基于数学史的高中数学问题串初探*

马艳荣　汪晓勤（华东师范大学教师教育学院）

1　引言

实践表明，将数学史融入数学教学，离不开基于数学史料的数学问题的提出。由于数学教师所掌握的历史材料十分有限，问题提出的策略较为单一，因此，在已有的 HPM 课例中，相关数学问题并不丰富，问题的质量也有待改善；这些问题往往只出现在引入或探究环节，之后便悄然谢幕了，毫无系统可言，数学史的教育价值难以得到最大程度的发挥。数学问题串的运用是改变这种状况的途径之一。

所谓“基于数学史的数学问题串”（简称 HPM 问题串），是指以相关数学史料为主线，紧扣数学教学目标，运用一定策略提出的一系列具有内在联系、构成一个整体的数学问题。在课堂上，HPM 问题串为学生提供了“再创造”的机会，有助于他们在探究中经历知识的发生发展过程，形成较为完整的知识体系，获得数学活动的经验，体验“探究之乐”，感悟数学活动的本质。

教育部《关于 2017 年普通高考考试大纲修订内容的通知》要求“充分发挥高考命题的育人功能和积极导向作用”，并提出“在数学试题中增加数学文化的内容”，因而基于数学史的高考试题日益受到人们的关注，但对近年来的高考试题的分析发现，这些试题所涉及的历史材料较为有限，问题提出的策略十分单一[1]。鉴于此，本文拟对基于数学史的问题串设计作一初步探讨。

2　基于数学史料的高中数学问题串

2.1　轨迹问题串

古希腊数学家研究过大量的轨迹问题。他们将轨迹分成平面轨迹（直线和圆）、立体轨迹（圆锥曲线）和线轨迹（直线、圆、圆锥曲线以外的曲线）三类。阿波罗尼奥斯（Apollonius，公元前 3 世纪）在《平面轨迹》中研究了大量的平面轨迹，如“与两直线等距的点的轨迹”。帕普斯（Pappus，公元 3 世纪末）在《数学汇编》中研究了一类新的轨迹问题[2]，即

三线轨迹：到两条已知直线距离的乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数的动点轨迹为圆锥曲线。

四线轨迹：到两条已知直线距离的乘积与到另两条已知直线距离的乘积之距离比等于常数（不等于 1）的动点轨迹为圆锥曲线。

帕普斯还提出更一般的“n 线轨迹”问题，当 $n \geqslant 5$ 时，古希腊的几何方法就无能为力了。17 世纪，法国数学家费马（P. de Fermat，1601－1665 年）和笛卡儿（R. Descartes，1596－1650 年）正是在研究古希腊“n 线轨迹”问题时发明了解析几何。

为了让学生经历解析几何的产生过程，在“曲线与方程”一节课中，可以设计以下问题串。

问题 1：在平面上，到一条定直线的距离相等的点的轨迹是什么？

问题 2：平面上，与两条已知直线等距离的动点轨迹是什么？

考虑两条直线平行或相互垂直两种情形。

问题 3：如图 1，给定三条直线 l_1，l_2 和 l_3，其中 $l_2 \perp l_1$，$l_3 \perp l_1$，l_2 和 l_3 之间的距离为 2。若动点 P 到 l_2 和 l_3 的距离乘积与到 l_1 的距离的平方相等，则点 P 在直线 l_2 和 l_3 之间的轨迹是什么？

问题 4：如图 2 所示，在问题 3 中，若动点 P 到 l_2 和 l_3 的距离乘积与到 l_1 的距离的平方之比等于 2，则点 P 在直线 l_2 和 l_3 之间的轨迹是什么？

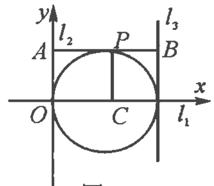

图 1

特殊的三线轨迹问题之一

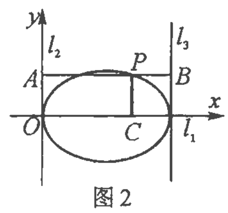

图 2

特殊的三线轨迹问题之二

*本文系上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（项目号：D1508）系列论文之一。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

问题5：如图3所示，设直线 $l_1 /\!/ l_2$，$l_3 \perp l_1$，$l_4 \perp l_1$，l_1 与 l_2，l_3 与 l_4 之间的距离均为2，动点 P 到 l_1，l_2 的距离乘积等于到 l_3，l_4 的距离乘积，求动点 P 的轨迹。

