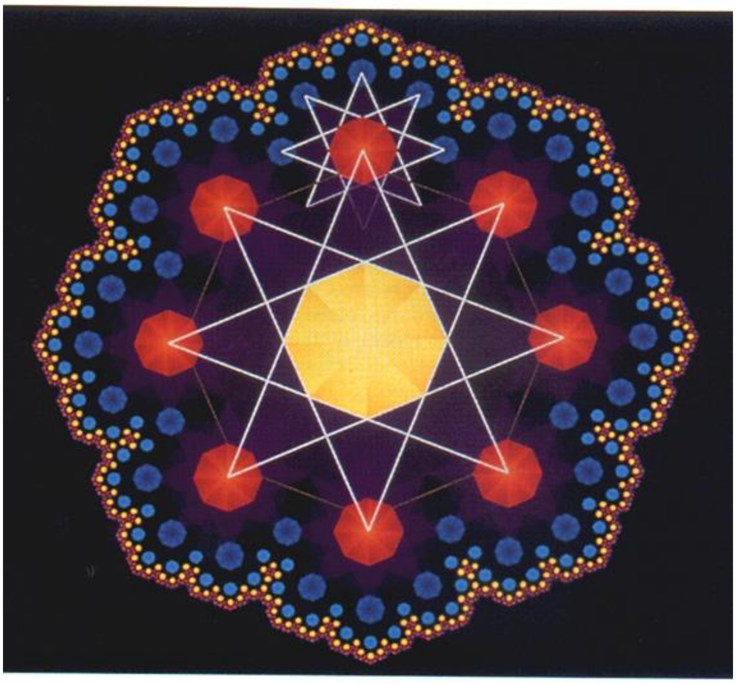
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2018 年第 7 卷第 2 期



《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语——新课标与数学文化

2017 年，教育部颁布了《普通高中数学课程标准（2017）》（简称《标准（2017）》），对课程方案与学科课程标准做了修订，凝练了学科核心素养，进一步强调了人的终身发展，立德树人，发展素质教育。

《标准（2017）》中指出，数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现。史宁中一直在强调，数学核心素养并不是一个新的东西，而是将过去我们所做的凝练出一套体系。数学教育到底要带给学生什么，到底要培养什么样的人，这是一直以来都在关注的事。

继承与发展文明，这是教育要做的事。数学承载着思想和文化，是人类文明的重要组成部分。如果说数学知识是数学的骨血，那数学文化或许就是数学的灵魂，闪耀着文明之光。高中数学课程标准（2017）对数学文化给出了特别说明，数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点，以及它们的形成和发展；还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动。

当然，《普通高中数学课程标准（实验）》（简称《标准（实验）》）中也十分重视数学的文化价值，单独设立“数学史选讲”等专题。但是显然，数学文化与数学史是不等同的，徐乃楠、王宪昌（2009）认为《标准（实验稿）》中所列数学文化相关内容大有数学史内容翻版之嫌。李大潜（2013）针对数学文化的教学提出建议，认为数学文化方面训练的理想的方式应该是结合数学课程特别是数学主干课程的教学来进行，而不是在现有课程之外，以数学文化的名义增加额外的份额。虽然这样的安排让数学文化看似成为一个配角，但真正将数学文化与数学主干课程密切结合起来，却是让这些数学课程有了灵魂，画龙点睛。

或许正是出于对数学文化应有的位置的考虑，《普通高中数学课程标准（2017）》对有关数学文化的相关内容做了较大的调整。“数学史选讲”专题没有了，多的是渗透于整个数学课程结构中的数学文化。在《标准（2017）》的基本理念与课程目标中都提到，要不断引导学生感悟数学的科学、应用价值、文化价值和审美价值，而在《标准（实验）》中并未提炼出“审美价值”，数学的审美正是数学文化能带给学生的，数学文化的渗入能让学生体会数学的灵魂。同时，在基本理念中还强调了要精选课程内容，“注重数学文化的渗透”。在整个课程结构的设计中，重视数学文化也是设计依据之一，在高中数学课程结构中，数学文化区别于其他具体的教学内容，融入整个课程内容中。数学文化的传播不再独立于数学主干课程而存在，它让数学变得生动起来，让学生在学习数学主干课程时就感受到这份人类智慧。

与此同时，这样的渗入式的数学文化教育，也给教师提出了更高的要求。传播数学文化，让学生在数学教育中体会到文明之光，我们能做的还有很多。

目 录

刊首语……………………………………………………………………………………李卓忱 I

理论探讨

数学符号史在高中数学教学中的应用与价值 ……………………何伟淋，汪晓勤 1

历史研究

英美百年教科书中的周期函数定义 ……………………………………………陈莎莎 9

教学实践

HPM 视角下的“轴对称图形”的教学 …………………………………………刘轩如 24

HPM 视角下的“邻补角、对顶角”教学 ………………………顾海萍，孙丹丹 30

HPM 视角下“线面垂直判定定理”教学 ………………………高振严，何伟淋 39

活动信息

HPM 活动简讯…………………………………………………………………………… 47

CONTENT

FOREWORD··**Li Zhuochen I**

THEORETICAL DISCUSSION

The application and value of the history of mathematical symbols in high school mathematics teaching······································**He Weilin, Wang Xiaoqin 1**

HISTORICAL RESEARCH

The definition of periodic function in English and American textbooks ············ ··**Chen Shasha 9**

TEACHING PRACTICE

The teaching of "axisymmetric figure" from the perspective of HPM··············· ··**Liu Xuanru 24**

The teaching of "adjacent supplementary angle and vertical angle" from the perspective of HPM ······································ **Gu Haiping, Sun Dandan 30**

The teaching of the "judgement theorem of the line pedicular to the plane" from the perspective of HPM ·································· **Gao Zhenyan, He Weilin 39**

ACTIVITY INFORMATION

HPM Practical Activity ··**47**

理论探讨

数学符号史在高中数学教学中的应用与价值

何伟淋　汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

数学符号是数学概念、命题、思想、方法、语言的载体，数学教学离不开数学符号的教学。由于教科书中有关历史知识的缺失，数学符号往往以"完成时态"被空降在数学课堂中。教师在对符号进行教学时，往往只关注符号的识记，而忽视其所蕴含的意义和数学思维[1]，从而未能充分体现数学符号的教育价值。

《普通高中数学课程标准》（2017 版）在课程结构一节中提出了"数学文化融入课程内容"的要求，并指出，数学文化包含了数学的思想、精神、语言、方法、观点以及它们的形成和发展。要将数学文化融入数学课程，必然涉及数学符号及其历史。Tzanakis 和 Acarvi 在总结数学史的教育价值时指出：数学史有助于学生理解数学符号、术语、计算方法、表征方式、数学语言的演进过程，从而揭示数学和数学活动的本质[1]。可见，数学符号的历史是数学史不可分割的一部分。

近年来，随着 HPM 实践研究的深入开展以及 HPM 学习共同体的日益扩大，产生了一系列融入数学史的中学课例（简称为 HPM 课例）。然而，只有极少数课例涉及零星的数学符号史，且并未发挥其应有的教育价值。究其原因，教师对数学符号的历史还缺乏了解，对其教育价值更缺乏深刻的认识。有鉴于此，我们对与高中数学典型概念相关的符号史进行考察，对其教育价值进行分析，为今后 HPM 视角下的数学概念教学设计和实施提供参考。

2 与高中数学概念相关的符号史

2.1 正弦的符号

三角函数概念有着悠久的历史。古希腊天文学家希帕克斯（Hipparchus，公元前 2 世纪）、梅内劳斯（Menelaus，1 世纪）和托勒密（Ptolemy，2 世纪）因为天文学的需要而相继制作了弦表，相当于计算半角正弦的两倍。公元 6 世纪，印度数学家阿耶波多（Aryahbata）使用了半弦，称之为为 ardha-jya（梵文音译），简写成 jya 或 jiva。这个词传入阿拉伯后，阿拉伯人将其音译为"jiba"，但因为这个词并无实际意义，于是，阿拉伯人又将其改为有意义的词

“jaib”，意为“海湾”。12 世纪，欧洲人将“jaib”译为拉丁文“sinus”。最终，sinus 被译为英文“sine”[2]。17 世纪荷兰数学家吉拉德（A. Girard, 1595-1632）采用了简写符号“sin”。

三角学于明代传入中国，邓玉函（J. Terrenz, 1576-1630）在《大测》中给出“正弦”、“余弦”、“正切”等名词。因此，汉语“正弦”一词经历以下传播路径：梵语→阿拉伯语→拉丁语→汉语。

2.2 对数符号

15-16 世纪，数学家们利用等差数列和等比数列之间的对应关系来简化计算。例如，德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487~1567）在《整数算术》中给出了双数列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64\ldots \end{array}$$

之间的以下四种对应关系：第二个数列中两数之积，对应于第一个数列中相应两数之和；第二个数列中两数之商，对应于第一个数列中相应两数之差；第二个数列中某数之乘方，等于第一个数列中相应数之若干倍；第二个数列中某数之方根，对应于第一个数列中相应数之若干分之一。但由于等比数列相邻项的间隔越来越大，上述对应关系并不实用。

为此，苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）创用了一个首项为 10^7、公比为十分接近于 1 的 0.9999999，使得任意相邻两项之间的间隔不超过 1，于是，新数列将 1-10^7 之间的任意正整数都囊括其中。利用双数列

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 10^7 & 10^7\left(1-10^{-7}\right) & 10^7\left(1-10^{-7}\right)^2 & 10^7\left(1-10^{-7}\right)^3 & 10^7\left(1-10^{-7}\right)^4 & \ldots \end{array}$$

的对应关系，纳皮尔制作了庞大的对数表，他把等差数列中的数称为等比数列中相应数的对数（logarithm），这便是我们今天使用的对数符号 log 的由来。

logarithm 这个词源于希腊文中的两个词λογος（比）和αριθμος（数）的组合，原意为“比数”。所谓“比数”，是指等比数列中某一项与首项之间所含公比的个数。比如，在纳皮尔的等比数列中，$10^7\left(1-10^{-7}\right)^4$ 与 10^7 之间含有四个公比 $q=1-10^{-7}$，即

$$\begin{aligned} q &= 10^7\left(1-10^{-7}\right):10^7 \\ &= 10^7\left(1-10^{-7}\right)^2:10^7\left(1-10^{-7}\right) \\ &= 10^7\left(1-10^{-7}\right)^3:10^7\left(1-10^{-7}\right)^2 \\ &= 10^7\left(1-10^{-7}\right)^4:10^7\left(1-10^{-7}\right)^3 \end{aligned}$$

故 $10^7\left(1-10^{-7}\right)^4$ 的对数为 4。在我们今天看来，这个“比数”不过就是斯蒂菲尔所说的指

数，但那个时候，笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）尚未发明指数记号，纳皮尔很可能也没读过斯蒂菲尔的书，所以他只能用公比的个数来刻画等差数列中的对应项。

对数表于明代传入中国，明代数学家薛凤祚（?-1680）将 logarithm 译为"对数"，即"对应之数"。

2.3 函数符号$f(x)$

函数概念经历了漫长的演进过程。17 世纪，莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）创用 functio 一词，用来表达与曲线相关的几何量（横坐标、纵坐标、切线段、法线段、次切线、次法线）。18 世纪，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中给出函数的解析式定义："一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。"[3]这个定义对后世产生了深远的影响。即使到了 19 世纪，德国数学家狄利克雷（L. Dirichlet, 1805-1859）给出函数的现代定义（变量对应），人们依然普遍采用解析式定义[3]。英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806-1871）在《代数学基础》中，美国数学家罗密士（E. Loomis, 1811-1889）在《解析几何与微积分基础》中，都采用解析式定义，李善兰（1811-1882）和伟烈亚力（A. Wylie, 1815-1887）在翻译上述二书时，将 function 译为函数，即包含变数 x 的式子。

我们今天再也熟悉不过的函数记号 $f\left(x\right)$ 就是欧拉引入的。在这个记号中，f 是拉丁文 functio（对应的英文为 function）的首字母。括号中的 x 表示自变量，$f\left(x\right)$ 表示"包含 x 的解析式"，因此，欧拉的函数记号对应于函数的解析式定义。我们知道，在函数的对应说中，函数不定义为变量本身，而是两个集合的元素之间的一种对应法则，其记号为"$f: A\to B$"。但在高中数学中，尽管我们采用了对应说，但习惯上仍采用欧拉的记号。

2.4 数列通项的符号a_n

尽管我们今天已习惯于用记号 a_n 来表示数列的第 n 项，但历史上，这个记号却是姗姗来迟的。16 世纪德国数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）在《实用算术概论》中只用文字来表达等差和等比数列的和。前者为："首项和末项相加，和乘以项数，所得乘积的一半，为所有各项的和。"后者为："末项减去首项，所得的差除以公比与 1 的差，商加上末项，即得所有项的和。"[4]17 世纪英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）在其《统一的数学》中用符号给出等差数列求和公式为

$$\frac{T\left(A+V\right)}{2}=S\text{，}$$

其中 A、V 和 T 分别为等差数列的首项、末项和项数；等比数列求和公式为

$$\frac{VR-A}{R-1}=S,$$

其中 A，V，R 分别为等比数列的首项、末项和公比[5]。

18 世纪，欧拉在《代数基础》中分别用 a、z、n 和 d 来表示等差数列的首相、末项、项数和公差，通项公式为 $z=a\pm(n-1)d$，前 n 项和为 $\frac{n(a+z)}{2}$ [6]。1815 年，英国数学家赫顿（C. Hutton, 1737-1823）在《数学与哲学辞典》中沿用了欧拉的记号。19 世纪下半页，美国数学家罗密士、温特沃斯（G. Wentworth, 1835-1906）、利莱（G. Lilley, 1854-1904）等均在各自的代数教科书中用 a 和 l 来表示数列的首、末项[7][8][9]。

直到 19 世纪末，美国宾夕法尼亚大学的数学家费歇尔（G. E. Fisher, 1863-1920）等在《代数基础》中首次采用带有下标的记号，将数列表示为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，将等差数列的通项和求和公式分别写成[10]

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d,$$

等比数列的通项和求和公式分别写成

$$a_n=a_1r^{n-1},$$

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1-a_nr}{1-r}。$$

事实上，在欧拉给出函数解析式定义并引入函数记号后的漫长时间里，函数并非数学教科书中的核心概念，而数列却始终是代数教科书的重要内容之一，数列与函数风马牛不相及。只是到了 20 世纪，函数概念成为中学数学课程核心概念之后，数列才逐渐被视为特殊的函数。只有当数列被视为函数之后，数列通项的符号 a_n 才应运而生。

