《自然科学史研究》 第18卷 第1期（1999年）：20～27
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 18 No. 1 (1999)

《缀术》中的“刍甍、方亭之问”初探

汪晓勤
（中国科学院自然科学史研究所，北京，100010）

摘　要　在分析《缉古算经》的写作目的及其具体内容的基础上，对《缀术》中的“刍甍、方亭之问”和“方邑进行之术”作了探讨，认为：前者是已知刍甍、方亭的体积及其边、高的差，求边和高的问题，因此《缀术》中有三次方程的内容；后者是解勾股形问题，类似于《缉古算经》最后6问。由此又对祖冲之的“开差幂”和“开差立”算法提出质疑，认为它们与“方邑进行之术”和“刍甍、方亭之问”无关。

关键词　《缉古算经》《缀术》　方程　王孝通　祖暅　祖冲之
中图法分类号　O11

《缀术》是中国古代一部很高深的数学著作，唐显庆元年（公元656年），国子监设算学科，列此书为学生必修的十部算经之一，规定学习年限长达4年之久，每次考试内容有7条之多，均居十部算经之最[1]。因此书在宋代失传[2]，其具体内容我们今天已无从知晓。但从《隋书·律历志》和《九章算术》（以下简称《九章》）开立圆术的李淳风注中可知，书中有圆周率算法和球体积推导，前者是祖冲之的成果，后者则是祖暅的杰作。《隋书·律历志》说：“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛……宋末，南徐州从事史祖冲之更开密法，……又设开差幂、开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。”[3]钱宝琮先生认为：“开差幂”是开带从平方，“开差立”是开带从立方，“圆”系“负”之误[4～6]。又根据王孝通“上《缉古算术》表”中所说的“其祖暅之《缀术》，时人称之精妙，曾不觉方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽”一句话认为：“方邑进行之术”可能是开差幂的实例，“刍甍、方亭之问”可能是开差立的实例[6]，今人多从其说。据此，梅荣照先生又认为：“开差幂”、“开差立”分别是含负系数二、三次方程的解法，而王孝通看不懂祖氏之法，因而有“全错不通”和“于理未尽”之批评[7]。但是，钱、梅两家所说实属推测，尚未有充分证据。《缀术》中究竟有无三次方程及负系数二、三次方程，“开差幂”、“开差立”究竟为何种算法，至今仍是一个疑案，本文拟对此作一初步探讨。

1　王孝通著《缉古算经》之目的

《缉古算经》（以下简称《缉古》）为唐初算历博士王孝通所著，也是《十部算经》之

收到文稿日期：1996-12-18；收到修改稿日期：1998-07-10

一。全书共20题，其中第1题系天文历法中的算术问题，以《九章》今有术解；第15～20诸题是解勾股形问题；而第2～14诸题则是立体几何问题，设有以下两类问题：第一类：已知立体的体积及其边、高的差，求该立体的边和高；第二类：将各边已知的立体图形分割为若干部分，已知各部分体积，求各部分的边、高。除第1题外，各题均须建立三次或双二次方程求解。

王孝通在写给唐高祖李渊的《上〈缉古算术〉表》中说：

"昔周公制礼，有'九数'之名。窃寻'九数'即《九章》是也……魏朝刘徽笃好斯言，博宗纤隐，更为之注。徽思极毫芒，触类增长，乃造重差之法列于终篇，虽即未为司南，然亦一时独步……但旧经残驳，尚有缺漏，自刘以后，更不足言。其祖暅之《缀术》，时人称之精妙，曾不觉方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽。臣今更作新术，于此附伸……伏寻《九章》商功篇有平地役功受袤之术，至于上宽下狭、前高后卑，正经之内阙而不论。致使今代之人不达深理，就平正之间同欹斜之用，斯乃圆孔方枘，如何可安。臣昼思夜想，临书浩叹，恐一旦瞑目，将来莫睹。遂于平地之余，续狭斜之法，凡二十术，名曰《缉古》。"[8]

