上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2018 年第 7 卷第 1 期

刊首语

2018 年，为了落实“立德树人”的教育根本任务，根据上海市“立德树人”数学教育教学研究基地“充分发挥基地的示范、引领和辐射作用，加大培养名优骨干教师力度”的宗旨，在全市中小学数学教师中招募成员，从而成立了数学史与数学教育（HPM）工作室。

HPM 工作室的发展目标如下：为教师搭建一个专业发展的平台，建立 HPM 学习共同体，在这个共同体下通过 HPM 课例研究促进教师专业发展，从而推动上海市基础教育发展。

作为一个学习共同体，HPM 工作室满足五项特征，分别为共享和支持性的领导、共同的目标和愿景、共享的个人实践、共同学习与实践以及支持性环境。其中共享和支持性的领导是指 HPM 工作室在上海市“立德树人”数学教育教学研究基地的领导下，受到基地的支持。共同的目标和愿景是指工作室成员有着共同的发展目标，即促进自身教师专业发展，推动上海市基础教育发展。共享的个人实践是指工作室教师之间互相进行讨论、交流，从而分享自身的教学实践体会。共同学习与实践是指教师共同学习 HPM 相关知识，进行 HPM 课例研究。支持性条件是指在这个工作室中，教师具有很多学习的机会，包括多种学术资源的获得机会，与高校教师、教研员之间的交流机会，获得学术指导的机会等。进一步的，可以将以上特征概括为：资源共享、思想交流和共同发展。

在这样一个 HPM 学习共同体的促进下，共同体中的每个成员都可以获益，从而在知识、信念与能力三个方面促进自身的教师专业发展。以知识为例，通过在共同体中的学习与实践，教师可以在面向教学的数学知识（MKT）的六个不同方面都得到发展，如在专门内容知识方面，教师知道了为什么要学习对顶角、为什么要学习二元一次方程组，为什么要学习周期函数，同时教师知道了和差角公式与线面垂直的判定定理的多种证明方法、也能够对负负得正作出更合理的解释。在内容与学生知识方面，教师可以更好的理解学生的困难，如了解到学生在负负得正、周期函数的定义上均存在一定的困难。在内容与教学知识方面，教师可以更好的安排教学顺序，让概念和定理在课堂上更自然的呈现，如周期函数这节课中，从感性认识到理性认识再到定性与定量认识，整节课强调知识的生成性与建构性。这些方面的专业发展都与共同体中资源共享、思想交流和共同发展的特征紧密相关。

目前，HPM 工作室以五个“一”为宗旨：以 HPM 为研究领域；从 HPM 的视角进行教学，将 HPM 课例研究作为专业进路；产生一批 HPM 教学案例，形成一个 HPM 学习共同体。让我们一起走进 HPM，一起展望数学教育美好的明天。

目　录

CONTENT

理论探讨

数学史料的选取原则与课例分析*

陈晏蓉，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

近年来，数学史融入数学教学的实践与课例开发已成为数学史与数学教育（HPM）领域的重要课题。随着实践研究的深入开展，HPM课例日益增多。很多一线教师对HPM都产生了浓厚的兴趣，但HPM在中小学却陷入了“高评价、低应用”的境遇。其原因主要有两点：一是一线教师没有足够的数学史料，“巧妇难为无米之炊”；二是教师不知道如何从已有的史料中选取合适的材料用于教学，或者不知道如何对史料进行裁剪和加工。

另一方面，HPM课例开发往往是由学习共同体完成的，遵循“选题与准备”“设计与研讨”“实施与反馈”“整理与写作”的统一流程。该流程的第一个环节涉及数学史料的选择问题。在已经发表的HPM课例（参阅本刊专题研究栏目中的有关论文）中，我们很少能看到数学史料的具体选择过程和依据。因此，需要建立一个史料选择的原则或标准，以便能够更好地指导一线教师开展实践研究。

有鉴于此，本文拟回答如下问题：在HPM课例设计之前，选择数学史料所依据的原则是什么？已有HPM课例中教师对于数学史的选择是否符合这些原则？本文旨在依据已有相关数学教育文献，结合数学史的教育价值，提炼出史料选择的原则，并通过有关课例的分析，检验这些原则的合理性。

我们选取 5 个 HPM 教学课例[1~5]作为研究对象，这些课例涉及代数和三角学，均为新授课。

2 数学史材料选择的五项原则

2.1 相关的数学教学原则

匈牙利著名数学家和数学教育家波利亚（G. Pólya, 1887~1985）在《数学的发现》中提出数学教学的三个原则[6]——主动学习原则（P1）、最佳动机原则（P2）和循序渐进原则（P3）。

* 本文已发表于《教育研究与评论(中学教育教学)》2017 年第 12 期。

主动学习原则指的是在给定条件下应当让学生尽可能多地靠他们自己去发现；最佳动机原则指的是教师应当注意选择好的问题，这些问题最好是有趣的、带有一些实际应用的特色，从而激发学生的学习兴趣；循序渐进原则指的是学习过程从行动和感知开始，进而发展到词语和概念，以养成合理的思维习惯而结束[7]。

美国著名数学家和数学教育家M·克莱因（M. Kline, 1908~1992）提出数学课程的四个原理[8]——兴趣原理（K1）、动机原理（K2）、直观原理（K3）和文化原理（K4）[7]。其中，兴趣原理指的数学课程应激发学生的学习兴趣；动机原理指的是数学课程应该揭示相关知识的必要性，激发学生的学习动机；直观原理是指数学课程必须直观地揭示每个数学思想或过程的涵义；文化原理则是指数学课程应反映数学与其他知识领域（科学、哲学、艺术等）之间的关联性。

2.2 数学史的教育价值

已有的实践研究表明，数学史具有六类教育价值：知识之谐（V1）、方法之美（V2）、探究之乐（V3）、能力之助（V4）、文化之魅（V5）和德育之效（V6）[9]。其中，“知识之谐”是指数学史揭示了知识自然发生发展的过程，符合学生的认知规律，揭示数学的本质，促进学生对数学的理解；“方法之美”是指展现数学方法的多样性和数学思维的灵活性，培养学生的创新思维；“探究之乐”是指数学史作为数学问题的宝藏，为学生提供了丰富的探究机会；“能力之助”是指数学史有助于发展学生的数学素养、培养学生数学阅读、表达、表征转换等多方面的能力；“文化之魅”是指数学史揭示了数学与现实世界以及人类其他知识领域之间的联系、数学文化的多元性以及数学和数学活动的本质；“德育之效”是指数学史能激发学生的兴趣，培养坚持不懈、尊重、包容、倾听、正直、诚实等良好的个性品质。

2.3 五项原则

通过对已有文献中的数学教学原则进行整合，结合数学史融入数学教学的六类价值，我们总结出数学史融入数学教学宜遵循趣味性、可学性、有效性、人文性和科学性这五项原则。各项原则的具体内涵见表1。

表 1 选择用于教学的数学史材料所依据的五项原则

原 则	内 涵	数学教学或课程原则	数学史教育价值
趣味性	选取的数学史材料应该能够激发学生的学习兴趣和动机。	P_2，K_1，K_2	V_6
可学性	所选取的历史材料知识应符合学生的认知基础。	P_3	V_1
有效性	所选取的数学史料应有助于学生理解、掌握和运用	P_1，K_3	V_1，V_2，V_3，

	相关知识。		V_4
人文性	所选取的数学史料应与数学家相关联，反映数学背后的人文精神；或反映数学与其他知识领域之间的联系，揭示数学的文化价值。	K_4	V_5，V_6
科学性	所选取的数学史料应有明确的文献出处，符合史实。	_	V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6

3 五项原则在 HPM 课例中的体现

3.1 对数的概念[1]

本课例首先通过特殊正整数的乘法，让学生感受计算之繁；接着，通过特殊的数表（以 2 为底的正整数指数幂与指数对应），让学生体会乘法可以简化为加法；再引出天文学上的大数运算，让学生看到相乘的两个大数不在数表中（即不是 2 的正整数指数幂），因而数表失效；而在试图寻找相应的指数时，发现这样的指数难以精确求得，需要定义新的数。由此引入对数定义。通过指数与对数的互化巩固对数概念。整节课中，教师运用了四则史料。

（1）等差和等比数列之间的对应关系。15-16 世纪，许多欧洲数学家在各自的著作中都运用了等差和等比数列的对应关系，将乘除运算简化为加减运算。如法国数学家许凯（N. Chuquet, 1445-1488）在其《算学三部》中给出了双数列之间的对应关系（表 2），等比数列

表 2 双数列之间的对应关系

1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**…**	**1048576**
0	1	2	3	4	5	6	7	…	20

的乘除运算对应等差数列的加减运算。由于等比数列相邻两项之间的间隔太大，这样的双数列效用并不大。纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）构造了相邻项之间间隔很小的等比数列，从而发明了对数。本课例从学生熟悉的整数乘法出发，通过数表的作用和局限性，再现了对数的发现过程，揭示了对数的必要性，促进了学生对对数的理解，也为对数运算埋下伏笔。此外，材料还展示了数学与天文学间的关系，因此，史料的选择符合趣味性、可学性、有效性和人文性原则。

（2）古巴比伦泥版上的利息问题

古巴比伦泥版上载有以下问题：年息 20%，一定数目的钱经过多长时间后的本利和成为原来的两倍？该问题与生活实际息息相关，切合课本上的对数定义，反映了对数的用途，符合趣味性和有效性原则。

（3）对数的历史故事

纳皮尔经过整整 20 年的努力，终于在 1614 年发明了对数。翌年，伦敦数学家布里格斯（H. Briggs,　1561-1630）远赴爱丁堡拜访他，这场“旷世之约”导致了常用对数的诞生。这个故事激发了学生的兴趣，并留下人生启迪。该史料选择符合人文性原则。

（4）对数的辞源

17 世纪，笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）发明了幂的记号，指数概念由此而生。直到 17 世纪末，人们认识到对数可以定义为幂指数。此后，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）创用了 $\log_a N$ 这一记号。明代数学家薛凤祚（？-1680）在《比例对数表》（1653）中首次将纳皮尔的 logarithm 一词译为 “对数”。清代康熙皇帝主编的《数理精蕴》下编卷 38“对数比例”中对双数列之间的关系做了详细的介绍。

本课例中，教师追溯了对数的辞源，帮助学生理解“对数”中的“对”的涵义，促进学生对对数概念的理解。在小结环节，引用《数理精蕴》中的一段话作为结尾：“对数……以假数与真数对列成表，故名对数表。其法以加代乘，以减代除，以加倍代自乘，故折半即开平方。以三因代再乘，故三归即开立方，推之至于诸乘方，莫不皆以假数相乘而得真数。盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也。”[1][9]说明对数的运算法则，为后续学习埋下伏笔。这里，史料的运用符合有效性原则。

3.2 数列的概念[2]

本课例以古巴比伦月相表、莱因德纸草书中的猫鼠问题以及根据约瑟夫故事改编的课堂小游戏为引例，归纳出数列的定义。在对概念进行辨析并给出不同表征之后，引入数列通项的概念。例题和练习部分聚焦数列的通项公式。最后，通过微视频展现数列在天文学上的应用。课例中运用了四则史料。

（1）古巴比伦泥版上的月相表

大英博物馆所收藏的巴比伦泥版 K90（公元前 7 世纪）记录了一张月相表：将满月分成 240 部分，则从新月开始，每天的月相情况构成了一个数列（见表 3 第二行）：前 5 项构成公比为 2 的等比数列，第 5~15 项构成公差为 16 的等差数列。[10]

表 3 月相变化表

1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	10	20	40	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240

事实上，古巴比伦泥版中含有许多与数列相关的内容，教师选用月相表作为引例，目的是呈现数列与生活之间的密切联系，从而突出数列学习的必要性，激发了学生的学习动机；同时，月相变化规律反映了数列的“序”的本质特征，有助于学生对数列的理解。因此，该材料符合趣味性、人文性和有效性原则。

（2）莱因德纸草书中的财产问题

莱因德纸草书（约抄录于公元前 1650 年）上载有如下问题：一位富人的家里有 7 间储藏室，每间储藏室有 7 只猫，每只猫捉了 7 只老鼠，每只老鼠吃了 7 棵麦穗，每棵麦穗长出了 7 个体积单位的麦粒。问储藏室、猫、老鼠、麦穗、麦粒数各有多少？这是与等比数列 $7,7^2,7^3,7^4,7^5$ 相关的财产问题。[11]

古埃及纸草书上不乏有关数列的内容，选择猫鼠问题，显然是因为该问题是一个趣味数学问题，并且又适合于用作关于通项公式的例题。因此，该材料符合趣味性和有效性原则。

（3）约瑟夫问题

公元前 4 世纪的一部著作里，海格希普斯讲述了约瑟夫运用智慧自救的故事。当罗马人攻陷 Jotapat 后，约瑟夫和另外 40 个犹太人躲到一个山洞里避难。可是，除了约瑟夫和他的一位好朋友之外，其余 39 人都决定自杀，以避免落入罗马人之手而遭受折磨。约瑟夫提出在临死之前大家不妨玩一个游戏娱乐一下。他提出的游戏规则如下：所有人排成一圈，随机从某一位置开始点数，将逢三者拉出圈子杀掉，最后剩下的一个人自杀。约瑟夫将他自己和好朋友分别安排在 16 和 30 号位置上，成功地避开了死神。

在本课例中，教师将约瑟夫的故事改编成了课堂小游戏：10 个同学排成一圈，随机从某一位同学开始，逢三点数，点到者出列，让最后剩下的那位同学请大家吃薯愿。该游戏既有趣又突出了“序”的本质特征，符合趣味性和有效性原则。

（4）提丢斯—波德律

18 世纪，德国数学家提丢斯（J. D. Titius, 1729-1796）用一个特殊的数列 4，7，10，16，28，52，…来表示太阳系行星（水星、金星、地球、火星、木星、土星）与太阳之间的相对距离，该数列被后人称为“提丢斯—波德律”。对 28 这一项所对应的可能“行星”的寻找，导致了谷神星的发现。教师以微视频展现了数列在天文学上的这一应用，进一步揭示了数列学习的必要性以及数学和天文学的密切联系。微视频所用的史料符合趣味性、有效性和人文性原则。