问题6：如图4所示，在问题5中，若动点 P 到 l_1，l_2 的距离乘积与到 l_3，l_4 的距离乘积之比等于2，求动点 P 的轨迹。

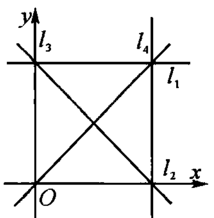

图3

特殊的四线轨迹问题之一

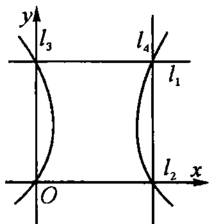

图4

特殊的四线轨迹问题之二

教学实践中，上述问题串中的部分问题已为石和飞老师所采用[3]。将《几何原本》命题Ⅰ.31（过已知直线外一点，作一直线与已知直线平行）改编为"一线轨迹"问题，依次增加已知直线的数目，相继得到古希腊的二线、三线和四线轨迹问题；在三线和四线的情形中，又根据两种不同的比值分别提出问题，各问题构成了一个完整的问题串。

2.2 均值不等式问题串

《几何原本》第6卷命题13给出了求作两条已知线段的比例中项的方法[4]：如图5，设 AC，CB 是两条已知线段，它们在同一条直线上，在 AB 上作半圆 ADB，在点 C 处作 AB 的垂线 CD，交半圆周于点 D，则 CD 就是所求的几何中项。

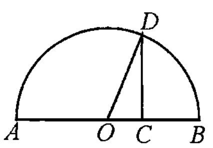

图5

《几何原本》命题Ⅵ.13

根据上述命题，我们可以设计以下均值不等式问题串。

问题1：如图5，OD 是半圆 ADB 的半径，即 AC 和 CB 的算术中项。试比较算术中项和几何中项的大小。当 $AC=CB$ 时，两者有怎样的关系？

问题2：设 $AC=a$，$CB=b$，则 AC，CB 的几何中项与算术中项的大小分别为 $\sqrt{ab}$ 与 $\frac{a+b}{2}$，我们也把 $\sqrt{ab}$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 分别称为正数 a 和 b 的几何平均数与算术平均数。根据问题1的结论，很容易得到两个正数的几何平均数与算术平均数的大小关系。根据图5，你能用代数方法证明两者的大小关系吗？它们何时相等？

问题3：在数学上，我们将 $\frac{2ab}{a+b}$ 称为正数 a 和 b 的调和平均数。在图5中，作 $CE \perp OD$，垂足为 E，如图6所示。证明 DE 的长度为 a 和 b 的调和平均数。从图6中你能得出 a 和 b 的调和平均数与几何平均数之间的大小关系吗？

问题4：根据图6，你能用代数方法证明调和平均数与几何平均数之间的大小关系吗？两者何时相等？

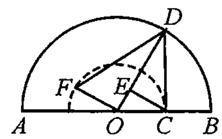

图6

调和平均数与平方平均数的作图

问题5：我们将 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 称为正数 a 和 b 的平方平均数。在图6中，试作出一条线段来表示 a 和 b 的平方平均数，并比较它与算术平均数的大小。

问题6：根据图6，你能用代数方法证明平方平均数与算术平均数之间的大小关系吗？两者何时相等？

教学实践中，上述问题串中的大部分问题已为张小明老师所采用[5]。6个问题均以《几何原本》第6卷命题13为出发点。该命题证明了图6中的半弦 CD 为 AC 和 CB 的几何中项。因 $CE \perp OD$，根据射影定理，故有

$$DE=\frac{CD^2}{OD}=\frac{2ab}{a+b}。$$

以 O 为圆心，$OC=\frac{a-b}{2}$ 为半径作圆弧，过 O 作 OD 的垂线，交圆弧于 F，则联结 DF，DF 即为平方平均数在图中所对应的线段。则

$$DF=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}。$$

易见，当 $AC \neq CB$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$，$\mathrm{Rt}\triangle DCO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DOF$ 中，有 $DE<CD<OD<DF$，即

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

当 $AC=CB$ 时，$DE=CD=OD=DF$，即调和平均数、几何平均数、算术平均数和平方平均数两两相等。又在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$，$\mathrm{Rt}\triangle DCO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DOF$ 中运用勾股定理，分别得到代数恒等式

$$(\sqrt{ab})^2=\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a-b}{a+b}\cdot\sqrt{ab}\right)^2, \quad ①$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=(\sqrt{ab})^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \quad ②$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2。 \quad ③$$

因此得不等式链

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2\leqslant ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},$$

