算术三角形的历史及其文化价值

汪晓勤　(华东师范大学教师教育学院　200062)

1　引言

《普通高中数学课程标准》(2017年版)在“课程目标”中指出:“通过高中数学课程的学习,提高学习数学的兴趣,增强学好数学的自信心,养成良好的数学学习习惯;树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神;认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值;进一步促进学生全面、可持续发展.”[1]在“教学建议”中又要求:“在整个数学教学中,教师应当有意识地结合相应的教学内容,引导学生了解数学的发展,认识数学在科学技术、社会发展中的作用,体会数学的科学价值、应用价值和文化价值,提升学生的科学精神、应用意识和文化素养.”[1]可见,如何体现数学的文化价值,是中学数学教师需要关注的课题.

数学史是数学文化的重要组成部分.笔者曾根据西方学者关于数学史教育价值的讨论并结合课程标准,将基于数学史的数学文化内涵分成知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化五个维度[2],HPM视角下的数学教学可以从其中一个或若干个维度来体现数学的文化价值.

众所周知,二项式定理是高中数学中的一个重要定理,高中数学教材的编写以及HPM课例的开发促使我们思考:二项式定理(局限于正整数指数的情形)的历史揭示了它的哪些文化价值?本文试图通过二项式系数表——算术三角形的历史来回答上述问题.

2　算术三角形的历史

2.1　中国

在中国,早在汉代,数学家就利用完全平方和完全立方公式来开平方和开立方.为了开四次方以及更高次方,北宋数学家贾宪在其《释锁算书》中给出直到六次幂的二项式系数表,如图1所示.其中自上而下第 i 层即为 $(a+b)^{i-1}$ 展开式的系数($i=1,2,\cdots,7$).贾宪称该数表为“开方作法本原图”,今称“贾宪三角”.《释锁算书》已失传,南宋数学家杨辉在《详解九章算法》(1261)中记载了该图,并注明“出《释锁算书》,贾宪用此术”.“释锁”是当时的一种数学术语,指的就是开方.

元代数学家朱世杰(1249－1314)在《四元玉鉴》(1303)中给出贾宪三角,但在贾宪的基础上添加了两层,并将各数连以两组平行斜线(图2).可见,朱世杰已经十分清楚贾宪三角的构造方法.

图1　杨辉《详解九章算法》中的贾宪三角

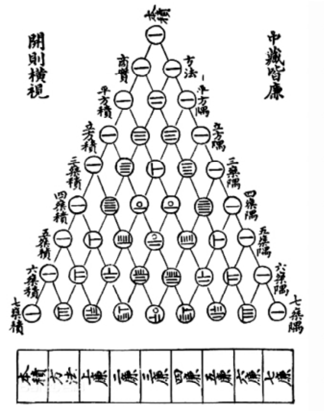

图2　朱世杰《四元玉鉴》中的贾宪三角

到了明代,数学家吴敬在《九章算法比类大全》(1450)中、王文素在《算学宝鉴》(1522)中、程大位(1533～1606)在《算法统宗》(1592)中都沿用了贾宪三角,见图3－图5.其中,王文素在其《算学宝鉴》中明确给出了贾宪三角的构造方法:“欲识廉隅递益生,直斜二上并分明.便知其下廉隅数,变化无穷照此行.”[3]程大位在《算法统宗》中也说明了由贾宪三角的构造方法.

图3　吴敬《九章算法比类大全》中的贾宪三角

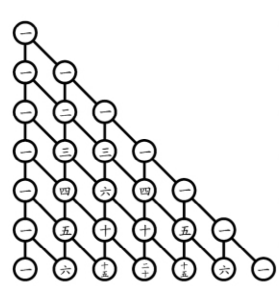

图4　王文素《算学宝鉴》中的贾宪三角

2.2　穆斯林国家

算术三角形在中世纪的阿拉伯世界已经广为人

知.12 世纪阿拉伯数学家阿尔·萨马瓦尔(Al-Samawal)在其《代数之光》中记载,10－11 世纪著名数学家阿尔·卡拉吉(Al-Karaji, 953～1029)已熟知算术三角形的构造方法,如图 6 所示,每一列中的任一数等于上一列同一行中的数及其上面一数之和.13 世纪数学家阿尔·赞加尼(al-Zanjani, ? －1262)在其《代数学中的方程平衡》中记载了七次幂的展开式[4],从中可知,作者十分熟悉阿尔·卡拉吉和萨马瓦尔的有关数学著作.

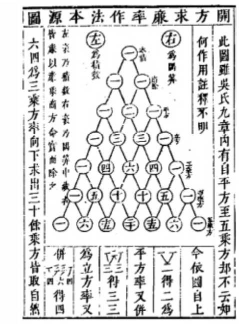

图 5　程大位《算法统宗》中的贾宪三角

1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6
		1	3	6	10	15
			1	4	10	20
				1	5	15
					1	6
						1

图 6　卡拉吉的算术三角形构造

与中国数学家一样,11－12 世纪的著名诗人、数学家奥马·海牙姆(Omar Khayyam, 1048? ～1131)在其《算术问题》中也利用二项式系数来开任意高次方,因而也构造了算术三角形,但其原著已失传.13 世纪,著名数学家纳绥尔丁(Nasir al-Din al-Tusī, 1201～1274)在其《算板与沙盘算法集成》(1265)中也利用二项式定理来开高次方,他将奥马·海牙姆的算术三角形扩展到了 12 次.