由此可见，王孝通著《缉古》一书有两个目的：(1) 继刘徽前踪，补《九章》阙漏。王孝通精通并十分推崇《九章》。他认为，在《九章》的众多研究者中，成就最大的是刘徽。但《九章》经刘作注并增重差法后仍有"阙漏"：商功章只有"平地役功受袤之术"，而缺少"上宽下狭、前高后卑"的情形。按《九章》商功章第7题中的"渠"是横截面全等的规则堤形，求先到一千人受袤问题的解法即为王孝通所说的"平地役功受袤之术"。王氏觉得，《九章》的方法不能满足实际需要，因为大量土木工程中还会遇到复杂的不规则堤形，如仍以《九章》的方法解其受袤问题，就不合实际了。因此一种深深的责任感促使他著书立说。(2) 正《缀术》之错误，尽祖暅之未尽。刘徽之后的《九章》研究者中，祖暅的成就和名声最大。北齐颜之推称："算术亦是六艺要事，自古儒士论天道、定律历者皆学通之，然可以兼明，不可以专业。江南此学殊少，唯范阳祖暅精之。"[9]李淳风在《隋书·律历志》中说："臣先人栖诚，学算于祖暅，问律于何承天。"[3]梁初，秘书监任昉和殷均编写《四部目录》时，将所有数术类的书籍另列一部，请祖暅撰其名[10]。北魏也闻祖暅之名，天文学家信都芳便十分仰慕他，祖暅为魏所俘时，信都芳劝安丰王元延明礼待他[11]。可见，在祖暅生活的时代，数学上无人堪与之相提并论，然而，精通数学的王孝通却发现其《缀术》的错误和不完善之处，致使他对祖氏的评价失之偏颇："自刘以后，更不足言"。创新术纠正"方邑进行之术"的错误，并补充"刍甍、方亭之问"的未尽之理，这是王孝通著《缉古》的又一目的。

2　《缀术》中的"刍甍、方亭之问"

王孝通既于《缉古》中创新术以补充《缀术》中"刍甍、方亭之问"的未尽之理，则这未尽之理和新术分别是什么呢？我们来看《缉古》中的立体几何问题。诸题所设问题见表1。

表 1 《缉古》中的立体几何问题

题 序	工 程 名	《九章》名称	所 设 问 题
2	仰 观 台	刍 童	第一、第二类
	羡 道	羡 除	第一、第二类
3	堤		第一、第二类
4	龙 尾 堤	羡 除	第一、第二类
5	河		第二类
	胥	羡 除	还原问题
6	窖	刍 童	第一、第二类
7	亭 仓	方 亭	第一、第二类
8	刍 甍	刍 甍	第二类
9	圆 囤	圆 亭	第一、第二类
10～12	方仓、圆窖	方垛垮、圆垛垮、	第一类
13，14	方窖、圆窖	方亭、圆亭	第一类

第 8 题是全书唯一关于刍甍的问题："假令刍甍，上袤三丈，下袤九丈，广六丈，高一十二丈。有甲县六百三十二人，乙县二百四十三人。夏程人功常积三十六尺。限八日役，自穿、筑，二县共造。今甲县先到，问自下给高、广、袤各多少。"由《九章》刍甍公式得刍甍体积 $V=252\ 000$ 尺^3。以平行于底面的平面截刍甍成一刍童（甲县造）和一刍甍（乙县造），体积分别为 $V_1=632\times36\times8=182016$ 尺^3，$V_2=243\times36\times8=69984$ 尺^3。求截得刍童的上广和上袤（即甲县受广、袤）及高。本题仅仅设了第二类问题。从表 1 可见，第 5 题也仅仅设了"河"的第二类问题，但"河"与第 3 题的"堤"在形状上是一样的，只是上下颠倒而已，王孝通在自注里也明确说"覆堤为河"。第 3 题既已设有第一类问题，故此题略去。那么，王孝通为何不设刍甍的第一类问题呢？我们不妨将它与第 4 题"龙尾堤"的第一类问题作一比较，看王孝通能否解决刍甍的同类问题。