2.5 虚数单位 i

虚数在历史上曾引起数学家强烈的认知冲突。16 世纪意大利数学家邦贝利（R. Bombelli, 1526–1572）解三次方程时遇到一个奇怪的现象：一方面，利用卡丹公式解得方程 $x^3=15x+4$ 有三个根 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$，但是用分解因式法却发现 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=4$，由此得到等式 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$。该等式一边是实数，一边却出现负数平方根，这在当时的数学家看来是一个矛盾。正是这一矛盾，才

促使邦贝利以及那个时代的其他数学家对虚数进行研究。但是，在数学家给出虚数的几何表示法之前，人们一直难以真正接受虚数。

17 世纪，笛卡儿在《几何学》（1637）中为“负数的平方根”取了一个很不幸的名字——imaginary numbers，意为“想象中的数”，使其蒙上一层神秘的面纱。18 世纪，欧拉在《代数基础》中写道：

> “由于一切可以想象的数要么大于零，要么小于零，要么等于零，因此，我们显然不能将一个负数的平方根归入可能的数之中。我们必须说，它是一个不可能的量。……它们通常被称为虚量，因为它们只存在于想象之中。”[6]

即使到了 19 世纪，虚数似乎仍未为人们所普遍理解和接受。19 世纪，德摩根在其《数学学习与困难》中写道：

“虚数$\sqrt{a}$与负数$-$b相似，当作为问题的解出现时，它们都表示了某种矛盾或荒谬性。就实际意义而言，它们都是假想的数，因为$0-a$和$\sqrt{-a}$一样不可理解。”[11]

欧拉用“imaginary”一词的首字母 i 来表示$\sqrt{-1}$。可见，与正弦、对数的符号一样，虚数单位符号 i 反映了虚数一词的早期历史，蕴含着早期数学家对于虚数的认识。

3 数学符号史的教育价值

3.1 认识数学本质，完善数学信念

数学符号的历史告诉我们，我们今天耳熟能详、运用自如的符号并非从天而降，并非自古有之，并非一蹴而就，它们的背后都凝聚着丰富、精彩的历史。著名科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）在评价卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）《数学符号史》时指出，此书给予我们的主要启迪是“人类进步的缓慢与艰辛”[12]。数列通项的符号a_n，在我们今天看来再也平常不过，但令人惊讶的是，历史上，从文字语言到大写字母，到小写字母，再到以项数 n 作为下标的现代符号，经历了三百多年；而在 16 世纪符号代数诞生以前的漫长岁月里，人们根本不知道如何表达一个数列的通项！

因此，教师在课堂上介绍数学符号的历史，可以让学生了解数学活动的本质：数学是人类的文化活动，是人在做数学；数学符号乃是人创造的产物，它不是一成不变的，而是会经历从无到有、从不完善到完善的过程。由此，可以让学生感悟到数学是一门人性化的、不断演进的学科，而非一个僵化的真理体系，从而树立正确的数学信念。

3.2 对照古今差异，消除错误理解

图 1 给出了数学符号与原始术语、现代术语、中文译名之间的联系。

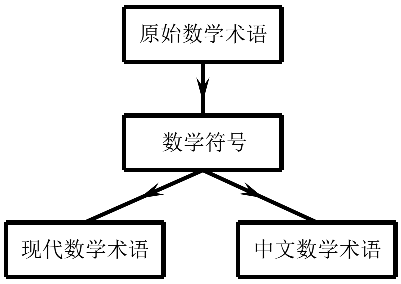


图 1 数学符号与数学术语之间的关系

从历史中可以清楚地看到，与数学概念相关的那些数学符号并非冰冷、枯燥和无意义的字母，而往往是原始数学名词的缩写，蕴含着历史上人们对概念的理解。随着数学的发展，数学概念的内涵往往会发生变化，而术语和符号却沿用至今，这就导致名称和内涵的分离，造成学生在概念理解中上的困难。

正弦符号 sin 源于半弦，是一条线段。事实上，在 16 世纪以前，所有六种三角函数都被定义为线段，而不是比值。清初数学家梅文鼎（1633-1721）在《平三角举要》中解释："割圆直线，如弓之弦，谓之通弦，通弦半之，谓之正弦。"[13]而余弦不过是"余角之正弦"而已。在图 2 中，α 的正弦 AB 是弦 AC 的一半，α 的余弦 OB 即为α 的余角的正弦 AD，即余弦的名称蕴含了诱导公式$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$。

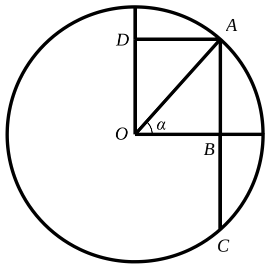


图 2 正弦和余弦的词源

在我们今天，正弦被定义为一个比值，只有在单位圆中，古今"正弦"是同义的。"正弦"的内涵发生了变化，而"正弦"这一名称和 sin 这一符号却沿用至今。

类似地，函数符号 $f(x)$ 源于 18 世纪的函数定义，即"函数是包含变量 x 的解析式"，但在今日高中数学教科书中，函数被定义为集合之间的对应法则。"函数"的内涵发生了变化，而"函数"这一译名以及 $f(x)$ 这一符号却沿用至今。在今天看来，虚数并非"纯属虚构"或"子虚乌有"，但"虚数"这一译名以及符号 i 仍沿用至今。这一名称就像"无理数"一样，容易让学生望文生义，导致困惑。

因此，教师可以在教学中向学生解释数学符号所蕴含的原始意义，让学生明白，作为文字缩写的数学符号往往反映了一个数学概念在历史上曾经被赋予的内涵，却不一定能真实反

映其现代内涵。通过揭示概念内涵的古今差异，消除学生因为望文生义而产生的困惑和误解，领会“正弦非真弦，虚数本不虚”的道理。

3.3 揭示知识之源，促进概念理解

对数符号 log 的历史为我们提供了很多信息。首先，对数的名称源于等差和等比数列的对应关系，与今日教科书中的定义迥然不同。其次，对数发明的动因是简化计算，而非寻求指数运算的逆运算。真数之于对数，犹如演员之于替身。对数在 17 世纪常常被称为假数、借数，通过假数的加减运算，就可以实现真数的乘除运算。清代康熙皇帝主编的《数理精蕴》下编“对数比例”称：“对数比例……以借数与真数对列成表，故名对数表。……其法以加代乘，以减代除，以加倍代自乘，故折半即开平方。以三因代再乘，故三归即开立方。推之至于诸乘方，莫不皆以假数相乘而得真数。盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也。”[14]

对数符号 log 所蕴含的意义是一个真数（等比数列中的项）所对应的假数（等差数列中的项），教师在课堂上可以通过图 3 所示的对应关系，让学生理解并记忆对数的运算法则。

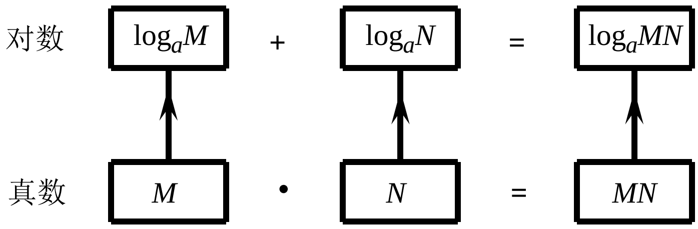


图 3 真数和对数之间的对应关系

今日教科书是用幂指数来定义对数的，学生从中感受不到使用对数的必要性。教师在教学中揭示对数符号 log 的意义，让学生回到历史的起点，感受对数背后的动因，从而促进他们对于对数及其运算法则的理解。

4 结语

从以上分析可见，数学符号的历史能帮助学生认识数学和数学活动的本质，从而树立健全的数学观；能够解释数学概念名称和内涵分离的现象，消除学生的困惑；能够揭示相关概念的原始意义和产生的动因，促进学生对概念的理解。

因此，要从 HPM 的视角设计和实施高中数学概念教学，数学符号史是不容忽视的素材。在课堂教学中，我们可以用三种不同方式来运用符号史。

一是附加式。教师可以直接介绍符号的历史，例如，在“任意角的三角函数”一课中，直接介绍符号 sin 的来历，追溯正弦的起源；在“函数的概念”一课中，直接介绍函数符号 $f(x)$的来历，追溯函数概念的起源。在“对数的概念”一课中，直接介绍对数符号 log 的原始

涵义，领会对数诞生的动因。

二是顺应式。教师可以让学生探讨符号的涵义。例如，在“数系的扩充与复数的引入”一课中，教师可以让学生猜想虚数单位符号“i”所代表的原始名词（可能的猜想有：impossible numbers，inexistent numbers，illusory numbers，inconceivable numbers，insignificant numbers，等等），引导学生走进古人的心灵之中，追溯虚数的历史，并感受历史相似性。

三是重构式。教师可以引导学生经历现代数学符号的演进过程。例如，在“数列的概念”教学中，教师在通过实例引入数列的概念后，让学生思考：如何表示数列各项呢？学生可能会用文字（第一项、第二项、第三项、…）、字母（a，b，c，…）来表达，教师指出文字和字母表示方式的局限性，最终形成今天的带有下标的符号。

参考文献

[1] Tzanakis, C. & Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey [C]. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 201-240.

[2] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[3] 汪晓勤. 19 世纪中叶之前的函数解析式定义[J]. 数学通报, 2015, 54 (5): 1-7;12.

[4] Clavius, C. *Epitome Arithmeticae Practicae* [M]. Romae: Typographia Dominici Basae, 1583.192-200.

[5] Wallis, J. *Opera Mathematica*(Vol.1) [M]. Oxoniae: E. Theateo Sheldoniano. 1695. 145-159.

[6] Euler, L. *Elements of Algebra* [M]. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, 1822.

[7] Loomis, E. *Elements of Algebra* [M]. New York: Harper & Brothers, 1856. 234-238.

[8] Wentworth, G. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Ginn & Company, 1891. 335-340.

[9] Lilley, G. *Elements of Algebra* [M]. New York: Silver, Burdett & Company, 1894. 373-382.

[10] Fisher, G. E, Schwatt, I. J. *Elements of Algebra* [M]. Philadelphia: Fisher & Schwatt, 1899. 380-390.

[11] De Morgan. *On the Study and Difficulties of Mathematics* [M]. Chicago: Open Court Publishing Company, 1902. 155.

[12] Sarton, G. Review of Cajori’s *A History of Mathematics Notations* (I & II) [J]. *Isis*, 1929, 12 (2): 332-336.

[13] 梅文鼎. 平三角举要[M]. 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇(数学卷第 4 册). 郑州: 河南教育出版社, 1994. 485-387.

[14] 康熙. 数理精蕴[M]. 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇数学卷（3）, 郑州: 河南教育出版社, 1998. 1144.

历史研究

英美百年教科书中的周期函数定义

陈莎莎

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

日出日落，寒来暑往，自然界中有许多“按一定规律周而复始”的现象。这种按一定规律不断重复出现的现象称为周期现象。周期现象是自然界中的一类基本现象，周期函数是刻画周期现象的函数模型。而三角函数是一类重要的周期函数。在高中数学十大难点概念的调查研究中，周期函数的概念被认为是难点之一[1]。而学生对周期函数存在的错误认识有：周期函数一定存在最小正周期、周期函数的定义域可以是有界集、认为满足 $f(wx+T)=f(wx)$ 的 T 就是周期、周期函数只有一个周期、只有三角函数才是周期函数、认为周期函数的图像特征是“重复”或者“有规律”的[2]。

在高中数学课程编排中是以三角函数为载体引出周期性这一概念的。在人教 A 版、沪教版教材中，是先讲三角函数的图像，再讲周期函数的概念，即让学生先借助三角函数的图像观察“周而复始”、“重复出现”等特点，进而抽象、提炼出周期函数的概念。而在苏教版教材中，是先讲函数的周期性，再讲三角函数的图像，也就是从三角函数的定义，从诱导公式的使用，也就是从前面的研究过程中抽象出周期性的概念。北师大版是先讲周期现象，由任意角的三角函数的定义引发，而抽象出周期性的概念。

那么，最早的周期函数是三角函数吗？周期函数的定义是怎么样的？为了寻找上述问题的答案，我们对英美早期教科书中 62 本教科书进行深入考察，试图勾勒出周期函数概念的历史。我们着重回答以下问题：（1）周期函数的概念是如何产生的？（2）英美百年教科书中出现了哪些周期函数的定义？又是如何刻画描述三角函数的周期性？

2《无穷分析引论》中的三角函数的周期性

1748 年，欧拉出版他的数学著作《无穷分析引论》[3]，将函数确立为分析学的最基本的研究对象。在上册第八章《来自圆的超越量》中，欧拉在这一章重新审视了许多以前作品中的定理，公式，方程和计算。在这样做的时候，他研究了周期性行为，例如，他通过三角函数的和角公式来描述三角函数的周期性。

若 y，z 为两段弧，则：

$$\sin(y+z)=\sin y\cos z+\cos y\sin z$$
$$\cos(y+z)=\cos y\cos z-\sin y\sin z$$
$$\sin(y-z)=\sin y\cos z-\cos y\sin z$$
$$\cos(y-z)=\cos y\cos z+\sin y\sin z$$

将这四个公式中的弧依次换成$\frac{1}{2}\pi,\pi,\frac{3}{2}\pi$等，得到：

表 1 《无穷分析引论》中的诱导公式表 1

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi+z\right)=+\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi+z\right)=-\sin z$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi-z\right)=+\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi-z\right)=+\sin z$
$\sin(\pi+z)=-\sin z$ $\cos(\pi+z)=-\cos z$	$\sin(\pi-z)=+\sin z$ $\cos(\pi-z)=-\cos z$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+z\right)=-\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+z\right)=+\sin z$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-z\right)=-\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-z\right)=-\sin z$
$\sin(2\pi+z)=+\sin z$ $\cos(2\pi+z)=+\cos z$	$\sin(2\pi-z)=-\sin z$ $\cos(2\pi-z)=+\cos z$

而如果 n 表示某个整数，则：

表 2 《无穷分析引论》中的诱导公式表 2

$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=+\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=-\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=+\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=-\cos z$
$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=-\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=+\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\sin z$

