20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式①

汪晓勤

（华东师范大学数学系 200241）

两角和与差的正、余弦公式常常被称为平面三角学的基本公式，这些公式随着三角学的诞生而诞生，有着十分悠久的历史. 打开 20 世纪中叶以前的任何一部西方三角学著作，我们都能看到，这些公式中至少有一个是用几何方法推导证明的，不同作者在方法的选择上各有所爱，各种方法汇总起来，可谓精彩纷呈、蔚为大观，为我们今天的教材编写以及 HPM 视角下的公式教学提供了十分丰富的素材.

1 托勒密定理

公元 2 世纪，古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy）为编制弦表而提出了后人以其名字命名的定理：圆内接四边形两条对角线乘积等于两组对边乘积之和. 利用该定理，已知两角所对弦的长度，就可以求出它们的和或差所对弦的长度. 如图 1，设 $ABCD$ 是单位圆 O 的内接四边形，对角线 BD 为圆之直径. $\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，则由托勒密定理，在四边形 $ABCD$ 中：$AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD$，等式两边同除以 4，即得公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$

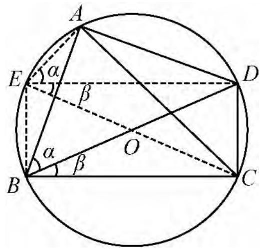


图 1 托勒密定理与和角公式

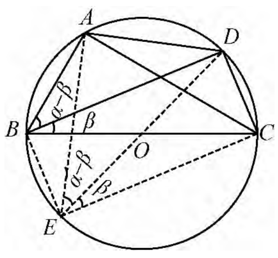


图 2 托勒密定理与差角公式

类似地，在四边形 $AEBD$（EC 为直径）中应用托勒密定理可得

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

若圆内接四边形 $ABCD$ 的一边 BC 为圆 O 的直径（如图 2），设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，则由托勒密定理可得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{3}$$

类似地，在圆内接四边形 $ABEC$（ED 为直径）中应用托勒密定理有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

18—19 世纪的少数三角学著作（如[1]、[2]和[3]）即采用托勒密定理来推导公式（1）—（4）.

19 世纪苏格兰数学家华里司（W. Wallace，1768～1843）在为《大英百科全书》所撰写的“代数”辞条中，构造了另一种圆内接四边形来推导和角正弦公式[4]. 如图 3 所示，在单位圆 O 中，取 $\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，过 B 分别作 OA 和 OC 的垂线，垂足分别为 D 和 E；过 C 和 E 分别作 OA 的垂线，垂足分别为 F 和 G. 易知，E、O、D、B 四点共圆，故 $\angle BDE=\angle BOE=\angle GED=\beta$，于是，$\mathrm{Rt}\triangle EGD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle OEB$ 相似，从而有 $OE:OB=EG:ED$，但 $OE:OC=EG:CF$，因此得 $ED=CF=\sin(\alpha+\beta)$. 根据托勒密定理，$ED\times OB=BD\times OE+OD\times EB$，故得公式（1）.

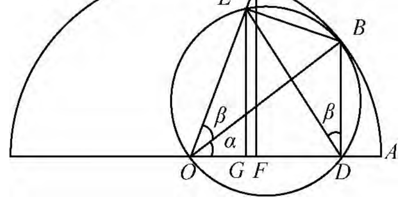


图 3 华里司的方法

① 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一.

