HPM 视角下的两角和与差的余弦公式教学*

蔡东山[1]　陈晏蓉[2]　沈中宇[3]

(1. 华东师范大学第二附属中学，上海　201203；2. 华东师范大学教师教育学院，上海　200062；
3. 华东师范大学数学科学学院，上海　200241)

1　引言

函数是贯穿高中数学课程的主线，而三角函数是一类最典型的周期函数，在最新修订的普通高中课程标准(2017 版)中要求学生探索和研究三角函数之间的一些恒等关系，其中特别提到让学生经历两角差余弦公式的过程，知道两角差余弦公式的意义[1]. 研究表明，高中生在三角公式上的理解质量总体不高，学生更关注公式的实用性，但对和角公式证明的理解相对薄弱[2]. 同时，新课程标准也提出了培养学生直观想象素养的要求，三角函数是沟通几何与代数的桥梁之一[3]，因此，如何在三角公式的学习中培养学生的直观想象素养，就成为了需要考虑的问题. 最后，三角函数的教学需要通过再创造来恢复学生火热的思考，才能把教科书上冰冷的美丽变为学生丰富的联想[4].

已有研究表明，数学史具有多元的教育价值，数学史可以帮助学生理解数学，通过古今数学方法的对比，拓宽学生思维[5]. 同时，数学史有助于培养学生的直观想象素养，将数学史融入教学之中，给学生提供了探究机会[6—7]，从而让学生回到知识的发生之时，体验像数学家一样探索的过程.

有鉴于此，在本节课的教学中，教师将数学史融入其中，带领学生了解并掌握两角差公式的历史由来以及证明公式的几何模型的妙处. 具体的学习目标如下：

(1) 理解两角和与差的余弦公式，并能够进行简单的化简和求值；

(2) 经历两角和与差的余弦公式的推导过程，掌握多种证明方法；

(3) 体会数形结合、转化等数学思想方法，培养直观想象等数学核心素养；

(4) 激发数学学习兴趣，体会数学探索的乐趣，培养动态的数学观.

2　历史材料及其运用

2.1　两角差的余弦公式的几何模型

由于两角差的余弦公式中含有 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$ 和 $\cos\beta$ 中两两相乘的项，我们构造两对斜边为 1 的直角三角形，其中一对各含锐角 β，不妨设 $\alpha \geqslant \beta$. 如图 1 所示，为了获得四个乘积，需要将两对三角形进行组合. 从而可以得到两角差的余弦公式的三类几何模型，分别是菱形模型、矩形模型和梯形模型[8].

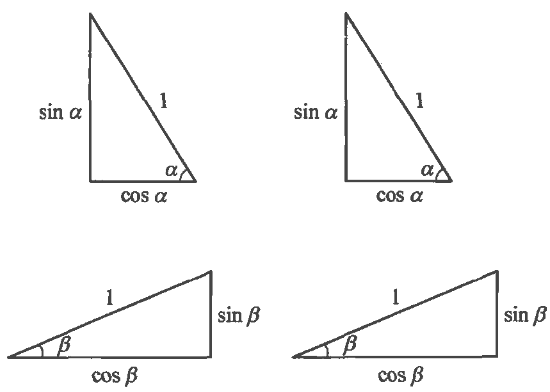


图 1　两对斜边为 1 的直角三角形

菱形模型类似于赵爽在其“勾股圆方图注”中所用的弦图，如图 2(1)所示，中间补充一个长和宽分别为 $\cos\beta - \cos\alpha$ 和 $\sin\alpha - \sin\beta$ 的长方形，得到一个边长为 1、一个内角为 $\alpha+\beta$ 的菱形，其面积为 $\sin(\alpha+\beta)$，分别计算四个三角形面积和中间小正方形的面积，得到和角正弦

---

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一.