《缉古》第 4 题："假令筑龙尾堤，其堤从头高、上阔，以次低狭至尾。上广多，下广少。堤头上下广差六尺，下广少高一丈二尺，少袤四丈八尺。甲县二千三百七十五人，乙县二千三百七十八人，丙县五千二百四十七人。各人程功常积一尺九寸八分，一日役毕，三县共筑。今从堤尾与甲县，以次与乙、丙。问龙尾堤从头至尾高、袤、广及各县别给高、袤、广各多少。"其中第一类问题解法（"求龙尾堤广、袤、高术"）是："以程功乘总人为堤积，又六因之为虚积。以少高乘少袤为隅幂，以少上广乘之为鳖隅积。以减虚积，余，三约之，所得为实。并少高、袤，以少上广乘之，为鳖从横廉幂，三而一，加隅幂为方法。又三除少上广，以少袤、少高加之，为廉法。从，开立方除之，得下广。加差即高、广、袤。"分别以 a，b，c，h 和 V 表示龙尾堤的上、下广、袤、高和体积（图 1）。已知 $a—b$，$h—b$，$c—b$ 和 V，求 a，b，c 和 h。因 $V=(a+2b)ch/6$，故：

$$6V=(a+2b)ch=(a-b)ch+3bch,$$

$6V$ 称为"虚积"，它由两部分组成（图 2），将它们分割为四类长方体（图 3），其体积分别为：

$V_{\mathrm{I}}=3b^3$;

$V_{\mathrm{II}}=[3(c-b)+3(h-b)+(a-b)]b^2$;

$V_{\mathrm{III}}=\{[(c-b)+(h-b)](a-b)+3(c-b)(h-b)\}b$;

$V_{\mathrm{IV}}=(a-b)(c-b)(h-b)$;

由 $6V=V_{\mathrm{I}}+V_{\mathrm{II}}+V_{\mathrm{III}}+V_{\mathrm{IV}}$ 得关于下广 b 的三次方程：

$$b^3+[(c-b)+(h-b)+(a-b)/3]b^2+\{[(c-b)+(h-b)](a-b)/3+(c-b)(h-b)\}b=[6V-(a-b)(c-b)(h-b)]/3$$

再看刍甍的第一类问题，以 a，b，c，h 和 V 分别表示刍甍的下袤、上袤、下广、高和体积，并设 V，$a—b$，$c—b$ 和 $h—b$ 为已知，求 a，b，c 和 h。因 $V=(2a+b)ch/6$，故得虚积 $6V=(2a+b)ch=2(a-b)ch+3bch$。它也由两部分组成，与龙尾堤完全相类似，可以得到关于上袤 b 的三次方程。