2　帕普斯模型

公元 3 世纪末，古希腊数学家帕普斯(Pappus)在《数学汇编》中提出了一个几何命题，其中蕴含着十分丰富的三角学内涵，为我们提供了许多三角公式的几何模型. 如图 4，设$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta(0<\beta<\alpha<\pi, 0<\alpha+\beta<\pi)$，$OA=OB=OC=1$，过 C 作 $CH\perp OB$，垂足为 H，交半圆于 E. 过 H 作 $HG\perp OA$，$HM\perp CD$，垂足分别为 G 和 M，又过 E 作 $EF\perp OA$，垂足为 F. 于是有：$CH=\sin\beta$，$OH=\cos\beta$，$CD=\sin(\alpha+\beta)$，$OD=\cos(\alpha+\beta)$，$EF=\sin(\alpha-\beta)$，$OF=\cos(\alpha-\beta)$，$HG=\sin\alpha\cos\beta$，$OG=\cos\alpha\cos\beta$，$MH=DG=\sin\alpha\sin\beta$，$CM=\cos\alpha\sin\beta$. 因 $CD=HG+CM$，$OD=OG-MH$，$EF=HG-CM$，$OF=OG+MH$，故分别得公式(1)—(4).

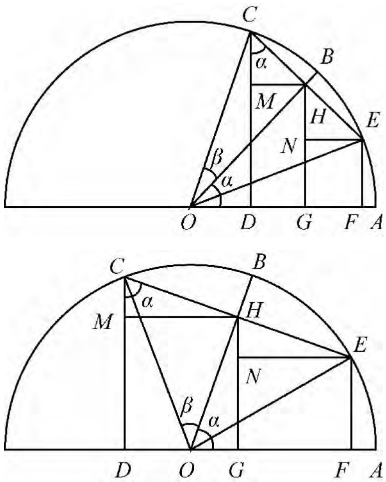


图 4　和角公式的帕普斯模型

利用帕普斯的几何模型，不难证明其他三角公式，如倍角公式、积化和差公式、和差化积公式等.

20 世纪中叶以前，绝大多数西方三角学教科书(如文献[5]—[17])都采用了帕普斯的几何模型来证明锐角情形下的和角与差角正余弦公式，然后利用诱导公式证明任意角的情形.

3　克雷斯维尔的单位圆方法

19 世纪，英国数学家克雷斯维尔(D. Cresswell，1776～1844)给出了新的证明方法[18].

如图 5，在单位圆内作$\angle AOB=2\alpha$，$\angle BOC=2\beta$，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D. 则 $AC=2\sin(\alpha\pm\beta)$，$AB=2\sin\alpha$，$BC=2\sin\beta$，$AD=2\sin\alpha\cos\beta$，$CD=2\cos\alpha\sin\beta$，

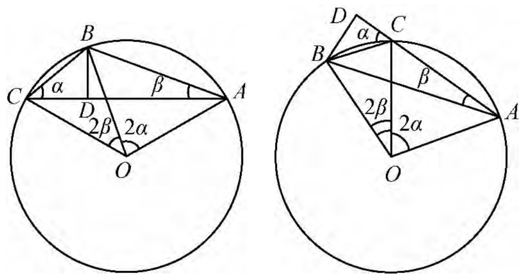


图 5　克雷斯维尔对和角公式的证明

由 $AC=AD\pm CD$，即得公式(1)和(3). 用$\frac{\pi}{2}-\beta$代替β，即可导出公式(2)和(4).

4　两点之间距离公式

19 世纪法国数学家萨吕斯(P. F. Sarrus，1798～1866)在《纯粹与应用数学年刊》上发表论文，根据两点之间的距离公式来推导公式(4)，进而导出其他公式[19]. 如图 6，在单位圆内构造$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，则

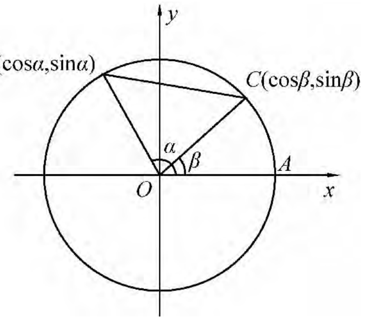


图 6　萨吕斯的方法

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= \mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)\\
&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2,
\end{aligned}
$$

故有

$$\mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \tag{5}$$

令 $\beta=0$，得

$$\mathrm{Chord}^2\alpha=2-2\cos\alpha \tag{6}$$

在(6)中用 $\alpha-\beta$ 代替 α，得

$$\mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta) \tag{7}$$

比较(5)和(7)，即得公式(4).