公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. 若以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 α，则得到图 2(2) 所示的拼图方案，菱形面积为 $\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos(\alpha-\beta)$，故得差角余弦公式为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

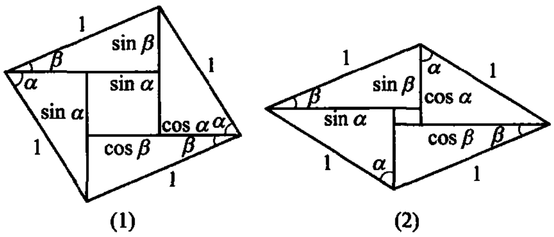


图 2　两角差余弦公式的菱形模型

矩形模型类似于赵爽在其“勾股圆方图注”中所用的“大方”图，如图 3(1) 所示，整个矩形的长为 $\cos\alpha+\cos\beta$，宽为 $\sin\alpha+\sin\beta$，中间是边长为 1、内角为 $\alpha+\beta$ 的菱形，其面积为 $\sin(\alpha+\beta)$，分别计算矩形和四个三角形的面积，得到和角正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. 若以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 α，则得到图 3(2) 所示的拼图方案，菱形面积为 $\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos(\alpha-\beta)$，故得差角余弦公式为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

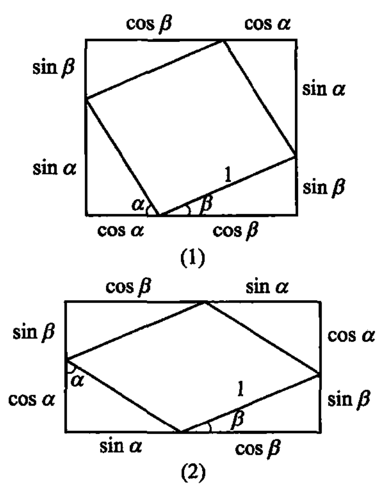


图 3　两角差余弦公式的矩形模型

我们可以将上述矩形模型简化为直角梯形模型，如图 4(1) 所示，将左右两个直角三角形与一个等腰三角形做成一个直角梯形，分别计算梯形的面积和三个三角形的面积和，得到和角正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. 如图 4(2) 所示，若以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 α，得差角余弦公式为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

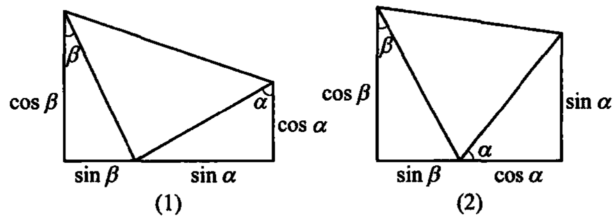


图 4　两角差余弦公式的梯形模型

2.2　余弦公式的单位圆模型

19 世纪法国数学家萨吕斯(P. F. Sarrus，1798－1866)在《纯粹与应用数学年刊》上发表论文，根据两点之间的距离公式来推导公式，进而导出其他公式. 如图 5(1)，在单位圆内构造 $\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，则 $BC^2=Chord^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，从而得到 $Chord^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，令 $\beta=0$，得 $Chord^2\alpha=2-2\cos\alpha$，用 $\alpha-\beta$ 代替 α 得到 $Chord^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$，将其与之前的式子比较，得差角余弦公式为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

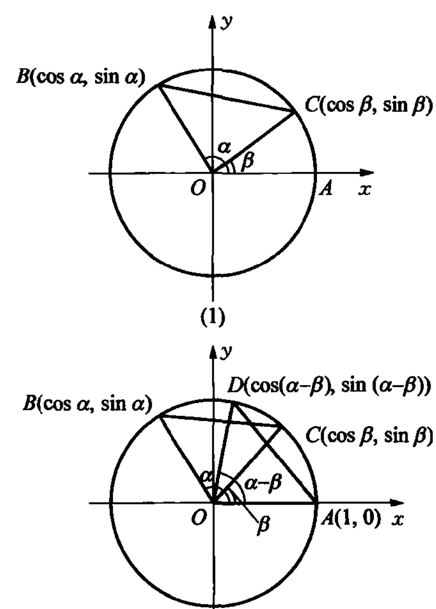


图 5　萨吕斯和麦克肖恩的方法

1941 年,美国数学家麦克肖恩在《美国数学月刊》上发表论文,避开弦长公式,重新对公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 进行推导. 如图 5(2),在单位圆 O 中构造 $\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$,将 $\triangle BOC$ 沿顺时针旋转,使得 OC 与 OA 重合,OB 与 OD 重合,由 $AD=CB$,利用两点之间距离公式即得差角的余弦公式[9].