或即

$$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

当且仅当 $a=b$ 时等式成立。

问题1和问题2的目标是建立算术平均数与几何平均数之间的大小关系，问题3和问题4的目标是建立调和平均数与几何平均数之间的大小关系，问题5和问题6的目标是建立算术平均数与平方平均数之间的大小关系。在图5和图6中，利用直角三角形斜边大于直角边的事实，可以解决问题1、问题3和问题5；根据勾股定理建立有关代数恒等式，即可解决问题2、问题4和问题6。问题1—问题6建立了两个正数的四种平均数之间的不等式链，构成了一个完整的问题串。

2.3 三角公式问题串

帕普斯在《数学汇编》中证明了如下命题[6]：如图7，设 C，E 是半圆 O 上的两点，CD 和 EF 为 OA 的垂线，D，F 为垂足；过圆心 O 作 $OH\perp CE$，H 为垂足，则 $(CD+EF)\cdot CE=2OH\cdot DF$。事实上，作 $HG\perp OA$，垂足为 G，已知 $\mathrm{Rt}\triangle OGH$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CIE$ 相似，注意到 $HG=\frac{1}{2}(CD+EF)$，由此即得结论。

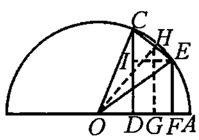

图7

帕普斯的几何命题

上述命题为和角正弦、余弦公式提供了几何模型，该模型通常被称为“帕普斯模型”，在三角学历史上被广泛使用[6]。为了引导学生通过探究得到该模型，我们设计了如下和角公式问题串。

问题1：在初中阶段我们已经知道，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$。你是如何求得这些值的？

如图8，构造特殊的直角三角形即可求得有关的值。

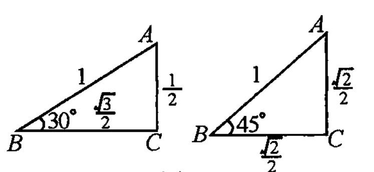

图8

特殊角的正弦值

问题2：你能通过构造直角三角形来求 $\sin 75^\circ$ 和 $\cos 75^\circ$ 吗？

如图9，作 $\angle CBD=45^\circ$，过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E。设 $CD=x$，则 $BD=\sqrt{2}x$，$DE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$BE=\frac{\sqrt{6}}{2}x$，$AD=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}=\sqrt{2x^2-\sqrt{6}x+1}$。于是有 $\left(x+\sqrt{2x^2-\sqrt{6}x+1}\right)^2+x^2=1$，解得 $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，从而得 $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $\sin 75^\circ=AC=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75^\circ=BC=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。

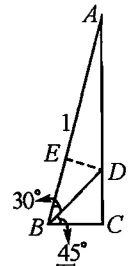

图9

sin 75°的几何解法之一

问题3：利用上述方法计算太烦琐，通过构造直角三角形，你还能给出其他更好的方法来求 $\sin 75^\circ$ 和 $\cos 75^\circ$ 吗？

如图10，过点 A 作 BD 的垂线，垂足为 F；过 F 分别作 AC 和 BC 的垂线，垂足分别为 G 和 H。于是 $AF=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$BF=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$。因此有 $\sin 75^\circ=AC=FH+AG=BF\sin 45^\circ+AF\cos 45^\circ=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。

$\cos 75^\circ=BC=BH-FG=BF\cos 45^\circ-AF\sin 45^\circ=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。

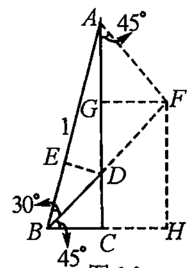

图10

sin 75°的几何解法之二

问题4：根据上述 $\sin 75^\circ$ 和 $\cos 75^\circ$ 结论，在图10中，若用锐角 α 和 β 分别代替 45° 和 30°（图11），你能得到什么结果？

由图11易得：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

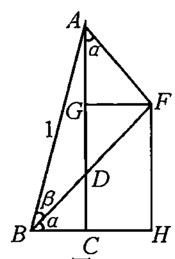

图11

和角公式的帕普斯模型

问题5：你能用类似的几何方法推导差角公式 $\sin(\alpha-\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$（α 和 β 为锐角）吗？

利用图12即可。

问题6：问题4和问题5所得到的四个公式对于任意的 α 和 β 是否都成立？

可利用诱导公式来解决。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

上述问题串中，问题1让学生回顾初中学过的特殊角30°和45°的正弦值和余弦值，进而通过问题2让学生探究30°和45°的和角的正弦值和余弦值。在任意斜三角形中，已知角角边，可以通过直角三角形来求其他边和角。但学生所用的方法可能并不理想。通过问题3，学生可以获得帕普斯模型。通过问题4，得到锐角情形下的和角公式。通过问题5，得到锐角情形下的差角公式。通过问题6，得到一般情形下的和角与差角正弦公式、余弦公式。各问题以帕普斯模型为核心，构成了一个完整的问题串。