实际上，在$\triangle OBC$ 中直接利用余弦定理或勾股定理也可以导出(7). 在(4)中用 $\alpha-\beta$ 代替 β，得

$$
\begin{aligned}
\cos\beta&=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\\
&=\cos^2\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta),
\end{aligned}
$$

由此得公式(3). 在(3)和(4)中用 $\alpha+\beta$ 代替 α，则得

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta \tag{8}$$

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta \qquad (9)$$

由(8)×$\cos\beta$+(9)×$\sin\beta$,得公式(1),由(8)×$\cos\beta$−(9)×$\sin\beta$,得公式(2).

文献[20]沿用了萨吕斯的方法.[21]则在图5中用$\frac{\pi}{2}-\beta$代替β来证明公式(1),进而导出其他公式.

1941年,美国数学家麦克肖恩(E. J. McShane,1904～1989)在《美国数学月刊》上发表论文,避开弦长公式,重新对公式(4)进行推导[22].如图7,在单位圆O中构造$\angle AOB=\alpha$,$\angle AOC=\beta$,将$\triangle BOC$沿顺时针旋转,使得OC与OA重合,OB与OD重合,由$AD=CB$,利用两点之间距离公式即得公式(4).其他公式根据诱导公式导出.

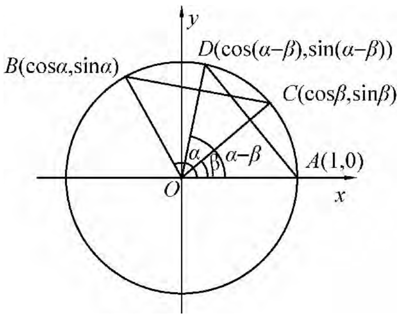


图7　萨吕斯方法的改进之一

文献[23]、[24]等均沿用此法.[25]则以OC所在直线为横轴建立新坐标系,从而得到BC的另一种表达式.类似地,文献[26]则构造图8,利用$AB=CD$得出公式(2),再利用诱导公式导出其他公式.

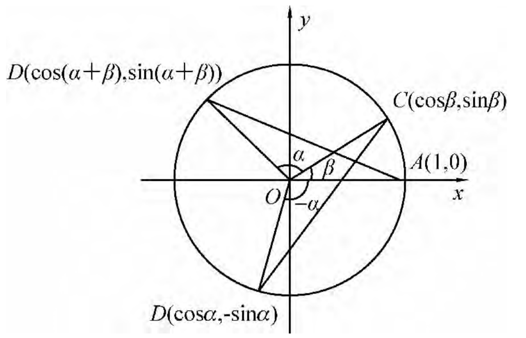


图8　萨吕斯方法的改进之二

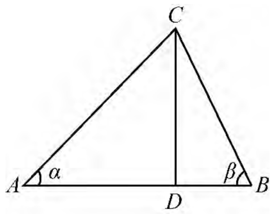
5　正弦定理

意大利数学家卡诺里(A. Cagnoli,1743～1816)在其《平面与球面三角学》中利用正弦定理来推导和角公式[27].如图9,在$\triangle ABC$中,CD为BC边上的高,$\angle A=\alpha$,$\angle B=\beta$,$0<\alpha+\beta<\pi$.因$AB=AD+DB=AC\cos\alpha+BC\cos\beta$,故有

$$1=AD+DB=\frac{AC}{AB}\cos\alpha+\frac{BC}{AB}\cos\beta.$$

但根据正弦定理,$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,$\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$,故有

$$1=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\beta,$$



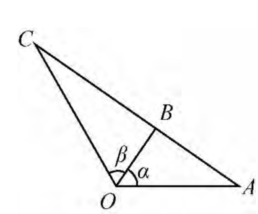


图9　正弦定理推导法　　图10　余弦定理推导法

由此得公式(1).文献[28]−[35]均采用此法.