3.3 复数的概念[3]

本课例中，教师先用现实情境让学生求和为 10、积为 24 的两个数，进而引出 16 世纪意大利数学家卡丹的问题，学生发现问题没有实数解。接着，给出邦贝利的三次方程求根问题，进一步让学生面对“两数之和为实数，但这两个数却都不是实数”的事实。由此引出复数概念。本课例使用了三则史料。

（1）卡丹问题

1545 年，意大利数学家卡丹（G. Cardan, 1501-1576）在《大术》中提出如下问题：将

10 分成两部分，使其乘积为 40。作为尝试，卡丹给出形如 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 的解，但他并未接受“负数平方根”这样的数。卡丹问题揭示了复数的必要性，激发了学生的学习动机，且二次方程的解法为学生所熟悉，故符合趣味性、可学性、有效性和人文性原则。

（2）邦贝利的三次方程

16 世纪意大利数学家邦贝利（R. Bombelli, 1526-1572）在用求根公式解三次方程 $x^3=15x+4$ 时，遇到一个“矛盾”：$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$，即一个实数等于两个非实数之和，正是这一矛盾促使邦贝利对“负数平方根”这种“新数”进行深入探究，从而导致虚数概念的诞生。[12]

中学教师普遍认为，三次方程求根问题太难，不符合可学性。本课例中，教师分别呈现运用三次方程求根公式所得到的根以及用因式分解得到的根，从而降低了难度。通过三次方程的根来引入虚数概念是最令人信服的，符合趣味性、有效性和人文性原则。

（3）虚数的辞源

1777 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）用“imaginary”一词的首字母 i 来表示虚数，本意是它只是存在于“想象之中”。教师向学生解释虚数的辞源，让学生体会历史上数学家对于虚数的困惑，从而感受虚数概念的缓慢而艰辛的发展历程。“虚数”的辞源符合人文性原则。

3.4 正弦定理[4]

本课例通过流星测量问题来引入正弦定理，在利用“作高法”证明正弦定理后，引入梅文鼎简化的“同径法”，在探究边与对角正弦的比值时，引入韦达的“外接圆法”。最后教师简要介绍了正弦定理的历史。课例涉及以下史料。

（1）流星测量方案

10 世纪阿拉伯天文学家阿尔 • 库希（al-Kuhi）曾提出流星的测量方案：位于不同地点的两个测量者观测同一颗流星，通过两地的距离、仰角，可以求得流星离大地的高度。教师将该方案改编成流星测量问题，由此引入正弦定理，揭示了正弦定理的必要性，以及数学与天文学的联系，符合趣味性、有效性和人文性原则。

（2）“同径法”的简化

历史上，正弦定理的几何推导方法可以分为“同径法”和“外接圆法”。“同径法”最早为 13 世纪阿拉伯数学家纳绥尔丁（Nasir-Eddin, 1201-1274）和 15 世纪德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）所采用。17-18 世纪，中国数学家家梅文鼎（1633-1721）和英国数学家辛普森（T. Simpson, 1710-1761）各自独立地简化了“同径法”。上述方法使正弦定理更加直观，促进了学生对该定理的理解，因而符合可学性与有效性原则。

（3）外接圆法

“外接圆法”最早为 16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）所采用，20 世纪初，“外接圆法”演化为“辅助直径法”[10]。该方法让学生感受数学思维的灵活多样性，帮助学生更好地理解和掌握推广的正弦定理（任意三角形一边与其对角的正弦之比等于该三角形外接圆的直径），符合有效性原则。

（4）有关数学家

教师简要介绍了正弦定理的历史以及数学家韦达和梅文鼎的故事，揭示了数学背后的人文精神，符合人文性原则。

3.5 两角和差的三角公式[5]

教师根据古希腊数学家帕普斯的和角公式几何模型，设计一系列问题，帮助学生利用几何图形以及代数推导两角和的正、余弦公式，并引导学生进一步推导两角差的正、余弦公式。又根据韦达和差化积公式的证明，引导学生进一步证明其余和差化积公式。本节课主要采用了两则数学史料。

（1）和角正弦公式的推导

公元 3 世纪末，数学家帕普斯（Pappus, 3 世纪末）在其《数学汇编》第 5 卷第 4 部分给出了如下命题[9]：如图 1，设 H 是以 AB 为直径的半圆上的一点，CE 是半圆在点 H 处的切线，$CH=HE$；CD 和 EF 为 AB 的垂线，D、F 为垂足。则$(CD+EF)\,CE = AB\cdot DF$。当$\alpha+\beta<\pi/2$ 时，即得图 2 所示的和角公式几何模型。

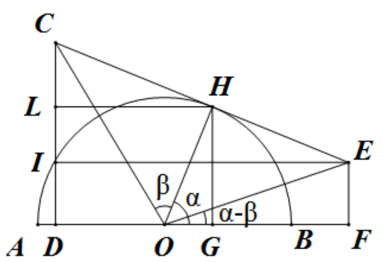


图 1

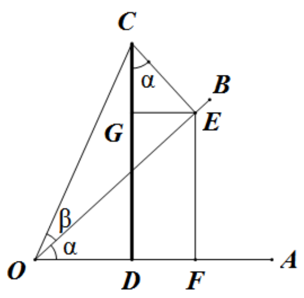


图 2

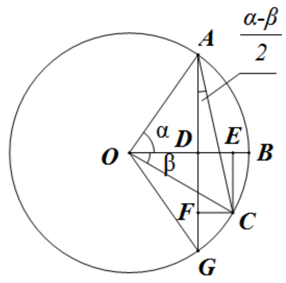


图 3

有了帕普斯的几何模型，学生可以从直角三角形边角关系出发，自主得出两角和与差的正、余弦公式，促进了他们对公式的理解和记忆。因此，所用史料符合可学性和有效性原则。

（2）和差化积公式的推导

韦达曾用几何方法证明了和差化积公式。如图 3，在单位圆 O 中有：

$$\sin\alpha+\sin\beta = AD+CE = AF = AC\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

教师引导学生沿着韦达的思路，进一步证明其余和差化积公式。韦达的方法直观易懂，符合

可学性与有效性原则。

4 结 语

对 5 个课例所用数学史料的分析表明，绝大多数史料都符合学生的认知基础；都符合史实，有明确的文献出处；都能揭示知识的必要性，促进学生对相关知识的理解，因此，这些史料满足可学性、有效性和科学性原则。但一些史料的趣味性和人文性较弱。究其原因，一方面，高中数学教师更关注数学史对数学理解的帮助，更关注数学史料所蕴含的思想方法，而并不去刻意追求趣味性和人文性；另一方面，虽然历史材料丰富多彩，但要选择一则同时满足五项原则的史料，却并非易事。

在将数学史融入数学教学时，教师需要深刻认识数学史的六类教育价值。充分挖掘知识的教育价值，是实施有效教学的要求，根据趣味性、有效性和人文性原则来选取数学史素材，能够确保数学史教育价值的最大化，避免为历史而历史。其次，教师也需要关注学生的认知基础。很多史料并非像我们想象得那样简单易懂，如果一则数学史素材不具备可学性，就不可能产生应有的教育价值。最后，科学性原则确保数学史料的真实性，离开科学性，我们不可能开发出真正的 HPM 课例，数学史融入数学教学就成了一句空话。因此，教师需要参考原始文献或权威的二手文献，这对中小学一线教师来说难度很大，不过，大学研究者和中小学一线教师的合作，能够很好地解决这个难题。

参考文献

[1] 钟萍，汪晓勤. 对数概念：从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 2015, (5): 50-53.

[2] 李玲，汪晓勤. 数列的概念[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016, (4): 61-65.

[3] 方国青，王芳. HPM 视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究[J]. 数学教学, 2013, (4): 4-29.

[4] 张筱瑜，汪晓勤. “正弦定理”：用历史拓思维、润情感[J]. 教育研究与评(中学教育教学), 2015, (6): 21-25.

[5] 张小明. 两角和差的三角公式推导——数学史融入数学教学的课例研究[J]. 数学教学, 2007, (2): 42-44.

[6] Pólya, G. *Mathematical Discovery*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1965. 132-133.

[7] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A Categorization model for educational values of the history of mathematics: an empirical study[J]. *Science and Education*,2017, 26: 1029-1052.

[8] Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books[J]. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418-427.

[9] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[10] 汪晓勤. 泥版上的数列问题[J]. 数学教学, 2009(12):1-2.

[11] 汪晓勤. 纸草书上的数列问题[J]. 数学教学, 2010(1):29-31.

[12] 汪晓勤, 赵瑶瑶. 莱布尼茨与虚数[J]. 湖南教育, 2006, (24): 42-43,37.

文献研究

乘法公式：从历史到课堂*

张亚琦，汪晓勤
（华东师范大学教师教育学院，上海 200241）

1 引 言

美国著名心理学家桑代克（E. L. Thorndike, 1874-1949）在《教育之根本原理》（1929）中指出："学习常常是一个自动的历程，绝不是被动的接受，或一味的吸收。……要学习，必须要活动，要活动，必须要有尚待满足的欲望。如以学习为满足欲望的手段，这种学习便是最有效力的学习。所以，从根本上看来，一切学习和教学都在激起动机，以及助长可以鼓动强烈而专注的活动欲望或兴趣。"[1]著名数学家和数学教育家波利亚（G. Pólya, 1887-1985）和 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）都将动机的激发作为数学教学或数学课程的主要原理之一。M·克莱因指出："我相信，数学教学的主要问题是动机问题。初学者或外行人很难看到他学习本学科或某个专题的理由。说数学家和工程师会用到它，或说某些怪人热爱它，或说上大学需要它，这些模糊的回答均于事无补。传统课程中动机严重缺乏，而现代课程中动机荡然无存。"[2]

每一部数学教材都有自己的知识体系，这种体系往往是根据知识的内在逻辑关系建立起来的。课堂教学中，教师往往也只关注知识的逻辑顺序。而在很多情形中，逻辑顺序与学生的心理发生顺序并不一致，因而并不足以激发学生的学习动机。教师需要暂时摆脱逻辑顺序的桎梏，去探究所授知识究竟为何会产生。为此，教师需要追溯知识的发生和发展历史。

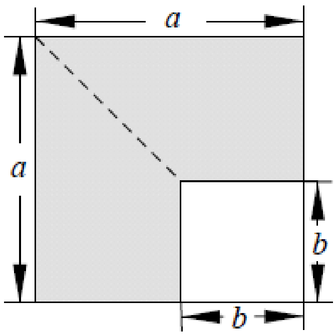
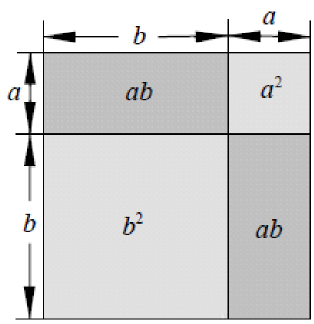
本文以初中数学中的乘法公式为例，分析数学知识的逻辑顺序和历史顺序之间的差异，通过历史考察，寻找数学知识产生的动因，为教学设计和教材编写提供借鉴。

2 乘法公式在教科书中的呈现

现行教科书中的乘法公式包括平方差公式和完全平方公式，表 1 给出了人教版、沪教版、华师大版、苏教版和北师大版中两个公式的引入方式。

* 上海市教育科学研究重大项目 "中小学数学教科书的有效设计"子课题"中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计"（项目号：D1508）系列论文之一。

表 1 五种教材中的完全平方公式引入方式

初中教材	平方差公式	完全平方公式
人教版	计算$(x-1)(x+1)$ $(m+2)(m-2)$ 和$(2x-1)(2x+1)$	计算$(p+1)^2$、$(m+2)^2$、$(p-1)^2$ 和$(m-2)^2$
沪教版	计算$(y+2)(y-2)$ $(3-a)(3+a)$ 和$(2a+b)(2a-b)$	计 算 $(a+b)^2$ 、 $(2a+3b)^2$ 、 $(x-y)^2$和$(2x-3y)^2$
华师大版	直接计算$(a+b)(a-b)$	直接计算$(a+b)^2$
北师大版	计算$(x+2)(x-2)$、$(1+3a)(1-3a)$ 、$(x+5y)(x-5y)$ 和$(2y+z)(2y-z)$	根据两个等式找一般规律： $(m+3)^2$ $=(m+3)(m+3)$ $=m^2+3m+3m+9$ $=m^2+2\times 3m+9$ $(2+3x)^2$ $=(2+3x)(2+3x)$ $=2^2+2\times 3x+2\times 3x+9x^2$ $=2^2+2\times 2\times 3x+9x^2$
苏教版	先计算阴影部分面积，然后得出平方差公式。 	先计算正方形面积，然后得出完全平方公式。 

由表 1 可见，人教版、沪教版和北师大版教科书都试图让学生通过具体的符号操作结果来发现规律，得出平方差公式和完全平方公式。华师大版则采用了直截了当的方式来引入这两个公式。四种教材的逻辑顺序十分清晰：先呈现两个一般多项式的乘法，再呈现两个一般二项式的乘法，最后呈现具有一个相同项和一个相反项的两个二项式以及两个相同的二项式的乘法。苏教版则先通过几何表征引入，符合部分历史顺序，因为在符号代数之前，人们往

往通过几何图形得到这两个公式（如《几何原本》第二卷命题 4 和 6）。

然而，五种教科书都没有交代乘法公式的必要性，因而学生的学习动机是缺失的。你可以说在以后的学习中会用到它们，也可以说中考命题会涉及它们，甚至可以说它们都很美。但是，诚如 M·克莱因所言，这些似乎都于事无补。

3 乘法公式历史溯源

3.1 平方差公式

古巴比伦泥版上记载了大量的二元二次方程组问题，与今天的方法不同，这些问题往往是用所谓的“和差术”来求解的。如古巴比伦数学泥版 YBC 4663 上载有以下二元问题[3]：

$$\begin{cases} x+y=6\dfrac{1}{2} \\ xy=7\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