$\sin\left(\dfrac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\sin z$ $\cos\left(\dfrac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\cos z$	$\sin\left(\dfrac{4n+4}{2}\pi-z\right)=-\sin z$ $\cos\left(\dfrac{4n+4}{2}\pi-z\right)=+\cos z$

并指出这些公式对正整数 n 和负整数 n 都成立。由上表可看出《无穷分析引论》中主要通过诱导公式来描述三角函数的周期性，主要对 $\frac{1}{2}\pi,\pi,\frac{3}{2}\pi$ 等值进行相应的描述。

由上可知，欧拉以 $\frac{(4n+k)}{2}\pi+x(k=1,2,3,4)$ 的形式表示了所有的倍数，其中 $k/2$ 代表圆的点，而 $4n/2=2n$ 代表循环的重复周期。周期性被有意义地用作限定新函数的行为的属性。

同时欧拉首次把三角函数写成无穷乘积形式：

$$\sin z=z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\cdots$$

由此可知，只要弧 z 的长度令任何一个因式为零，也即只要 $z=0$，$z=\pm\pi$，$z=\pm2\pi,\ldots$，或 $z=\pm k\pi$ 的时候，k 为任何整数，这段弧的正弦就为零。

而在下册第二十一章《超越曲线》当中，欧拉研究了一个新的函数的周期性。欧拉构造了一个新的曲线 $\frac{y}{a}=\arcsin\frac{x}{c}$，即纵标与正弦为 x/c 的圆弧成正比。由于同一个正弦 x/c 对应于无穷多个弧，可见这里的纵标 y 是无穷多值函数。纵标线与另外一些直线都在无穷多个点处与这里的曲线相交。这是它显然地区别于代数曲线的性质，且线段 $E^1E^2,E^2E^3,E^1E^{-1},E^{-1}E^{-2}$ 及 $F^1F^2,F^2F^3,F^1F^{-1},F^{-1}F^{-2}$ 都等于 $2a\pi$。

虽然欧拉在这里没有明确地指明三角函数的周期性，但他利用曲线行为，表征了正弦函数的周期属性。

对于 20 世纪中叶以前西方三角学教科书中的三角函数的周期性，笔者将其分为以下三个阶段：1.萌芽时期；2.周期性概念的出现；3.形式化周期函数的出现。

3 萌芽时期

在历史上，周期函数的出现与周期现象有关。在考察的三角学教科书中，最开始与时间的运动有关，例如 Keith（1810）对一天给出了明确的描述：由任何一天离开子午线，直

至第二天返回同一子午线的时间间隔被称为太阳日，并受到黄道倾斜以及地球在其轨道上的不平等运动的不断变化[4]，这是一个人为定义的时间。Bonnycastle（1818）给出了一月的定义:月份是月亮重新回到刚开始升起时那一点所需经历的周期，由 27 天组成[5]。

实际上时间的周而复始蕴含着物体运动的周而复始，Thomson（1825）在《平面与球面三角基础》一书中提到了天体的运动规律，虽未具体涉及周期性，但在叙述中出现了一些蕴含周期性的影子。并给出了如下定义：（1）太阳两次经过子午线所需的平均时间为 23 小时 56 分钟。（2）恒星两次经过子午线所需的时间间隔为 23 时 56 分，被称为恒星天数[6]。

Day（1824）从天体的转动类比到角终边的转动，并给出了如下定义[7]：已知圆的度数不超过 360 度。而天体在同一圆轨道内会有一些连续的转动，例如地球几乎按同一轨道年复一年绕太阳转动。在天文计算中，通常有必要将不同的公转轨道加在一起，其总和可能超过 360°，同理也有可能小于 360°。而公转超过一整圈的天体，会转动到之前转动过的一个点。因此正弦、正切的度数可以大于 360°。若一个或多个圆周增加至任何弧，它将到达之前相同的点。由此，对任意弧 x，若增加一整个圆周长 C 或 360 度，则满足：

$$\sin x = \sin(C + x) = \sin(2C + x) = \sin(3C + x), \text{etc}.$$
$$\tan x = \tan(C + x) = \tan(2C + x) = \tan(3C + x), \text{etc}.$$

这本书指出引入大于 360 度角的必要性，天体需绕着轨道连续运转，而不同的公转圈数需累加。同时可发现此时弧度制还未出现，书中用 C 来代表整个圆周长。

可见，早期三角学教科书中，周期与时间的变化有着密不可分的联系，物体两次经过一个固定位置的时间间隔称之为周期。同时这一时期，三角教科书大多从天体的运动研究三角函数的周期性，但都未明确提及周期函数这一概念。

4 周期性在三角函数中的体现

在我们考察的西方三角学的教科书中，最早出现周期性这一概念的是 1828 年 Lardner 的《平面和球面三角学分析论》。在这一时期，周期概念与三角函数有着密切的联系。这一时期，出现了以终边定义为代表的描述性定义，以及诱导公式为代表的定义，其象征着周期函数形式化定义的萌芽。

4.1 终边定义

在直角坐标系中，角的终边绕原点旋转 360°后回到原来的位置。角的周而复始的变化规律称为周期性。此类定义利用周期性来刻画角的周而复始的变化规律，同时与单调递增和递减等性质相区分，但所给出的周期性的定义比较粗略，仅具有周而复始的特点。

例如，Wheeler（1877）给出了任意角的周期性研究，在探究$\varphi \pm k \cdot 360^{\circ}$（$k$ 为整数）时的函数值时：对于任意象限内的任意角 XOP，令其角度值为φ。当角度φ增加或减少 360°的整数倍时，最终值仍等于角 XOP 的值。即当 k 为整数时，φ 与$\varphi \pm k \cdot 360^{\circ}$在数值上和符号上所对应的三角函数值相同[8]。三角函数也由这一性质而被称为周期函数，而正弦函数与余弦函数的周期为2π。

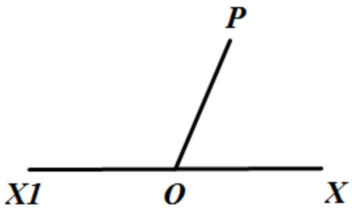


图 1

Oliver（1881）在描述函数的周期性时，指出对于任意角度 θ 和$2n\pi+\theta$（n 为任意整数)所对应的三角函数值都是相同的。由于$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots \pm 2n\pi$代表向前或向后转过 1，2，…，$n$ 圈（n 为任意正整数与负整数），则角度$\theta, \pm 2\pi+\theta, \pm 4\pi+\theta, \ldots \pm 2n\pi+\theta$所对应的位置均为边 OP；对于每个这样形成的角度，其 r，x 和 y 都是相同的，则其对应的三角函数值都是相同的（同理，对于任意负角-θ 和正角$2\pi-\theta$，其对应终边相同，则所对应的函数值也相同）。因此称三角函数为周期函数，而三角学也由此被定义为“周期函数的代数分支”[9]。Wells（1883）也基于终边类似地描述三角函数的周期性[10]。

4.2 诱导公式定义

此类定义开始尝试形式化定义，但仅利用诱导公式来判断三角函数的值相等，继而给出三角公式周期性的定义。

Lardner（1828）研究三角级数时，给出以下对周期性的定义[11]：如果 x 的值与一个圆周或 2π 相等，则该级数将是周期性的，也就是在一定项后，相同的值将不断出现。若弧度 x 至 2π 的最小整数值为m', n'，因此：

$$n'x = 2m'\pi$$

在这种情况下，当此级数持续到n'项，则$n'+1$项将是：

$$\sin(A+n'x) = \sin(A+2m'\pi) = \sin A$$

以同样的方式，下一项将是：

$$\sin[A+(n'+1)x] = \sin(A+x+2m'\pi) = \sin(A+x)$$

而 Seaver（1871）仅用列表法来表示三角函数的图像，并用以下式子表示三角函数[12]：

$$\sin k\pi = 0 \qquad \sin\frac{2k+1}{2}\pi = (-1)^k$$
$$\cos k\pi = (-1)^k \qquad \cos\frac{2k+1}{2}\pi = 0$$
$$\tan k\pi = 0 \qquad \tan\frac{2k+1}{2}\pi = \infty$$

在描述三角函数呈周期性变化的值时，通过式子：

$$\begin{aligned}\sin\phi &= \pm\sin(2k\pi\pm\phi) = \mp\sin[(2k+1)\pi\pm\phi)] \\ &= \mp\cos[\frac{4k+1}{2}\pi\pm\phi)] = \pm\cos[\frac{4k-1}{2}\pi\pm\phi)] \\ \cos\phi &= \cos(2k\pi\pm\phi) = -\cos[(2k+1)\pi\pm\phi)] \\ &= \sin[\frac{4k+1}{2}\pi\pm\phi)] \quad = -\sin[\frac{4k-1}{2}\pi\pm\phi)] \\ \tan\phi &= \pm\tan(k\pi\pm\phi)\end{aligned}$$

而证明了对于角度 φ 和 α，当且仅当 $\varphi = 2k\pi + a$ 时，两个角度对应的三角函数值相同（而不是相反的），即：

$$\sin\varphi = \pm\sin a, \cos\varphi = \pm\cos a, \tan\varphi = \pm\tan a$$

Clarke（1888）结合三角函数的诱导公式给出了以下定义：圆函数是周期性的，当 x 从 0 增至∞，相同的函数值以 2π 为间隔重复。即 x 所对应的函数值与 $x+2n\pi$ 所对应的函数值相等，其中 n 为任意整数。$\cos x, \sin x, \sec x, \csc x$ 的值以 2π 为间隔重复，$\tan x, \cot x$ 的值以 π 为间隔重复。同时还指出了双曲线函数具有类似的周期性[13]。如：

$$\cosh 2n\pi i = \cos 2n\pi = 1, \sinh 2n\pi i = i\sin 2n\pi = 0$$

并给出了以下公式：

表 3

圆函数	双曲函数
$\sin(x+2n\pi) = \sin x;$ $\cos(x+2n\pi) = \cos x;$ $\tan(x+n\pi) = \tan x;$ $\cot(x+n\pi) = \cot x;$	$\sinh(x+2n\pi i) = \sinh x;$ $\cosh(x+2n\pi i) = \cosh x;$ $\tanh(x+n\pi i) = \tanh x;$ $\coth(x+n\pi i) = \coth x;$

Wylie（1955）由表格推断出三角函数的周期性，并根据诱导公式 $\sin(x+2\pi) = \sin x$ 推出 2π 为正弦函数的周期[14]。Miller（1894）和 Perlin（1955）由诱导公式及函数值不断地重复来描述三角函数的周期，且周期均为最小正周期[15-16]。Bowser（1892）基于终边定义及诱

导公式描述三角函数的周期性[17]。

Wade（1953）还给出周期的定义："三角函数的周期是函数值以相同顺序重复自身角度的最小值[18]。"

5 周期函数的定义

在所考察的西方三角教科书中，最早出现较为成熟的形式化定义是 1892 年 Nixon 的《基本平面三角学》，这一阶段描述性定义与形式化定义并存，其中描述性定义演变为"图像是重复的、有规律的"为代表的重复定义，而这一时期的形式化定义逐渐演变成熟。

5.1 描述性定义

5.1.1 图像特征是重复的

此类定义着重强调周期函数的图像特征是"重复"的这一特征。

Durfee 在《平面三角基础》（1901）中给出有关周期函数的如下定义，随着变量或参数增加而不断重复自身的函数称为周期函数。其中周期是引起函数值重复的自变量的变化量。而由函数图像可显而易见观察得，正弦函数是周期为 360°或 2π 的周期函数。正切函数是周期为 π 的周期函数。从该定义可知，有关周期函数的定义仍较为粗略，处于不严格的时期，主要基于图像描述为自身的重复变化，且三角函数的周期均基于图像得到，并未严格地形式化论证。同时，对于三角函数的周期仅基于目前最小正周期的定义[19]。

Rider（1923）给出如下有关三角函数周期性的描述："三角函数的值及其函数曲线重复，由此称三角函数是具有周期性的。"并基于函数图像重复的模式得到正弦函数与余弦函数的周期为 2π[20]。

Gay（1935）基于三角函数的图像特征给出周期函数与周期的定义："一个函数，其图形由一系列弧形组成，且所有这些弧都是一样的，这样的函数称为周期函数。而取到曲线纵坐标所有可能的值所需 x 轴上的间隔长度称为曲线的周期，例如正弦函数曲线的周期为 2π[21]"。

Moritz（1913）给出如下定义：像正弦曲线一样，以一定间隔重复的曲线称为周期曲线；其中曲线重复的间隔称为周期，而该曲线所表示的函数称为周期函数[22]。Palmer(1918)给出了类似定义[23]。

5.1.2 函数值变化是有规律的

此类定义强调周期函数函数值的变化是"有规律"的这一特征。

Loney 在《三角学基础》（1893）中描述到：当角度从 0 增加到 2π，同时旋转线转了完整的一圈，正弦函数值先从 0 增加到 1，再从 1 减少到-1，最终从-1 增加到 0，因此正弦函数经过这一系列变化，回到其原有值。同样地，当角度从 2π 增加至 4π，正弦函数再次经历一系列变化。因此，任意两个相差 360°（即 2π）的角度所对应的正弦函数值是一样的。由此正弦函数的周期是 2π。

基于以上描述，此书给出了如下定义：随着角度的增加，三角函数的值不断重复一遍又一遍，则称这样的函数为周期函数[24]。

由上可知，这本书主要基于三角函数线，列表刻画三角函数值的变化规律，相较于图像的重复，函数值的重复更精确些，但仍不严谨，且此时周期的概念仍仅基于最小正周期。

Taylor（1904）通过对三角函数的如下描述"当角从 0 增加到 2π 弧度，正弦函数值从 0 增大到 1，又从 1 减小到-1，最终从-1 增大到 0。随着角度从 2π 增大到 4π 弧度，正弦函数值经历同样的变化。因此当角度每增加 2π 弧度，正弦函数值重复出现。由此可得正弦的周期为 2π。"给出了有周期函数的如下定义："因为随着角度的增加，每个三角函数都会一次又一次地到达相同的一系列函数值，这些函数被称为周期函数[25]。"

Granville （1909）基于三角函数的图像提出了类似的周期函数的定义："随着角度的增加或减少，每个三角函数一次又一次地通过相同的一系列函数值，则称之为周期函数。"值得注意的是，这本书还提及了角度的减少也会让三角函数值不断重复[26]。