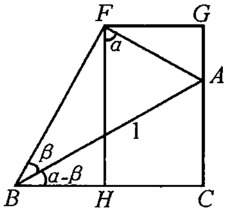

图12
差角公式的帕普斯模型

3 三个问题串的特点

上述三个问题中，各个问题都是以古希腊数学史料为基础提出来的，且均围绕某一个主题展开，构成了一个不可分割的整体，因此，它们都属于“基于数学史的问题串”。

三个问题串分别具有以下特点。

改编史料，一线贯穿。轨迹问题串中的6个问题都源于历史问题，但对原问题的条件进行了特殊化处理，即直线由任意位置关系改成两两直线垂直或平行，使其适合于课堂教学。各问题均通过对上一个问题进行条件操作而得到，如图13所示。问题串可以贯穿于“曲线与方程”整节课的始终。

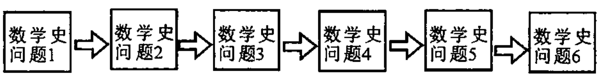

图13

以史为基，多题同源。均值不等式问题串中的6个问题都不属于历史问题，但它们都是根据同一则史料——《几何原本》命题VI.13提出来的，各问题之间并没有显著的递进关系，如图14所示。该问题串适用于“均值不等式”一课的新课探究环节。

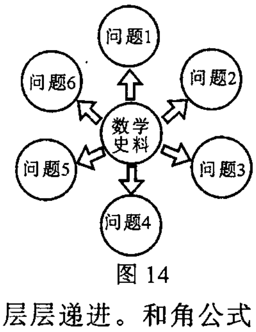

图14

重构历史，层层递进。和角公式问题串中的6个问题大多不属于历史问题，但它们都是为了发现和运用帕普斯模型而设计，整个问题串的探究过程即是对和角公式历史的重构，除问题3外，其他各问题均通过对上一问题进行条件操作[7]而得到，如图15所示。该问题串适用于“两角和与差的正弦公式”一课的新课探究环节。

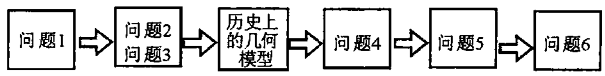

图15

4 结语

“基于数学史的问题串”是HPM视角下的数学教学的需要，问题串的使用将更完整地再现概念、公式、定理和思想的发生和发展历史，使数学史的教育价值得以最大化，使数学课堂变得流畅而精彩。在已有的HPM课例中，我们很少看到完整的问题串，可见，基于数学史的问题串设计并非易事。对于由历史问题所构成的问题串，教师需要了解有关主题的宏观历史，掌握较为丰富的数学史料，并根据教学目标对其进行裁剪和加工；对于以同一史料为出发点的问题串，教师需要从浩如烟海的数学史文献中选择恰当的史料；对于重构历史的问题串，教师不仅需要了解历史，而且还需要兼顾有关主题的历史顺序、逻辑顺序和学生心理发生顺序。

因此，为了设计一个基于历史的数学问题串，中学一线教师需要与大学研究人员组成一个HPM学习共同体，大学研究人员可以对有关主题的历史进行深入研究，为中学数学教师提供合适的历史素材；共同体经过交流和研讨，设计出问题串并付诸课堂实践，最终根据课堂观察、学生反馈和同行评议，对问题串进行必要的修正。我们有理由相信，基于数学史的问题串的广泛使用必将使HPM课例研究的水平迈上一个新台阶。

参考文献：

[1] 陈莎莎，汪晓勤．基于数学史的高考试题分析[J]．教育研究与评论（中学教育教学），2017(5)：26-33.

[2] 汪晓勤，柳笛．解析几何的产生（一）：古希腊的三线和四线轨迹问题[J]．中学数学教学参考（上旬），2007(9)：58-59.

[3] 石和飞．曲线与方程：用古希腊轨迹问题串联[J]．教育研究与评论（中学教育教学），2016(3)：52-56.

[4] Heath, T. L. The Thirteen Books of Euclid's Elements (Vol. II)[M]. Cambridge: The University Press, 1908.

[5] 张小明．均值不等式的HPM学习单设计[J]．中学数学教学参考（上旬），2012(10)：68-70.

[6] 汪晓勤．HPM：数学史与数学教育[M]．北京：科学出版社，2017.

[7] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(3): 293-309.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net