用我们今天的符号来表达，祭司的解法是：因 $x+y=6\frac{1}{2}$，故设 $x=3\frac{1}{4}+t$，$y=3\frac{1}{4}-t$，于是由 $xy=7\frac{1}{2}$ 得 $\left(3\frac{1}{4}+t\right)\left(3\frac{1}{4}-t\right)=7\frac{1}{2}$，即 $\left(\frac{13}{4}\right)^2-t^2=7\frac{1}{2}$，于是 $t=1\frac{3}{4}$，从而得 $x=5$，$y=1\frac{1}{2}$。公元 3 世纪，古代希腊数学家丢番图（Diophantus）也利用和差术来解二元二次方程组。

在中国古代数学中，平方差公式的一个重要应用是解直角三角形。设 a，b 和 c 分别是直角三角形的勾、股和弦，已知 a 和 $c\pm b$，求 b 和 c，《九章算术》中给出的公式是：

$$b=\frac{1}{2}\left[(c+b)-\frac{a^2}{c+b}\right]$$

或

$$b=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}-(c-b)\right],$$

显然，上述解法源于平方差公式 $(c+b)(c-b)=c^2-b^2=a^2$。赵爽在注解《周髀算经》时，给出了平方差公式的几何证明[4]。

在古希腊，欧几里得在《几何原本》第二卷中用几何语言给出了平方差公式的等价形式（命题 6）。后来的希腊数学中，平方差公式与等周问题密切相关。芝诺多鲁斯（Zenodorous，公元前 2 世纪）著《论等周图形》一书，证明了如下命题：“在边数相同的等周多边形中，

等边且等角的多边形面积最大。”[5]特别地，周长为 4*a* 的长方形中，正方形面积最大。设长方形的长为$a+b$，宽为$a-b$，则其面积为$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$，显然，当$b=0$时面积最大。

12 世纪，印度数学家婆什迦罗（Bhaskara）在《莉拉沃蒂》中给出了一种平方算法[3]：

$$a^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)+b^2$$

例如，$97^2=\left(97+3\right)\left(97-3\right)+3^2=100\times94+9=9409$。婆什迦罗实际上运用了平方差公式的另一种形式。

在西方数学史上，16 世纪法国数学家韦达创立符号代数之前，并没有出现多项式的概念，更谈不上多项式的运算了，完全平方公式的诞生和应用并非源于多项式的运算。从以上历史考察可以看出，平方差公式产生的动因是一类二元问题、直角三角形问题、等周长方形问题的求解以及平方运算。在符号代数诞生之前，古人是用几何形式来表征该公式的。

3.2 完全平方公式

古巴比伦数学泥版 YBC 7289 上载有$\sqrt{2}$的近似值，根据数学史家们的研究，巴比伦人采用的是如下方法：设a_1是 N 的平方根的第一个近似值，则更精确的近似值可依次通过$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{N}{a_n}\right)$（$n$ = 1, 2, 3, ⋯）求得。这种方法的依据就是完全平方公式。事实上，估计 N 的一个近似值 a，设$\sqrt{N}=a+b\ \left(a>b>0\right)$，则

$$N=\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$$

为了进一步求出 b，忽略b^2，得$N\approx a^2+2ab$，故得$b\approx\dfrac{N-a^2}{2a}$，于是

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{N-a^2}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right) \qquad (1)$$

这种方法为后世数学家普遍采用。巴比伦人是用几何图形来表征完全平方公式的。

巴比伦人在解一元二次方程时，实际上也运用了完全平方公式的几何表征。如数学泥版 YBC 6967 记载的一个问题相对于解方程$x^2+7x=60$，祭司的解法是

$$x=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+60}-\frac{7}{2}=5。$$

根据数学史家的研究，祭司是根据图1所示的几何模型得到方程的解的。

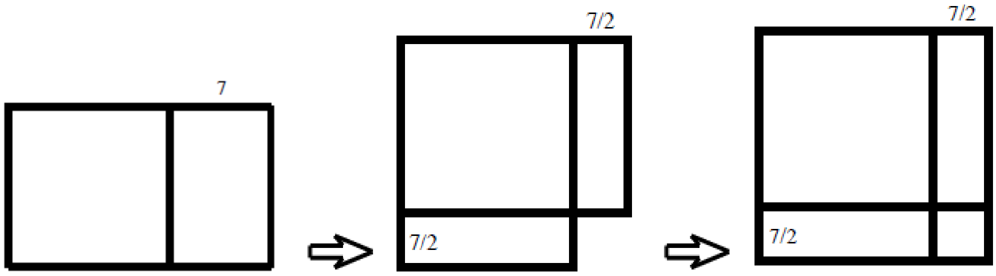


图 1 一元二次方程解法的几何模型

中国汉代的《九章算术》给出了开平方的程序，刘徽利用几何图形对其加以解释。例如，求55225的平方根，就是求面积为55225的正方形的边长。图2给出了开方的过程：先求得平方根的百位数2，相当于求得黄甲正方形的边长200；再求得平方根的十位数3，相当于求得黄乙正方形的边长30；最后求出平方根的个位数5，相当于求出黄丙正方形的边长5。

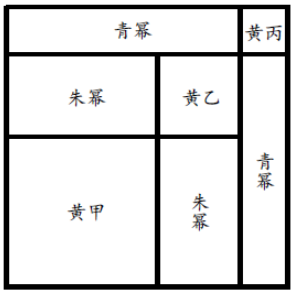


图2 开平方的过程

9 世纪阿拉伯数学家花拉子米（Al-Khwarizmi）在其《代数学》中也借助完全平方公式的几何表征来解方程 $x^2+10x=39$，花拉子米把 x^2 和 $10x$ 分别看成正方形和矩形面积，然后，花拉子米将其补全成正方形（图 3）。这一过程实际上是完全平方公式的逆向运用，只不过采用了几何的表征。

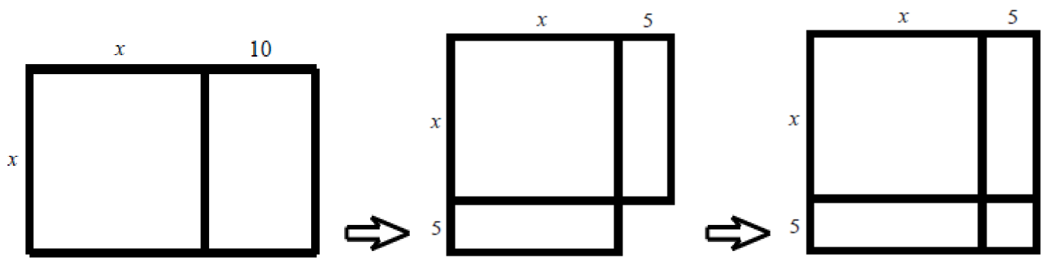


图 3 花拉子米的配方法

12 世纪，印度著名数学家婆什迦罗（Bhaskara）在其《莉拉沃蒂》中给出了另一种平方算法：将一个数拆成两个数的和，然后利用完全平方公式来计算，如 $10005^2=(10000+5)^2=10000^2+2\times5\times10000+5^2$。

根据以上的历史考察可以看出，完全平方公式产生的动因是平方或平方根的计算以及

一元二次方程的求解。在符号代数诞生之前，古人是用几何形式来表征该公式的。

4 教学设计

透过历史，我们找到了乘法公式产生的动因，这些动因为今日教学提供了借鉴。

对于平方差公式，可以采用以下导入方式。

设计一：巧算平方

我们能够背出很多正整数的平方，比如，12 的平方等于 144，17 的平方等于 324，等等。但是，当数字比较大的时候，就不容易记住了，需要做具体的运算。比如，97 的平方是多少？教师脱口说出 9409 后问学生：为什么老师能这么快说出答案呢？由此引出婆什迦罗的便捷算法：$97^2=(97+3)(97-3)+3^2$，从中我们得到一个等式：

$$(97+3)(97-3)=97^2-3^2$$

将上述具体数字换成字母，引出平方差公式。上述情形中，两数乘积$(a+b)(a-b)$较a^2易于计算。也可以采用相反的情形来引入。如，如何快速求出97×103呢？

设计二：等周求原

在小学里，我们曾经听老师讲过大数学家欧拉小时候围羊圈的故事，从这个故事中得知，周长相同的不同长方形，其面积是不同的，其中正方形的面积最大。你知道为什么吗？老师把这个问题说得再具体一些。设正方形的边长为 a，周长为 $4a$，面积为a^2。将正方形的一边增加 b，将其邻边减少 b（$0\le b<a$），得到一个周长为 $4a$ 的长方形，它的长和宽分别为$a+b$和$a-b$，面积为$(a+b)(a-b)$。现在，我们需要比较a^2和$(a+b)(a-b)$的大小。

设计三：跨越时空

公元 3 世纪，古希腊数学家丢番图（Diophantus）在其《算术》一书中设置了以下问题：已知两数的和为 20，乘积为 96，求这两个数。你能解决这个问题吗？学生可能会采用凑的方法，此时教师可以将数字改得更大一些，让学生感到凑数不现实。学生也可能设一个数为 x，另一个数位 20-x，但此时得到一个还没有学过的方程，无法求出它的根。此时，教师引导学生思考：两个数不能同时大于 10，也不能同时小于 10，必定一个大于 10，一个小于 10。

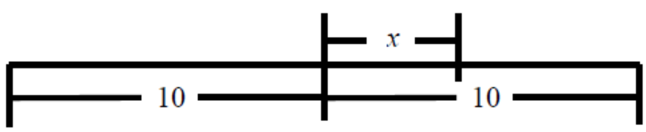


图 4 和为 20 的两数之设法

如图 4 所示，可设一个数为 $10+x$，另一个为 $10-x$ 于是，需要计算$(10+x)(10-x)$，

由此引出平方差公式。

对于完全平方公式，可以采用以下导入方式。

设计一：巧算平方

分别计算 105，1005，10005 的平方。

设计二：近似方根

我们都知道，若正方形的面积为 4，则其边长为 2，若正方形的面积为 9，则其边长为 3。那么，当正方形的面积为 5 时，如何求其边长呢？显然，此时所求边长比 2 大，可设为 2 + x，为了求出 x，需要计算 $(2+x)^2$。由此引入完全平方公式。

5 结 语

弗赖登塔尔曾说过，逻辑包装让数学知识呈现出“冰冷的美丽”，却失去了“火热的发明”，这是一种“教学法的颠倒”[6]。在逻辑包装之下，人们看不到数学知识点究竟何以产生，学习动机往往荡然无存。乘法公式只是数学课程中的很多例子之一而已。透过历史，我们才可以找到知识背后的真正动因，从而在课堂上揭示“知识之谐”，这正是为什么人们要将数学史融入数学教学的原因之一。

参考文献

[1] Thorndike, E. L. Gates, A. I. *Elementary Principles of Education*[M]. New York: MacMillan, 1929.

[2] Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books[J]. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418-427.

[3] Pólya, G. *Mathematical Discovery*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1965. 132-133.

[4] Neugebauer, O. & Sachs, A. *Mathematical Cuneiform Texts*[M]. New Haven: American Oriental Society, 1945.

[5] 汪晓勤, 张安静. 平方差公式的历史. 中学数学教学参考(初中版)[J], 2010(11): 64-66, 20.

[6] Health T. L. *A History of Greek Mathematics* (Vol. 2)[M]. Oxford: The University Press, 1921.206-213:390-396.

[7] Fauvel J., van Maanen J. *History in Mathematics Education*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

英美百年数学教科书中的向量概念

李婷
（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

向量一词源于外文翻译，英文是“Vector”或“Vecteur”，在物理学科中称为“矢量”，在数学中称为“向量”，即“既有大小又有方向的量”。实际上，“Vector”一词来自拉丁文“Vehere”，“Vecteur”是“Vehere”的过去分词，意思是“携带”，此含义源于“将某物从此处带至彼处的意义”[1]， 它表示物体的位置变化，这恰恰是物理学科中的位移定义，由此可知向量背景来源于物理量的表示。然而课程标准强调在向量概念引入时要呈现丰富的实际背景，那么向量背景仅仅源于物理量的表示吗？为什么同一个名词在不同学科中要有不同叫法呢？相对于高中其他概念向量概念并非难以理解，但教学实践表明，学生在学习向量概念时仍然有许多未解之处，例如：向量是有向线段吗？为什么向量有这么多表征方式？为什么向量是自由的？向量是不是数量的扩充？要解决这些问题，我们不得不在浩如烟海的历史宝库中寻找向量之源。那么，向量概念的实际背景有哪些？在历史上经历了怎样的演变过程？向量概念的历史对教学有何启示？本文将在外国教科书的研究中探索以上问题。由于向量系统的旺盛时期是在 19 世纪 40 年代以后，主要在英国、爱尔兰和美国兴起，鉴于语言的限制，因此研究者找到 1865-1965 年间出版的 60 种数学英美几何与代数教科书进行考察。

2 19 世纪中叶以前的向量概念

据记载，向量概念最早来源于物理学。古希腊时期，速度作为既有大小又有方向的量被认为是一个向量。约公元前 350 年古希腊著名学者亚里士多德（Aristotle）在其著作中有这样一段文字描述：“一个物体以一定速率运动时（朝着两条路径以定比率速度运动），物体必定沿着一条直线运动，此直线是以定比率速度为邻边构成的平行四边形的对角线”[2]。同一时代的亚历山大海伦（Heron）证明了速度的平行四边形法则。如图 1：动点 G 从点 A 处沿着直线 AB 向点 B 匀速运动，同时线段 AB 沿着平行于自己的方向匀速运动，记端点 A 的轨迹是直线 AC，假设当点 G 到达点 B 处时，直线 AB 到达了直线 CD 位置，EF 是 AB 运动过程中的任意时刻所处的位置。由此易得 AE:AC=EG:EF, 进一步可知 AE:EG=AC:EF=AC:CD,所以 AG 与 AD 共线，因此得到点 G 的运动轨迹是对角线 AD[3]。