Harding（1915）给出以下的定义：当角度 θ 不断从 360° 增加至 720°，$\sin\theta, \cos\theta, \sec\theta, \csc\theta$ 等函数按照角度 θ 从 0°增加至 360°相同的顺序，函数值经历相同的变化，当角度从 720°增加至 1080°也相同。因此，有：

$$\sin(\theta + n\cdot 360^\circ) = \sin\theta, \cos(\theta + n\cdot 360^\circ) = \cos\theta, etc.,$$

随着角度的增加，函数值一次又一次经历相同的变化，则称此类函数为周期函数[27]。可以看出，增加了三角函数的诱导公式。

Holmes（1951）给出了如下定义:"像形如 $\sin a$ 在一定周期内循环重复自身值的函数称为周期函数，经历一次完整的函数值变化所对应的自变量 a 的最小值称为函数的周期。"并指出正弦函数是周期函数，且其周期为 2π。同时给出振幅的定义："有关此类周期函数的振幅，其曲线图类似于正弦函数，在水平轴上方和下方的振荡幅度相同，振幅即对应其纵坐标的最大值，而 $\sin a$ 的振幅为 1。"结合一定的物理背景，指出类似于三角函数的函数为周期函数，并给出了反例 $y = x + \sin x$[28]。

Newcomb（1883）基于终边和诱导公式指出"随着角度的增加，函数值不断重复的函数为周期函数[29]"。

Hart（1942）通过举例 $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ) = \sin(30^\circ + 720^\circ) = \ldots$，即角度 θ 以 360°为间隔，正弦函数的函数值 $\frac{1}{2}$ 成周期性出现[30]，以此给出类似定义。

Wilczynski（1914）借助半径为 r 的圆来研究三角函数的周期性，通过终边 OP 不断地旋转，三角函数具有周期性且其周期为 360°，即以 360°为间隔函数值不断重复，且对于任

意的整数 n，均满足：

$$\sin(\theta+n\cdot 360^{\circ})=\sin\theta, \cos(\theta+n\cdot 360^{\circ})=\cos\theta, etc.,$$

这种性质称为三角函数的周期性[31]。

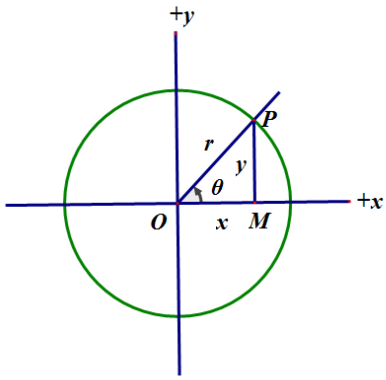


图 2

5.1.3 有规律地到达某给定值

Hun（1919）延续了之前的终边定义法，由天体周而复始的运动类比得到三角函数的周期性概念。书中这样描述道：天体每隔相同的时间间隔重复循环至相同的位置。由此地球绕太阳公转是周期性运动，因为它每隔一年都会重复经过相同的位置。而连续两次经过同一位置所需的时间间隔称为周期。以类似的方式，当变量增加一定常数时，函数值始终与给定的变量的函数值相同，则该函数称为周期函数。而为了使函数重复其原始值，变量必须增加的量被称为函数的周期[32]。

Wentworth（1914）借助三角函数曲线图，给出了周期函数的定义：即有规律地达到任何给定的值。例如当 $x=-270^{\circ},90^{\circ},450^{\circ},\cdots$ 时 $\sin x=1$，即角度每增加 360°或 2π 重新达到某固定值[33]。

5.2 形式化定义

5.2.1 基于三角函数的形式化定义

在所考察的英美教科书中，Nixon（1892）首次给出了较为成熟的形式化定义，在这本书中，以∧来表示角，由于角度增加或减小 360°的整数倍时，角所处的终边位置不变，而三角函数值仅取决于初始和旋转线的相对位置。

因此，对于任意的 $\wedge=\alpha^{\circ}={}^{r}\theta$，即代表角的角度制与弧度制，$f(\alpha)$ 或 $f(\theta)$ 代表三角函数，则有：

$$f(\alpha)=f(m\cdot 360^{\circ}+\alpha)$$
$$f(\theta)=f(m\cdot 2\pi+\theta)$$

其中 m 为整数，由此可得三角函数的周期为 2π。值得注意的是，该书中周期并不仅指最小正周期，并指出正切函数和余切函数存在更小的周期，并给出如下解释：

由公式 $\tan a = \tan(180^\circ + a)$ 以及

$\tan(-180^\circ + \alpha) = \tan(-(180^\circ - \alpha)) = -\tan(180^\circ - \alpha) = \tan\alpha$，可得：

对整数 n，均有：

$$\tan(\alpha) = \tan(n \times 180^\circ + \alpha),$$

由此可得正切函数的周期为 180°[34]。Hall（1910)和 Brown（1913）也基于终边定义给出了类似的定义[35-36]。

Brenke（1917）也给出了基于三角函数的周期函数定义，但其定义域为向两边无限延伸，即当角度增加或减小 360°的整数倍时，角度 x 的终边位置均不变，则当 n 为整数，对任意的 x 均有：

$$f(x) = f(x \pm n \cdot 360^\circ)$$

其中 f 代表的是三角函数[37]。

5.2.2 一般的形式化定义

此阶段的定义逐渐由以三角函数为背景的形式化定义开始一般化，发展为适用于一般周期函数的形式化定义。主要有以下三类定义，且各有不侧重。

Murray（1899）在终边相同的三角函数的值相等以及诱导公式一的分析基础上，给出如下周期函数的代数化定义：一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在常数 k，对任意一个 x 值，都有：

$$f(x) = f(x+k)$$

那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数，而满足该等式成立的最小的数 k 称为该函数的周期。特别地，在本书中还给出了周期函数的如下性质：若 $f(x) = f(x+k)$，则有 $f(x) = f(x+nk)$，其中 n 为任意的正数或负数，则有 $f(x+k) = f(x+k+k) = f(x+2k)$ 等等。由于对任意的 x 均满足 $f(x) = f(x+k)$，令 x 为 x-k，则有 $f(x-k) = f(x)$。同理可得，$f(x-2k) = f(x-k) = f(x)$ 等等[38]。Davison(1919)也给出了类似的周期函数的定义，但给出的周期的定义均为现如今课本中最小正周期的定义[39]。Phillips(1926)和 Wylie(1953)也给出了类似定义[40-41]。

Dresden（1921）给出如下的定义：对于任意 θ，存在一个常数 a，使得 θ 与 $\theta + a$ 的函

数值均相等，则称该函数为周期函数，其中常数 a 称为该函数的周期。并举例自然现象中周期函数的例子，例如单摆，潮汐运动，振动弦，声音，光和电的波动。而三角函数具有周期性因而在自然现象研究中有着非常重要的地位[42]。并通过图像给出了 $\sin(a\theta+b)$ 以及 $\cos(a\theta+b)$ 的周期 $2\pi/|a|$。可以看出，此定义较为完善，但却为给出形式化的表达式。Palmer（1914）也给出了类似的定义[43]。

Bohannan（1904）则给出了不同的定义，书中提到：若 $y=F(x)$，且满足 $F(x_1)=F(x_1+h)$，则有：

$$\begin{aligned} F(x_1)&=F(x_1+h)=F(x_1+2h)=F(x_1+3h)=F(x_1+4h), etc. \\ &=F(x_1-h)=F(x_1-2h)=F(x_1-3h), etc., \end{aligned}$$

由此给出如下周期函数的定义：对于函数 $F(x)$，如果存在非零整数 n，对任意一个 x 值，都有:

$$F(x)=F(x+nh)$$

那么函数 $F(x)$ 就叫做周期函数，其中 h 为周期。

并通过如下举例来说明正弦函数是周期为 2π 的周期函数：对任意整数 n 和任意一个 θ 值，均满足：

$$\sin\theta=\sin(\theta+n\cdot 2\pi)$$ [44]。

Perry（1897）也给出了类似以上的定义[45]。

Dresden（1940）在《微积分导论》中对周期函数的定义域进行了界定，进一步完善形式化定义：对于定义域为 R 的函数 $f(x)$，如果对任意一个 x 值，均有 x 和 $x+P$ 属于定义域 R，且满足：

$$f(x+P)\equiv f(x)$$

则称 $f(x)$为周期为 P 的周期函数。值得说明的是，这里的定义域 R 并不是指全体实数域 R，而仅指的是值域（range）[46]。

由上可看出，早期教科书中的周期的定义以最小正周期居多，且逐渐注意周期函数的定义域问题，但都忽略了周期函数中常数 T 的非零性。

6 结语

以上我们看到，三角函数周期性在西方三角学教科书中经历了三个阶段：萌芽时期、周期概念的出现、形式化周期函数的出现。具体从角的周而复始现象引发的终边定义法、到诱

导公式得到的萌芽的形式化定义，再到图像的“重复性”以及函数值的规律性变化，继而从三角函数为背景的形式化定义到一般的形式化定义演进变化。虽然 19 世纪和 20 世纪均有周期函数的描述性定义和形式化定义，但其大体从描述性定义通过三角函数的诱导公式向形式化定义而过渡。

最终确定了现代教科书中的周期函数定义，图 3 给出了上述演进过程。

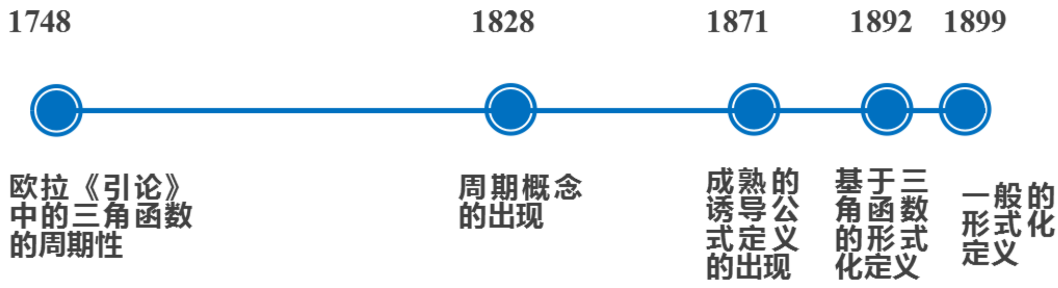


图 3 周期函数的演进过程

其中有关于三类描述性定义的频数分布如下：

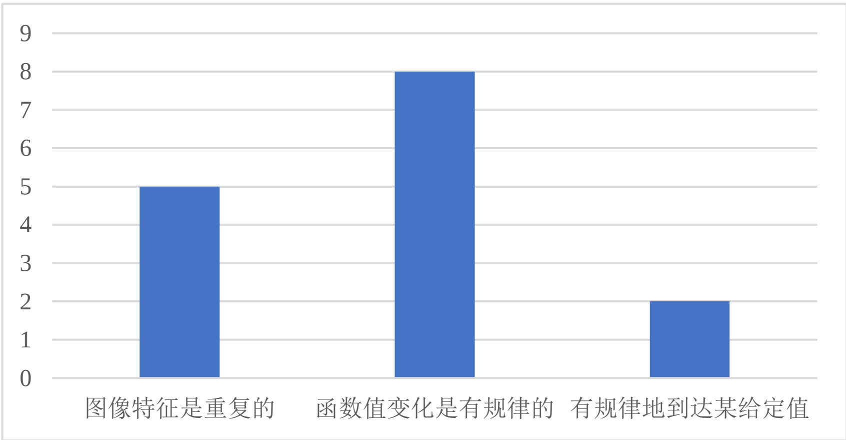


图 4 描述性定义的频数分布图

由图 4 可以看出，描述性定义尤以函数值变化是有规律的这一定义居多，而有规律地到达某给定值这一定义相对较少。而两类形式化定义的频数分布如下：

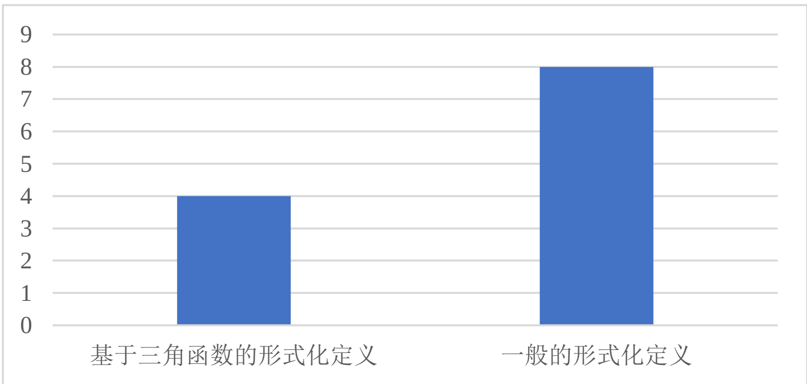


图 5 形式化定义的频数分布图

由图 5 可以看出，一般的形式化定义较之基于三角函数的形式化定义较多，且一般的形

式化定义形式也较为多样。

通过对西方早期三角教科书的考察发现，周期函数的概念起源于生活中的周期现象，从时间的变化到物体的变化。而周期函数的定义与三角函数有着密切的联系，三角函数概念的发展影响着周期函数概念的演进。同时从周期函数概念的发展历程之中，其从描述性定义到形式化定义经历了一段漫长的历程，可见学生对周期函数形式化定义的理解存在较大的认知障碍。而早期教科书中有关周期函数不成熟的定义，恰恰解释了学生学习过程中对周期函数存在的错误认识有：例如 1.周期函数只有一个周期（早期教科书基本上只给出一个周期）、2.只有三角函数才是周期函数(早期教科书大多局限于对三角函数周期性的考察，以及形如三角函数的函数成为周期函数的此类定义）、3.认为周期函数的图像特征是“重复”或者“有规律”（教科书出现过此类定义）、4.周期函数从描述性定义到形式化定义的过渡。可见，学生学习周期函数概念时也必会遇到这些障碍，而突破这些障碍，正是 HPM 视角下周期函数概念教学的重点之一。

参考文献

[1]阮晓明,王琴.高中数学十大难点概念的调查研究[J].数学教育学报,2012,21(05):29-33.

[2] 王禹. 周期函数概念难点分析与教学设计研究[D].华东师范大学,2016.

[3] 欧拉,张延论. 无穷分析引论[M].太原:山西教育出版社 1997.

[4] Keith, T. *An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: T. Davison, 1810.244.

[5] Bonnycastle, J. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Cadell & Davies , 1818.205.

[6] Thomson, J.*Elements of plane and spherical trigonometry*[M].Belfast, 1825, 44.

[7] Day, J.*A Treatise of Plane Trigonometry*[M]. New Haven: Howe & Spalding, 1824.109.