3 教学设计与实施

3.1 课题引入

本节课由 30°, 45°, 60°的特殊角三角比的回顾入手,进而让学生猜想 15°, 75°的正余弦值,并由 15°是 45°, 30°的两角之差,75°是 30°, 45°的两角之和,引出本节课的内容. 随后,教师分析了三角学的英文词源,介绍了本节课将要学习的两角差的余弦公式的地位:

师:我们来回顾一下,三角学的英文单词 Trigonometry. 这个单词的前半部分的意思是三角,后面一半的意思就是测量,所以最原始的三角学源于生活中的三角测量,而后它在天文学中也有应用. 那么,两角和与差的正余弦公式,通常被称为平面三角学最基本的公式,它有非常悠久的历史. 打开 20 世纪中叶以前任何一部西方三角形著作,这些公式至少有一个使用几何方法来推导证明的. 那么在最早期的时候,在三角学里面,一般是研究锐角的情形,或者说, 0°到 90°之间角的情况.

而后,教师向学生介绍了研究两角差的余弦公式的方法.

我们要考虑一个问题:在研究一个复杂问题的时候,因为现在我们这个角可以变成任意角;那么任意角的这些公式成立不成立不知道,但是我们可以把问题进行特殊化,比如我们先用锐角来研究,也就是说,我们在研究问题的时候,一般先将问题特殊化,看有没有什么结论. 之后我们再把这个问题进行推广,看有没有一般性的结论,这是我们研究问题的方法.

随后,教师带领学生回忆初中已经学过的利用三角板拼图的等面积法勾股定理证明方法.

师:我们初中学过的勾股定理. 那么我们回想一下,用 2 个或 4 个全等三角形,通过等面积法证明勾股定理. 大家分组讨论一下.

生 1:四个三角形,拼成边长为 c 的正方形的形状,利用等面积法,正方形面积等于四个三角形的面积加一个中心小正方形的面积,得出勾股定理的结论. (如图 6(1))

生 2:四个三角形,拼成边长为 $a+b$ 的正方形的形状,利用等面积法,正方形面积等于四个三角形的面积加一个中心小正方形的面积,得出勾股定理的结论. (如图 6(2))

生 3:利用两个三角形拼成梯形形状,利用等面积法,梯形面积等于三个三角形的面积,得出勾股定理的结论. (如图 6(3))

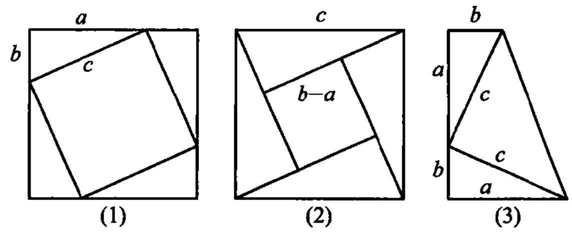


图 6 三角板拼图(证明勾股定理)

3.2 学生探究

由类似勾股定理的方法,给学生四个三角形图形,让学生分组讨论,得出两角和的正余弦展开公式.

师:刚才我们得到了三种不同拼图的勾股定理的证明方法. 下面我们想象一下,根据古代勾股定理的这种思想,用三角形拼图的方式,能不能得出两锐角差的余弦公式的展开形式. 我们用斜边等于 1,内角一个是 α 角,一个是 β 角.

生 1:我们这一组学生合作得出方法是:用四个三角形拼成一个菱形形状的图形. (如图 7(1))

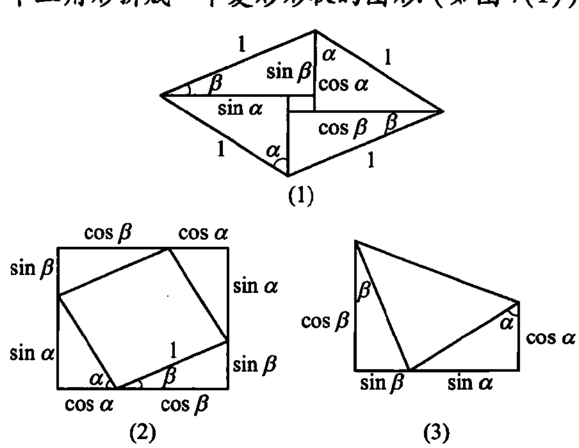


图 7 三个小组的证明图示

第一组学生合作得出方法是:通过等面积的思想,得出:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+(\cos\beta-\cos\alpha)(\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

将 α 换成 $\frac{\pi}{2}-\alpha$,得出两角差的余弦展开式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

生2:我们这一组学生合作得出方法是:用四个三角形拼成一个正方形形状的图形.(如图7(2))

第二组学生合作得出方法是:

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)$$
$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

将 α 换成 $\frac{\pi}{2}-\alpha$,我们得出两角差的余弦展开式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

