第16卷第4期 数学教育学报 Vol.16, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Nov., 2007

中学生对函数概念的理解
——历史相似性初探

任明俊[1]，汪晓勤[2]

（1．中国一拖集团公司第一高中，河南 洛阳 471003；2．华东师范大学 数学系，上海 200062）

摘要：高一新生和高三学生用自己的语言对函数的描述涵盖了从17世纪莱布尼兹到20世纪布尔巴基学派诸多数学家的各种定义，他们的理解与历史上数学家的理解有着高度的相似性．在中学，课本上函数的抽象定义不易于理解和记忆，学生也往往不从定义出发来理解函数；函数概念历史发展过程中的认识论障碍也会成为课堂上学生的认知障碍．在函数概念的教学中，应该恰当地借鉴历史，以帮助学生更好地理解该概念．

关键词：函数的定义；函数的概念；函数的历史；历史相似性

中图分类号：G632.0　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004–9894（2007）04–0084–04

1 问题的提出

德国著名数学家F·克莱因（F. Klein, 1849—1925）称函数为数学的“灵魂”[1]，并认为函数应该成为中学数学的“基石”[2]．函数概念的学习，对提高学生的数学素质，培养学生的创新精神和数学应用意识，都具有无可替代的指导作用．然而，函数概念的复杂性导致了教学的困难[3]．J. Kennedy和E. Ragan曾对20世纪60年代末以前美国大中学校的35种数学教材作了统计，发现1959年以后出版的17种教材中有10种将函数定义为序偶的集合[4]．T. J. Cooney和M. R. Wilson检查了1958年到1986年间出版的16种美国高中数学教材，发现它们都把函数定义为序偶的集合或两个集合元素之间的对应关系[1]．20世纪50年代末，美国数学家、数学史家和数学教育家M·克莱因（M. Kline, 1908—1992）就曾经这样批判说：“从伽利略到狄利克雷，数学家一直绞尽脑汁去理解函数的概念，但现在却由定义域、值域和序偶（第一个数相同时第二个数也必须相同）来玩弄把戏．”[5]“新数运动”的最终失败表明，函数的高度形式化的定义对于学生来说是难以理解的．美国学者J. A. Thorpe指出：20世纪五六十年代函数的形式化定义是一个大错误，我们可以将函数说成是法则、机器，但决不能把它说成是序偶的集合[1]！

函数概念的教学和理解在过去数十年的数学教育研究中一直是十分重要的内容，有关的研究文献十分丰富，Ö. Hansson[6]在其综述中不完全列举的相关文献多达120种．一些研究者已经将函数概念的教学与它的历史联系在一起，如M. A. Malik[7]和J. P. Ponte[2]通过函数概念的历史考察得到了若干教学启示；另一些研究者，如S. Vinner[8]、J. A. Thorpe、A. Sfard、S. Vinner和T. Dreyfus[9]等都强调，非形式化、抽象程度低的函数定义能使学生在进一步学习“序偶集合”这样的抽象定义之前获得很强的概念背景．T. J. Cooney和M. R. Wilson据此认为，函数从代数式到变量的依赖关系、再到任意的对应关系、最后到序偶集这一历史发展顺序乃是最合适的教学顺序[1]．R. Even研究发现，较之函数的现代定义，职前教师对函数概念的理解要狭隘得多、原始得多，认为这“又会导致学生的函数定义与表象之间的不一致性，使学生的函数概念表象与18世纪的表象相类似”[10]．

那么，我们今天的中学生对函数概念的理解是否呈现出历史相似性？国内外迄今尚未有人对此作实证研究．本研究就是针对这个问题进行的，目的是为函数概念的教学研究提供新的视角；同时也为HPM（数学史与数学教学关系）研究提供新的案例．

2 研究方法与被试

本研究主要通过测试来了解中学生对函数概念的认识状况．测试卷中的少数题目来自教学实践，而大多采自文[9, 11~12]，我们希望利用这些问题从不同侧面（函数的定义、函数的图像、函数的单值性等）去透视学生对函数所持有的观点．

随机选取本文作者之一所任教的学校高一和高三两个年级的部分学生作为被试，其中高一122人，高三116人．测试安排在2005年8月，高三学生在前两年内已经完成高中阶段的全部课程；而高一学生是刚刚录取到高中的，他们对函数的理解还只停留在初中水平．选取这两类学生，一类代表初中水平，一类代表高中水平，以便查看是否有差异．

限于篇幅，本文只对其中一个问题——“用你自己的语言描述一下函数概念”的调查结果作统计分析．

3 学生所给出的函数定义

对学生的回答进行分析和概括，我们得到10种类型，如表1所示．对于每一类回答，我们摘录若干，并用一个3位数来编号，其中首位1表示高一学生，首位3表示高三学生．

类型**A**：变量的对应关系

101　对于两个变量x、y，当x处于某一范围内时，每一个x值都有且只有一个y值通过某一对应法则与其相对应，那么就说y是x的函数．

301　函数是一个变化过程中有两个变量，其中一个变

收稿日期：2007–06–25
作者简介：任明俊（1971—），男，河南邓州人，教育硕士，主要从事数学教育研究．

量范围已知，通过一定的对应法则，求出另一个变量的值.