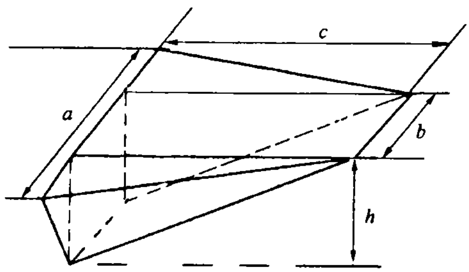

图 1　龙尾堤

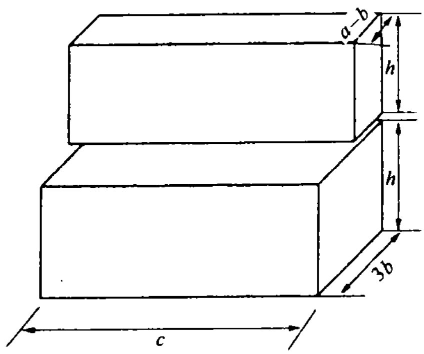

图 2　虚积

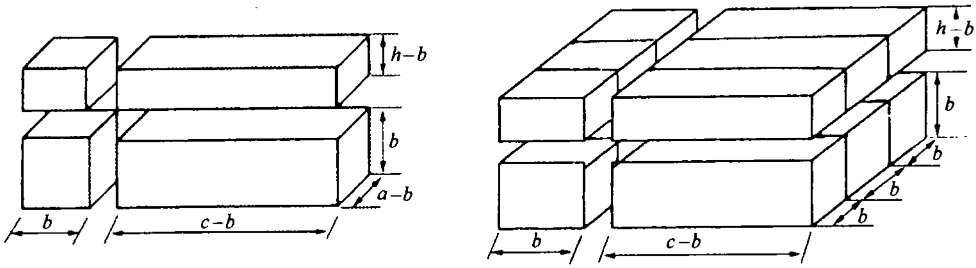

图 3　虚积之分割

可见刍甍第一类问题与龙尾堤、羡道相仿，王孝通完全能解决。若《缀术》中的“刍甍、方亭之问”不含第一类问题，则王孝通在此题中必如第 2～4、6～7 诸题那样设有两类问题。因此王氏称“刍甍、方亭之问于理未尽”必是因为它们仅仅是刍甍、方亭的第一类问题，而缺少第二类问题。《缉古》第 2～4、7 诸题中，王孝通对第二类问题的解法都加了注释，而对第一类问题的解法则从不加注。这就更进一步证明了：解第二类问题前所未有，完全是王氏自己的创造，是他所说的“新术”；而第一类问题的解法则在他以前的

《缀术》中已经有过了。这与《缉古》的第一个写作目的亦相一致：王孝通为弥补《九章》规则堤形第二类问题之不足而创设不规则堤形的同类问题，自然也为《缀术》的“刍甍、方亭之问”增设第二类问题。

已知立体的体积反求其边的问题，《九章》商功章已有（第26～28题）。深研《九章》的祖暅自然会感到此类问题之不足。首先，《九章》只设了“穿地”（平堤形）、“仓”（长方体）和“圆囷”（圆柱）问题。祖暅完全可以进一步去研究刍甍、方亭、圆亭和羡除等立体的同样问题。《缉古》第5题的“胥”为此类问题，便是一个佐证。其次，《九章》的这类问题仅仅用到加、减、乘、除及开方运算。如果在实践中产生更复杂的问题：已知立体的体积及其边的差，求立体的边，则《九章》的方法无效。这就会促使祖暅创造新法，或许正是祖暅对《九章》还原问题的补充和发展，给王氏一个启示，将《九章》的“平地役功受袤之术”发展成须以方程解决的更一般的堤形问题。

说“刍甍、方亭之问于理未尽”，当然并不表明《缀术》中有关立体几何问题只有这两种。首先，祖暅既将《九章》的还原问题发展成第一类问题，则他最先研究的当是商功章第26题的“平堤”和第27题的长、宽、高不等的长方体。它们的第一类问题较刍甍、方亭的同类问题要容易得多。《缉古》中未设这两种立体的第二类问题，是因为它们只不过是“平地役功受袤”问题，没有什么“于理未尽”之处。其次，《缀术》中极可能还有方锥、阳马、鳖臑、堑堵等立体的第一类问题，因为，这四种立体的第一类问题较刍甍、方亭的同类问题要容易。《缉古》中未设这些立体的问题，是因为：堑堵的第二类问题亦为“平地役功受袤”问题；而方锥、阳马和鳖臑的第二类问题则仅需《九章》开立方术即可解决，故其第一类问题没有什么“于理未尽”之处。再次，王氏言“刍甍、方亭之问于理未尽”当是仅列举其中两个立体而已，《缀术》极可能还有其它立体的第一类问题。事实上，前面我们看到，刍甍的第一类问题与龙尾堤的同类问题相仿，祖暅既已解决刍甍问题，则完全能够解决羡除的同类问题。

综上所述：《缀术》中的“刍甍、方亭之问”乃是关于刍甍、方亭的第一类问题，即已知刍甍、方亭的体积及其边、高的差，求边和高的问题；《缀术》中除了刍甍、方亭的第一类问题外，应还有长方体（包括方垛壔）、平堤等的第一类问题，并很可能还有方锥、阳马、鳖臑和羡除等的第一类问题。