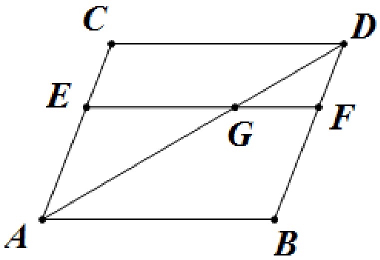


图 1

在这之后的一千多年里，向量没有多大的发展，直到 1679 年，德国数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646－1716）在一封写给克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens，1629—1695）的信中提出了一个新的分析几何的想法，他希望建立一个数学分析体系，“像代数表示数量那样直接表示位置”[4]。莱布尼茨试图建立一个具有这种特征的基本系统，这与建立向量分析系统的目的类似，但是最终没能构建出来。1687 年，英国科学家艾萨克·牛顿(I. Newton,1643-1727)完成著作《自然哲学的数学原理》，描述了运动定律推论 1：“当两个力同时作用于一个物体时，这个物体将沿着平行四边形的对角线运动，所需时间等于两个力分别沿两边运动所用的时间之和”[5]。牛顿基于亚里士多德速度的平行四边形法则理论进一步描述了力改变物体运动状态规律的特征，其贡献之处在于他是最先使用有向线段表示力的科学家[6]。

1797 年，丹麦数学家卡斯帕尔·韦塞尔（Caspar.Wessel,1745-1818）还是一位验船师的时候，在丹麦皇家学院发表的一篇长文中首次给出了复数的几何表示。他的目标不仅是要证明复数的存在，还探讨了如何使平面和三维空间中的有向线段进行加法与乘法运算[7]。然而在寻求类似方法分析三维空间时，并没有像研究平面那样顺利。不知何由，他在 1797 年发表的文章未能吸引大量的读者，一个世纪后才被人们所知。几乎在同一时刻，德国著名数学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯（J.C.F.Gauss, 1777－1855）也提出了复数的几何解释，只是这一结果直到 1831 年才公布于世。与韦塞尔一样，高斯寻求与复数相一致的可用于三维空间的几何物体。1806 年，瑞士业余数学家阿尔冈（J.R.Argand，1768–1822）发表了复数几何表示的文章，并在 1813 年尝试的后续文章找到的三维空间分析方法，他用 $\overrightarrow{AB}$ 表示有向线段[8]。

1828 年，英国的约翰·沃伦(J. Warren,1796–1852)发表了《关于负数的平方根的几何表示》的著作[9]。1836 年，意大利数学家贝拉维蒂斯(M.Bellavitis,1803-1880）第一次阐述了等值系统，该系统具有与向量分析相同的特征，如他在等量定义中提出：“如果两条直线在同一方向上平行且值相等，那么这两条线等值”[10]。他定义的等值对象是几何实体本身，而不是代数实体的几何表示。哈密顿(W. R.Hamilton，1805–1865)是第一个给予“向量”这个名词的数

学家，他在 1853 年发表的《四元数讲座》中介绍了他的向量思想，对发现的新的数学方法进行了系统的说明。1843 年，哈密顿到爱尔兰皇家学院交流了该系统，开展了连续的讲座主题。他认为"数学中一点相对另一点的关系可能会被认为是一种序关系，或者说空间两点的相对位置关系的探讨实际上就是两点的几何差的研究"[11]，也就是说对于哈密顿而言，向量的研究背景之一是用代数方式表示两点的相对位置关系。由于哈密顿在大学毕业之前就热衷于天文学研究，并被授予都柏林大学安德鲁斯天文学教授和爱尔兰皇家天文学家，所以具体讨论了几何差在天文学中的意义，用数学意义上的几何差（类似于减法运算）可以更加简洁清晰地表达天体之间的位置关系。如图 2 是在天文学中空间中两点位置的表示：

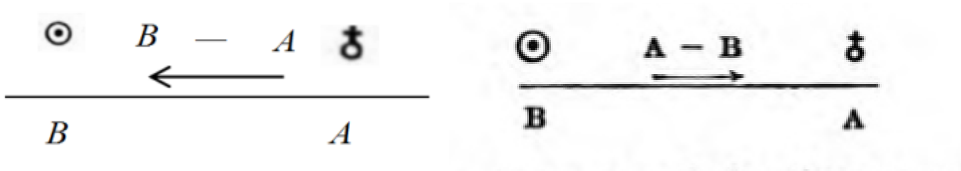


图 2

两个点分别表示太阳与地球，此处的两点无关质量、长度、形状、大小，只考虑它们的位置，或者说是质点，空间中数学意义上的点。为了更加简洁清晰地表达，在太阳与地球下面写两个点，A 点表示地球，B 点表示太阳。现在点 B 相对于点 A 的位置关系可以解析为序关系，或者是一种变换，用减号将两者分开，左图符号 B-A 表示地球向太阳运动，右图符号 A-B 表示从太阳点向地球运动，箭头表示从分析点到达被分析点的方向，直线表示分析点前进的路径。那么这里的分析点与被分析点被称为起点与终点，此处未明确说明两点的几何差就是向量，但其本质是位置向量。

3 百年数学教科书中的向量概念

孙庆华（2006）在《向量理论历史研究》中将向量的历史发展按照力和速度的平行四边形法则的向量理论、与位置几何有关的向量理论，源自复数几何表示的向量理论发展这三条线索进行了分析和研究孙庆华《向量理论历史研究》[12]。本文基于以上研究者对英美百年教科书中的向量概念进行了梳理与分析，根据研究将向量的概念按照实际背景将编码为四类定义，分别是"基于物理量的定义"、"基于有向线段的定义"、"基于复数的定义"和"基于平移运动的定义",其中物理情境下的有向量出现的次数最多，其次是有向线段。下面给出具体的背景与概念。

3.1 基于物理量的定义

本文将力、位移、速度等有向量描述为"基于物理量的定义"[13-34]。这类定义最初的思想是源于亚里士多德，即物理学科中的矢量，物理情境下向量有三个关键要素:大小，方向，

位置。以力为例，力的刻画必须要有作用点、大小和方向。60 本书籍中有 22 本书籍中给出物理背景下的向量概念，但在描述上有所区别，见表 1.

表 1　物理情境下的向量定义描述

定义类型	教科书
1.相对于标量的定义.	Heaviside（1889）Gibbs（1901）Baker（1911）Low（1912）Hart（1942）Phillips（1942）Holmes（1950）Howe（1951）Shupe（1956）
2.表示力、速度等的有向线段	Palmer（1913）Heaviside（1925）Bubb（1935）Keal（1938）Millar（1939）Rowe（1939）Frame（1948）Rusinoff（1948）Howe（1951）Murdoch（1957）Dantzig（1937）
3.任何有大小和方向的物理量	Coffin（1909）Jordan（1954）

第一种向量定义相对于物理中的标量给出，例如英国电气工程师 Heaviside（1889）指出："生活中两种不同的大小，像质量、密度、能量、温度只具有代数意义上的大小，是标量意义上的大小。还有一些具有大小的量，如位移、速度、加速度、力、动力、电流等，有大小也有方向，两者缺一不可，这些都是向量"。 Palmer（1912）、Keal（1938）、Rusinoff（1948）等人定义向量为"表示物理矢量的有向线段"。此种定义强调有向线段是力的几何表征，力的方向用有向箭头表示，力的大小用有向线段的长度衡量，力的作用点就是有向线段的起点，这种表示力的线段就是向量。Coffin（1909）在《向量分析》中的定义是"向量是物理量的抽象结果，它是任何具有方向与大小的量"。无论哪种定义描述，都是物理意义下的位置向量。

3.2　基于有向线段的定义

20 世纪 20 年代到 20 世纪 60 年代的教科书中将有向线段作为向量定义的情况比较多，考虑线段两个端点的有序性是有向线段产生的原因之一。Wentworth（1900）定义向量为"有固定长度的有向线段"[35]。Gibson（1901）详细介绍了有向线段的概念，"A、B 是一直线上的任意两点，在初等几何中，习惯性地将以 A、B 为端点的线段记为 AB 或 BA，不在乎字母书写的顺序。然而，当线段用来表示点 A 到点 B 的轨迹或者点 B 到点 A 的轨迹时，有必要区分线段 AB 与线段 BA 的不同。当此差异存在时，这种线段就叫有向线段（directed segment）或者向量（vector）或者移动（step），用字母的书写顺序表示这种差异。因此 AB 表示点 A 运动到点 B 的向量，BA 表示点 B 到点 A 的向量，向量 AB 与向量 BA 长度相同，方向相反"[36]。该书中只用了大写字母的组合表示向量，没有用有向箭头。需要说明的是，这里没有出现自由向量概念的影子，但在定义相等有向线段时，不考虑起点，相当于自由向量。如图，AB 与 CD 相等满足三个条件：（1）在同一直线或平行线上；（2）AB 与 CD 长

度相等；（3）A 与 C 要在同一边，B 与 D 在同一边。因此，若 D’到 C 的距离与 D 到 C 的距离相等，当时方向相反，那么 CD’与 CD 不相等。

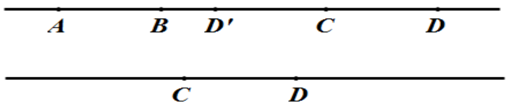


图 3

Murnaghan（1946）认为：要接受向量的概念，必须要先弄清有向线段的问题。在欧几里得几何中，起初人们只关注线段的长度大小，没有考虑方向的不同代表着不同意义的线段。为什么人们会考虑到线段的方向性呢？这涉及到同一直线上不同点相对位置问题。一条给定的无限延伸的直线上有任意两个点 A,B，这两点确定了一条线段，端点是 A,B，我们可能写成 AB 或 BA,当我们考虑到顺序时，谁是第一点被提到是非常重要的，若点 A 被第一个提及，我们就说线段是从点 A 向点 B 延伸的，记作 $A \to B$；反之，若点 B 被第一个提及，我们就说线段是从点 B 向点 A 延伸的，记作 $B \to A$.若 $A \to B$ 是一条直线上的任意一条有向线段，$C \to D$ 是同一条直线上的另一条有向线段，如果 $A \to B$ 与 $C \to D$ 的箭头方向相同，并且 $|AB|$ 与 $|CD|$ 的长度相同，那么线段 AB 与 CD 相对一样。接受了有向线段的概念后，我们唯一需要考虑有向线段的方向和长度，这两个元素与点 A 向点 B 行进的路径 $B \to A$ 过程无关。事实上，真正引起我们的关注是从 A 运输东西到点 B 的方向和距离，我们称这种具有固定特性的有向线段为向量（vector）。其词根是拉丁文 vehere，含义是运载，vehicle 是其词根之一。有向线段 $A \to B$ 与 $C \to D$ 有所不同，但是通过平移能够互相重合，那么它们只是表征不同，本质相同，因此该两个不同的有向线段是同一个向量的不同表征。向量将由以下符号表示：$V(A \to B)$[37]。Sutherland(1948)用类似于↑（AB）表示向量的符号[38]。

另一方面，人们经常用有向线段刻画力等有向量，用有向线段表示向量甚至有时将两者等价就显得理所当然。Coffin（1911）与 Phillips（1915）对向量的定义是：“向量是起点与终点相异的有向线段，因此向量有大小和方向，任何能用有向线段表示的量都是向量”[39-40]。此处的定义相对于物理情境下的定义扩大了外延，使得向量摆脱了物理量的标签。Low（1912）与 Ransom（1912）给出向量概念应当满足的三个特征：大小、方向、忽略位置[41-42]，此外，Low 还提出向量可以将一个点“运输”（transport，vehere,to carry）到另一个点，因此向量蕴含着一种“运算”，表示特定方向特定距离的平移（translation）。Hall（1914)也明确提出向量与位置无关，“向量是位置不确定的有向线段，每一个向量的代数表征都有对应的几何结构”[43]。简短的定义道出向量的本质特征：一是向量是不固定的，二是向量有代数与几何两种表征形式，因此它是沟通代数的桥梁。Ziwet（1913）定义向量为具有固定长度、方向和箭头的有向线段[44]。Sheppard（1923）在有向线段的背景下给出向量必须有三个特征：（1）

大小；（2）方向；（3）满足平行四边形法则[45]。Roeve1r（1941）将向量与有向线段完全等价，没有区别固定向量与自由向量的不同，但在定义相等向量时用自由向量的概念。另外提出向量具有四个特征：（1）起点；（2）.长度；（3）方向；（4）箭头[46]。

后来，Kells（1949）、Hart（1957）、Taylor（1959）和 Davis（1961）在定义向量时都采用了有向线段的概念[47-50]。Brand（1947）从多个角度定义向量的概念，他在《微积分与解析几何》这本书中提到向量不仅是一个几何对象，比如黑体大写英文字母 **A** 是向量，是从起点到终点的有向线段，在特定条件下，向量是有序数对[51]。

3.3 基于复数的定义

向量是复数的几何表征主要出现在代数教科书中。复数的几何表征问题一直数学家们讨论的问题，直到 1846 年，哈密顿发表了一篇专门介绍向量的文章，才解决了这一难题。但是用向量表示复数经过很长时间才被众多数学家们接受。直到 Wentworth（1888）给出的向量的复数背景：如图3，如果通过点O画一条与XX'垂直的直线YY'，所有的实数都可以用XX'上的点表示，那么所有的纯虚数都可以用YY'上的点表示。由此，XX'就叫实轴，YY'就叫虚轴，点 O 叫做原点。我们习惯把时针旋转的反方向看成是正的，那么图中的点 M 或者线段 OM 就表示$+5i$或者$+5\sqrt{-1}$；点 N 或者线段 ON 表示$-6i$或者$-6\sqrt{-1}$。a与ai是不同种类的数，因此就用不同的线段表示。由$OA+AP$或$x+yi$能够确定一点p，从点O开始，与OX方向形成角且长度为r的有向线段OP叫做向量。这样那些表示实数和纯虚数的有向线段都是向量[52]。

后面出现基于复数的向量定义大多类似 Wentworth 的定义，例如 Van(1892)、Young（1911）、Smail（1931）、Davis（1942）、Nowlan（1947）和 Cowles（1947）[53-58]。