6　余弦定理

英国数学家伍德豪斯(R. Woodhouse,1773～1827)在其《平面与球面三角学》中分别用托勒密定理和余弦定理来推导和角正弦公式[2].在$\triangle ABC$中,仍设$\angle A=\alpha$,$\angle B=\beta$,$0<\alpha+\beta<\pi$.由

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

得

$$\sin\alpha=\frac{N}{bc},\sin\beta=\frac{N}{ac},\sin(\alpha+\beta)=\frac{N}{ab},$$

其中$N=$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\=&\frac{N}{bc}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{N}{ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\=&\frac{N}{ab}=\sin(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

然后利用诱导公式证明公式(1)适用于任意角,并导出其他公式.

伍德豪斯的方法由于计算量太大而无人问津.美国数学家罗森巴赫(J. B. Rosenbach,1897～1951)在其《平面三角学》中设计了更简单的方法[36],直接推导公式(2).如图10,$\angle AOB=\alpha$,$\angle COB=\beta$($0<\alpha+\beta<\pi$),$AC\perp OB$,$OA=a$,$OB=b$,$OC=c$,$AB=$

m, $BC=n$, $OB=h$，由余弦定理得

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2+c^2-(m+n)^2}{2ac}=\frac{2h^2-2mn}{2ac}$$

$$=\frac{h}{a}\times\frac{h}{c}-\frac{m}{a}\times\frac{n}{c},$$

由此即得公式(2).

7　相似三角形

瑞士-美国数学家哈斯勒(F. R. Hassler，1770～1843)在其《解析平面与球面三角学》中利用相似三角形来推导和角公式[37]. 如图 11，构造 $\angle AOB=\alpha$，$\angle COB=\beta$，$AC\perp OB$，$AE\perp OC$，则 $\sin(\alpha\pm\beta)=\frac{AE}{OA}$，$\cos(\alpha\pm\beta)=\frac{OE}{OA}$，$\sin\alpha=\frac{AB}{OA}$，

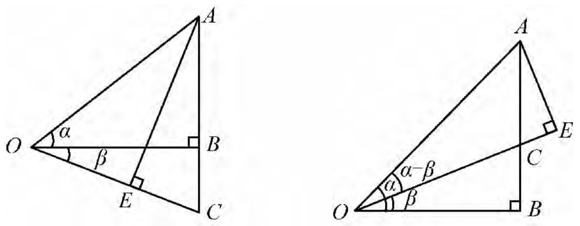


图 11　哈斯勒的相似三角形法

$\cos\alpha=\frac{OB}{OA}$，$\sin\beta=\frac{BC}{OC}$，$\cos\beta=\frac{OB}{OC}$. 因 $\triangle AEC$ 与 $\triangle OBC$ 相似，故 $\frac{AE}{AC}=\frac{OB}{OC}$，即 $AE=\frac{AC\times OB}{OC}$，

于是有

$$\frac{AE}{OA}=\frac{AC\times OB}{OA\times OC}=\frac{AB\times OB\pm BC\times OB}{OA\times OC}$$

$$=\frac{AB}{OA}\times\frac{OB}{OC}\pm\frac{OB}{OA}\times\frac{BC}{OC},$$

这就是公式(1)和(3).

又　$\frac{EC}{AC}=\frac{BC}{OC}$，

即 $EC=\frac{AC\times BC}{OC}=\frac{AB\times BC\pm BC\times BC}{OC}$，

于是有

$$\frac{OE}{OA}=\frac{OC\mp EC}{OA}=\frac{OB^2\mp AB\times BC}{OA\times OC}$$

$$=\frac{OB}{OA}\times\frac{OB}{OC}\mp\frac{AB}{OA}\times\frac{BC}{OC},$$

这就是公式(2)和(4).

