数学符号史在高中数学教学中的应用与价值

上海华东师范大学教师教育学院(200062) 何伟淋 汪晓勤

1.引言

数学符号是数学概念、命题、思想、方法、语言的载体,数学教学离不开数学符号的教学.由于教科书中有关历史知识的缺失,数学符号往往以“完成时态”被空降在数学课堂中.教师在对符号进行教学时,往往只关注符号的识记,而忽视其所蕴含的意义和数学思维,从而未能充分体现数学符号的教育价值.

《普通高中数学课程标准》(2017版)在课程结构一节中提出了“数学文化融入课程内容”的要求,并指出,数学文化包含了数学的思想、精神、语言、方法、观点以及它们的形成和发展.要将数学文化融入数学课程,必然涉及数学符号及其历史.Tzanakis和Acarvi在总结数学史的教育价值时指出:数学史有助于学生理解数学符号、术语、计算方法、表征方式、数学语言的演进过程,从而揭示数学和数学活动的本质.可见,数学符号的历史是数学史不可分割的一部分.

近年来,随着HPM实践研究的深入开展以及HPM学习共同体的日益扩大,产生了一系列融入数学史的中学课例(简称为HPM课例).然而,只有极少数课例涉及零星的数学符号史,且并未发挥其应有的教育价

(接上页)式”,再由教师概括“说”,“说亮点、说建议、说归属”.最后,教师可以利用信息技术,呈现预设的变式问题,结合学习小组变式问题,引导学生“一题多变”、问题变式的方法,使他们认识数据与信息的关系;可以通过典型问题的“一题多解”,引导学生发掘其中蕴涵的数学思想方法、揣摩命题意图,使他们重视审题、学会如何想问题;可以通过整理课堂产生的大量数据、资源,赋予“知识结构”图新的内涵,结合教材第68页的“框图表示”,回眸“起始课”预测,引领学生在把握“三角函数”这章“入口” 的同时,寻找其“出口”、前后贯通,凝练学好三角函数的思想方法和策略,指导学生选择自己的薄弱环节开展“网络学习”,或个性化的研究学习.

数据分析“是大数据时代数学应用的主要方法”,大数据的意义在于通过大量数据的存储和分析,形成对相关事物的整体认识,概括、形成知识,进行统计推断或决策.课例中,围绕“知识结构”图,教师设计题目,让学生演练、解题,生产数据,提取其中的有用信息;运用信息技术等手段,呈现学生的“现场作品”,让学生观察、表述,生产数据,发掘数据的信息价值;以小组为单位,开展问题变式、合作展示,让学生辨析、“说”,生产数据,提取数据新的信息价值.教师充分利用大量数据、课堂资源,释放数据能量,凝练学好三角函数的思想方法,引领学生概括、形成“开发利用大数据”的章节小结知识.不在乎变出多少问题,而在于通过原题解析、问题变式、合作展示等思维活动,产生大量数据、增添活动经验,在存储和分析数据中,释放数据能量,形成充满生机和活力的“知识结构”图,以及章节小结的基本模式和过程性知识,启动研究学习、个性化提升,实现数学学习流程再造.

“数据分析过程主要包括:收集数据,整理数据,提取信息,构建模型,进行推断,获得结论”.按照“数据分析”流程,创新章节小结模式,基本点是围绕梳理知识、建构“知识结构”图,推进数学思维活动,开发利用数据、资源,不断强化知识主线、生动数学理解,概括、形成充满生机和活力的“知识结构”图,以及章节小结的基本模式.核心是以章节小结为载体,按照培养“数据分析”核心素养的教学立意,创新模式;运用“数据分析”工具,在落实章节知识反思学习的过程中,提升学生数据分析等核心素养,改造、创新数学学习方式.通过章节小结,提升获取有价值信息并进行存储分析的意识和能力,适应数字化学习的需要,增强基于数据表达现实问题的意识,形成通过数据认识事物的思维品质,积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验,开启数学学习新的征程.

值.究其原因,教师对数学符号的历史还缺乏了解,对其教育价值更缺乏深刻的认识.有鉴于此,我们对与高中数学典型概念相关的符号史进行考察,对其教育价值进行分析,为今后HPM视角下的数学概念教学设计和实施提供参考.