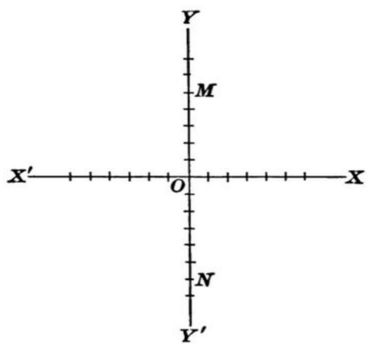


图 4

3.4 基于平移运动的定义

平移背景下的向量集中出现在 19 世纪末和 20 世纪 30、40 年代，且分为两类平移，一

种是点或图形的平移，另一种是指纯粹的平移变换。第一次提出用向量表示平移的是哈密顿。之后出现的基于平移的向量概念或多或少继承了哈密顿的定义。例如，Tait（1867）将向量定义为“将一点运载到另一点的工具，因此向量可表示空间中的特定平移”[59]。Wood（1879）和 Hardy（1887）给出的定义是：“向量是定距离定方向平移的表示方法”。如果 A，B 是两个点，向量 AB 表示从点 A 到点 B 的平移。向量可以用几何上的线段表示，线段的长度等于平移的距离，方向就是平移的方向。因此，在书写向量时，方向由字母的顺序确定。从向量的定义看，所有长度相等平行的线段可以由相同的向量符号来表示。所以两个向量相等蕴含着同方向上的距离相等。若 AB, CD, BE, EF, HG 在同方向上相等，就可以用同一个向量符号表示：

$$AB = CD = BE = EF = HG = \alpha......$$ ”[60-61]

Hardy 的定义解决了现代学生学习向量的一个困难：多个相等向量本质是同一个向量。Aldis（1886）给出了同类的定义：“所有表示平移变换的的量叫做向量，向量是由平移的距离与方向决定的”[62]。

Tait（1890）在复本中给出了更为一般意义的定义：“向量可以表示平移(translation)，它可以用几何上的有向线段表示，曾经向量就是有向线段，但现在向量只有两个基本要素：大小和方向，它适用于所有具有大小和方向的量，例如位移，力，速度等”[63]。应该说 Tait 基于平移，又跳出了平移，给出相对完善的定义，向量是一切具有大小和方向的量的统称。Phillips（1942）同样地提到“向量既可以表示物理中的有向量，也可以表示平移”[64]。

Hime（1894）与 Macfarlane(1906)从动态视角认识向量 ，把向量看成是平移操作过程（action process）。他提到向量被人们接受是源于其运输功能（transport），即“将一个粒子从 A 运载（vehere，carry）到点 B。因此向量蕴含着一种操作，表示特定方向上特定距离的平移。确定一个向量方向需要两个相对位置的点，从而向量隐含着三个数，一个确定长度，两个确定方向”[65-66]。

Young（1930）基于有序点对，把向量看成是欧几里得平面内有序点对 AB 的特定符号。例如，如果 CD 是任意平行且相等于 AB 的有序点对，则向量 AB 与向量 CD 相等，可以用同一个符号向量 V(AB)表示。因为平面上任意一点可以通过平移转化为另一个点，因此所有的向量可以由一个向量集 V(OP)而获得，其中 O 是平面内容一个固定点，点 P 是变化的任意一点[67]。该定义说明向量是可以平移的，且欧几里得平面内所有向量可以由一组基向量获得。Veblen（1938）也是用有序点对和平移来定义向量[68]。基于平移定义向量的还有 Stringham（1893）、Thomas（1931）、Morley（1933）与 Roever（1933）[69-72]。

平移背景下的向量与起始位置无关，其本质就是自由向量，用平移解释向量的自由性更容易被人接受，这可以作为中学向量概念教学的背景资料。

实际上，在线性代数书籍里也存在许多 n 维空间向量的定义。Sheppard（1923）从坐标角度解释了三维向量的概念[73]。Albert（1949）从代数角度给出了 n 维向量的定义“序列 $P=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ 叫做 n 维向量，x_1，x_2，$x_3, \ldots, x_n$ 叫做向量 P 的分量，x_i 是第 i 个分量”[74]。这种定义适合大学里的向量定义，该定义很难被高中生接受，因此本文不予专门研究。

4 教科书中向量定义的演变

向量最初用以表示力，后来表示物理量，因此向量是从物理学科延伸出来的数学表征，就是用几何有向线段表示物理量这样的向量。后来数学家们研究了位置几何以及寻求平移运动或变换的符号表示，区分了位置向量与自由向量。

图 5 给出了 5 种向量定义的频数分布情况。由图可知，基于物理量的定义出现次数最多，基于向量的定义与基于平移的定义情况相差不大。

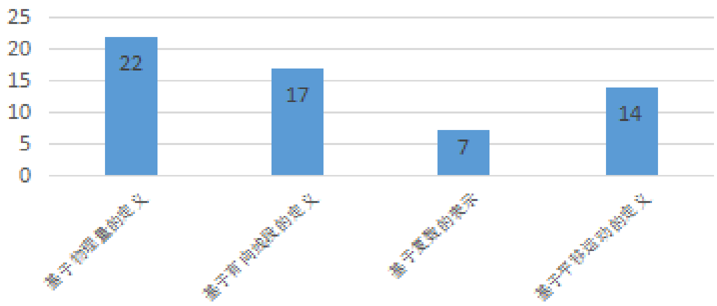


图 5　4 种向量定义频数分布图

若把一百年分为 5 个等距时间类，可以看出各个时间段不同定义使用的频数情况。由于向量出现的时间比较晚，向量内容的书籍出版时间主要集中在后 60 年里。证据表明，到了 1910 年，Gibbs-Heaviside 的定义在争取生存的斗争中赢得了胜利。因此在 1905 年到 1924 年间，基于物理量的定义与基于有向线段的定义占据主要地位。之后，基于有向线段的定义的缺陷已被人们认识到，取而代之的是平移背景下的定义，区别了数学中的向量与物理中的矢量的不同，然而到了 20 世纪 40 年代到 60 年代间，基于物理量和有向线段的定义又重新占据主要地位，基于复数的定义一直都存在。

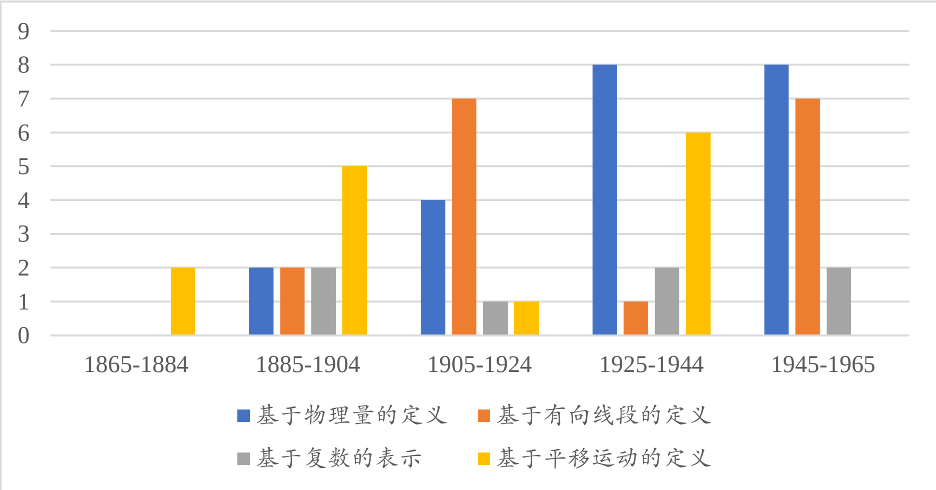


图 6　1865-1965 年间各种定义频数分布表

5 结论与启示

跨越百年的 60 种英美几何与代数教材清楚地呈现了向量定义的 4 种背景及其历史发展脉络。从物理量到有向线段，再到复数的几何表征，最后基于平移的定义出现，不是一个直线发展的过程，向量概念是根据学科发展背景的不同需要有所发展，从单向发展到多向角度延伸才完善到近日的向量分析。起初向量的定义是位置固定的向量，是物理量的抽象结果，因此物理量是向量出现的背景之一。其次用有向线段代替向量源于物理量的几何表征和复数的几何表征，有固定大小和方向的箭头是向量的特征。最后自由向量的出现源于位置几何的探讨和平移运动与变换的表达，更重要的是不同背景下的向量定义蕴含了不同的数学思想与方法，例如数形结合、从特殊到一般，从有限到无穷等，这些对现行的数学教科书编写和今日课堂教学带来一些启示。

（1）教材编写者

每一版的高中数学教材关于向量的背景引入和概念界定都是从某一方面而言，人教版、苏教版和北师大版都是从位移等物理量中抽象出向量的概念，学生能够理解有大小有方向的量的存在，只是这个背景无法解决向量的自由，更无法体会到向量符号在数学学习中的优势所在。另一方面，将几何图形符号化、代数化的思想在教材中未曾渗透，突兀地将空间向量置于立体几何中并非自然地揭示向量的几何性质。若能在平面向量章节中涉及用平面向量解决平面几何问题，并凸显它在平面向量中的作用，将为空间向量解决立体几何问题打好基础。再者，向量的研究涉及到多数数学家们的贡献，有些数学家花费了一生的精力研究向量系统，甚至为了让世人接受他的观点，作出了艰苦奋斗与努力，这一点若能放在教材章节后的阅读

材料中可以激励学生的情感，感受数学发展之曲折以及数学文化的魅力。

（2）对课堂教学的启示

在设计向量的实际背景与向量的概念时，教师可以灵活地处理教材，基于学生已有的认知，充分利用历史材料呈现不同的背景，例如物理背景、平移运动，把握出向量的本质特征。其次，向量的符号也是经过多次的争议和统一才确定了今天的这种形式，若给予学生创造的机会，将会发现学生能够创造出和数学家们一样想法的符号，这会给学生带来巨大的成就感与喜悦感。再次，教师利用史料明确物理中的矢量与数学中的向量之间的关系，从而更深入地理解自由向量的概念。

参考文献

[1] 阿西摩夫.科技名词探源[M]. 卡毓麟， 唐小英,译. 上海:上海翻译出版公司,1985, 266.

[2] Swetz,F. Learn from the Masters[M]. *Washington: Mathematical Association of America*, 1995, 199.

[3] Heath,T. Little. A history of Greek mathematics[M]. *Oxford: Clarendon Press*, 1921, 348.

[4] Michael J. Crowe. A History of Vector Analysis[M]. *American Journal of Physics*, 1967.

[5] 艾萨克.牛顿著. 自然哲学的数学原理[M]. 曾琼瑶，王莹，王美霞， 译. 江苏：江苏人民出版社, 1684, 15.

[6] 曹才翰. 中国中学教学百科全书数学卷[M]. 沈阳：沈阳出版社，1991, 195.

[7] Atzema, Eisso J. Caspar Wessel on the Analytical Representation of Direction,an Attempt Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons(1797)[J]. *Historia Mathematica*, 2004. vol. 31, no.1 :116-119.

[8] Argand, J. Robert. Imaginary quantities: their geometrical interpretation[M]. *New York: D. Van Nostrand*, 1881, 18-26.

[9] Warren, J. A treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities[M]. *Cambridge [Eng.]: Printed by J. Smith*,1828, 137-138.

[10] Severance, Lena Lillian (Hill).The Theory of Equipollences: Method of Analytical Geometry of Sig. Bellavitis[M]. *Meadville, Pa.: Tribune Publishing Co*, 1930, 11-12.

[11] Hamilton, W. Rowan. Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method[M]. *Dublin: Hodges and Smith*, 1853, 5-11.

[12] 孙庆华. 向量理论历史研究[D]. 西北大学, 2006.

[13] Heaviside, O. Electromagnetic waves[M]. *London: Taylor&Francis*, 1889, 132-134.

[14] Gibbs, J.Willard . Vector analysis: a text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J.Willard Gibbs[M]. *New Haven: Yale university press*, 1901, 1-3.

[15] Baker, A. Latham. Quaternions as the result of algebraic operations[M]. *New York: D. Van Nostrand Company*, 1911, 11-12.

[16] Low, D. Allan. Practical geometry and graphics[M].*London: Longmans, Green*, 1912, 81-84.

[17] Hart, W. W.　Plane trigonometry, solid geometry and spherical trigonometry[M]. *Boston: D. C. Heath and company*, 1942, 56-57

[18] Phillips, H. B. Analytic geometry and calculus. *Cambridge,Mass: Addison-Wesley Press*, 1942, 206-208.

[19] Holmes, C. Thomas.Calculus and analytic geometry[M]. *New York: McGraw-Hill*, 1950, 144-146.

[20] Howe, H. Bartlett. Descriptive geometry: a pictorial approach[M]. *New York: Ronald Press Co* ,1951, 122-126.

[21] Shupe, H. W. A manual of engineering geometry and graphics: for students and draftsmen[M]. *New York: McGraw-Hill,* 1956, 242-253.

[22] Palmer, C. Irwin. Practical mathematics: being the essentials of arithmetic, geometry, algebra and trigonometry[M]. *New York :McGraw-Hill Book Company*, 1913, 73-75

[23] Heaviside, O. Electromagnetic theory[M]. *London:Benn,* 1925, 138-143

[24] Bubb, F. W. Descriptive geometry[M]. *New York:The Macmillan Company*, 1935, 113-115.

[25] Keal, H. M. Mathematics for electrical students[M]. *New York: John Wiley & sons, inc*, 1921, 182-184.

[26] Millar, A. V. Descriptive geometry[M]. *Boston: D. C. Heath and Company*, 1939, 64-67.

[27] Rowe, C. Elmer. Engineering descriptive geometry: the direct method for students, draftsmen, architects, and engineers[M]. *New York: D. Van Nostrand company*, 1939, 174-175.

[28] Frame, J. Sutherland.Solid geometry[M]. *New York: McGraw-Hill Book Co,*James, 1948, 29-30.

[29] Rusinoff, S. E.Practical descriptive geometry[M]. *Chicago: American Technical Society,*1948, 223-225.

[30] Howe, H. Bartlett. Descriptive geometry: a pictorial approach[M]. *New York: Ronald Press Company,* 1951, 112-113.

[31] Murdoch, D. Carruthers. Linear algebra for undergraduates[M]. *New York: Wiley*, 1957, 2-3

[32] Dantzig, T. Aspects of science[M]. *New York: The Macmillan company*, 1937, 238-242

[33] Coffin, J. George. Vector analysis: an introduction to vector-methods and their various applications to physics and mathematics[M]. *New York:Chapman&Hall*, 1909, 1-4

[34] Jordan, H. Herbert. Engineering drawing and geometry[M]. *Champaign, Illinois: Stipes Publication Co*, 1954,14-17.