8　面积法

文献[36]还利用三角形面积公式来推导公式(1). 如图 10，因 $S_{\Delta AOC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}$，故有

$$\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta,$$

即

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{b}{c}\sin\alpha+\frac{b}{a}\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

9　投影法

投影法出现于 19 世纪后期. 如图 12，$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$ $(0<\alpha+\beta<\pi)$，$AC\perp OB$. 根据命题："两个向量之和的投影等于这两个向量的投影之和"，我们有

$$\mathrm{Proj}_{oy}\overrightarrow{OC}=\mathrm{Proj}_{oy}\overrightarrow{OB}+\mathrm{Proj}_{oy}\overrightarrow{BC},$$

$$\mathrm{Proj}_{ox}\overrightarrow{OC}=\mathrm{Proj}_{ox}\overrightarrow{OB}+\mathrm{Proj}_{ox}\overrightarrow{BC},$$

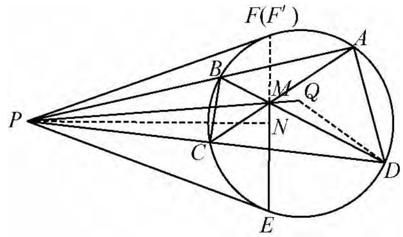


图 12　投影法

此即

$$OC\sin(\alpha+\beta)=OB\sin\alpha+BC\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha),$$

$$OC\cos(\alpha+\beta)=OB\cos\alpha+BC\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha),$$

但 $OB=OC\cos\beta$，$BC=OC\sin\beta$，故得公式(1)和(2).

文献[38]—[43]都采用了投影法.

10　结语

和角公式的历史再一次告诉我们，数学历史是一座巨大的宝藏，为我们提供了取之不尽、用之不竭的教学资源和思想养料. 倘若历史是沧海，那么我们所知便只是其中之一粟；倘若历史是天空，那么我们所见便只是其中之一角. 今日教材的编写以及 HPM 视角下的高水平数学教学的实施，都离不开深入的历史文献研究.

在两角和与差的正、余弦公式的不同证明或推导方法中，除了距离公式法外，其他方法大多局限于锐角或钝角的情形，需要借助诱导公式进一步讨论任意角的情形. 正因为如此，20 世纪 50 年代之后，距离公式法逐渐受到作者们的青睐，那些只适用于锐角或钝角的方法逐渐被人们遗忘. 但是，帕普斯模型、克雷斯维尔的单位圆方法、面积方法等简单直观，即使在今天也仍然适于教学. 各种方法不仅能够拓宽学生的思维，为他们提供了探究机会，而且也揭示了不同知识之间的密切联

系,有助于他们对公式的理解、记忆和运用.我们有理由相信,HPM 视角下的三角公式教学,必将使学生不再将三角公式视为畏途.

参考文献

1 Audierne J. Traité *Complet de Trigonomé*trie [M]. Paris: Claude Herissant,1756

2 Woodhouse R. A Treatise on *Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Cambridge:J. Deighton & Sons,1819

3 Cirodde P L. *Eléments de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique* [M]. Paris:Librairie De L. Hachette et C^ie^,1847

4 Wallace, W. Algebra [A]. *Encyclopaedia Britannica* (Vol. 1),6th Edition,Edinburgh: Archibald Constable & Company,1823. 671

5 Keil J. The Elements of *Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Dublin: W. Wilmot,1726

6 Emerson E. *The Elements of Trigonometry* [M]. London: W. Innys,1749

7 Maseres F. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. London: T. Parker,1760

8 Lacroix S F. *Traité Elémentaire de Trigonométrie* [M]. Paris:Courcier,1803

9 Legendre A M. *Elements of Geometry & Trigonometry* [M]. New York: N. & J. White, Collins & Hannay, Coillins & Company,1830