15 世纪,另一位数学家阿尔·卡西(Al-Kashi, ? ～1429)在其《算术之钥》(1427)中给出算术三角形的造表方法,并给出直到九次幂的算术三角形,如图 7 所示.

9							
36	8						
84	28	7					
12	56	21	6				
12	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2

图 7　阿尔·卡西的算术三角形

2.3　中世纪欧洲

在欧洲,13 世纪德国数学家约丹努斯(Jordanus de Nemore, 1225～1260)最早发现算术三角形,记载于其《算术》(未出版)中.不同抄本中表示数字的方式互有不同,见图 8[5].

值得注意的是,约丹努斯在书中利用算术三角形构造了若干等比数列,实际上分别相当于

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$, ①

$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=3^n$,

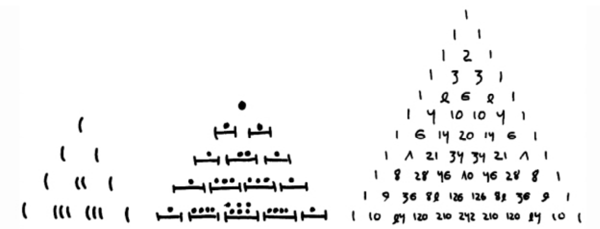

图 8　约丹努斯《算术》抄本中的算术三角

$C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots+3^nC_n^n=4^n$, …

2.4　16 世纪的欧洲

到了 16 世纪,算术三角形逐渐为欧洲数学家所知.德国数学家和天文学家阿皮亚努斯(P. Apianus, 1495～1552)于 1527 年出版的商业算术书的扉页上呈现了算术三角形(图 9),这在西方印刷出版的数学书中属于首次.1544 年,德国数学家斯蒂菲尔(M. Stifel, 1486～1567)在《整数算术》中给出直到 17 次

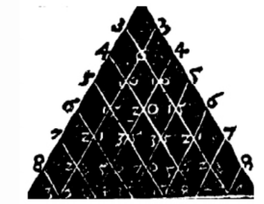

图 9　阿皮亚努斯《算术》中的算术三角形

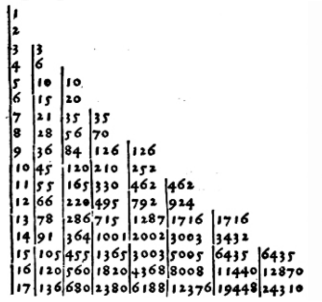

图 10　斯蒂菲尔《整数算术》中的算术三角形

的算术三角形(图 10),并引入"二项式系数"这一术语[6].翌年,德国数学家舒贝尔(J. Scheubel, 1494～1570)在《数与各种比例》(1545)中给出直到 16 次的算术三角形[7](图 11).数十年后,德国数学家提尔菲尔德(Thierfelder)在其《算术》(1587)中也给出了直到九次的算术三角形(图 12),形状与舒贝尔的相似.

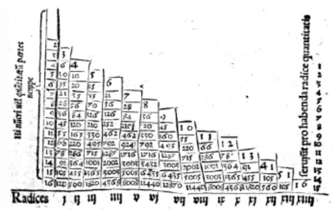

图 11　舒贝尔《数与各种比例》中的算术三角形

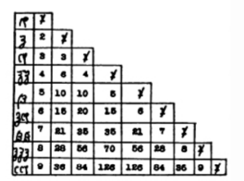

图 12　提尔菲尔德《算术》中的算术三角形

意大利数学家塔塔格里亚(N. Tartaglia, 1506～1557)在《数量通论》(1556)中、卡丹(G. Cardan, 1501～1576)在《比例新作》(1570)中、邦贝利(R. Bombelli, 1530～?)在《代数》(1572)中各自给出算术三角形,如图 13 和 14 所示.卡丹发现了算术三角形的一个性质[8],相当于 $C_n^r=\dfrac{n-r+1}{r}C_n^{r-1}$ ②.

卡丹还建立了算术三角形与组合数之间的联系，并得出结论，从 n 个物品中一次 1 个、2 个、…、n 个的取法总数等于 2^n-1，与①等价.