上述问题都需建立一元三次方程才能解决。因此，在我国数学发展史上，三次方程的建立当以《缀术》为嚆矢。至于“刍甍、方亭之问”是否涉及负系数三次方程，我们认为答案是否定的。因为：如果“刍甍、方亭之问”是负系数三次方程之实例，那么王孝通言其“于理未尽”，就正好说明他理解负系数三次方程之解法。如果自己看不懂，又怎么会挑剔说“于理未尽”呢？而从《缉古》全书看，王孝通对负系数方程不敢越雷池一步，因此他在《缀术》中所见的“刍甍、方亭之问”应该只涉及正系数三次方程。

3 《缀术》中的“方邑进行之术”

我们知道，《九章》勾股章第17、19～21诸题以及刘徽《海岛算经》（以下简称《海岛》）第3题均为方邑问题，都与勾股形有关。其中勾股章第20题相当于已知勾、股积

与差，求勾、股，需以二次方程解决。王孝通的新术必是《缉古》最后六问。因这六问是针对《缀术》之误而设的，故知《缀术》的"方邑进行之术"不外如下问题：已知勾股形的九个条件（a、b、c 分别表示勾、股和弦）a、b、c、$a+b$、$b+c$、$a+c$、$b-a$、$c-a$、$c-b$ 之一以及 ab、bc、ac 之一，求其余未知件。这样的问题共有 27 种，其中值得研究的有 21 种，见表 2。其中 1、4～9 七种情形实际上已为《九章》及刘徽、赵爽所解决。1、7～9 四种情形用的是几何方法。

表 2　一类解勾股形问题

序号	已知件	所求件	关于所求件的方程	作　者
1	ab,c	a	$-x^4+c^2x^2=(ab)^2$	刘徽、赵爽
2	bc,a	b	$x^4+a^2x^2=(bc)^2$	王孝通
3	ab,b	a	$x^4+b^2x^2=(ac)^2$	王孝通
4	$ab,b-a$	a	$x^2+(b-a)x=ab$	刘徽、赵爽
5	$bc,c-b$	b	$x^2+(c-b)x=bc$	刘徽、赵爽
6	$ac,c-a$	a	$x^2+(c-a)x=ac$	刘徽、赵爽
7	$ab,a+b$	a,b	$-x^2+(a+b)x=ab$	刘徽、赵爽
8	$bc,b+c$	b	$-x^2+(b+c)x=bc$	刘徽、赵爽
9	$ac,a+c$	a	$-x^2+(a+c)x=ac$	刘徽、赵爽
10	$ab,c-a$	a	$x^3+[(c-a)/2]x^2=(ab)^2/2(c-a)$	王孝通
11	$ab,c-b$	b	$x^3+[(c-b)/2]x^2=(ab)^2/2(c-b)$	王孝通
12	$bc,c-a$	a	$x^3+[5(c-a)/2]x^2+2(c-a)^2x=(bc)^2/2(c-a)-(c-a)^3/2$	王孝通
13	$ac,c-b$	b	$x^3+[5(c-b)/2]x^2+2(c-b)^2x=(ac)^2/2(c-b)-(c-b)^3/2$	王孝通
14	$ab,a+c$	a	$-x^3+[(c+a)/2]x^2=(ab)^2/2(c+a)$	
15	$ab,b+c$	b	$-x^3+[(c+b)/2]x^2=(ab)^2/2(c+b)$	
16	$bc,a+c$	a	$-x^3+[5(c+a)/2]x^2-2(c+a)^2x=(bc)^2/2(c+a)-(c+a)^3/2$	
17	$ac,b+c$	b	$-x^3+[5(c+b)/2]x^2-2(c+b)^2x=(ac)^2/2(c+b)-(c+b)^3/2$	
18	$bc,a+b$	b	$x^4-(a+b)x^3+[(a+b)^2/2]x^2=(bc)^2/2$	
19	$bc,b-a$	b	$x^4-(b-a)x^3+[(b-a)^2/2]x^2=(bc)^2/2$	
20	$ac,a+b$	a	$x^4-(a+b)x^3+[(a+b)^2/2]x^2=(ac)^2/2$	
21	$ac,b-a$	a	$x^4+(b-a)x^3+[(b-a)^2/2]x^2=(ac)^2/2$	