[8] Wheeler, H. N. *The elements of plane trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Heath,1877,97.

[9] Oliver, J. E. (1881). *A treatise on trigonometry*[M]. Ithaca, N.Y.: Finch & Apgar, 1881, 9-10.

[10] Wells, W. *A practical text-book on plane and spherical trigonometry*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn,1883,20-21.

[11] Lardner, D.*An Analytic Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Taylor, 1828, 292.

[12] Seaver, E. P. *The formulas of plane and spherical trigonometry : collected and arranged for the use of students and computers* [M]. Boston ; Sever, Francis & Co., 1871,11.

[13] Clarke, J. B. *Manual of Trigonometry*[M]. Oakland: Pacific Press, 1888,56.

[14] Wylie, C. Raymond. *Plane trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill,1955,90.

[15] Miller, E. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry* [M] Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1894,11-12.

[16] Perlin, I. Earl. *Trigonometry*[M]. Scranton, Pa.: International Textbook Company,1955,22.

[17] Bowser, E. A. *Elements of plane and spherical trigonometry: with numerous examples*[M]. Boston: D.C. Heath & Co., 1892, 38.

[18] Wade, T. Leonard. *Calculus*[M]. Boston: Ginn,1953,203.

[19] Durfee, W. P. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1901, 50.

[20] Rider, P. R. b. *Plane trigonometry*[M]. New York: D. Van Nostrand,1923,217-218.

[21] Gay, H. J. *Plane and spherical trigonometry*[M]. Ann Arbor, Mich.: Edwards brothers, 1935,74.

[22] Moritz, R. É. *Plane and sperical trigonometry*[M]. N.Y.: Wiley,1913,257.

[23] Palmer, C. I. *Practical mathematics part IV: trigonometry and logarithms*[M]. Ed. 2. New York: McGraw,1918,257.

[24] Loney, S. L. *The Elements of Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1904,176-177.

[25] Taylor, J. M. *Plane trigonometry*[M]. Boston: Ginn & company,1904,110.

[26] Granville, W. Anthony. *Plane and spherical trigonometry: and Four-place tables of logarithms*[M]. Boston: Ginn & Company,1909,97.

[27] Harding, A. M. *Plane trigonometry*[M]. New York ; London: G.P. Putnam's sons,1915,96-97.

[28] Holmes, C. Thomas. *Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company,1951,34.

[29] Newcomb, S. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M].New York: Henry Holt & Co., 1883, 18.

[30] Hart, W. W..*Plane Trigonometry, Solid Geometry & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1942,89.

[31] Wilczynski, E. J. *Plane trigonometry and applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon.,1914,146-147.

[32] Hun, J. Gale. *The elements of plane and spherical trigonometry*[M]. New York: Macmillan,1919,12.

[33] Wentworth, G. *Plane trigonometry and tables*[M]. Boston: Ginn,1914,160.

[34] Nixon, R. Charles John. *Elementary plane trigonometry: that is, plane trigonometry without imaginaries*[M]. Oxford: Clarendon Press,1892,25,53.

[35] Hall, A. Graham. *Plane and spherical trigonometry*[M]. New York: H. Holt & Company,1910,83.

[36] Brown, S. J. *Trigonometry and stereographic projections (revised): prepared for the use of the midshipmen at the United States Naval academy.* [M] Baltimore, Md.: The Lord Baltimore

press,1913,20,53.

[37] Brenke, W. Charles. *Elements of trigonometry: with tables*[M]. New York: The Century Company,1917,13-14.

[38] Murray, D. Alexander. *Plane trigonometry for colleges and secondary schools*[M]. New York, etc.: Longmans, Green& Company, 1908, 134-135.

[39] Davison, C. *Plane trigonometry for secondary schools*[M]. Cambridge: the University Press,1919,64-65.

[40] Phillips, A. W. *Elements of trigonometry: plane and spherical*[M]. New York: American book company,1926,57.

[41] Wylie, C. Raymond. *Calculus*[M]. New York: McGraw-Hill,1953,527.

[42] Dresden, A. *Plane trigonometry*[M]. New York: John Wiley & sons, inc.; 1921,17-18,47.

[43] Palmer, C. I. *Plane trigonometry with tables*[M]. New York: McGraw-Hill book company, 1914,74.

[44] Bohannan, R. D. *Plane trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon. 1904,114-115.

[45] Perry, J. *The calculus for engineers*[M]. London: E. Arnold,1897,194-195.

[46] Dresden, A. *Introduction to the calculus*[M]. New York: H. Holt & Company,1940,44.

教学实践

HPM 视角下的“轴对称图形”的教学

刘轩如

（上海理工大学附属小学，上海，200093）

1 引言

将数学史融入数学教学，具有知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效等教育价值，且这些价值与“四基”“四能”、核心素养、情感与信念紧密相关的[1]。因此，数学史在中小学一线受到了越来越多的关注，很多期刊策划了相关的专辑或专栏，很多的成果被人大复印资料全文转载。然而将数学史融入数学教学并不是一件容易的事情，特别是在小学，这与小学生的认知起点比较低，所涉及的历史是早期的，很可能在文献上没有明确的记载有关[2]。那么，能否在史料有限的情况下，开设一节文化气息浓厚且能培养学生理性思维品质的小学数学课？本文将结合“轴对称图形”的教学探索问题的答案。

2 素材分析与应用

对称是不同时代人类试图理解和借此创造秩序、美丽和完美的工具。因此，人类很早就喜爱对称,特别是轴对称，这从早期人类建造的宫殿、创作的艺术品中可见一斑，比如 5000-7000 年前仰韶文化半坡类型彩陶人面鱼纹盆（图 1）、5000 年前两河流域出土文物 （图 2）、故宫太和殿、印度泰姬陵。不仅如此，对称还广泛地存在于无机界和有机界，对于很多有机界的动物而言，结构上的对称是进化的必然结果，因为为了生存，只有身体的结构左右对称时，它们才能跑得快或飞得高[3]。

图 1

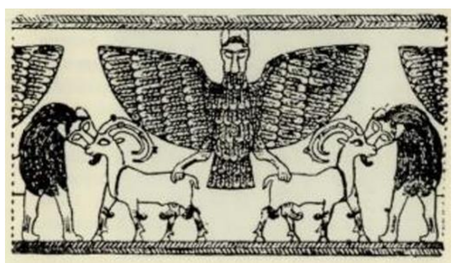


图 2

尽管有一些与轴对称主题相关的历史素材，但相比于分数、小数等主题的历史素材，这些素材几乎与知识的概念属性无关。因此，基于以上相对较为有限的史料，教师采用“发现对称之美—感受对称之实—探索对称之理—体会对称之用”的思路设计教学，欲实现如下的教学目标：

(1) 通过思考、交流、辨析等活动逐步认识轴对称图形，知道轴对称的含义。

(2) 在实践操作中发现并认识轴对称图形中的对称轴，并能正确画出对称轴。

(3) 在实践操作中提升自身的思维品质，在欣赏与练习中感悟对称的文化魅力与实用价值。

3 教学设计与实施

3.1 发现对称之美

师：我们来欣赏一段 G20 峰会的芭蕾舞表演（30 秒的微视频），美吗？为什么呢？

生 1：很美，跳舞的样子很优美。

生 2：画面很美，画面都是对称的。

师：芭蕾舞已经很美了，对称让整体的画面看上去更美了，导演是怎么会想到利用对称的美设计这段表演呢？其实大自然中，就有很多让人感觉到对称的事物，看！

3.2 感受对称之实

出示大自然中的图形

师：有没有想过为什么蝴蝶、蜻蜓和甲虫是对称的？

生：飞的稳，爬得稳。

师：大自然中让人感觉到对称的事物还有很多呐！看！像小朋友刚才一样，人类也很早就从大自然中发现了对称的美，并且把这些美用他们自己的方式记录了下来，看！这是大约 7000 年前人类制作的彩陶盆（图 1），还有彩陶上的人面鱼纹，是不是对称的呀？5000 年前，古代两河流域的先民们早已经广泛使用了对称的美，从一些出土的文物（图 2）中我们就可以看出。看这也是对称的。1500 年前的敦煌莫高窟的壁画（图 3）上也记载着迷人的对称美！

图 3

师：更神奇的是从古自至今，从中到外的许多优秀的建筑设计都用了“对称”。比如，大约 500 年前意大利建筑大师设计的作品和后人模仿改良的建筑（图 4），故宫的太和殿和印度的泰姬陵。

图 4

师：（图 5）看这是什么？对了是剪纸！但很少有人知道安徒生也是“剪纸大师”！ 这位诗人像随身带笔一样带着一把剪刀，用剪纸取悦大人和孩子。他一面说故事一面剪纸，剪纸完成时，故事也讲完了。故事的高潮便是——他把神秘的剪纸打开，展现出最后的图案。他的一幅幅剪纸就是一篇篇小童话。

师：还有我们双喜剪纸，都给人对称的感觉。

图 5

3.3 探索对称之理

(1) 独立操作

师：那么小朋友们，你能剪出一个对称图形吗？好，请每一位同学从学具盘里拿一张彩纸，看你有几种方法剪出一个轴对称图形，我们比一比哪一种方法最好。

(2) 学生分享

学生作品（如图 6）

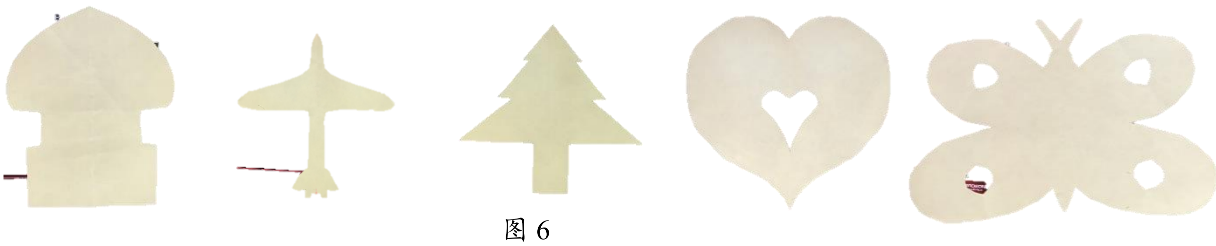


图 6

师：（第一幅图）你是怎么剪的？

生 1:我就是一对折，然后剪一个图形，打开以后就是这个图形了。

师：怎么证明你剪出的图形是对称的？

生 1：这个图形，对折，左右能够重合就说明它是对称的。

师：第二幅图是谁剪的？你剪的是什么？

生 2：我剪的是飞机，我也是先把纸对折，然后在折痕旁边画飞机的一半，最后把纸打开就是这个飞机了。

师：其它的几幅图也是这么画的吗？

生：对！

师：小朋友们真厉害，通过折一折剪一剪剪出了一个这样的对称的图形，其实，像这些，将一个图形通过对折一次后，两边的图形完全重合，在我们的数学中就叫做轴对称图

形。轴在数学中表示一条直线。看，对折时，这里留下的一条折痕叫“对称轴”。

师：为什么叫它对称轴呢？

生：轴表示一条直线，对称表示两边重合。

师：那么轴对称又是什么呢？

生：轴对称指的是黑板上这种，对称的图形，指得是一种图形。

师：对！轴对称图形指得是像这样的图形，对称轴指得是这条折痕，是一条直线 ！师：对称轴我们可以用一条直线来表示，直线画在纸上又是用线段来表示的，线段的长度要超过图形。请你画一画刚才你剪的轴对称图形中的对称轴。

3.4 练习巩固

(1) 从交通标识中选取出 5 个图形让学生判断是否是轴对称图形，并说明理由。

(2) 从少先队队徽中抽取出基本图形五角星和圆（如图 7），让学生判断这两个轴对称图形对称轴的数量。

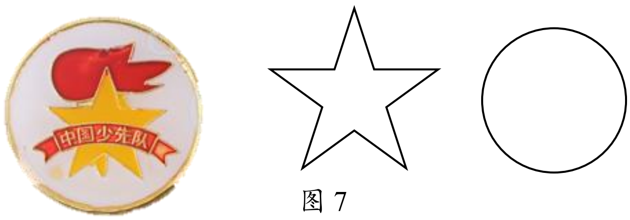


图 7

3.5 感受对称之用

(1) 利用方格纸找出五角星的对称轴

(2) 绘制轴对称图形（作为课后练习）

师：哎呀，老师在准备五角星的时候，不小心打翻了墨汁，有一半的五角星被涂掉了（见图 8）！小朋友们快帮我想想办法，我怎么在这个五角星的基础上补全另一半呢？

图 8

3.6 课堂小结

师：今天你有什么收获？

生 1：我知道了对称轴是轴对称图形当中隐藏的一条线

生 2：我知道了生活中有很多对称的图形。

4 学生反馈

课后，对班级 32 名学生的问卷调查与课后练习的统计发现：

(1) 很多学生对对称之用背后的缘由有了一定的认识

针对“为什么很多昆虫，比如蝴蝶、蜻蜓、甲虫的身体都是对称的？”的提问，有 24 位同学认为与保持平衡有关，如“如果它们不对称，飞起来就会斜”“因为这样才能保持平衡”“因为如果不对称的话，昆虫就会容易掉下来”“因为只要它们一边重，一边轻，飞的时候就会掉下来”；针对“有很多建筑大师将轴对称图形应用于建筑设计，请你说明其中的原因”的提问，有 23 名同学感受到了生活中有那么多对称的建筑设计或艺术作品是对称之美，如“原因是这样做很美观”“看起来好看”“因为这样的设计具有古典美感和次序感”。

(2) 学生基本上掌握了这节课的知识内容

针对“请你写出已学的找轴对称图形对称轴的方法；并画出正方形所有的对称轴”的问题，虽只有 5 名学生回答了前一问题，“方法 1，折一折；方法 2，量一量”“可以折的就把它对折，能够合起来的线就是它的对称轴，不能合的就用尺量中间的数（所在的点）就是（对称轴经过的点）”“把图形对折，如果重合，那么就是轴对称图，对折的那条线就是对称轴”“方法 1，对折，如果两边完全重合的话，中间的折痕就是这个图形的对称轴；方法 2：先量出这个图形一边的长度，再量出一边一半的长度”，但 28 名学生正确地画出了正方形中的 4 条对称轴，其余 4 名学生正确地画出了部分对称轴。对于课后练习“根据对称轴，画出轴对称图形（如图 9）的另一半”的题目，完全正确的有 16 人，15 人因未能找到不在格点上的一点的对称点而未能补全图形，未做对的只有一人。