2.与高中数学概念相关的符号史

2.1 正弦的符号

三角函数概念有着悠久的历史.古希腊天文学家希帕克斯(Hipparchus,公元前2世纪)、梅内劳斯(Menelaus,1世纪)和托勒密(Ptolemy,2世纪)因为天文学的需要而相继制作了弦表,相当于计算半角正弦的两倍.公元6世纪,印度数学家阿耶波多(Aryahbata)使用了半弦,称之为为ardha-jya(梵文音译),简写成jya或jiva.这个词传入阿拉伯后,阿拉伯人将其音译为“jiba”,但因为这个词并无实际意义,于是,阿拉伯人又将其改为有意义的词“jaib”,意为“海湾”.12世纪,欧洲人将“jaib”译为拉丁文“sinus”.最终,sinus被译为英文“sine”.17世纪荷兰数学家吉拉德(A.Girard,1595-1632)采用了简写符号“sin”.

三角学于明代传入中国,邓玉函(J.Terrenz,1576—1630)在《大测》中给出“正弦”、“余弦”、“正切”等名词.因此,汉语“正弦”一词经历以下传播路径:梵语→阿拉伯语→拉丁语→汉语.

2.2 对数符号

15~16世纪,数学家利用等差数列和等比数列之间的对应关系来简化计算.例如,德国数学家斯蒂菲尔(M.Stifel,1487~1567)在《整数算术》中给出了双数列

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \cdots \end{array}$$

之间的以下四种对应关系:第二个数列中两数之积,对应于第一个数列中相应两数之和;第二个数列中两数之商,对应于第一个数列中相应两数之差;第二个数列中某数之乘方,等于第一个数列中相应数之若干倍;第二个数列中某数之方根,对应于第一个数列中相应数之若干分之一.但由于等比数列相邻项的间隔越来越大,上述对应关系并不实用.

为此,苏格兰数学家纳皮尔(J.Napier,1550-1617)创用了一个首项为10^7、公比为十分接近于1的0.9999999,使得任意相邻两项之间的间隔不超过1,于是,新数列将1~10^7之间的任意正整数都囊括其中.利用双数列

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 10^7 & 10^7(1-10^{-7}) & 10^7(1-10^{-7})^2 & 10^7(1-10^{-7})^3 & 10^7(1-10^{-7})^4 & \cdots \end{array}$$

的对应关系,纳皮尔制作了庞大的对数表,他把等差数列中的数称为等比数列中相应数的对数(logarithm),这便是我们今天使用的对数符号log的由来.

logarithm这个词源于希腊文中的两个词logos(比)和arithmos(数)的组合,原意为“比数”.所谓“比数”,是指等比数列中某一项与首项之间所含公比的个数.比如,在纳皮尔的等比数列中,$10^7(1-10^{-7})^4$与10^7之间含有四个公比$q=1-10^{-7}$,即

$$\begin{aligned} q &= 10^7(1-10^{-7}):10^7 \\ &= 10^7(1-10^{-7})^2:10^7(1-10^{-7}) \\ &= 10^7(1-10^{-7})^3:10^7(1-10^{-7})^2 \\ &= 10^7(1-10^{-7})^4:10^7(1-10^{-7})^3 \end{aligned}$$

故$10^7(1-10^{-7})^4$的对数为4.在我们今天看来,这个“比数”不过就是斯蒂菲尔所说的指数,但那个时候,笛卡儿(R.Descartes,1596~1650)尚未发明指数记号,纳皮尔很可能也没读过斯蒂菲尔的书,所以他只能用公比的个数来刻画等差数列中的对应项.

对数表于明代传入中国,明代数学家薛凤祚(?~1680)将logarithm译为“对数”,即“对应之数”.

2.3 函数符号 $f(x)$

函数概念经历了漫长的演进过程.17世纪,莱布尼茨(G.W.Leibniz,1646~1716)创用functio一词,用来表达与曲线相关的几何量(横坐标、纵坐标、切线段、法线段、次切线、次法线).18世纪,欧拉(L.Euler,1707~1783)在《无穷分析引论》中给出函数的解析式定义:“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式.”这个定义对后世产生了深远的影响.即使到了19世纪,德国数学家狄利克雷(L.Dirichlet,1805~1859)给出函数的现代定义(变量对应),人们依然普遍采用解析式定义.英国数学家德摩根(A.De Morgan,1806~1871)在《代数学基础》中,美国数学家罗密士(E.Loomis,1811-1889)在《解析几何与微积分基础》中,都采用解析式定义,李善兰(1811~1882)和伟烈亚力(A.Wylie,1815~1887)在翻译上述二书时,将function译为函数,即包含变数x的式子.