"方邑进行之术"不可能是 1、7～9 诸情形。因为它们既已为刘徽和赵爽用几何方法解决了，如果祖暅以数值方法解此四题，那么既然可用前人的几何方法加以验证，怎会"全错不通"呢？如果祖暅没有错，王孝通既然可以用几何方法来验证，又怎会因看不懂而妄说其"全错不通"呢？况且王孝通是针对"方邑进行之术"而设《缉古》最后六问的，可是这六问都不是上述各情形。"方邑进行之术"也不可能是 14～17 四情形，从数学发展规律看，必是先解决正系数方程，后解决负系数方程。在祖暅时代，三次方程的建立乃是前无古人的事。若祖暅已能解决负系数三次方程，则更能解决 10～13 四情形，因而《缀术》中理应含有它们，王孝通不至于全看不懂。

因此，"方邑进行之术"必为 2、3、10～13 诸情形中的一个或若干个，祖暅的错误是可信的。王孝通在"上《缉古算术》表"中说："臣长自阊阎，少小学算，镌磨愚钝，迄将皓首，钻寻秘奥，曲尽无遗。代乏知音，终成寡和。"[8]可见他从小即开始学数学，并终生从事数学研究，造诣很高。然而，那个时代懂数学的人尚且寥寥，更不必说像王孝通那样终生"钻寻"数学"秘奥"的人了。他有曲高和寡之撼。他最后说"请访能算之

人考论得失，如有排其一字，臣欲谢以千金”[8]，后人对此多有微词，然而王孝通说这话不仅表明他对自己数学创造的自信心和自豪感，也更表明他对知音的渴望：如果真有一个精通数学的人出来考论《缉古》得失，更改其中一字，那么王孝通应是很乐意以千金相谢的。虽然，在今天看来，《缉古》并非无懈可击，但在当时，读懂该书已自不易，要拿王孝通的千金恐怕是不可能的。须知，王孝通是和皇帝说话，不至于信口开河。

《缉古》代表了当时代数领域的最高水平。它作为“十部算经”之一，内容虽仅二卷，但学习年限长达3年之久，仅次于内容比它多得多的《缀术》，而与《九章》兼《海岛》相同。清人阮元说：“《缉古》以本朝书得列于算馆，而限习又三岁之久，其为深妙可知矣！”又引李锐语：“算书以《缉古》为最深，‘太史造仰观台’以下十九术，问数奇残，人算繁赜，学之未易通晓。”[12]《四库全书》《缉古》提要说：“唐代明算立学，习此书者以三年为限，亦知其术之精妙，非旦夕所克竟其义矣。”《缉古》在列三次方程解实际问题方面，其难度较《缀术》是有过之而无不及的。《缀术》中不可能含负系数方程之解法，认为王孝通看不懂《缀术》，也是不合实际的。

4 “开差幂”、“开差立”质疑

引言已提及钱、梅两家对“开差幂”、“开差立”所作的解释。但根据我们的看法，《缀术》中并没有负系数方程，故“开差幂”、“开差立”也不可能是负系数二、三次方程的解法。那么，“开差幂”、“开差立”是否可能指正系数二、三次方程的解法呢？诚如梅先生所言，开带从平方在《九章》中已有，若“开差幂”是这样的算法，则完全称不上“算氏之最者”；若“开差立”是祖冲之开带从立方的一个术语，则因王孝通在《缉古》中用祖氏之法解他所建立的三次方程，故在求得“实”、“方法”和“廉法”后应该说“开差立除之”，为何只是说“从，开立方除之”呢？实际上，《九章》勾股章第20题于求得“实”和“从法”后，只说“开方除之”，仍沿用少广章开方术之名。祖冲之根本没必要引入新术语来表示二、三次方程的解法。