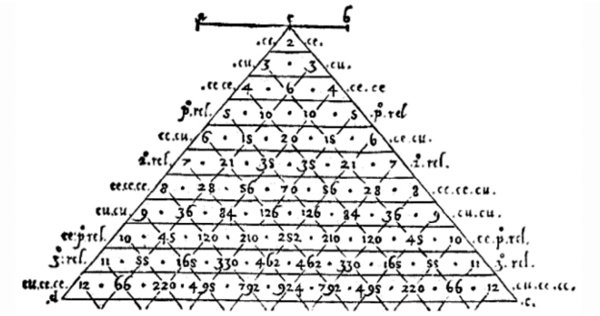

图 13 塔塔格里亚《数量通论》中的算术三角形

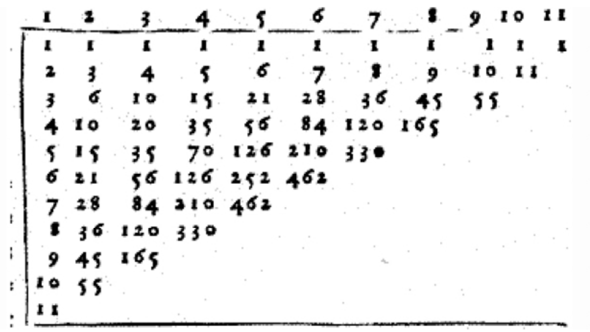

图 14 卡丹《实用算术》中的算术三角形

此外，16 世纪法国数学家佩勒提埃(J. Peletier，1517～1582)、荷兰数学家斯蒂文(S. Stevin，1548?～1620)都在其算术著作中给出了算术三角形.

2.5 17 世纪的欧洲

17 世纪，荷兰数学家吉拉尔(A.Girard，1595～1632)在其《代数新发明》(1629)中、英国数学家奥特雷德(W. Oughtred，1574～1660)在其《数学之钥》(1631)、布里格斯(H. Briggs，1561～1631)在其《对数算术》(1633)中均载有算术三角形[9].

1654 年，法国数学家帕斯卡(B. Pascal，1623～1662)著《论算术三角形》，首次将二项式系数表称为“算术三角形”，并对其性质作了系统的研究[10]，如图 15 所示.帕斯卡详细介绍了算术三角形的构造：第一行和第一列各单元均为 1，其它每个单元等于同行中前一单元和同列中上一单元之和.关于算术三角形，帕斯卡的主要工作有：

(1)给出了算术三角形的 19 条性质，其中两条分别等价于约丹努斯的①和卡丹的②.引人注目的是，帕斯卡运用了今日的数学归纳法.

(2)将算术三角形第 $n+1$ 条底边上从一端数起的第 $r+1$ 个单元与组合数 C_n^r 联系起来，得到组合数公式 $C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$.

(3)明确提出 n 次幂二项式系数恰好是算术三角形第 $n+1$ 条底边上的各单元，于是建立了正整数次幂的二项式定理 $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$.

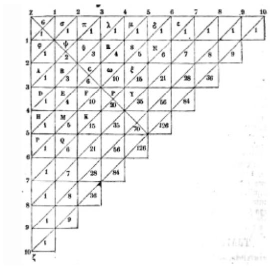

图 15 帕斯卡的算术三角形

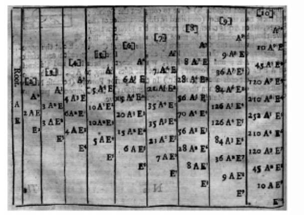

图 16 沃利斯《代数专论》中的二项式系数表

(4)利用算术三角形求自然数诸次幂和.

至今，算术三角形在西方被称为“帕斯卡三角形”.帕斯卡之后，沃利斯在其《代数专论》(1685)中用字母符号来表达正整数情形中的二项式定理，如图 16 所示[11].

17 世纪末，法国数学家奥泽南(J. Ozanam，1640～1717)在其《趣味数学与物理》(1694)中利用算术三角形来解决趣味数学问题，如帕斯卡和费马曾经解决过的赌金分配问题[11].在规定赢五局获胜的情形，甲已赢了 3 局，乙只赢了 1 局，赌局因故半途而废，未能最终决出胜负.设想接下来再赌五局，以 a 表示甲赢，b 表示乙赢，所有可能的情形见图 18.于是知甲、乙所得赌金之比为 $(C_5^5+C_5^4+C_5^3+C_5^2):(C_5^1+C_5^0)=26:6=13:3$.

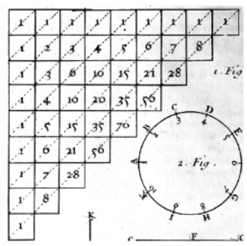

图 17 《趣味数学与物理》中的算术三角形

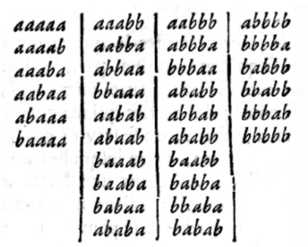

图 18 算术三角形在赌金问题中的应用

3 结语

以上我们看到，数学史揭示了算术三角形的以下文化价值.其一，算术三角形从低次到高次的扩展，从各行之间的相互独立到相邻行间关联的发现，从一两条性质到一系列性质的探究，从正整数的开方到组合数与幂和公式的导出，体现了数学知识由浅入深、从特殊到一般的演进过程.其二，中世纪以降，中国、阿拉伯、欧洲等地的数十位数学家先后都在