我们今天再也熟悉不过的函数记号 $f(x)$ 就是欧拉引入的.在这个记号中,f是拉丁文functio(对应的英文为function)的首字母.括号中的x表示自变量,$f(x)$ 表示"包含x的解析式",因此,欧拉的函数记号对应于函数的解析式定义.我们知道,在函数的对应说中,函数不定义为变量本身,而是两个集合的元素之间的一种对应法则,其记号为"$f:A\to B$".但在高中数学中,尽管我们采用了对应说,但习惯上仍采用欧拉的记号.

2.4 **数列通项的符号 a_n**

尽管我们今天已习惯于用记号 a_n 来表示数列的第n项,但历史上,这个记号却是姗姗来迟的.16世纪德国数学家克拉维斯(C. Clavius, 1538～1612)在《实用算术概论》中只用文字来表达等差和等比数列的和.前者为:"首项和末项相加,和乘以项数,所得乘积的一半,为所有各项的和."后者为:"末项减去首项,所得的差除以公比与1的差,商加上末项,即得所有项的和."17世纪英国数学家沃利斯(J. Wallis, 1616～1703)在其《统一的数学》中用符号给出等差数列求和公式为 $\frac{T(A+V)}{2}=S$,其中A、V和T分别为等差数列的首项、末项和项数;等比数列求和公式为 $\frac{VR-A}{R-1}=S$,其中A,V,R分别为等比数列的首项、末项和公比.

18世纪,欧拉在《代数基础》中分别用a、z、n和d来表示等差数列的首相、末项、项数和公差,通项公式为 $z=a\pm(n-1)d$,前n项和为 $\frac{n(a+z)}{2}$.1815年,英国数学家赫顿(C. Hutton, 1737～1823)在《数学与哲学辞典》中沿用了欧拉的记号.19世纪下半页,美国数学家罗密士、温特沃斯(G. Wentworth, 1835～1906)、利莱(G. Lilley, 1854～1904)等均在各自的代数教科书中用a和l来表示数列的首、末项.

直到19世纪末,美国宾夕法尼亚大学的数学家费歇尔(G. E. Fisher, 1863～1920)等在《代数基础》中首次采用带有下标的记号,将数列表示为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$,将等差数列的通项和求和公式分别写成:$a_n=a_1+(n-1)d$,$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$,

等比数列的通项和求和公式分别写成

$$a_n=a_1r^{n-1},\ S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1-a_nr}{1-r}.$$

事实上,在欧拉给出函数解析式定义并引入函数记号后的漫长时间里,函数并非数学教科书中的核心概念,而数列却始终是代数教科书的重要内容之一,数列与函数风马牛不相及.只是到了20世纪,函数概念成为中学数学课程核心概念之后,数列才逐渐被视为特殊的函数.只有当数列被视为函数之后,数列通项的符号 a_n 才应运而生.

2.5 **虚数单位i**

虚数在历史上曾引起数学家强烈的认知冲突.16世纪意大利数学家邦贝利(R. Bombelli, 1526～1572)解三次方程时遇到一个奇怪的现象:一方面,利用卡丹公式解得方程 $x^3=15x+4$ 有三个根 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$,但是用分解因式法却发现 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=4$,由此得到等式

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4.$$

该等式一边是实数,一边却出现负数平方根,这在当时的数学家看来是一个矛盾.正是这一矛盾,才促使邦贝利以及那个时代的其他数学家对虚数进行研究.但是,在数学家给出虚数的几何表示法之前,人们一直难以真正接受虚数.

17世纪,笛卡儿在《几何学》(1637)中为"负数的平方根"取了一个很不幸的名字——imaginary numbers,意为"想象中的数",使其蒙上一层神秘的面纱.18世纪,欧拉在《代数基础》中写道:

"由于一切可以想象的数要么大于零,要么小于零,要么等于零,因此,我们显然不能将一个负数的平方根归入可能的数之中.我们必须说,它是一个不可能的量.……它们通常被称为虚量,因为它们只存在于想象之中."

即使到了19世纪,虚数似乎仍未为人们所普遍理解和接受.19世纪,德摩根在其《数学学习与困难》中写道:

"虚数 $\sqrt{-a}$ 与负数 $-b$ 相似,当作为问题的解出现时,它们都表示了某种矛盾或荒谬性.就实际意义而言,它们都是假想的数,因为 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 一样不可理解."