[35] Wentworth, G. A. A higher algebra[M]. *Boston: Ginn & Company*, 1891,516-521

[36] Gibson, G. A. An elementary treatise on the calculus, with illustrations from geometry, mechanics and physics[M].*London: Macmillan*, 1901, 1-3.

[37] Murnaghan, F. D. Analytic geometry[M]. *New York: Prentice-Hall, inc*, 1946, 4-18.

[38] Jams, F. Sutherland. Solid geometry[M]. *New York: McGraw-Hill Book Co*, 1948, 29-30

[39] Coffin, J. George. Vector analysis: an introduction to vector-methods and their various applications to physics and mathematics[M]. 2d ed.*New York:Stanhope Press*, 1911. 1-5

[40] Phillips, H. B. Analytic geometry. 1st ed., 1st thousand[M]. *London: Chapman&Hall*, 1915, 32-34

[41] Low, D. Allan. Practical geometry and graphics[M]. *London: Longmans, Green*, 1912, 82-85.

[42] Ransom, W. Richard. Freshman mathematics: an instruction and reference book in the principles and methods of computation, trigonometry, applied algebra, and coordinate geometry[M]. *Boston: Tufts College, Massachusetts*, 1912, 52-54.

[43] Hall, T. Proctor. A geometrical vector algebra[M]. *Vancouver, B.C.: Western specialty, limited*, 1914, 1-2.

[44] Ziwet, A. Analytic geometry and principles of algebra. *New York: The Macmillan company*, 1913, 18-19

[45] Sheppard, W. Fleetwood. From determinant to tensor[M]. *Oxford:The Clarendon Press*, 1923, 7-9.

[46] Roever, W. Henry. Fundamental theorems of orthographic axonometry and their value in picturization[M]. *St. Louis: Washington University*, 1941, 26

[47] Kells, L. M.Analytic geometry[M]. *New York: Prentice-Hall*, 1949, 2-4.

[48] Hart, W. Le Roy. Analytic geometry and calculus[M]. *Boston: Heath*, 1957, 155-157.

[49] Taylor, A. E. Calculus, with analytic geometry[M]. *Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall*, 1959, 415-416.

[50] Davis, H. F. Introduction to vector analysis[M]. *Boston: Allyn and Bacon*, 1961, 1-3

[51] Brand, L.Vector and tensor analysis[M].*London:Chapman&Hall*, 1947, 1-3.

[52] Wentworth, G. A. A college algebra[M]. *Boston: Ginn*, 1888, 482-484

[53] Van Velzer, C. Ambrose. University algebra[M]. *Madison, Wis.: Tracy, Gibbs & co*, 1898, 554-560.

[54] Young, J. Wesley. Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry[M]. *New York: The Macmillan company*, 1911, 123-125

[55] Smail, L. Leroy. College algebra[M]. New York: *McGraw-Hill book company, in*c, 1931, 35-36.

[56] Davis, H. T. College algebra[M]. *New York: Prentice-Hall, inc,* 1942, 241-243

[57] Nowlan, F. Stanley.College algebra[M]. *New York: McGraw-Hill Book Co*,1947,235-237

[58] Cowles, W. Henry Harrison. Algebra for colleges and engineering schools[M]. 2d. ed. *New York: D. Van Nostrand company, inc,* 1947, 108-111.

[59] Tait, P. Guthrie. An elementary treatise on quaternions[M]. *Oxford: Clarendon Press*, 1867, 48-50.

[60] Wood, D. Volson.The elements of coördinate geometry: in three parts[M]. *New York: John Wiley & Sons*, 1879, 231-233

[61] Hardy, A. Sherburne. Elements of quaternions[M]. *Boston: Ginn,* 1881, 1-2.

[62] Aldis, W. Steadman . An elementary treatise on solid geometry[M]. *Cambridge : Deighton, Bell, and co,* 1886, 229-230.

[63] Tait, P. Guthrie. An elementary treatise on quaternions[M]. 2d ed., enl. *Cambridge, [Eng.]: The University Press*., 1873, 6-7.

[64] Phillips, H. B.Analytic geometry and calculus[M]. *Cambridge: Addison-Wesley Press*, 1942, 206-209

[65] Hime, H. W. L.Outlines of quaternions[M]. *London: Longmans, Green*, 1894, 1-3.

[66] Macfarlane, A.Vector analysis and quaternions[M]. 4th ed. *New York: J. Wiley & sons*, 1906, 8-9.

[67] Young, J. Wesley. Projective geometry[M]. *Chicago: Published for the Mathematical association of America by the Open court Publishing Co*, 1930, 158-159

[68] Veblen, O. Projective geometry[M]. *Boston: Ginn and company,* 1918, 141-142.

[69] Stringham, I. Uniplanar algebra: being part I of a prop deutic to the higher mathematical analysis[M].*San Francisco: The Berkeley press*, 1893, 113-115

[70] Thomas, T. Y.The elementary theory of tensors: with applications to geometry and mechanics[M]. *New York: McGraw-Hill book company*, 1931, 21-22

[71] Morley, F. Inversive geometry[M]. *Boston: Ginn and company*[M], 1933, 3-5.

[72] Roever, W. Henry. The Mongean method of descriptive geometry: according to the procedure of Gino Loria [M]. *New York: The Macmillan Company*, 1933, 133-134.

[73] Sheppard, W. Fleetwood. From determinant to tensor[M]. *Oxford: The Clarendon Press*, 1923, 7-10.

[74] Albert, A. Adrian . Solid analytic geometry[M]. *New York: McGraw-Hill*, 1949, 1-3.

教学实践

HPM 视角下的“演绎证明”教学

贯彬[1]　栗小妮[2]

（1.上海市建平远翔学校，上海，200129；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

平面几何是初中数学课程的重要组成部分，它对培养严密的逻辑思维能力、提高理性思维水平有着不可或缺的作用，[1]还有利于形成科学的世界观和理性精神，有助于培养良好的思维习惯等．[2]

现行人教版、沪教版以及苏科版教科书均采用从实验几何逐步过渡到论证几何的编排方式，“证明”一节是从实验几何过渡到论证几何的起始课，在人教版教科书中位于八年级上册第 13.2 节，依托三角形全等的条件的讨论给出证明的含义——证明是由题设（已知）出发，经过一步步的推理，最后推出结论（求证）正确的过程，并在这一章节的“阅读与思考”中作为选学内容以师生对话的形式阐明“为什么要证明”，指出证明是经过理由充足，使人信服的推理论证得出结论的推理过程，观察、试验等是发现规律的重要途径，但证明是确认规律的必要步骤．[3]在苏科版教科书中“证明”位于八年级下册第 11.3 节，定义“证明”为用推理的方式证实真命题的过程．[4]沪教版教科书中“演绎证明”位于八年级上册第 19.1 节，将“演绎证明”定义为从已知的概念、条件出发，依据已被确认的事实和公认的逻辑规则，推导出某结论正确的过程．[5]三版教科书给出的证明的定义虽不完全相同，但都蕴含了公理化体系思想，强调“证明”主要在于由已知事实或结论推理未知结论成立的过程．

我们所述“演绎证明”一节课主要参考沪教版教科书，在此之前学生在七年级实验几何阶段已经学习了平行线、三角形的相关知识，有一定的几何推理能力，对“证明”已有一定的认识和实践．但对数学中“演绎证明”的含义以及学习“演绎证明”的价值和作用并不清楚，基于此，我们融入数学史料，从 HPM 的视角设计本节课的教学，预设的教学目标如下：

1．结合生活实例，回顾“对顶角相等”的证明，理解证明的含义，知道演绎推理的基本过程和因果关系的表述．

2．通过探究“三角形内角和等于 180°的证明，体会演绎推理的一般步骤．

3．通过数学史的融入，了解证明起源、证明的作用以及学习演绎证明的价值，激发学

生学习几何的兴趣，体会演绎证明是一种严格的数学证明，是人类理性精神的展示，落实数学学科的德育价值.

2 历史素材

材料 1：证明的由来[6]

在人类的文化史上，“证明”这个意念是怎样产生的呢？是什么时候产生的呢？

在一般的书本里，尤其是西方的论著，都公认：数学证明开始于公元前 6 世纪．据说当时的希腊数学家、哲学家泰勒斯（Thales）证明了几条几何定理，包括如：直径把圆平分、等腰三角形的底角相等、对顶角相等之类．到了公元前 4 世纪，欧几里得（Euclid）写成了不朽巨著《几何原本》(《Elements》)，他从一些基本定义与公理出发，以合乎逻辑的演绎手法推导出四百多条定理，从而奠定了数学证明的模式.

可是，这个说法隐藏了不少疑问，即使证明真的起源于公元前 6 世纪的古代希腊，为什么当时的人会想到要证明数学命题呢？有许多经过反复实践或是直观易明的数学定理，不需要作任何解释就已经被人们所接纳，并且深信无疑的，比如直径把圆平分、对顶角相等，难道还要怀疑吗？为什么这些一看就明白的事情也有人要去琢磨呢？那是因为泰勒斯的慧眼不在于说服别人这些是正确的结果，而在于了解到这些是需要用它们来说服别人.

随着数学的发展，人类的进步，越来越多的数学结果不能凭一眼就能看明白，也就是不能凭直观的形象观察可以得到．那时，辩证学派的论证方法派上了用场，说起辩证学派，那就是涉及到哲学领域了．因此，古希腊的数学与哲学的发展是分不开的，很多哲学家同时也是数学家，柏拉图甚者认为学习数学是培育哲学家的必需的训练，只有学好数学才有资格讨论哲学问题，所以，当时的数学与哲学，互相影响和促进.

选择理由：这段史料清晰地阐述了“证明”的由来和“证明”的作用，那就是“用它们来说服别人”.

材料 2：关于 19 世纪博物学家达尔文（Darwin）的故事[6]

有一个农场主，他养的猪总是养不胖，他为这事忧心忡忡．这件事被达尔文知道了，他告诉农场主：多养猫，猪就会胖起来．理由是猫吃田鼠，多养猫便少田鼠；田鼠吃土蜂，少田鼠便多土蜂；土蜂传播三叶草，多土蜂便多三叶草；猪吃三叶草，多三叶草猪便胖起来.

选择理由：这段史料看上去与数学无关，但数学源于生活，达尔文的这段生活推理实例更有利于学生对逻辑推理的理解和对“证明”作用的领会，“证明”不仅仅局限于数学.

材料 3：《几何原本》的魅力

2017 年 12 月 19 日，中华新闻网上有这样一篇报道：满文版的《几何原本》在内蒙古

呼和浩特展出．展出的《几何原本》上留有康熙皇帝学习时记录的笔记．

美国总统亚伯拉罕·林肯（Abraham Lincoln，1809-1865）在当总统前是一名律师，他的身边常伴有《几何原本》，一有机会就会拿出来阅读并研究，直到能够熟练地证明前 6 卷中的所有命题．他认为《几何原本》中的演绎证明，可以使人思维严谨缜密，表达条理清楚，这对他的律师职业、议员工作和竞选总统都有帮助．[7]

选择理由：欧几里得的《几何原本》所塑造的证明模式，对古今中外文化的影响至深，不仅限于数学，更旁及别的文化领域．

3 教学设计与实施

3.1 结合生活实例，引入数学证明

生活中我们会经常用到“证明”一词，但此“证明”与数学中的“演绎证明”并不相同，本环节从学生的生活实例引入，在学生已有的关于生活中“证明”的经验基础之上，引出数学中的“证明”．

师：我觉得 A 同学的身高是我班最高的．你认为我说的对吗?

生（全体）：不是，B 同学才是.

师：你怎么证明?

生（全体）：站一起比一比就知道了.

（两位同学站在教室前进行身高比较，B 同学较高）

师：的确 B 同学较高，那大家所用的举例证明.

（课前，教师在黑板上画了一个接近直角的角.）

师：我认为，黑板上这个角是直角．你觉得呢?

生 1：是.

生 2：不是.

生 3：看起来像是，要量一量才知道.

（学生上讲台用量角器测量为 88°）

师：刚才我们采用的实验操作证明.另外，我说，钓鱼岛是我国不可分割的领土．你认为对吗?

生（全体）：那当然.

师：那我们怎么证明?

生（全体）：有历史资料记载了.

师：这个我们采用的是历史证明.刚才同学们为获得使人信服的结论所采用的手段就是证明.

一般来说，证明是指人们为获得使人信服的结论所采用的手段．证明有“实践证明”、“历史证明”、“实验证明”、“举例证明”等多种形式．而在数学中，对数学结论的正确性进行证明，还有更为严格的形式．

3.2 利用数学结论，感知演绎证明

在此之前，学生在七年级实验几何阶段已经学习了“对顶角相等”、平行线和全等三角形的相关知识，有一定的进行几何说理的能力，本环节通过回顾“对顶角相等”的证明，让学生感知什么是数学中的“演绎证明”，初步了解证明一个文字命题的一般步骤，并了解观察、操作和演绎证明之间区别和联系．演绎证明是最令人信服的，观察和测量的结果虽然不是令人信服的结论，但却是发现结论、进行猜想的重要途径，猜想出的结论是否正确需要通过演绎证明来确认．

师：七年级我们学习了“对顶角相等”，请问如何说明“对顶角相等”？

生 1：要先画个图，画两条直线相交．

（教师操作，在黑板上画出直线 AB、CD 相交于点 O，如图 1 所示．）

师：你要求画的这幅图需要交待一下吗?

生 1：（点头）直线 AB、CD 相交于点 O．

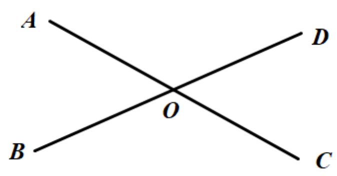


图 1

师：你交待的这句话能给个名称吗?

生 1：已知．

师：你的“已知”是从哪里来的?

生 1：画图来的呀．

师：根据图形写出来的已知，要加上“如图”二字．接着可以开始“证明”了吗？我们要“证明”什么呢?