表 1　各类回答及其频数

类别	定 义	高一	高三	总 计
A	变量的对应关系	59（48.4 %）	19（16.4 %）	78（32.8 %）
B	集合的对应关系	6（ 4.9 %）	20（17.2 %）	26（10.9 %）
C	映射	0（0）	20（17.2 %）	20（ 8.4 %）
D	解析式	11（ 9.0 %）	7（ 6.0 %）	18（ 7.6 %）
E	运算	9（ 7.4 %）	8（ 6.9%）	17（ 7.1 %）
F	变量的依赖关系	3（ 2.5 %）	10（ 8.6 %）	13（ 5.5 %）
G	图像	5（ 4.1 %）	7（ 6.0 %）	12（ 5.0 %）
H	模糊或错误的定义	14（11.4%）	9（ 7.9 %）	23（ 9.7 %）
I	其它	6（ 4.9 %）	8（ 6.9 %）	14（ 5.9 %）
J	未回答	9（ 7.4%）	8（ 6.9 %）	17（ 7.1 %）

类型 **B**：集合的对应关系

102　函数是一个集合 A 通过一定的对应关系，得到另一个集合 B，其中集合 A 与集合 B 的元素一一对应.

302　函数就是数集之间的一种对应关系.

类型 **C**：映射

303　函数是数集的映射，而且值域中的每一个 y 值都有原象.

304　函数是从一个非空集合到另一个非空集合的一一映射. 其中，有两个量，一个自变量，一个因变量，分别在以上两个集合中以一定的对应关系取值.

类型 **D**：解析式

103　用一个带有变量的式子来表示另外一个变量.

305　用一个量来表示另一个量和它们之间关系的代数式.

类型 **E**：运算

104　对一个数字进行加、减、乘、除等一系列类似的运算后又得到了一个新的数字，这就叫函数，对 x 轴上的任意一个数字，进行运算后得到了 y 轴上一些数字.

306　对于给定的一个 x，对其进行一系列运算后得到唯一的 y，则这些运算就叫 y 关于 x 的函数.

类型 **F**：变量的依赖关系

307　一个数的变化或一个任意量的变化，会使另一个有关的量发生变化，或有规律或无规律，只是发生变化.

308　函数是用特殊的方法或式子将一个变量进行转换，转换成为另一个与该变量有关的变量. 这种变形转换可以是任意的，可扩大范围，也可缩小范围.

类型 **G**：图像

105　函数是用图像来表示一定的数量变化，使这种变量更生动、更形象地表现在我们面前.

106　在直角坐标系中，每一个横坐标有且仅有一个纵坐标对应的点组成的图形，没有两个横坐标相同的点.

类型 **H**：模糊或错误的回答

这类回答不够清楚，或包含错误的成分，如：

107　某些东西按同一规则变化形成另外一些东西的方法.

108　函数是两个非空集合的桥梁.

类型 **I**：其它

共有 6%的回答无法归类，有的回答严格地说并不能称为定义，如：

109　函数是用来表示自变量关系的一种数学手段，自然界任何一种事物都可用函数表示.

309　人们理解抽象概念的一种手段，人们在研究问题时，不得不采用某种规则去限定所研究的对象，使之能转化为人们所设定的某种程序.

310　人们为研究“变化”而使用的一种数学方法，用数表示自变量，得出因变量，是“变化”这一概念的数学表示.

4　历史上相应的函数定义

历史上，函数概念经历了十分漫长的演进过程. 17 世纪至 20 世纪上叶，数学家们给出了各种各样的函数定义，对这些定义进行分析和总结，并将其与学生的回答作比较，我们发现，除了“序偶集”这个现代定义外，两者之间存在着较高的相似性.

类型 **A**：变量的对应关系

在历史上数学家所给出的各种定义中，变量对应角度的定义是最多的，代表人物有法国数学家孔多塞（A. N. C. Condorcet, 1743—1794）、傅立叶（J. Fourier, 1768—1830）、古尔萨（E. Goursat, 1858—1936），俄国数学家罗巴契夫斯基（N. Lobachevsky, 1792—1856），德国数学家狄利克雷（L. Dirichlet, 1805—1859）、黎曼（B. Riemann, 1826—1866）、汉克尔（H. Hankel, 1839—1873），英国数学加哈代（G. H. Hardy, 1877—1947）等. 如狄里克雷于 1837 年给出了函数的如下定义：“设 a、b 是两个确定的值，x 是可取 a、b 之间一切值的变量. 如果对于每一个 x，有唯一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时，$y=f(x)$也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一个连续函数.”[13~14]黎曼于 1851 年给出以下定义：“假定 z 是一个变量，它可以逐次取所有可能的实数值. 若对它的每一个值，都有不定量 w 的唯一的值与之对应，则称 w 为 z 的函数.”[13]汉克尔于 1870 年给出如下定义：“x 的一个函数被称为 $f(x)$，如果对于某区间内 x 的每一个值，都有 $y=f(x)$的唯一确定的值与之相关联.”[13]

