目的无穷多倍．"[7]

类型 IV"集合 A 与 B 存在一一对应关系，两集合中的元素一样多"即为康托尔给出的比较准则．但我们注意到，这并不表示这部分被试对于实无穷的理解达到了康托尔的思维水平．从测试结果来看，部分学生对于第3、4两题中同样的两个无穷集合分别采用了两种不同的比较策略，却并没有意识到所得结果的矛盾性．因此，总体来说，这部分学生的思维仍只达到波尔察诺的水平．

我们还应看到，那些没有给出解释的被试或许还没有达到伽利略所在那个时代人们的思维水平．

6 结论与教学启示

通过上面的分析，我们得到如下结论：高中生对在比较两个无穷集合（其中一个是另一个的真子集）时所用的策略大致有4类：（I）集合 A 与集合 B 中的元素个数均为无穷，所以元素一样多；（II）集合 A 与集合 B 的元素都是无穷多，无法比较；（III）集合 B 是集合 A 的真子集，集合 A 中的元素比集合 B 中的元素多；（IV）集合 A 与 B 存在一一对应关系，两集合中的元素一样多．高中生对实无穷的理解、困惑以及所用的策略与历史上的数学家，如亚里士多德、伽利略、波尔察诺等的理解、困惑以及所用策略是相似的，因而对实无穷概念而言，历史发生原理是成立的，这与文献[12]的研究结果相一致．

历史是一面镜子．如果我们了解实无穷概念的历史，就不会对学生给出的种种解释以及他们所表达的困惑感到奇怪，因为从古希腊时期开始，直到19世纪，数学家们都一直难以接受实无穷概念，难以接受部分和整体"一样大"这样的结果．今天的中学生在面对实无穷时，仍然经历数学家们曾经经历过的种种困惑，遭遇数学家们曾经遭遇过的认知冲突，采用历史上数学家曾经采用过的比较策略，这种历史相似性印证了M • 克莱因（M.Kline，1908—1992）的论断："历史是教学的指南．"[13]通过实无穷概念的历史，我们可以对学生的认知过程以及他们可能会遇到的学习障碍做出预测，从而制订出我们的教学策略．就新课程选修系列3数学史专题"康托尔的集合论——对无限的理解"的教学，我们提出如下建议：

（1）设置问题，创造学习动机．在教学之初，教师应该让学生思考和讨论类似于本研究测试卷中所给出的比较两个无穷集合大小的问题，让他们经历历史上数学家们的困惑；让学生思考和讨论用不同策略（包含关系与一一对应关系）比较两个无穷集合大小关系所得互相矛盾的结果，引起认知冲突，从而创造强烈的学习动机．

（2）追溯历史，树立正确观念．在激发起学生的好奇心和学习动机后，追溯自古希腊开始直到康托尔建立集合论之前实无穷概念的历史，强调亚里士多德、伽利略和波尔察诺等对实无穷的认识，使学生意识到自己对"实无穷"概念的困惑或错误理解只不过重蹈了数学家的覆辙，是无穷概念的"反直觉性"造成的，是个体认识过程中必经的阶段，因而不必对自己的理解能力感到怀疑，也完全不必像古希腊数学家那样患上"无穷恐惧症"．同时要向学生强调：将有限集的性质（如整体大于部分）推广到无限集往往会导致错误，在无穷的世界里，我们的直觉往往不再可靠．

（3）把握主题，揭示无穷本质．详细而通俗地讲述康托尔的集合论，强调无限集和有限集的本质区别在于前者与自己的真子集之间可以建立一一对应关系，因而整体和部分可以"相等"，而对后者来说，我们找不到这样的一一对应关系，整体

永远大于部分．强调比较无穷集合的正确策略是建立“一一对　　应关系”，最后明确引入“势”（或“基数”）的概念．

[参 考 文 献]

[1] Tsamir P, Dreyfus T. Comparing Infinite Sets—a Process of Abstraction [J]. Journal of Mathematical Behavior, 2002, (21): 1–23.