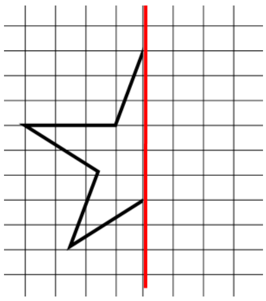


图 9

(3) 学生有了积极的情感体验，对这节课的评价较为多元

在对问题“当你得知丹麦的安徒生不仅是伟大的童话大师，还是剪纸大师时，你有什么感想？”的回答中，大部分学生（94%）都相当震撼，“原来童话大师也能剪出这么棒的剪纸呀！”“当我得知安徒生不仅是伟大的童话大师，还是剪纸大师时，我觉得安徒生好好厉害”。对于“这节课，你印象最深的是什么？为什么？”的结果统计发现，学生对这节课的认识较为多元，且视觉感受与动手操作带来的影响较大，分别占总数的 30%左右。

5 结语

将数学史料融入“轴对称图形”的教学，引导学生在社会与自然、艺术与建筑、古代与

现代的交织中感受对称的文化魅力与实用价值；通过课后的调查发现学生在视觉直观与动手操作中，较好地掌握了轴对称图形与对称轴。同时，“发现对称之美—体会对称之实—探索对称之理—感受对称之用”的思路遵循知识发生发展的过程，也大致与学生的认知发展规律相一致，因此，按照这一思路实施教学，会让学生感受到数学知识的学习是一件自然而然的事情，数学学习是发现规律、解决问题的过程，这将有助于学生思维品质的培养。因此，“轴对称图形”算得上一节文化气息浓厚且能培养学生理性思维品质的小学数学课。

小学数学呼唤文化气息浓厚且能培养学生理性思维品质的课堂，因为这样的课堂既能培养学生的关键能力，又能培养学生必备品格。在今后的教学中，我们不妨以核心素养的培养为基，在课堂中适当地融入与教学主题密切相关的数学家解决问题的方法，甚至是错误的方法、数学家的故事，让这些数学史上的人物、事件真正发挥“课堂中一名额外学生”的价值，让学生在和古人的“对话”中，得到发展。

参考文献

[1] Wang,X., Qi, C.&Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study[J]. Science & Education, 2017,26:1029-1052.

[2]岳增成, 沈中宇.HPM 与小学数学教学核心问题探索——汪晓勤、邹佳晨老师访谈录[J].小学教学（数学版）,2017(11): 4-9.

[3]汪晓勤.数学文化透视[M].上海: 上海科学技术出版社, 2013.

HPM 视角下的“邻补角、对顶角”教学*

顾海萍[1] 孙丹丹[2]
（1.上海师范大学附属经纬实验学校，上海，200444；
2.华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

1 引言

“邻补角、对顶角”是沪教版七年级第二学期“相交线、平行线”一章的第一节课。关于平面几何，学生在六年级学习了圆与扇形的相关概念、线段与角的画法，在七年级第一学期学习了图形的运动。从本课内容开始，学生需要感知演绎推理的方法，锻炼逻辑思维，并能够用数学语言进行简单的说理，为八年级学习论证几何做铺垫。

从已有文献中来看，关于“邻补角、对顶角”这节课的教学设计比较单一，大多是沿用教材，由两根小木棍相交，抽象出两直线相交，进而进行对顶角、邻补角概念和说理教学。这样的设计固然开门见山，但没有很好地揭示 “对顶角相等”这一命题的必要性，对于我们为什么要学习“说理”，为什么要学习“对顶角相等”这一命题，学生心里可能是有困惑的。 张奠宙先生在为汪晓勤教授《HPM：数学史与数学教育》一书所写的序言中，提出用数学史讲述“对顶角相等”这一设想[1]，我们尝试从 HPM 的视角进行“邻补角、对顶角”教学设计，以更好地解释“说理”的必要性，让学生更自然地接受说理的表达方式，感受几何学与现实生活之间的联系，具体地，本节课的教学目标如下：

（1）理解邻补角与对顶角的有关概念，能说出邻补角与对顶角以及互为补角与互为邻补角的区别与联系；掌握“对顶角相等”这一性质，并能运用邻补角和对顶角相关知识进行简单说理。

（2）通过“如何测量墙角线夹角”这一具体问题的研究，感受数学在现实生活中的应用，感受几何学在实际生活中的价值，通过对“对顶角相等”的直观确认和推理，感知数学严谨性，体会理性思维精神。

（3）通过泰勒斯的微视频，了解数学家发现数学知识的过程和数学家的生活故事，感受数学家的智慧，理解说理的必要性，感悟“讲道理”不仅应用于数学，也可以是做人做事的准则。

2 史料选择与设计思路

* 本文是 HPM 工作室系列课例之一。

现在所知最早提出演绎证明的数学家是古希腊的泰勒斯（Thales，公元前 6 世纪）。泰勒斯出生于小亚细亚（今土耳其）的米利都城，其实在泰勒斯以前，不论是古巴比伦人还是古埃及人，都已经获得了不少的几何知识，但是这些知识是建立在直觉和经验之上的。泰勒斯创立的爱奥尼亚学派开创了演绎证明的先河，这标志着人们对客观事物的认识从经验上升到理论，这是数学史上的一次不寻常的飞跃。

但是，泰勒斯本人并没有传记和资料流传下来。今天，关于他在数学上的贡献，最可靠的证据来自于公元 5 世纪哲学家普罗克鲁斯（Proclus, 410-485）所著的《欧几里得<原本>第一卷评注》一书[2]，书中介绍，泰勒斯曾证明以下四条定理：

（1）圆的直径将圆分为两个相等的部分；

（2）等腰三角形两底角相等；

（3）两相交直线形成的对顶角相等；

（4）如果一个三角形有两角、一边分别与另一三角形的对应角、边相等，那么这两个三角形全等。

尽管没有第一手的文献可以证明泰勒斯的成就，但间接的记载却流传至今，使泰勒斯获得“论证几何学鼻祖”的美名。

关于泰勒斯，流传着许多有趣的小故事[3]，比如相传有商人挖苦泰勒斯，说“你知识渊博，不能赚钱又有什么用”，于是泰勒斯用所掌握知识，经过周密的测算，断定第二年将是橄榄的丰收年，用低廉的租金租下了附近所有的橄榄油作坊。第二年，橄榄果真大丰收，泰勒斯高价转租橄榄油作坊，一夜暴富。又比如，相传在巴比伦，泰勒斯预报了公元前 585 年的一次日食；在埃及，泰勒斯测量过金字塔的高度。沪教版九年级第一学期的相似三角形一章就讲到了泰勒斯测量金字塔高度的故事。

泰勒斯能沿着论证数学的方向迈出第一步，与古代希腊城邦社会特有的唯理主义气氛也有关系。希腊处于山脉和岛屿的地理环境中，这限制了大规模农业生产的发展，因此导致的可能结果是希腊人没有建立中央集权政府，希腊的主要行政机构是大小不同的城邦政府。我们无法断定他们的政府是民主制还是君主制，但一定是按法律统治的，这样就激发了其臣民学习辩论的技巧，很可能是这种气氛促进了证明数学的产生[4]。

关于“对顶角相等”的切实可考证的证明应该就出于欧几里得《几何原本》，其中的命题 15 提到，“如果两直线相交，则它们交成的对顶角相等。”证明方法如下[5]：

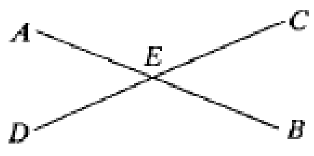


图 1

如图 1，因为 AE 位于直线 CD 上侧，而构成$\angle CEA$，$\angle AED$；$\angle CEA$，$\angle AED$ 的和等

于二直角。又因为直线 CE 位于直线 AB 的上侧，构成∠AED，∠DEB；∠AED，∠DEB 的和等于二直角。[命题 13]

但是，已经证明了∠CEA，∠AED 的和等于二直角。

故∠CEA，∠AED 的和等于∠AED，∠DEB 的和。[公设 4 和公理 l]

由它们中各减去∠AED，则其余的∠CEA 等于其余的∠BED。[公理 3]

这是有史料可考的最早的“对顶角相等”的证明方法，据说是欧几里得收录了泰勒斯的证明。

学生在本节课中首次接触数学说理。我们通过微视频来说明演绎推理的产生背景，解释说理的必要性，并通过介绍泰勒斯的相关贡献，讲述泰勒斯的故事，展现数学背后的人文精神及古代数学家的人格魅力。我们还围绕对顶角设计了观察、测量活动，让学生切实感受到观察和测量的局限性，不足以让人完全信服，从而让学生感受说理的必要性。

3 教学过程

3.1 创设情境，引入新知

本节课中，我们希望凸显几何学的两大价值，即逻辑思维训练上的价值和实际应用价值。所以在引入部分，我们设计了一个生活中的问题“如何测量墙角线的夹角”，从实际生活问题引入，通过实际问题，引导学生从现实应用中抽象出数学模型，把问题转化为求对顶角或邻补角，初步体会转化思想，感受几何学源自于生活实际，使邻补角和对顶角概念的引入更加自然。

师：春暖花开的季节，我们的校园看起来非常美丽，徘徊在走廊的时候，老师有一个疑问，美丽的校园是由一砖一瓦建造，那么建筑师要如何验证建筑的精确性呢？比如我们走廊的墙角线如图 2，它到底是多少度呢？

生：90°。

师：你是怎么知道的呢？有没有可能是 89°？91°？

图 2

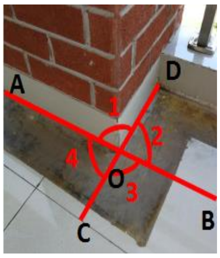


图 3

生：有可能。

师：那我们能不能想办法测量一下呢？

生：把两条线延长，测对面那个角。

师：非常好，为了理解方便，我们把字母和角标上去，如图 3 所示。 你继续说。

生：测量∠3，因为对顶角相等，所以∠1 就等于∠3。

师：很好，已经用到了对顶角相等，这是我们以前可能就知道的，那么你能不能说一说为什么对顶角相等？

生：因为对顶角就是相等的呀。

师：这是我们今天要学习的内容，可能现在还一时说不清为什么，但是通过今天的学习，我们就能够说明了。

3.2 辨析概念，加深理解

教师提出问题：直线 *AB* 和 *CD* 相交如图 4，形成了四个小于平角的角：∠1、∠2、∠3、∠4，任取其中两个角，它们之间存在怎样的位置关系和数量关系。

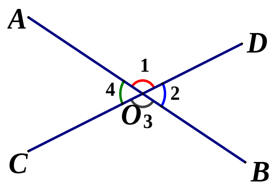


图 4

师生共同研究以下内容：

（1）∠1 和∠2 的数量关系与位置关系。 找出图中其它邻补角，辨析互为邻补角与互为补角的区别，并说明邻补角的符号语言：∠1+∠2=180°（邻补角的意义）。

（2）∠1 和∠3 数量关系与位置关系。 找出图中其他互为对顶角的角，并通过辨析∠1 与∠2 是不是对顶角（见图 5），巩固知识。

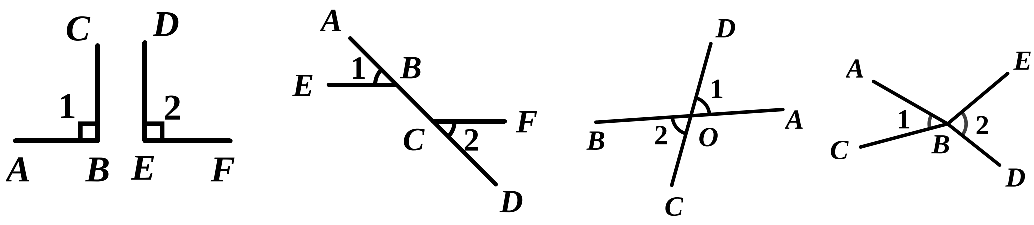


图 5

3.3 超越经验，完成说理

让学生思考，通过观察得到的“对顶角相等”这一结果是否具备说服力。 随后，通过几何画板呈现的视错觉图，让学生感受“眼见不一定为实”的道理。 在视错觉图中，我们通过几何画板的测量工具进行验证说明，进而引导学生进行测量。

师：我们凭观察，可知对顶角相等，那么观察的结果是否可以直接作为结论使用了

呢？

生：不可以。

师：有同学已经认识到了不可以，但也有同学可能还有疑惑，我们通过一个例子来验证一下，看看眼见是不是为实呢？

教师打开几何画板。

师：观察一下图片（图 6），看看这两条横的线段哪一条长？

生：一样长。

师：哦，你们怎么知道一样长？

生：我们凭借经验!虽然知道看上去是第一个长，但是实际上是一样长的。

师：好，也就是你们的观察得到第一个长，你们凭经验觉得是第二个长，下面我们通过测量来验证一下。

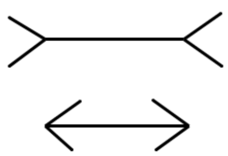


图 6

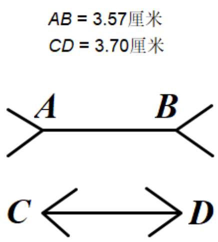


图 7

教师通过几何画板测量线段长度，如图 7 所示。

生：意外啊！

生：观察和经验都不靠谱啊!