生 1：我们要证明一对对顶角相等，也就是$\angle AOC = \angle BOD$．

师：我们要“证明”的目标也给它一个名称，叫“求证”．

师：结合图形，你有哪些方法说明$\angle AOC$ 与$\angle BOD$ 相等呢?

师：用“看”行吗?

生（全体）：不行，比如刚才的直角，看着是，但实际测量出来，发现并不是．

师：用“量”行吗?

生（全体）：也不行，理由是：度量会有误差；不是每一个问题都能度量解决的.

师：那用什么办法?

生 2：因为直线 AB、CD 相交于点 O.

师：哪来的?

生 2：已知知道的呀.

生 2：所以$\angle AOC+\angle AOD=180°$，$\angle BOD+\angle AOD=180°$.

师：你怎么知道的呢?

生 2：它们组成了平角，根据平角的概念知道的呀.

生 2：所以$\angle AOC=\angle BOD$.

师：这个结论你又是怎么知道的呢?

生 2：等式的性质呀，$\angle AOC$ 和$\angle BOD$ 都与$\angle AOD$ 相加得 $180°$，它们当然相等啊.

师：这个理由成立.

师：像这样，不凭任何个人的感觉，而是从已知的概念、条件出发，依据已被确认的事实和公认的逻辑规则，推导出某结论为正确的过程，我们称为演绎证明．和看、量相比，这种推理方式更能令人信服.

在师生的一问一答之间，让学生慢慢感悟证明一个文字命题的一般步骤．①画图，写出已知、求证；②进行证明，并在证明的每一步后面写上推理的依据.

3.3 融入历史素材，理解演绎证明

历史上第一位具有“演绎推理进行证明”的意识，并用它来思考、解决问题的人非常伟大．那么，是谁最早具有这种意识？数学证明从何而来呢？我们为什么要学习证明呢？本环节利用已选的历史素材，让学生理解演绎证明的价值.

微视频 1：“证明的由来”（历史材料 1）．在视频中，学生了解了证明的由来，并认识了两位数学家，泰勒斯和欧几里得，以及数学中的经典著作《几何原本》.

然后，教师将 19 世纪博物学家达尔文的故事（历史材料 2）以推理的形式将理由逐条呈现给学生，让学生体会“演绎证明”的推理模式在生活中的运用.

3.4 运用新学知识，实践演绎证明

在上课前，教师已给每位学生下发了一张三角形彩色纸片，并告诉学生，帕斯卡在八岁时，通过一张简单的纸片发现了三角形内角和等于 180°．教师让学生通过自己的方式，利用手中的三角形彩色纸片来验证三角形内角和等于 180°，并将学生的方式展示在教室侧面的白板上.

本环节设计是在学生已经知道并理解了演绎证明的基础之上，再次利用学生七年级已经

学过的“三角形的内角和是 180°”，通过操作和演绎证明，让学生再次体会进行演绎证明的一般步骤.

探究活动：小组内讨论完成“三角形的三个内角的和等于 180° 的演绎证明.

展示并完善证明过程：

法 1：如图 2 左，过点 A 作 BC 的平行线构造两组相等的内错角，$\angle B=\angle DAB$，$\angle C=\angle EAC$ 将三角形的三个内角转化为一个平角，得证.

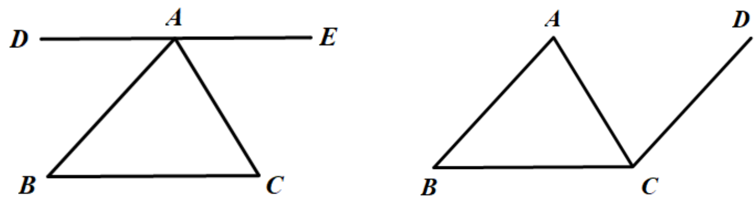


图 2　学生证明“三角形内角和为 180°”的方法

法 2：如图 2 右，过点 C 作 AB 的平行线构造一对相等的内错角 $\angle A=\angle ACD$，一对互补的同旁内角 $\angle B+\angle BCD=180°$，将三角形的三个内角转化为这对互补的同旁内角，得证.

然后，教师对两种方法进行了小结．对于“三角形的内角和是 180°”的证明，用第一种方法证明的同学非常了不起，因为他用的方法和毕达哥拉斯学派的方法一样．在第二种方法中，若延长 BA 到 E，将 $\angle B$ 转化为 $\angle EAD$，此时，三角形的三个内角就可以转化为以 A 为顶点的一个平角，而这种方法就是欧几里得在《几何原本》中运用的方法，如图 3 所示．教师说道“你们的方法超越了古人的方法，想到了古人没有想到的方法，将三角形的三个内角转化为同旁内角.”以此激励学生，并告诉学生历史上还有很多不同的证明方法，鼓励学生课后继续探究，去寻找其他的证明方法.

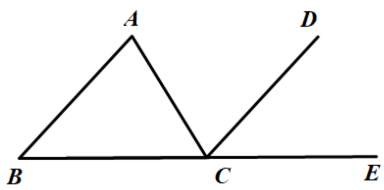


图 3　欧几里得《几何原本》中的方法

另外，鉴于目前初中学生所学几何均属于欧式几何，教师通过历史材料 3 向学生介绍了《几何原本》，以及我国清朝康熙皇帝、美国总统林肯学习《几何原本》的故事，并总结道，“《几何原本》成就了林肯的人生，那么你对它感兴趣，它也会成就你的人生.”希望能在同学们心中播下对几何以及《几何原本》感兴趣的种子.

4 学生反馈

上课班级共 39 位学生，课后，针对本节课所学进行了学生问卷调查．“请用自己的语言描述什么是演绎证明”一题，有 26 的学生能够理解演绎证明的含义，虽描述方式不尽相同，但基本认为演绎证明是“从已知的公理、定理出发，用严密的推理来得到让人信服的结论”，初步具备公理化体系思想．有 32 的同学认为演绎证明是最可靠的，因为它“有理有据，逻辑严密”，还有 7 的同学认为演绎证明没有误差和错觉，比观察和测量更可靠．所有同学都能够理解证明的作用在于“使人信服”．对于本节课学生印象最深的环节，学生提到的有微视频“证明的由来”、“两位同学比身高”、“达尔文的故事”、“三角形内角和的探究”、“钓鱼岛”、“认识很多数学家”等，其中排前三的分别为微视频、“达尔文的故事”以及“三角形内角和的探究”，说明数学课堂中融入“人性化”的环节往往会给学生留下深刻的印象，数学课堂中探究活动的设置不可缺少，探究活动可以让学生自主探究生成知识，并深度理解知识．

从学生问卷反馈可知，本节课作为从实验几何过渡到演绎几何的起始课，以激发学学习几何的兴趣出发点，利用数学史料，融入大量人文元素，达成了相应的教学目标．

5 小结反思

从数学练习的角度看，本节课只是证明了两个学生早就知道的定理，并没有其他关于证明的习题，那么这节课的价值何在？

本节课最重要的价值在于 HPM 的“德育之效”．运用历史材料 1 制作的微视频，不仅让学生认识了几何学鼻祖泰勒斯和欧几里得，还知道了“证明”的由来，明白“证明”的作用——说服别人，从而知道为什么要学习“证明”．此外，在生活中也需要说话、做事要“有理有据”，不可凭空臆测，体会人类的理性精神．学生只有知其因，才能思其义，从而正其心，究其道．不仅体现了数学史的“知识之谐”和“文化之魅”，更体现了数学史的“德育之效”

历史材料 2 中，关于博物学家达尔文的故事，让学生体会到“学有所用”并不是一种口号，是真是存在的．数学来源于生活，学好数学可以为生活服务，提高生活质量是切实可行的．

历史材料 3 中，《几何原本》中的逻辑推理吸引了很多人去研究它，有皇帝也有平民（林肯出生于一个农民家庭）．在展出的《几何原本》上保留着康熙做的笔记，可见康熙在阅读《几何原本》时，是认真对待的．美国前总统亚伯拉罕·林肯缜密的思维和清晰的条理与他认真研究《几何原本》有很大的关系，可以说，逻辑推理成就了林肯的人生．在伟人的榜样激励下，有助于学生树立远大的学习目标．如果有学生对它感兴趣，也有可能成就“这位学

生”的人生.

对于需要用数学方法解决的问题，比如以文字形式表达的结论，如果要用数学的方法证明，那就要转化为数学的形式，相当于“翻译”，然后进行证明．数学文字命题的证明有助于学生积累“转化”的经验，丰富学生的数学素养．在“三角形的内角和等于 180°”探究环节，学生所用的证法与历史上数学家所用的证法的不谋而合，让学生体会与古代数学家进行学术交流的独特感受．学生在感到惊讶的同时，提升学习数学自信心，增强了学习数学的兴趣.

除历史材料所蕴含的丰富德育价值外，教师在引入环节所提到的“钓鱼岛是中国的领土”，渗透了爱国的情感．在课前三角形纸片“操作探究”时，部分学生采用裁剪操作，而部分学生采用折纸操作，教师在课上评价到“我更喜欢折纸的操作，因为环保，纸片还可以再利用.”潜移默化地渗透了环保的意识．另外，本节课在证明三角形内角和定理时，发现有学生利用三角形外角的性质“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和”来证明内角和定理．按照教科书中的几何体系而言，这种证明方法是典型的“循环论证”.“三角形的一个外角等于与它不相邻的两内角之和”是由三角形的内角和定理推导而得，而这种方法用三角形的内角和定理推导而得的结论来证明自身，显然进入了一种循环，是不具有说服力的．再次让学生体会证明的基础在于“已经公认的事实或结论”.

总之，本节课融入数学史，实现了传统的枯燥数学几何课转变为“人性化”的数学课堂，蕴含了丰富的德育元素，让学生切实体会到了学习几何的价值和作用，培养了学生学习几何的兴趣，有助于学生后续几何知识的学习。

参考文献

[1]田载今. 应继续重视几何教学的理性特征[J].课程· 教材· 教法, 2004,24(7): 43-46.

[2]鲍建生. 几何的教育价值与课程目标体系[J].教育研究, 2000,4: 53-58.

[3]课程教材研究所编著.义务教育课程标准实验教科书数学八年级上册[M].北京: 人民教育出版社, 2004: 95-106.

[4]杨裕前,董林伟主编.义务教育课程标准实验教科书数学八年级上册[M].南京: 江苏科学技术出版社, 2004: 134-137.

[5]上海市教育委员会.九年义务教育课本八年级第一册[M].上海: 上海教育出版社, 2006: 84-86.

[6]萧文强.数学证明[M].南京: 江苏教育出版社, 1990: 1-40.

[7]萧文强.“欧先生”来华四百年[J].科学文化评论, 2007,4(6): 12-30.

追溯历史，重构教学路径

——HPM 视角下“平行”的教学

马思聪

（上海市静安区科技学校，上海，200040）

1 引言

“科学的教学方法只是诱导学生去作科学的思考，并不是一开头就教人去碰冷漠的、经过科学洗练的系统。推广这种自然的真正科学的教学的主要障碍是缺乏历史知识”[1]，F. 克莱因的话道出了科学的教学方法的真谛，也道出了实现科学的教学方法的路径。然而，囿于条件的限制，一些主题教材的编写系统性较强，比如沪教版四年级第二学期“平行”的教材编排“呈现城区地图引导学生寻找垂直于同一道路的两条路，在长方形中寻找垂直于同一条线段的两条线段，以此得出‘垂直于同一条边的两条边互相平行’的概念”，如若按照教材的思路进行授课，难免演变成“指导”而非“诱导”。那么，数学史知识能否促进科学的教学方法的实现？本文将结合“平行”的课例进行说明。

2 历史材料及其运用

有关平行的定义和判定在历史上有一些记载，可概括为四类：（1）直观型，如欧几里得（Euclid，公元前 3 世纪左右）在《几何原本》中对平行的定义：“平行直线是在同一平面内的直线，向两个方向无限延伸，在两个方向都不相交”[2]；（2）角度型，比如欧几里得用内错角、同位角、同旁内角等证明两直线平行，并用此性质做出平行直线[3]；（3）距离型，如《墨经》中的“平，同高也”[4]，辛普利丘斯（Simplicius，490-560）的定义“当两条直线向两端无限延伸时，如果它们之间的距离相等，那么它们平行”[5]；（4）混合型，如波赛唐纽斯（Poseidonius，公元前 135-公元前 51）的定义“平行就是两条线既不相交，也不重合，而且两条线间的距离处处相等”[6]。本节课试图将前三种类型的相关史料以及历史上平行的符号（如图 1）融入教学，以实现如下的教学目标：

图 1 历史上平行的符号[7]

（1）借助欧氏定义，通过直观想象初步建立“平行”的概念。

（2）能利用有关平行的经验来判定两条直线是否平行，培养严谨、求真的态度。

（3）经历探究画和折两条平行线的过程，进一步建立平行的表象。尝试创造平行符号，

在历史比较中增强学习数学的信心，感受知识的发生发展过程。

（4）结合生活实例，引导学生用数学的眼光观察生活,经历从现实空间中抽象出平行线的过程，发展空间观念，感受学习“平行”的价值。

3 教学设计与实施

3.1 复习引入，引出平行概念（略）

3.2 引导想象，初建平行概念（略）

让学生通过想象，将不平行的直线转化为平行直线，从这一过程中初步建立平行的概念。

师：难道同一个平面上的 2 条直线都会相交吗？有没有办法让这两条直线延长后也不相交呢？

生：将上面的那条直线转一转。（生上台手势表示）

师：怎样才能说明现在这两条直线不相交呢？

生：延长。

师：（媒体演示直至超出屏幕）可惜我们的屏幕太小，看不到全部。如果直线继续延长，超出屏幕，到达教室门口，两条直线相交了吗？继续往外延长，冲出学校，相交了吗？如果继续往外呢？

……

生：它们永远也不会相交。

接着给出平行的定义，出示欧氏定义，加深学生理解，增强自信。

师：数学上，我们把像这样永远都不相交的两条直线的关系叫做互相平行。你们知道吗？早在 2000 多年前，两条直线互相平行的这个概念就已经出现了！它是由古希腊的一个很伟大的数学家欧几里得提出的。请你们自己阅读：