[2] Bagni G T. Didactics of Infinity: Euclid’s Proof and Eratosthenes’ Sieve Prime Numbers and Potential Infinity in High School [A]. In: D’Amore B, Gagatsis. Didactics of Mathematics-Technology in Education [C]. Thessaloniki: Erasmus ICP-96-G2011/11, 1997.

[3] Tsamir P. The Transition from Comparison of Finite to the Comparison of Infinite Sets: Teaching Prospective Teachers [J]. Educational Studies in Mathematics, 1999, (38): 209–234.

[4] Fischbein E, Tirosh D, Hess P. The Intuition of Infinity [J]. Educational Studies in Mathematics, 1979, (10): 3–40.

[5] Fischbein E, Tirosh D, Melamed U. Is It Possible to Measure the Intuitive Acceptance of a Mathematical Statement [J]. Educational Studies in Mathematics, 1981, (12): 491–512.

[6] Duval R. L’obstacle du dédoublement des Objects Mathématiques [J]. Educational Studies in Mathematics, 1983, (14): 385–414.

[7] Moreno L E, Waldegg G. The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity [J]. Educational Studies in Mathematics, 1991, (22): 211–231.

[8] Tall D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof [A]. In: Grouws D A. Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning [C]. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

[9] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times [M]. New York: Oxford University University, 1972.

[10] Fauvel J, van Maanen J. History in Mathematics Education [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[11] Boyer C B. A History of Mathematics [M]. New York: John Wiley & Sons, 1968.

[12] 汪晓勤，方匡雕，王朝和．从一次测试看关于学生认知的历史发生原理[J]．数学教育学报，2005，14（3）：30–33．

[13] 汪晓勤，欧阳跃．HPM 的历史渊源[J]．数学教育学报，2003，12（3）：24–27．

Senior Middle School Students’ Understanding about Actual Mathematical Infinity

WANG Xiao-qin[1], ZHOU Bao-liang[2]

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;
2. Lujia Middle School, Jiangsu Kunshan 215331, China)

Abstract: The concept of actual infinity had been baffling mathematicians since the time of classic Greece. This paper reported a research on senior high school students’ understanding about the actual mathematical infinity, the findings of which revealed the parallelism between students’ cognition and the history of this concept, thus justifying M. Kline’s statement that the history of mathematics was the guide to teaching.

Key words: actual infinity; infinite sets; inclusion relationship; one-to-one corres- pondence

附录——实无穷测试题

1、正整数集{1，2，3，4，5，…}中的元素是否比平方数集{1，4，9，16，25，…}中的元素多？

A、是　　　　B、否　　　　C、不知道

解释你的答案．

2、正整数集{1，2，3，4，5，…}中的元素是否比偶数集{2，4，6，8，10，…}中的元素多？

A、是　　　　B、否　　　　C、不知道

解释你的答案．

3、观察长度分别为 4 厘米和 6 厘米的线段 AB 和 CD（如图 1），若比较 AB 和 CD 上的点，CD 上的点是否比 AB 上的点多？

A、是　　　　B、否　　　　C、不知道

解释你的答案．

4、再观察线段 AB 和 CD，连接 CA 和 DB，并延长，交于点 O，设 P 是 CD 上任意一点，连接 PO，交 AB 于 P'（如图 2）．CD 上的点是否比 AB 上的点多？

A、是　　　　B、否　　　　C、不知道

解释你的答案．

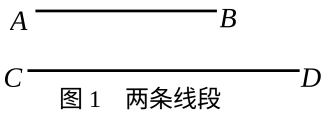

图 1　两条线段

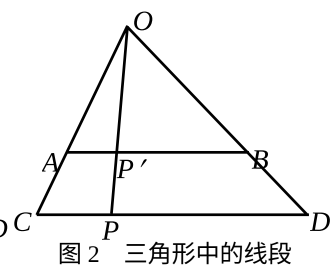

图 2　三角形中的线段

5、设 $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$A=\{y\mid y=2x, x\in B\}$，则集合 A 和 B 是否具有同样多的元素？

A、是　　　　B、否　　　　C、不知道

解释你的答案．

[责任编校：陈汉君]