10 De Morgan A. *Elements of Trigonometry & Trigonometry Analysis* [M]. London: Taylor & Walton,1837

11 Todhunter I. *Trigonometry for Beginners* [M]. London & Cambridge:Macmillan & Company,1866

12 Oliver J E. ,Wait L A. ,Jones G W. *A Treatise on Trigonometry* [M]. Ithaca:Finch & Apgar,1881

13 Loney,S L. *Plane Trigonometry* [M]. Cambridge:The University Press,1893

14 Wentworth G A. *Plane Trigonometry* [M]. Boston:Ginn & Company,1902

15 Wentworth G A. ,*Smith D. E. Plane and Spherical Trigonometry* [M]. Boston:Ginn & Company,1915

16 Hearley M J G. *Modern Trigonometry* [M]. New York:The Ronald Press Company,1942

17 Smail L. L. *Trigonometry, Plane & Spherical* [M]. New York:McGraw-Hill Book Company,1952

18 Cresswell D. *A Treatise on Spherics* [M]. Cambridge: J. Mawman,1816. 181-182

19 Sarrus, F. Exposition des principes fondamentaux de la théorie des fonctions circulaires [J]. *Annales de Mathématiques Pures et Appliqueés*,1821,11:323-325

20 Young J R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London:John Souter,1833

21 Le Cointe,I L A. *Le · ons sur la Théorie des Fonctions Circulaires et la Trigonométrie* [M]. Paris: Mallet-Bachelier,1858

22 Mcshane,E J. The addition formula for the sine and cosine [J]. *American Mathematical Monthly*,1941,48:688-689

23 Perlin I E. Trigonometry [M]. Scranton:International Textbook Company,1955

24 Sharp H. Elements of Plane Trigonometry [M]. Englewood Cliffs,N. J. :Prentice-Hall,Inc. ,1958

25 Holmes C T. *Trigonometry* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company,1951

26 Wylie C R. Plane *Trigonometry* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company,1955

27 Cagnoli M. *Traité de Trigonométrie Rectiligne* & Sphérique [M]. Paris:Didot,1786. 17-19

28 Gregory O. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London:Baldwin,Cradock & Joy,1816

29 Thomson J. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Belfast:Joseph Smyth,1825

30 Wilson R. A *System of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Cambridge: J. & J. J. Deighton, T. Stevenson & R. Newby,1831

31 Scholfield N. *Higher Geometry & Trigonometry* [M]. New York:Collins,Brother & Company,1845

32 Docharty,G B. *Elements of Plane and Solid Geometry and of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. New York: Harper & Brothers,1867. 145-147

33 Rothrock D A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. New York:The Macmillan Company,1910

34 McCarty R J. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. Chicago:American Technical Society,1920

35 Dickson L E. *Plane Trigonometry with Practical Applications* [M]. Chicago:Benj H. Sanborn & Company,1922

36 Rosenbach J B. ,Whitman E. A. ,Moskovitz D. *Plane Trigonometry* [M]. Boston:Ginn & Company,1937. 111-118

37 Hassler F R. *Elements of Analytic Trigonometry, Plane & Spherical* [M]. New York:James Bloomfield,1826. 27-29

38 Seaver E P. *Elementary Trigonometry, Plane & Spherical* [M]. New York & Chicago: Taintor Brothers & Company,1889

39 Hobson E W. , Jessop, C M. An *Elementary Treatise on Plane Trigonometry* [M]. Cambridge:The University Press, 1896

40 Ashton C H. ,Marsh W R. *Plane & Spherical Trigonometry* [M]. New York:Charles Scribner's Sons,1902

41 Kenyon A M. ,Ingold L. *Trigonometry* [M]. New York:The Macmillan Company,1913

42 Young J W. ,Morgan F M. *Plane Trigonometry & Numerical Computation* [M]. New York: The Macmillan Company,1919

43 Sprague A H. *Essentials of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. New York:Prentice-Hall,1942