生：我们又被套路了！

师：下面我们把其他线段隐藏起来，再看一看（图 8）。

生：好像确实是下面长。

师：进一步，我们做两条辅助线，再看一看(图 9)。

生：果然是下面长出来一点。

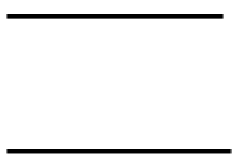


图 8

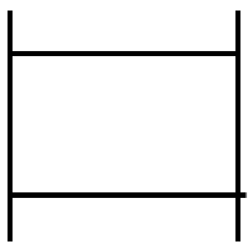


图 9

师：通过这个视错觉图，我们知道眼见不一定为实，所以我们不能光通过观察就得到“对顶角相等”这一结论，那么我们来测一测，打开书 38 页，看图 13-2，并且测量$\angle AOC$和$\angle BOD$的大小。

学生测量。

师：多少度？

生：24 度。

生：25 度！

师：24 和 25 度都有。 我们通过测量，是不是得对顶角相等？

生：是的。

师：那么测量的结果是否可以直接作为结论使用了呢？为什么？

生：不可以。 测出来不一样。 有误差。

师：非常好，所以我们需要讲道理。 你能否用“因为”、“所以”这样的“说理”的来确认“对顶角相等”的正确性呢？

学生说理：

∵∠1 与∠2、∠2 与∠3 分别是邻补角（已知）

∴∠1+∠2=180°，∠2+∠3=180°（邻补角的意义）

∴∠1+∠2=∠2+∠3（等量代换）

∴∠1=∠3（等式性质）

教师板书：符号语言：∠1=∠3 (对顶角相等)。

师：非常好，你们用的方法和两千三百年前的古希腊数学家欧几里得一模一样，真了不起，据说欧几里得这一方法可能最早源于泰勒斯。 下面我们来看一个微视频，了解一下泰勒斯和“说理”的相关背景。

教师微视频展示泰勒斯的故事及“几何说理”的相关背景。

3.4 运用新知，解决问题

例：如图 10，直线 *AB* 和 *CD* 交于点 *O*，∠*AOC*=50°。（1）求∠*BOC* 的度数；（2）求∠*BOD* 的度数；（3）求∠*AOD* 的度数。

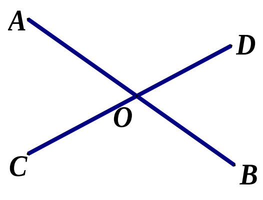


图 10

教师示范讲解（1）、（2），学生独立解（3），通过例题，进一步体会几何的说理方式。接着，利用本节课所学知识，解决“墙角线”测量问题。 教师还找来了一个石膏模型，让学生设计工具，测量石膏模型中的有关角度，并将网上销售的类似工具介绍给学生，让学生感受知识在实际生活中的应用。

师：如何测量“墙角线”的夹角？

生：只需要测量邻补角或对顶角就可以了。

师：是的，运用今天所学的对顶角相等或者邻补角的意义，只要测量出对顶角或者邻补角的大小，仿照例题，运用几何说理，就可以解决问题。

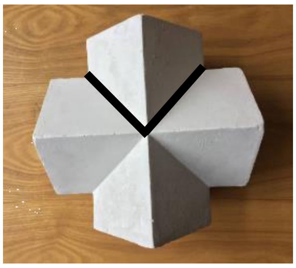


图 11

图 12

师：非常好，实际上，类似墙角这样不能直接测量的角，生活中有很多，比如，老师手里的石膏模型中的这个角度?（如图 11）那么你们能不能利用今天所学设计一个工具，直接测量这个角的大小呢？

学生讨论设计并分享展示工具实践测量。

师：你们的设计很棒，我们生活中也确实有这样的工具，并且已经投入生产，跟你们的设计思路是完全一致的（图 12）。

师：根据卖家说明，只需要调节螺母，就可以确定角度，沿着尺边画出角度。 同样的，也可以确定角度后，可以测量出角度值。 所以你们能设计出这样的工具，确实……

生：太聪明了！

师：是的，这个工具用到的原理就是？

生：对顶角相等!

3.5 小结反思，倾听学生

师：本节课我们学习的内容是？具体从知识上，情感态度上分别说一说。

生 1：我们学到了对顶角和邻补角的知识，知道了对顶角相等，还知道了一个神奇的量角器。

生 2：我们还知道了泰勒斯，知道了眼见不一定为实，经验不一定可靠，还有要讲道理。

生 3：我们要感谢泰勒斯发现了“对顶角相等”，是很有用的，还有要讲道理才能有说服力。

师：大家总结得很好，希望大家能把所学知识用在生活中，运用逻辑思维解决问题。

4 学生反馈

本节课后对全班 33 名学生进行了问卷调查。客观题部分，全部学生都表示理解泰勒斯为什么要说明对顶角相等，并认可泰勒斯的说理是有必要的。

主观题部分，在问到“你觉得为什么要对对顶角相等进行说理”时，学生提到的答案有：增加准确性，防止误差（13 人）；要讲道理，显得有说服力（11 人）；为了证明对顶角相等这个定理（5 人）；直觉不可靠，要说理确认正确性（5 人）；设计出测量工具，应用于生活实际（3 人）；训练数学逻辑思维（3 人）。

对于“谈谈对小视频中所介绍的泰勒斯故事的感想”，学生回答提到：泰勒斯很伟大（20 人）；泰勒斯很聪明（12 人）；泰勒斯很讲道理，说理很让人信服（10 人）；科学知识对生活很有用（9 人）；泰勒斯为人类做出很大贡献（5 人）；我们要向泰勒斯学习（4 人）。

对于“你觉得本节课学习的知识在生活中是否有用，试举例说明”，全部学生都觉得有用，25 位同学写到“可以用来测量角度”，5 位同学写到“可以用来讲道理”。

对于“你是否对老师在上课中的数学史内容感兴趣，为什么？还想知道哪些有趣的数学史内容”，所有同学都表示感兴趣，理由主要有：有趣（14 人）；丰富知识（12 人）；拓展视野（7 人）；比书本知识更有人文情怀，更让人信服；（4）知道了学习内容的来源；（3 人）知道了科学知识是有用处的（6 人）；可以从数学家的角度来思考（1 人）。

此外，问卷还从知识方面，考察了一道习题，“直线 AB 和 CD 交于点 O，$\angle AOC$=60°，求$\angle BOD$、$\angle AOD$ 的度数”，全部学生都能够用说理的方式书写，有 23 位同学的解答正确，其余 10 位同学在因果关系或理由方面有所遗漏，整体的达成度较好。

5 结 语

本节课的基本理念是体现几何命题的双重价值——实用价值和理性思维训练价值。从建筑上的墙角线出发引入对顶角和邻补角概念以及命题“对顶角相等”，最后回归问题解决，体现的是命题在现实生活中的应用价值；观察与测量的局限性以及说理的必要性，反映的是命题在训练逻辑思维、培养求真务实品质上的价值。

追溯“对顶角相等”这一命题的历史，让我们开始深入思考命题本身的必要性以及对其进行说理的必要性，于是，才有了本节课的教学设计。为了揭示命题本身的必要性，再现命题的自然发生过程，我们构建了从现实情境出发回到现实情境的教学路径；为了揭示说理的必要性，我们通过历史上著名的视错觉图形来揭示观察的局限性。因此，数学史的重要价值就在于“对顶角相等”这一命题双重价值的构建。

此外，教师让学生对“对顶角相等”进行说理，并将他们的说理方法与微视频中所呈现的泰勒斯的方法进行对照，学生发现自己的方法和数学家的方法是一样的，因而获得了成功的体验；而泰勒斯的故事则让学生感受到知识的力量和价值，从而让他们树立正确的数学观。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育. 北京: 科学出版社, 2017: 1-10.

[2] 吴文俊. 世界著名科学家传记. 北京: 科学出版社, 1992: 1-10.

[3] 李文林. 数学史概论. 北京: 高等教育出版社,2002: 32-51.

[4] 卡茨. 数学史通论. 北京: 高等教育出版社, 2004: 39-40.

[5] 欧几里得著, 兰纪正, 朱恩宽译. 几何原本. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2003: 14-15.

HPM 视角下“线面垂直判定定理”教学*

高振严[1]　何伟淋[2]

（1. 上海市行知中学，上海，201900；2. 华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

“线面垂直”是沪教版高中数学教材第 14 章第 3 节“空间直线与平面位置关系”的第一课时的内容。现行教材基于几何直观，逻辑推理与合情推理并重，适当引入公理化思想体系的考量，从现实情景中的旗杆与地面垂直引入线面垂直概念，但并没有严格证明线面垂直的判定定理。这虽然有助于培养学生的直观想象能力，减轻学生的课业负担，但严密推理论证的缺失不利于学生逻辑推理能力的培养。在实际教学中，通过“直观感知、操作确认、归纳总结”，当老师归纳出判定定理时，学生普遍表现出迷茫、将信将疑[1]。《高中数学课程标准》（2017）提出发展学生逻辑推理素养、提高学生数学学习的兴趣、增强学好数学的自信心等课程目标。

历史上，数学家曾先后给出了线面垂直判定定理的精彩证明，这些证明对于培养学生逻辑推理素养有一定的价值。英国数学史家福韦尔（J. Fauvel, 1951-2000）在总结数学史教育价值时指出，数学教学中数学史的应用有助于学生保持对数学的兴趣、激发学生的学习动机并给予数学以人文的一面；而当代 HPM 学者 Tzanakis 和 Arcavi 则指出，数学史是一种资源，提供了大量的问题和方法，可以培养坚持真理、不懈探究、追求创新的品质；还可以人学生感受到数学文化的多元性。[2]有鉴于此，我们从 HPM 的视角来设计本节课的教学，并拟定如下教学目标：

（1）掌握线面垂直定义，通过判断命题理解线面垂直的性质定理，会严格证明线面垂直的判定定理；

（2）经历判定定理的证明过程，培养学生的数学抽象、直观想象、逻辑推理素养，体会化归的数学思想；

（3）激发学习兴趣，感悟数学文化，提升学生学习数学的自信心。

2 历史材料及应用

2.1 历史上的线面垂直概念

《几何原本》第 11 卷最早给出线面垂直的定义：“一直线和一个平面内所有与它相交的

---

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

直线都成直角时，则称此直线与平面成直角。”[3]到了 18 世纪，法国数学家克莱罗（A. A. Clairaut, 1713-1765）在《几何基础》中首先给出线面垂直定义的直观解释：“一条直线不向平面上的任何一面倾斜”，从而引出线面垂直即为“直线与平面上任意直线垂直”[4]。

2.2 历史上线面垂直判定定理的证明

欧几里得通过构造两个三棱锥，证明五组三角形全等，从而证明判定定理，过程严谨但却繁琐；18 世纪，克莱罗给出了判定定理的直观解释，并未给出严格证明。法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）采用勾股定理与中线定理相结合的方法证明了判定定理；到了 19 世纪，苏格兰数学家普雷菲尔（J. Playfair, 1748-1819）在《几何基础》中用等腰三角形法来证明定理；Tappan 在《平面与立体几何》中采用对称法来证明定理；Bartol 在《立体几何基础》中则采用了引理法。20 世纪，法国数学家阿达玛（J. S. Hadamard, 1865-1963）采用了另一种引理法[5]。

2.3 中国古代立体几何中的线面垂直

《九章算术》商功章给出了堑堵、阳马和鳖臑的体积计算公式。堑堵是底面为直角三角形的直棱柱，阳马是底面为长方形、一条棱垂直于底面、且过底面顶点的四棱锥体，鳖臑是四个面均为直角三角形的三棱锥。若将一个正方体斜剖，就得两堑堵，斜剖堑堵，得一阳马和一鳖臑[6]。堑堵、阳马和鳖臑都可以看作线面垂直的几何模型。

3 教学设计与实施

3.1 形象引入，构建概念

教师先从自身与地面的位置关系，让学生初步直观感受线面垂直，再通过身体的倾斜变化，让学生认识到线面垂直就是直线不能向任何一个方向倾斜，从而启发学生说出线面垂直的概念。

师：同事都说我看起来比较高，但我的身高实际上没那么高，大家知道原因吗？[学生摇头。]

师：这大概是因为我的腰挺的比较直的原因。我现在站在教室里，如果把我的身体看成一条直线，把地板看作是一个平面，那么直线与平面的位置关系是什么？

生齐答：垂直！

师：如果我把身体前倾或后仰或左摇或右摆，那身体还和平面垂直吗？

生：不垂直！

师：所以线面垂直换一种方式理解，也就是直线不能向平面的任何一个方向倾斜，也就是和任何一个方向……

生：垂直。

接下来让学生自行总结线面垂直的概念，教师对学生得出的不同观点进行引导分析，最

后得出正确的概念。

师：下面请大家总结线面垂直的概念。

生 1：如果一条直线 l 与平面α上所有的直线都垂直，则称直线 l 垂直于平面α。

生 2：如果一条直线 l 与平面α上任意一条直线都垂直，则称直线 l 垂直于平面α。

生 3：如果一条直线 l 与平面α上无数条直线都垂直，则称直线 l 垂直于平面α。

师：生 1 与生 2 给出的概念等价吗？

生：等价。平面上所有的直线与任意直线意义相同。

师：那么，生 3 得出的概念与前两位得出的概念等价吗？

生：不同。

师：为什么不同？

生：无数条不一定是所有直线。

师：那么生 3 给出的概念合理吗？

生：不合理。在平面上可以找出一条直线和无数条平行直线垂直，但是该直线在平面上并不与该平面垂直。

师：非常好！所以我们最终得出线面垂直的概念：如果一条直线 l 与平面α上所有的直线（或任意一条直线）都垂直，则称直线 l 垂直于平面α。

教师向学生介绍这个概念源自欧几里得的《几何原本》。

3.2 直观感受，引出定理

在得出线面垂直的概念后，通过让学生重新判断教师与地面的位置关系，说明很难用定义验证教师与地面的线面垂直关系，从而引出线面垂直判定定理证明的必要性。

师：学习了线面垂直的概念。我想再问大家一个问题，我现在站在这里和地面真的垂直吗？

生：不一定。

师：对的，直观的观察并不能说明直线和平面垂直，所以要判断直线和平面是否垂直需要我们进行严格的数学证明。那么如何证明呢？可以用定义证明吗？

生：不可以。

师：为什么？

生：有无数多条直线，不可能进行一一验证。

师：对的。所以我们面临的困难是直线有无限条，如果只需要验证有限条，那么就可以一一验证是否垂直。我们从有限条最简单的情况开始，假如平面α上有一条直线l'与已知直线 l 垂直，那么直线 l 是否垂直与平面α?