再回头看李淳风《隋书·律历志》中的这段话，我们认为，整段话是专门讲述圆周率的，只不过最后提到祖冲之所写的书叫《缀术》而已。李赞和的理解[13]是正确的。李淳风没必要扯到其他地方去。《南齐书》和《南史》的文学传皆称祖冲之“注《九章》，造《缀术》数十篇”，可见《缀术》内容丰富，造术繁多，不一而足。如果李淳风于叙述圆周率之余想提一下祖冲之的其他数学成就的话，那么他何以仅仅提“开差幂”和“开差立”这两种算法呢？难道说含数十篇内容、博大精深的《缀术》中除圆周率外只有这两种算法值得一提吗？据今所知，至少还应提到开立圆术。因此，“开差幂”、“开差立”并非方程解法，与“方邑进行之术”和“刍甍、方亭之问”毫无关系。它们应该是圆周率的又一算法。李淳风前面说祖冲之“更开密法”，后面说“又设开差幂、开差立”，理应是针对圆周率而言的。且用“指要精密，算氏之最者”来评论祖冲之圆周率算法，再恰当不过。我们认为，“开差幂”和“开差立”极可能是获得π的分析表达式的方法（当然，这还需要作进一步的探讨）。日本三上义夫曾对“开差幂”和“开差立”作过解释[14]，其中他所说的“用顺序之差比之于等比级数，由此以立算法”，今人作过证明[15,16]。祖冲之

受刘徽之启示，很可能用"开差幂"、"开差立"方法得到了π的分析表达式。如果钱宝琮先生所言"圆"为"负"之误属实的话，那么所谓"兼以正负参之"就意味着祖冲之所获得的π的分析表达式具有交错级数的形式。

参 考 文 献

1 [宋] 欧阳修，宋祁．新唐书·选举志．北京：中华书局，1975．1160～1162.
2 李迪．《缀术》的失传时代问题．数学通讯，1958，(11)：33～34.
3 [唐] 魏徵等．隋书·律历志．北京：中华书局，1973．387～388，396.
4 钱宝琮．增乘开方法的历史发展．见：宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966．36～59.
5 钱宝琮．《缉古算术》第二题、第三题术文疏证．科学史集刊（9），北京：科学出版社，1966．31～52.
6 钱宝琮．中国数学史．北京：科学出版社，1964．89.
7 梅荣照．刘徽与祖冲之父子．科学史集刊（11），北京：地质出版社，1984．105～129.
8 [唐] 王孝通．缉古算经．见：钱宝琮校点．算经十书．北京：中华书局，1963.493～494.
9 [北齐] 颜之推．颜氏家训．见：诸子集成（第8册）．上海书店，1986．43.
10 [唐] 魏徵等．隋书·经籍志．北京：中华书局，1975．907.
11 [唐] 李延寿．北史·信都芳传．北京：中华书局，1974．2933.
12 [清] 阮元．畴人传．商务印书馆，1955．157.
13 李赞和．缀术索隐．数学通讯，1958，(5)：13.
14 [日] 三上义夫．中国算学之特色．商务印书馆，1929．38.
15 沈康身．刘徽——中国第一代知名数学家．自然杂志，1990，13（2）：15～21.
16 沈康身等．割圆术近析．杭州大学学报（自然科学版），1991，18（3）：270～280.

REFLECTIONS ON "THE CHUMENG AND FANGTING PROBLEMS" IN *ZHUI SHU*

Wang Xiaoqin

(*Institute for History of Natural Sciences*, *CAS*, *Beijing*, 100010)

Abstract On analysing the object and contents of *Ji Gu Suan Jing*, this paper arrives at the following conclusions on *Zhui Shu*: first, the *Chumeng* or *Fangting* problem is, given the volume of a *Chumeng* or *Fangting* and the differences of its dimensions, to find the dimensions, hence *Zhui Shu* must have contained cubic equations; Second, the *Fang-Yi-Jin-Xing* rules are those of right—angled triangles, similar to those contained in the last six problems of *Ji Gu Suan Jing*; third, *Kai Cha Mi* and *Kai Cha Li*, two rules given by Zu Chongzhi in his *Zhui Shu*, have no reference to the quadratic or cubic equations; fourth, *Zhui Shu* contains no quadratic or cubic equations of negative coefficients.

Key words *Ji Gu Suan Jing*, *Zhui Shu*, equation, Wang Xiaotong, Zu Geng, Zu Chongzhi

责任编辑：关培红