生3:我们这一组学生合作得出方法是:用两个三角形拼成一个梯形形状的图形.(如图7(3))

第三组学生合作得出方法是:

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$
$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

将 α 换成 $\frac{\pi}{2}-\alpha$,我们得出两角差的余弦展开式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

3.3 公式推广

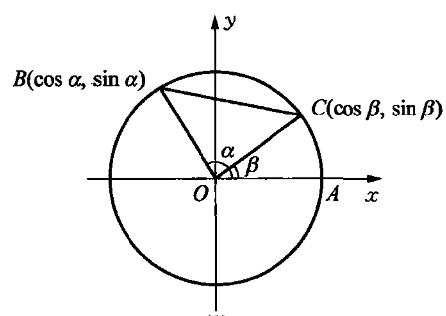
由于上述方法局限于锐角的情形,教师引入萨吕斯单位圆法和麦克肖恩两点距离公式法将这一公式进行推广.

(1) 萨吕斯单位圆法模型

师:19世纪法国数学家萨吕斯,他发表过一篇论文,做了一些工作,画了一个单位圆取角 α、角 β,以这个图(如图8(1))为例,这个 B、C 点坐标可以表示的,那么利用两点间距离公式,B、C 两点距离为 $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$,然后这个 $Chord^2(\alpha-\beta)$ 表示圆里面,$\alpha-\beta$ 这个扇形的角所对应的弦长;那么同一个圆里面如果这个这个扇形的角固定弦也固定. $|BC|^2=Chord^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$,然后把这个式子展开,变成这样一个式子:$|BC|^2=Chord^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$,那请问一下下一步怎么做呢?我提示一下,先把 β 取成0,就变成这样一个式子 $Chord^2\alpha=2-2\cos\alpha$,那么这个式子什么意思?$\alpha$ 角对应的弦长的平方,就是对任意角 α,比如说10°、20°、30°,通过式子可以写出来的,我们高一学过函数迭代思想,下面应该怎么做?

生:将 α 取成 $\alpha-\beta$.

师:好,把这个 α 取成 $\alpha-\beta$,它就变成这样一个式子 $Chord^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$,那么上下两个式子就取等号了,$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. 弦对应的角一般认为是什么角?0°到180°对吧.这个是法国数学家做的一个工作,这个工作对于后来的数学家影响很大.



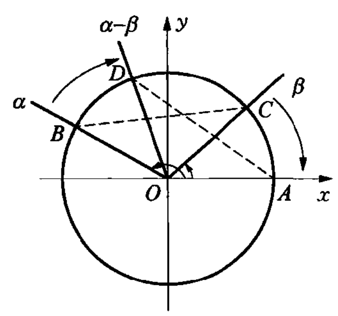


图8 萨吕斯单位圆法模型(1)麦克肖恩法(2)证明图示

(2) 麦克肖恩两点距离公式模型

随着三角学的发展,任意角概念的出现,这些最早的模型都需要修正,建立任意角的两角差的余弦公式的方法.

师:刚才那个图我这样画的话这两个角坐标可以表示的,那么任意角的话,点坐标写法是一样的.那么,把β取成0其实就是将一边移到x轴上.如果是三角形固定不动的话,把C移到x轴上就是β取成0,那么B哪去了?

生:它转到180°以内.

师:转到180°以内,那这个角就表示什么呢?比如说这个角就叫α,这个角叫β,那转过这个角表示什么?α-β,这就是1941年美国数学家麦克肖恩在美国数学周刊里面发表的论文,它对于两个任意角一样成立的.它是这样一个图形,经过旋转以后,把OC边跟x正半轴重合,OB这个边到OD上去;那么A点坐标是$(1,0)$,D点坐标是什么?

生:D点坐标应该是$(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$.

师:三角形经过旋转之后有什么等量关系?弦相等吧?刚刚这个做完之后,这样转完之后,这两个弦应该是相等的关系.下面怎么做?

生:两点间距离公式.

师:好,因为两个弦应该是长度一样的,然后这四个点坐标都知道的,然后利用两点之间距离公式.好了,那么我们就看一下,那个美国数学家的做法:C点坐标知道,B点坐标也知道,经过旋转之后,B坐标和A坐标也知道;下面利用这两个弦长是相等的关系,就BC和DA是相等的关系,然后再利用两点之间距离公式,这个CB距离$|CB|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$,把它展开一下,变成这样一个式子,$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$,同时,$|DA|^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2=2-2\cos(\alpha-\beta)$,我们把它代进去,展开变成这样一个式子$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

再利用诱导公式,得出两角和与差四组公式.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

3.4 练习巩固

例题1 求$\sin 15°$, $\cos 15°$, $\sin 75°$, $\cos 75°$的值;

例题2 已知$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\alpha\in(0,\pi)$,求$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值;

例题3 已知$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求$\cos\alpha$的值.