平行线是在同一个平面内的直线，向两端无限延长，无论哪个方向它们都不相交。

师：看了他的定义，你有什么想说的？

生 1：平行线是两条直线。

生 2：他和我们刚刚说的意思应该差不多。

然后通过巩固练习，找出下图中的平行线（略），接下来让学生联系生活，找出生活中的平行线，巩固“平行”概念。

师：我们周围的世界就是图形和线条的世界。回想一下，生活中你见过哪些延长后也不相交的线？

生 1：黑板的上下两条边和左右两条边。

生 2：桌子相对的两条边。

生 3：教室外面的栏杆。

生 4：操场的跑道。

师：看来生活中类似的例子非常多。老师也搜集了一些图片（斑马线、铁轨等），你能

从中找出互相平行的线段吗？

师：刚刚你们是怎样判断它们是平行的？

生：看出来的。

3.3 错觉图形，得出平行判定

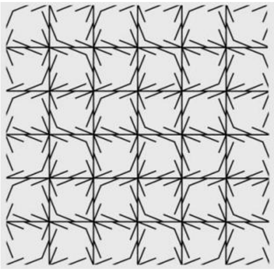


图 2

教师通过视错觉图形（如图 2），让学生感受到直觉的不可靠性，从而引出平行判定定理的探究活动。

师：看来，眼睛有时候会看错，那我们该怎么验证两条直线是否平行呢？

生 1：去延长它们。

师：如果纸张不够大怎么办？去无止境地延长它们现实吗？

生 2：不现实。

师： 那怎么办？我们还可以怎样判断两条直线互相平行？别说你们有困惑了，这个问题连古代数学家们都困扰了很久很久。我们一起来想想办法。

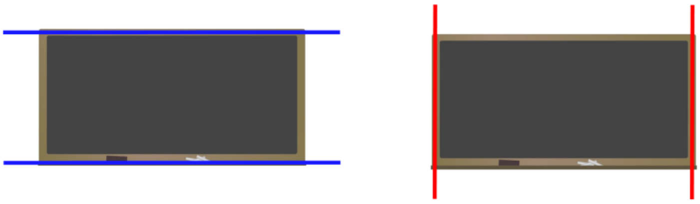


图 3

师：刚刚同学们举的很多例子都是长方形的。我们就以黑板为例（如图 3），请你们再仔细观察，能用什么更好的方法来判断上下两条边所在的直线互相平行呢？请大家小组讨论。

一段时间后，交流讨论结果

生 1：我想量左右两条边的长度。

师：你想量长度的目的是什么？

生 1：如果左右两条边相等，那么我认为上下两条边就是互相平行的。

师：你的想法很好。还有其它想法吗？

生 2：我想用三角尺测量是否有直角。（生上台测量）

师：他找到了两个直角，说明上下两条直线和左边这条直线有什么关系呢？

生 3：上下两条直线都垂直于左边这条直线。

师：谁能完整说说，怎样的直线互相平行？

生：垂直于同一条直线的两条直线互相平行。

师：通过刚刚的学习，我们知道了原来在同一个平面上，两条直线除了相交，还有一种特殊的关系：平行，即两条直线永不相交。我们可以看这两条直线是否同时垂直于一条直线来判断这两条直线是否互相平行。

3.4 探索画法，感悟平行特征

接着让学生独立尝试创作平行线，小组交流方法。

师：学到这里，大家对同一平面上两条直线之间的关系理解得很透彻了。如果还能动手做，那就更出色了。你们能创作一组平行线吗？

要求：（1）工具：方格纸、直尺、不规则纸、三角尺

（2）选择这些材料，自己动手画一画，或折一折，创造出一组平行线

（3） 4 人一组，组内讨论创造平行线的方法，比一比哪一组的方法多。

学生完成后进行汇报交流。

师：你们用了什么方法？

生 1：我们在点图上描的。

生 2：我们用纸折出两个直角。

生 3：我们先画一条直线，再画这条直线的两条垂线。这两条垂线互相平行。

生 4：我们是通过找两个点，然后连起来。

师：你们可真厉害，在这么短的时间里找到了这么多的创造平行线的方法。可是老师现在只有一把三角尺，也没有点图，我想在黑板上画一组平行线，哪种方法比较合适？

学生掌握了更好的方法之后，再次画平行线。

师：现在请你们再用这个方法再画一组更漂亮的平行线。

3.5 创造符号，表示平行关系

首先依托学习垂直的经验，让学生尝试描述平行线之间的关系。

师：如果给黑板上的这两条直线取名为 a 和 b,那么我们可以怎样描述他们之间的关系呢？

生：a 平行于 b;b 平行于 a。

接着让学生尝试创作平行符号，培养创新思维。

师：用文字表示有点麻烦，如果像垂直一样，平行也有符号就好了。现在请你当当小小数学家，你会创作怎样的平行符号？

图 3 学生创造的平行符号

师：如果左边这个作为平行符号，你们认为怎么样？

生：我认为不太好，感觉和等于号太像了！

师：也就是说数学符号和数学语言，我们需要"唯一性"，独一无二才不容易混淆。右边这个呢？

生：我认为这个挺好，没有其它符号和它一样，而且上面两条直线同时垂直于下面那条直线。

然后介绍平行符号的历史，在比较中产生共鸣，感受平行符号是发生发展的，增强学习信心。

师：数学家们当时也陆续创造了很多的平行符号。有没有和你们相似的？（如图 1）

师：你们可真厉害，创造出来的符号和数学家们差不多了！数学家们经历了很多次的创造和修改，才形成了现在的样子。

规范符号表示：a//b,b//a

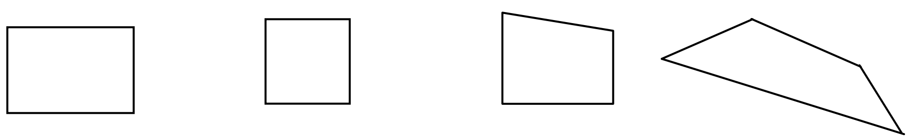
师：请你们将自己创作的平行线用这个平行符号表示出来，并写在旁边。

接着介绍了中国古代画平行性的方法与工具以及与成语"没有规矩，不成方圆"的联系。

3.6 深入思考，体会平行之"用"

体会平行的几何之用：

师：今天我们学习了"平行"，如果从平行的角度去看我们以前学过的四边形，你有什么体会？这些四边形中有平行线吗？有几组？（用规范语言说清哪几组直线互相平行）



①　　②　　③　　④

体会平行的生活之"用"：

师：运动员的跑道为什么要设计成互相平行的？

生：如果跑道不是相互平行的，那运动的时候运动员会撞在一起。

师：铁轨如果不设计成互相平行会有怎样的情况发生？

生：火车就会脱轨。

3.6 总结全课，延伸平行定义。

师：这节课中同学们学习了两条直线平行的位置关系。通过想象，理解了欧几里得关于平行的定义，还通过观察，找到了判定平行的一个方法"垂直于同一条直线的两条直线互相平行"。其实关于平行的定义还有很多，比如我国《墨经》中提到：平，同高也。你知道是什么意思吗？请同学们作为课后作业自行查阅资料进行了解。

4 结语

本节课通过追溯历史，对原有的教学路径进行了重构，体现了以下教育价值。将直观型、角度型、距离型三类数学史料融入平行的教学，让学生感受知识之谐，即平行概念的学习是从直观概念开始的，但鉴于视错觉图形引发的认知冲突，出现了平行的其它定义、判定准则；学生在探索平行的判定准则和尝试平行线的画法中，获得了发现的乐趣，积累了活动的经验，体验探究之乐；学生在尝试平行线的画法中，在教师任务的指引下，画法逐渐减少，在方法的多样性中，在符号条件的方法的减少中，体验到了角度型、距离型的优势。从而感悟方法之美；在符号的创造过程中，学生不仅领略了数学符号的特性，还知悉了今天数学符号是很多数学家努力的结果，体验文化之魅；教师通过融入数学史的平行判定准则和数学符号的探究活动，培养了学生严谨、求真的态度，增强了学生数学学习的信心，获得了德育的发展。正是有了数学史的指引，授课教师才能铺设台阶，诱导学生对平行的定义、判定准则、平行线的画法、平行线的符号等作科学的思考，从而充分体现出数学史对科学的教学方法的价值。

参考文献

[1] Kline,F. Elementary mathmatics from advanced standpoint[M].London:Macmillan&Company, 1932:268.

[2][3] 欧几里得. 几何原本[M]. 西安: 陕西科学技术出版社,2003: 2, 25-28.

[4] 墨子. 墨子间沽[M]. 北京: 中华书局,2001:309

[5][6] Smith, D.E. History of mathematics(vol.2)[M].Boston:Ginn&Company,1925: 279.

[7]Cajori, F. A history of mathematical notations[M]. New York, Dover Publication,1993:411-412.

学术讯息

数学史与数学教育（HPM）工作室启动仪式纪要

王 鑫

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

为了落实“立德树人”的教育根本任务，体现“充分发挥基地的示范、引领和辐射作用，加大培养名优骨干教师力度”的宗旨，上海市“立德树人”数学教育教学研究基地和华东师范大学教师教育学院共同组建数学史与数学教育（HPM）工作室。2018 年 2 月，在全市中小学数学教师中招募了首批学员。3 月 6 日下午，HPM 工作室启动仪式在华东师范大学隆重举行。华东师范大学教师教育学院副院长汪晓勤教授，上海市教委教研室教研员黄华老师、姚剑强老师，晋元高级中学王华老师、复旦附中李秋明老师、华东师大二附中陈双双老师等 HPM 工作室专家委员会委员和工作室学员出席，启动仪式由教师教育学院邹佳晨老师主持。

图 1 HPM 工作室启动仪式

开幕式之后，各位专家委员会委员与学员们进行了交流。黄华老师认为 HPM 工作室的成立将有效促进理论与实践相结合，有利于基础教育的发展，同时帮助数学教师更好地实现专业发展。陈双双老师强调数学教师在教学中要传播数学文化，注重数学理性精神的培养。李秋明老师提到 HPM 更好地追溯了知识的来源，教师可以将数学史作为教学资源。王华老师认为 HPM 发掘出数学的价值，强调数学知识的本质，从而加强数学课堂的人文性与趣味性。姚剑强老师提到了工作室对基础教育的辐射作用，鼓励工作室的学员们向着更高的目标努力。

图 2 专家委员会委员与学员交流

接着，汪晓勤老师作了题为“HPM 课例研究：方法、流程与价值”的学术报告，向学员们介绍了 HPM 工作室成立的背景、国际上 HPM 的起源和发展、HPM 领域的研究课题、数学史融入数学教学与数学课程目标之间的关系、HPM 课例开发的流程和教学取向的数学知识（MKT），并用“五个一”来总结和展望，即“**一个研究领域，一种教学视角，一条专业进路，一批教学案例，一个学习共同体**”。

图 3 汪晓勤老师学术报告

学术报告后，按高中、初中和小学三个学段进行了分组研讨交流。

高中学段的老师们首先进行了自我介绍，然后总结开学第一周开展的课例活动“线面垂直”与“两角和与差的三角公式”，并展望了本学期之后将要开展的活动。初中学段的老师们研讨了两个课例，上海师大附属经纬实验学校的顾海萍老师分享了“邻补角、对顶角”的教学设计，从如何测量墙角线的夹角问题入手，展开对邻补角和对顶角概念的教学；上海中医药大学附属闵行晶城中学的张静老师带来了“有理数的乘法（1）”的教学设计初稿，经过研讨碰撞出思维的火花，改进后的教学设计拟将法国大作家司汤达（1783~1842）小时候学习“负负得正”的故事作为引入，呈现美国数学史家、数学教育家 M·克莱因（1908~1992）的“债务模型”。小学学段的老师们对接下来将要开展的课例活动进行了统筹安排。

图 4 高中、初中、小学学段分组研讨交流

数学史与数学教育（HPM）工作室的成立，预示着 HPM 会继续在中国这片具有深厚底蕴和教育情怀的沃土上更快速、高效地生根发芽、开花结果，具有中国特色的 HPM 理论与实践应该努力扎根上海、争取辐射全国、期待走向世界，为构建中国数学教育理论贡献一份力量。

三月一日天气新，奉贤中学教研行

丁倩文

（华东师范大学教师教育学院，上海, 200062）

春光无限好，正是研讨时。2018 年 3 月 1 日，华东师范大学数学系汪晓勤教授及其 HPM 工作室成员共计 8 人在上海市奉贤中学参加 HPM 工作室教学观摩与研讨活动。

本次活动是在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 的视角展现高一年级“两角和差正余弦公式”的课堂教学，授课教师为 HPM 工作室成员、奉贤中学的张益明老师。

首先张老师由问题引入，请同学们利用 30° 和 45° 的三角比，求 $\cos 15^\circ$ 。由特殊到一般，猜想出两角差的余弦公式，接着需要对此公式进行验证，从而引出公式的推导。张老师选取帕普斯模型并加以改进，引导学生做出辅助线，从而得到两角差的余弦公式。接着张老师播放了历史上两角和与差三角公式的微视频，让学生更直观了解三角公式的模型，在视频最后介绍麦克肖恩的旋转法，从而与课本上的证明方法对应，并让学生翻开教材进行学习。再接着通过诱导公式，引导学生一起弥补帕普斯模型只适用于锐角情况的不足并证明了和角的余弦公式。最后张老师通过课堂练习强调公式的记忆和应用并进行课堂小结。

教学观摩课结束之后的交流探讨中，张老师阐述了自己的教学设想。接下来，听课的老师们对本节课进行简单点评。老师们高度赞同张老师将帕普斯模型改进的方法，不仅呈现方法之美，文化之魅，还培养学生的代换思想为后续学习做铺垫，同时应新课标要求发展学生直观想象、逻辑推理等核心素养。其中，汪老师提到，本节课，张老师不仅沟通了历史和现实这座桥梁同时还沟通了数学和人文这座桥梁。

（张益明老师课堂）

（奉贤中学合影）

三月，这个生命盎然的日子里，正是桃红梨白之际，亦是 HPM 绽放之时。