欧拉用"imaginary"一词的首字母i来表示 $\sqrt{-1}$.可见,与正弦、对数的符号一样,虚数单位符号i反映了虚数一词的早期历史,蕴含着早期数学家对于虚数的认识.

3. 数学符号史的教育价值

3.1 认识数学本质,完善数学信念

数学符号的历史告诉我们,我们今天耳熟能详、运用自如的符号并非从天而降,并非自古有之,并非一蹴而就,它们的背后都凝聚着丰富、精彩的历史. 著名科学史家萨顿(G. Sarton, 1884-1956)在评价卡约黎(F. Cajori, 1859-1930)《数学符号史》时指出,此书给予我们的主要启迪是"人类进步的缓慢与艰辛". 数列通项的符号 a_n,在我们今天看来再也平常不过,但令人惊讶的是,历史上,从文字语言到大写字母,到小写字母,再到以项数n作为下标的现代符号,经历了三百多年;而在16世纪符号代数诞生以前的漫长岁月里,人们根本不知道如何表达一个数列的通项!

因此,教师在课堂上介绍数学符号的历史,可以让学生了解数学活动的本质:数学是人类的文化活动,是人在做数学;数学符号乃是人创造的产物,它不是一成不变的,而是会经历从无到有、从不完善到完善的过程. 由此,可以让学生感悟到数学是一门人性化的、不断演进的学科,而非一个僵化的真理体系,从而树立正确的数学信念.

3.2 对照古今差异,消除错误理解

图1给出了数学符号与原始术语、现代术语、中文译名之间的联系.

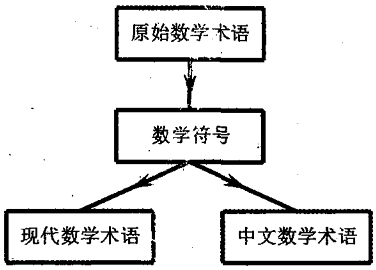

图1 数学符号与数学术语之间的关系

从历史中可以清楚地看到,与数学概念相关的那些数学符号并非冰冷、枯燥和无意义的字母,而往往是原始数学名词的缩写,蕴含着历史上人们对概念的理解. 随着数学的发展,数学概念的内涵往往会发生变化,而术语和符号却沿用至今,这就导致名称和内涵的分离,造成学生在概念理解上的困难.

正弦符号sin源于半弦,是一条线段. 事实上,在16世纪以前,所有六种三角函数都被定义为线段,而不是比值. 清初数学家梅文鼎(1633-1721)在《平三角举要》中解释:"割圆直线,如弓之弦,谓之通弦,通弦半之,谓之正弦."而余弦不过是"余角之正弦"而已. 在图2中,α的正弦AB是弦AC的一半,α的余弦OB即为α的余角的正弦AD,即余弦的名称蕴含了诱导公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

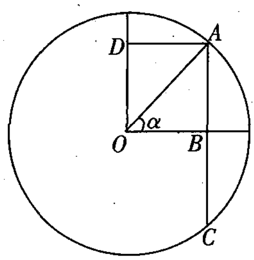

图2 正弦和余弦的词源

在我们今天,正弦被定义为一个比值,只有在单位圆中,古今"正弦"是同义的."正弦"的内涵发生了变化,而"正弦"这一名称和sin这一符号却沿用至今.

类似地,函数符号 $f(x)$ 源于18世纪的函数定义,即"函数是包含变量x的解析式",但在今日高中数学教科书中,函数被定义为集合之间的对应法则."函数"的内涵发生了变化,而"函数"这一译名以及 $f(x)$ 这一符号却沿用至今. 在今天看来,虚数并非"纯属虚构"或"子虚乌有",但"虚数"这一译名以及符号i仍沿用至今. 这一名称就像"无理数"一样,容易让学生望文生义,导致困惑.

因此,教师可以在教学中向学生解释数学符号所蕴含的原始意义,让学生明白,作为文字缩写的数学符号往往反映了一个数学概念在历史上曾经被赋予的内涵,却不一定能真实反映其现代内涵. 通过揭示概念内涵的古今差异,消除学生因为望文生义而产生的困惑和误解,领会"正弦非真弦,虚数本不虚"的道理.