思考习题:

1. 已知$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{10}$,求$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$的值;

2. 已知$\cos(2\alpha+\beta)+5\cos\beta=0$,求$\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha$的值.

3.5 课堂总结

首先,本节课学习了和差角的正余弦公式,掌握了它的证明,同时我们也领略了历史上各种和差角的正余弦公式的精彩证明.

其次,本节课我们学习了多种数学思想,如从特殊到一般的思想、类比的思想、迭代思想、数形结合的思想等.

最后,通过历史上一个又一个数学家精彩的证明方式,一方面理解了知识的内涵,让我们感受到数学证明的巧妙;另一方面也能感受到其中浸润着的数学家们对知识孜孜不倦、力求创新的探索精神.

3.6 学生反馈

课后,我们发放问卷,收集了近40名学生的反馈信息.大部分同学表示能够听懂这节课的内容,其中61%的同学表示完全能够听懂.在15°余弦值的计算这一题的测试中,95%的学生能够给出正确的解答.另外80%的同学表示喜欢这种将数学史融入数学教学的授课方式.

当问及学生最喜欢的证明方法时,50%的学生选择了麦克肖恩法,理由大致如下:

- 简洁、易于理解;
- 有趣、神奇;
- 巧妙、充满技术性;
- 普遍性高.

也有学生表示喜欢类似勾股定理的证明

方法、萨吕斯法等.

关于本节课所含的数学思想,学生认为主要有数形结合思想、代换思想、类比思想等.

超过半数的学生表示对本节课印象最深的部分是数学史的融入.理由如下:

- *在本节课之前,没有接触过这样的授课方式,很新奇;*
- *证明方法丰富多样,大开眼界;*
- *公式不需要死记硬背,是自己生成的;*
- *有贯穿时代之感,感受到数学的脉动.*

4 结语

借鉴历史上两角和与差的余弦公式的历史,本节课采用了重构式、复制式和附加式的方式.重构式方面,采用从特殊到一般的研究方法,首先启发学生用类似勾股定理的证法推导出两锐角差的余弦展开公式,然后老师再利用萨吕斯以及麦克肖恩的方法推导出任意角的两角差的余弦展开公式的方法.复制式方面,采用了历史上不同的证明方法,附加式方面,对两角差的余弦公式推导的历史过程进行了回顾.

通过将数学史融入两角和与差的余弦公式的教学,本节课达成了多元的教育价值,从学生熟悉的勾股定理出发,让学生经历从锐角情形下到任意角情形下的两角和与差的余弦公式推导过程,从特殊到一般,从几何到代数,让公式的推导在学生的心中自然发生与推广,揭示了“知识之谐”.从探究活动中得到不同的公式推导方法,通过不同方法的对比,拓宽学生思维,从而展现了“方法之美”,让学生通过拼图的合作探究活动,思考出不同的推导方法,经历形式化公式背后的发现过程,体会到数学探究与发现的乐趣,从而营造了“探究之乐”.通过拼图活动以及单位圆中公式的推导,让学生体会到三角公式中数与形的结合,培养了学生直观想象和逻辑推理的数学素养,从而达成了“能力之助”.让学生体会不同时代、不同文化的数学家对两角和与差的余弦公式推导方法的探索,给予了三角公式背后人文的一面,彰显了“文化之魅”.通过展现数学家们对知识孜孜不倦的探索精神,让学生体会到数学背后的理性精神,从而达成“德育之效”.

从课后学生的反馈来看大部分同学表示喜欢这种将数学史融入数学教学的授课方式.超过半数的学生表示对本节课印象最深的部分是数学史的融入.但是,也有个别同学认为数学史的融入作用不大,由于本节课数学史融入重在展示公式证明的多样性,相对缺乏趣味性,且实际课堂上,也存在各种证明方法的出现较为生硬,不够自然等问题.由此可见,本节课尚有进一步打磨及完善的空间.