生：直线 l 可以在平面α上与l'垂直。所以不可以。

师：两条是否可以？

生：两条平行的不可以，原因与一条的相同。

接下来对线面垂直判定定理的正确性进行实物展示，学生通过自己动手演示直观地得出线面垂直的判定定理。

师：两条相交的呢？可以用铅笔或书本演示看看。

学生用三支铅笔演示给大家看。

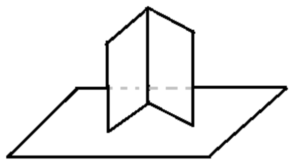


图 1

师：用铅笔演示的结果好像可以，但还不是很直观。大家看，将翻开的课本直立于桌面上（如图 1），很显然，棱与桌面垂直。将课本的底边看作两条相交直线，课本的棱看作是与底边两条相交直线垂直的直线，由此就形象的验证了如果一条直线与平面上两条相交直线垂直，则该直线与平面垂直。这个直观验证的办法源自 18 世纪法国数学家克莱罗的著作《几何基础》。

3.3 启发引导，寻找思路

在引导学生得出线面垂直判定定理证明的必要性后，通过概念里对“任意”二字的分析，启发学生得出三种证明的路径。

师：要证明判定定理正确，也就是要通过已知直线 l 与平面上两条相交直线垂直，证明直线 l 垂直于平面上的任意一条直线即可。观察图 2，已知 $AB\perp AC$、$AB\perp AD$, AE 为任意一条直线，在 AC 上取点 C 连接 BC，在 AD 上取点 D 连接 BD，连接 CD 与 AE 交于点 E。这样证明的目标就是 $AB\perp AE$，怎么证明呢？

生 1：勾股定理。

生 2：等腰三角形三线合一。

生 3：向量。

思路 1：勾股定理

师：大家所说的方法都很好，历史上数学家也用类似的想法证明了线面垂直的判定定理，勾股定理的证法是证明$AB^2+AE^2=BE^2$，我们可以实现E为CD的中点，那么有一个定理我们就可以用，由平行四边形定理我们可得$2AC^2+2AD^2=CD^2+2AE^2$。

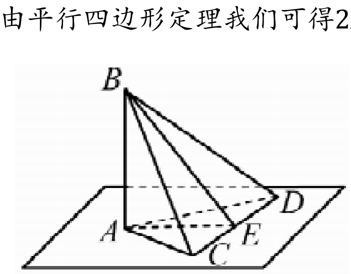


图 2

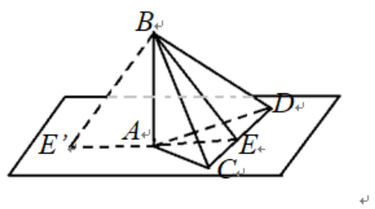


图 3

思路 2：三线合一

师：在近代的数学教材中，利用等腰三角形三线合一的思想证明的方法流传最为广泛，下面我们尝试用该方法证明定理。首先我们需要构造三角形使 AB、AE 所在直线一条为边，一条为中线，然后再证明所构造的三角形为等腰三角形，根据等腰三角形三线合一即可证明 $AB \perp AE$。那我们如何构造符合要求的三角形？

生：做 E 关于 A 对称点 E'，连接 BE'、AE'，得 $\Delta BEE'$，此时 AB 为中线，AE 所在线段 EE' 为底边（如图 3）。

师：非常好，你的想法和最早证明这个定理的古希腊数学家欧几里得的想法非常接近。但是仅仅作 E 点的对称点并不能证明 $BE = BE'$，我们还需要作 C、D 关于 A 的对称点 C'、D'，构造如图所示两个对称三棱锥来证明定理。欧几里得通过证明 5 组三角形全等最终证明了定理，方法比较复杂，我们能不能尝试将欧几里得的方法加以简化。刚才构造的是以 AB 为中线的三角形，我们还可以怎么构造？

生：以 AE 为中线。

师：如何构造？

生：作 B 关于 A 的对称点 B'，连接 AB'，则 $\Delta BEB'$ 以 AE 为中线。

师：仅仅在 $\Delta BEB'$ 中不能证明 $BE = BE'$，还需连接 $B'C$、$B'D$、$B'E$（如图 4），由此可得的已知条件是什么？

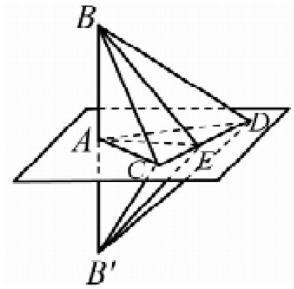


图 4

生：$B'C = BC$、$B'D = BD$、$BA' = BA$。

师：如何证明 $AE \perp BB'$？

生：证明 $BE = B'E$，可以采用三角形全等。

师：好，刚刚同学们也提到还可以采用向量法证明，以上是三种思路，同学们选择自己喜欢的思路，尝试自己书写一下证明

3.4 自主探索，完成证明

经过一定的探索之后，学生得到的证明方法如下：

证法 1：对称法

证明：已知 $B'C = BC$、$B'D = BD$、$CD = CD$，可得 $\Delta BCD \cong \Delta B'CD$。所以 $\angle BCE = B'CE$，

又因为 $B'C=BC$、$\angle BCE=B'CE$，$CE=CE$，所以 $\Delta BCE \cong \Delta B'CE$，则 $B'E=BE$。又因为 AE 为三角形的中线，所以 $AE\perp AB$。

学生在黑板上板书该证明过程，老师带领学生倒序分析该证明过程，从而理清该证明的逻辑思路。

证法 2：勾股法

接着另一个学生给出了利用勾股定理的证法如下：

如图 2，由平行四边形定理可知：$2AC^2+2AD^2=CD^2+4AE^2$，$2BC^2+2BD^2=CD^2+4BE^2$，所以$AE^2=\frac{2AD^2+2AC^2-CD^2}{4}$，$BE^2=\frac{2BC^2+2BD^2-CD^2}{4}$。又因为$AB^2+AC^2=BC^2$，$AB^2+AD^2=BD^2$，

$\frac{AB^2+AC^2}{2}+\frac{AB^2+AD^2}{2}=\frac{BC^2+BD^2}{2}=AB^2+\frac{AD^2+AC^2}{2}$，所以$AB^2=\frac{BC^2+BD^2}{2}-\frac{AD^2+AC^2}{2}$。则有

$AB^2+AE^2=AB^2+\frac{2AD^2+2AC^2-CD^2}{4}=\frac{BC^2+BD^2}{2}-\frac{AD^2+AC^2}{2}+\frac{2AD^2+2AC^2-CD^2}{4}=\frac{2BC^2+2BD^2-CD^2}{4}=BE^2$，所以 $AB\perp AE$。

最后，播放关于线面垂直判定定理历史的微视频，将欧几里得的证明、勒让德的证明、等腰三角形法、对称法、引理法以及历史上的一种错误证明做了进一步展示，了解定理证明的各种方法由繁及简的历史进程，将其与学生的证明方法相对应，从而加深学生对数学的情感。

接着，教师让学生通过线面垂直的定义及判定定理，总结出线面垂直与线线垂直相互依赖的关系，指出立体几何中证明线面垂直与线线垂直的主要思路，并让学生课后探究向量方法的证明。

3.5 巩固练习，彰显文化

在学生将线面垂直判定定理的主要证法学习之后，利用例题进行练习，巩固线面垂直的概念及线面垂直的判定定理，体会线面垂直与线线垂直的相互转化、相互依赖的关系。

例题：如图 4，几何体 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$BC\perp AC$，$AM\perp PB$，$AN\perp PC$。

（1）证明：$BC\perp$ 平面 PAC；

（2）证明：$PB\perp MN$。

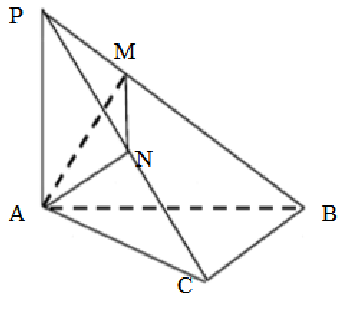


图 4

在练习之后，教师揭示出刚才证明的图形所具有的文化内涵。

师：同学们看，它的四个面全部是直角三角形，中国古代数学把这种类型的三棱锥称之为鳖臑。鳖臑是指甲鱼的前肢骨，它的形状可以抽象成三棱锥。

介绍完鳖臑名称的由来，教师接着向学生展示甲鱼的前肢骨，让学生真实的感受鳖臑的原型，从而再一次让学生感受直观想象与数学抽象，感受数学的文化魅力。

4 学生反馈

课后，我们搜集了 46 名学生对本节课的反馈信息。

关于对线面垂直概念的理解，74%的学生理解了线面垂直是直线与平面上所有直线垂直，以及只要直线垂直于平面内两条相交直线，则直线与平面垂直；当看到“线面垂直”时，学生想到的内容有：数学关系类（35%）：如“线线垂直”以及“线垂直与面内任意/所有直线”，生活实际类（17%）：如路灯、灯塔等，数学定理类（15%）：如勾股定理、等腰三角形性质等；数学家；数学老师。

关于线面垂直判定定理的证明与应用，67%的学生认为有必要讲授线面垂直判定定理的证明方法；46%的学生认为有点难并且大概能理解，37 %的学生认为证明方法难，不太能理解；59%的学生能通过线面垂直判定定理利用两把三角尺让一根木棒垂直于桌面；61%的学生知道如何用一根铅垂线和一把三角尺检验地板是否水平。

关于本节课的数学思想，体会到对称思想和转化构造方法的学生占多数，共有 63%。85%的学生喜欢讲数学的历史融入课堂；对于本节课令学生印象最深的是什么，学生高票回答是：讲解方法（占 33%）和证明方法（占 33%）。

5 结语

本节课数学史的教育价值体现如下：让学生经历从线面垂直概念到判定的生成过程，体验“知识之谐”。在证明判定定理的过程中，从不同的角度让学生开拓了证明的思路，体现“方法之美”。从得出线面垂直的定义到证明，学生都是在教师的启发引导下逐步完成，一步步得到判定定理的严谨证明，锻炼了学生的直观想象、逻辑推理等能力，感悟到了探究的乐趣，体现了“探究之乐”和“能力之助”。鳖臑模型让学生感叹：古代数学家竟如此善于在生活中发现数学；线面垂直判定定理的证明经历了漫长的历史，且不断优化、精简；不同时空的数学家都对该定理进行了研究，体现了“文化之魅”。在学生完成证明之后，发现自己的证法居然与历史上数学家的证明相似，因而增加了学生的自信心与学习兴趣，数学史体现了“德育之效”。

笔者在整个教学设计过程以及研讨活动中收获颇丰。首先加深了笔者对概念及定理的理解，大大开阔了自己的视野，了解到数学史上线面垂直判定定理的证明方法竟多达数十种。

其次，教学设计的思路得到了拓展，意识到课堂教学只关注知识目标是狭隘的，教师必须要关注数学思维与数学能力并在课堂中贯彻实施，才能培养学生的数学核心素养，提升课堂的品质与效率。最后，数学史中材料的选取对教学的成败至关重要，要符合趣味性、可学性、有效性、人文性等原则。不同材料呈现的方式也必须有所不同，多种教学方式的呈现，让课堂不再单调，保证了数学课堂的新鲜度，从而让学生的头脑始终处于比较兴奋的状态。

通过本次实践课，笔者还认识到一些不足之处。讨论线面垂直判定定理证明路径的过程中，笔者始终坚持让学生动手操作并演示报告，虽然让学生对定理的认识更加深刻，但是从课堂整体层面考虑却降低了整堂课的效率，此处应该适当融入信息技术，效率可能会更高。其次，笔者选取数学史材料时有点偏多，导致本节课容量较大，所以今后在选取数学史材料时要注意精选，不必求多。

参考文献

[1] 蒋明建. 谈新课程中面面平行、线面垂直判定定理教学的困惑与思考[J]. 中小学数学(高中版), 2013(3):14-16.

[2] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社, 2017.

[3] 欧几里得.几何原本[M].西安：陕西科学技术出版社, 2003.

[4] Clairaut A. A. *Eléments de Géometrie*[M]. Paris: Lambert & Durand, 1741.

[5] 沈中宇, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊, 2017(1):44-47.

[6] 郭书春. 九章算术译注[M]. 上海：上海古籍出版社, 2009.

活动信息

HPM 活动简讯

柳叶初生，桃红梨白的季节，华东师范大学 HPM 研究团队与 HPM 工作室成员参加了如下学术活动：

◆2018 年 3 月 1 日，HPM 工作室在上海市奉贤中学举行课例研讨活动，工作室成员共计 8 人参加了活动。本次活动中，HPM 工作室成员、奉贤中学的张益明老师为大家展示了“两角和差正余弦公式”的教学。

（丁倩文 供稿）

◆2018 年 3 月 1 日，HPM 工作室在华东师范大学第二附属中学举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 30 余人参加了活动。本次活动中，HPM 工作室成员、华师大二附中的蔡东山老师为大家展示了“两角和差正余弦公式”的教学。

（陈晏蓉 供稿）

◆2018 年 3 月 8 日，HPM 工作室在上海师范大学附属经纬实验学校举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 30 余人参加了活动。本次活动中，经纬实验学校的蒋怿莉老师及 HPM 工作室成员、经纬实验学校的顾海萍老师分别为大家展示了“列方程”和“邻补角、对顶角”的教学。

（马艳荣 供稿）

◆2018 年 3 月 13 日，HPM 工作室在上海中医药大学附属闵行晶城中学举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 20 余人参加了活动。本次活动中，HPM 工作室成员、上海中医药大学附属闵行晶城中学的张静老师为大家展示了“有理数的乘法”的教学。

（栗小妮 供稿）

◆2018 年 3 月 20 日，HPM 工作室在华东师范大学附属东昌中学举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 20 余人参加了活动。本次活动中 HPM 工作室成员、华东师范大学附属东昌中学的向荣老师为大家展示了“周期函数”的教学。

（沈中宇 供稿）

◆2018 年 3 月 28 日，HPM 工作室在月浦中学举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 20 余人参加了活动。本次活动中，HPM 工作室成员、上海市月浦中学蔡颖慧老师以及上海市杨思中学张翼翔老师分别为大家展示了“二元一次方程”以及“二元一次方程组及其解法 加减消元法”的教学。

（陈晏蓉 供稿）

◆2018 年 4 月 8 日，HPM 工作室在上海市建平中学举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 30 余人参加了活动。本次活动中 HPM 工作室成员、上海市建平中学的杜金金老师为大家展示了“周期函数”的教学。

（丁倩文 供稿）

◆2018 年 4 月 18 日，HPM 工作室在上海市世界外国语学校举行课例研讨活动，工作室成员共计 10 余人参加了活动。本次活动中 HPM 工作室成员、世界外国语学校的于俊老师为大家展示了“七巧板问题”的教学。

（孙思洁 供稿）

◆2018 年 4 月 26 日，HPM 工作室在上海同济大学第二附属中学举行课例研讨活动，工作室成员及华东师范大学教师教育学院、数学科学学院博士和硕士研究生共计 20 余人参加了活动。本次活动中 HPM 工作室成员、上海同济大学第二附属中学黄蓓老师以及复旦大学第二附属中学蔡莉琴老师分别为大家展示了“全等三角形的判定（ASA）”以及“全等三角形的判定（SAS）”的教学。

（丁倩文 供稿）