3.3 揭示知识之源,促进概念理解

对数符号log的历史为我们提供了很多信息. 首先,对数的名称源于等差和等比数列的对应关系,与今日教科书中的定义迥然不同. 其次,对数发明的动因是简化计算,而非寻求指数运算的逆运算. 真数之于对数,犹如演员之于替身. 对数在17世纪常常被称为假数、借数,通过假数的加减运算,就可以实现真数的乘除运算. 清代康熙皇帝主编的《数理精蕴》下编"对数比例"称:"对数比例……以借数与真数对列成表,故名对数表. ……其法以加代乘,以减代除,以加倍代自乘,故折半即开平方. 以三因代再乘,故三归即开立方. 推之至于诸乘方,莫不皆以假数相乘而得真

数.盖为乘除之数甚繁,而以假数代之甚易也."

对数符号log所蕴含的意义是一个真数(等比数列中的项)所对应的假数(等差数列中的项),教师在课堂上可以通过图3所示的对应关系,让学生理解并记忆对数的运算法则.

对数	$\boxed{\log_a M}$	+	$\boxed{\log_a N}$	=	$\boxed{\log_a MN}$
	↑		↑		↑
真数	$\boxed{M}$	·	$\boxed{N}$	=	$\boxed{MN}$

图3 真数和对数之间的对应关系

今日教科书是用幂指数来定义对数的,学生从中感受不到使用对数的必要性.教师在教学中揭示对数符号log的意义,让学生回到历史的起点,感受对数背后的动因,从而促进他们对于对数及其运算法则的理解.

4.结语

从以上分析可见,数学符号的历史能帮助学生认识数学和数学活动的本质,从而树立健全的数学观;能够解释数学概念名称和内涵分离的现象,消除学生的困惑;能够揭示相关概念的原始意义和产生的动因,促进学生对概念的理解.

因此,要从HPM的视角设计和实施高中数学概念教学,数学符号史是不容忽视的素材.在课堂教学中,我们可以用三种不同方式来运用符号史.

一是附加式.教师可以直接介绍符号的历史,例如,在"任意角的三角函数"一课中,直接介绍符号sin的来历,追溯正弦的起源;在"函数的概念"一课中,直接介绍函数符号$f(x)$的来历,追溯函数概念的起源.在"对数的概念"一课中,直接介绍对数符号log的原始涵义,领会对数诞生的动因.

二是顺应式.教师可以让学生探讨符号的涵义.例如,在"数系的扩充与复数的引入"一课中,教师可以让学生猜想虚数单位符号"i"所代表的原始名词(可能的猜想有:impossible numbers, inexistent numbers, illusory numbers, inconceivable numbers, insignificant numbers,等等),引导学生走进古人的心灵之中,追溯虚数的历史,并感受历史相似性.

三是重构式.教师可以引导学生经历现代数学符号的演进过程.例如,在"数列的概念"教学中,教师在通过实例引入数列的概念后,让学生思考:如何表示数列各项呢?学生可能会用文字(第一项、第二项、第三项、…)、字母($a,b,c,\cdots$)来表达,教师指出文字和字母表示方式的局限性,最终形成今天的带有下标的符号.

参考文献:

[1] Tzanakis, C. & Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey [C]. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in Mathematics Education. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 2000. 201-240

[2] Clavius, C. Epitome Arithmeticae Practicae [M]. Romae:Typographia Dominici Basae, 1583. 192-200.

[3]Wallis, J. Opera Mathematica(Vol. 1) [M]. Oxoniae:E. Theateo Sheldoniano. 1695. 145-159

[4] Euler, L. Elements of Algebra [M]. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, 1822

[5] Loomis, E. Elements of Algebra [M]. New York:Harper & Brothers, 1856. 234-238

[6] Wentworth, G. Elements of Algebra [M]. Boston:Ginn & Company, 1891. 335-340

[7] Lilley, G. Elements of Algebra [M]. New York: Silver, Burdett & Company, 1894. 373-382

[8] Fisher, G. E, Schwatt, I. J. Elements of Algebra [M]. Philadelphia:Fisher & Schwatt, 1899. 380-390

[9] De Morgan. On the Study and Difficulties of Mathematics [M]. Chicago:Open Court Publishing Company, 1902. 155

[10] Sarton, G. Review of Cajori's A History of Mathematics Notations(I & II) [J]. Isis, 1929, 12(2): 332-336

[11] 梅文鼎. 平三角举要[M]. 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇(数学卷第4册). 郑州:河南教育出版社, 1994. 485-387

[12] 康熙. 数理精蕴[M]. 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇数学卷(3), 郑州:河南教育出版社, 1998. 1144