鉴于以上情况,有如下反思:(1)通过课堂上的小组合作,让学生更多的展示得到公式证明的过程,而不仅仅是证明的结果,强调背后的数学思想方法;(2)融入更多的人文元素,基于学生给出的证明方法给出相应的数学史上的背景,形成古今对话,增强课堂的趣味性;(3)在展示不同的证明的背后,讲解数学家对公式证明的不断探索精神,增强数学德育的渗透.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[S].北京:人民教育出版社,2017.

[2] 何忆捷,彭刚,熊斌.高中生三角公式理解的实证研究——以上海为例[J].数学教育学报,2016,25(01):51－56.

[3] 陈建花,林明芸,蔡芙蓉.初高中三角函数的区别、联系及教学衔接[J].中学数学教学参考,2015(Z3):40－42.

[4] 张奠宙,王振辉.关于数学的学术形态和教育形态——谈“火热的思考”与“冰冷的美丽”[J].数学教育学报,2002(02):1－4.

[5] Gulikers I, Blom K. ‘A historical angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2001,47(2):223－258.

[6] Wang X, Qi C, Wang, K. A categorization model for educational values of the history of mathematics: An empirical study [J]. Science & Education, 2017,26(7):1029－1052.

[7] 汪晓勤.HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017.

(下转第3－34页)

学的起步阶段作为拓展性例题.

问题4　在围棋盒中有若干白棋和黑棋，从盒中随机取出一颗棋子，取得白棋的概率是$\frac{2}{5}$. 如果再往盒中放进6颗黑棋，取得白棋的概率是$\frac{1}{4}$，问原来盒中有白棋和黑棋各有几颗.

分析：考虑到概率值是个比值，取得白棋的概率是$\frac{2}{5}$，意味着原来盒子中白棋占$\frac{2}{5}$，黑棋占$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，白黑比例是2∶3.

解：设原来盒中有白棋$2x$颗，黑棋$3x$颗.

再往盒中放进6颗黑棋，则盒中有白棋$2x$颗，黑棋$3x+6$颗，总共有$5x+6$颗棋子. 我们选用的模型是：

$$\text{取到白棋的概率}=\frac{\text{盒中白棋数}}{\text{盒中棋子总数}}.$$

于是得到方程$\frac{1}{4}=\frac{2x}{5x+6}$，解得$x=2$，所以原来盒中有白棋4颗，黑棋6颗.

说明：1）根据概率模型构建的方程虽然是个分式方程的形式，但利用交比的性质可改写成$\frac{5x+6}{4}=\frac{2x}{1}$，就是一元一次方程的形式了.

2）上述解法中不是把某个量设为x，而是设白棋$2x$颗，黑棋$3x$颗，这样灵活的处理使后面的解题更简捷.

问题5　一个三位数是一个两位数的5倍，如果把这个三位数放在两位数的左边可得到一个五位数；如果把这个三位数放在两位数的右边，又得到一个新的五位数. 若后一个五位数比前一个五位数大18648，求这个三位数.

分析："把三位数放在两位数的左边"和"三位数放在两位数的右边"得到两个五位数，必须知道这两个五位数的数值，才能表示出它们的差是18648.

其中"把三位数放在两位数的左边"的数值等于三位数的100倍与两位数的和；"把三位数放在两位数的右边"的数值等于两位数的1000倍与三位数的和. 这就是本题的关键模型.

解：设两位数为x，则三位数为$5x$，前一个五位数为$(100\times 5x)+x$，后一个五位数为$(1000\times x)+5x$，根据题意，构建方程

$$[(1000\times x)+5x]-[(100\times 5x)+x]=18648,$$

解得$x=46$，$5x=230$，即所求三位数为230.

说明：本题要求的是那个三位数，在一般情况下，我们把那个三位数设为x是首选的，但"首选"并不是"必选"，把那个两位数设为x，可以避免解方程时出现分数，简化了计算.

3　小结

由于我们从七年级开始就注重把数学模型思想的发掘与渗透作为思维发展的突破口，把方程构建作为发展学生思维的载体，无论是教学目标的确定、教学材料的选择、课堂的设计、活动的展开以及教学策略的使用，都围绕方程构建能力这条主线展开，为学生的思维留足发展空间，提升了课堂的思维厚度，使得学生较快地具备了良好的建模意识、丰富的建模经验和利用方程解决问题的能力.

（上接第3－12页）

［8］汪晓勤，邵铭宇. 三角公式的若干几何模型［J］. 数学通报，2017，56(06)：1－5+49.

［9］汪晓勤. 20世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式［J］. 数学通报，2016，55(06)：4－8.