类型 **B**：集合的对应关系

这类定义出现于康托尔（G. Cantor, 1845—1918）集合论诞生之后. 代表人物有法国数学家坦纳里(J. Tannery, 1848—1910)、希腊数学家卡拉泰奥多里（C. Caratheodory, 1873—1950)、美国数学家维布伦（O. Veblen, 1880—1960）、法国布尔巴基学派（N. Bourbaki）等. 如布尔巴基学派在《集合论》（1939）中给出函数定义如下：“设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同. E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对每一个 $x\in E$，都存在唯一的 $y\in F$，它满足与 x 的给定关系. 我们将联系每一个元素 $x\in E$ 和元素 $y\in F$ 的运算称为函数；y 称为 x 处的函数值，函数是由给定的关系决定的. 两个等价的函数关系确定了同一个函数.”[13]

类型 **C**：映射

德国数学家戴德金（R. Dedekind, 1831—1916）于 1887

年首先采用“映射”来定义函数：“函数就是系统 S 的一个映射，对于 S 中每一个确定的元素 s，按照法则，都有一个确定的对象与之相关联，这个对象称为 s 的象，以 $\Phi(s)$ 来表示；也可以说，$\Phi(s)$ 是由 s 通过映射 Φ 产生的，即 s 通过映射 Φ 变换成 $\Phi(s)$.”[13]但戴德金所说的并非两个集合之间的映射，后者在我们今天看来与两个集合之间的对应关系并无二致．

类型 **D**：解析式

这是 18 世纪典型的函数定义．代表数学家有瑞士数学家约翰•伯努利(John Bernoulli, 1667—1748)、欧拉(L. Euler, 1707—1783)，法国数学家拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813），英国数学家布尔（G. Boole, 1815—1864）等．伯努利于 1718 年将一个变量的函数定义为“由该变量和一些常数以任何方式组成的量”[14]，这是历史上第一个正式发表的明确的函数定义；欧拉在《无穷分析引论》（1748）中给出的函数定义是：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式．”[14~15]拉格朗日在《解析函数理论》（1797）中给出如下定义：“所谓一个或几个量的函数，是指任意一个用于运算的表达式，这些量以任意方式出现于表达式中，表达式中可以有（也可以没有）其它一些具有给定不变值的量，而函数的量可以取所有可能的值．”[13]

类型 **E**：运算

17 世纪苏格兰数学家格雷戈里（J. Gregory, 1638—1675）将函数理解成从其它一些量经过一系列代数运算或经过任何其它可以想象到的运算而得到的量[16]．后来的拉格朗日、布尔巴基学派也是从运算角度来定义函数的．

类型 **F**：变量的依赖关系

早期的函数思想所要表达的正是各种变量间的依赖关系，如 14 世纪，法国数学家奥雷姆(N. Oresme, 1323—1382）用图形表示出了“纬度”和“经度”（分别相当于今天的横坐标与纵坐标）之间的依赖关系[11, 14]；17 世纪，意大利天文学家伽利略（G. Galilei, 1564—1642）给出自由落体运动物体所经过的距离与所用时间之间的依赖关系[16]．后来的莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646—1716）、欧拉、拉克洛瓦（S. F. Lacroix, 1765—1843）、柯西（A. Cauchy, 1789—1857）、罗巴契夫斯基、狄利克雷、斯托克斯（G. G. Stokes, 1819—1903）等人都以依赖关系来定义函数．如欧拉在《微分学原理》（1755）序言中给出的定义为：“如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数．”[14]拉克洛瓦在其《微积分》（1797）中给出如下定义：“任何一个量，如果它的值依赖于一个或多个其它的量，那么它就称为这些量的函数，不管我们知不知道这种依赖关系是通过什么运算实现的．”[14]斯托克斯于 1847 年将函数定义为：“函数是这样一个量，它的值以任意方式依赖于构成它的一个或几个变量的值．”[13]

类型 **G**：曲线或图像

欧拉认为，x 的任何一个函数都给出一条曲线，反之，每条曲线也都决定一个函数[15]．因此，在欧拉眼里，函数、图像与曲线并没有什么区别，并未将函数限制在单值的范围内．本研究发现，由于我们今天的教材强调单值对应，多数学生对函数图像和一般曲线的区别有较好的认识（如学生 106 给出的定义）．

5 结论与启示

17 世纪以后，函数概念发展的大致顺序是：运算—解析式—变量的依赖关系或对应关系—集合的对应关系或映射—序偶集．各种定义的代表数学家见表 2．我国初、高中教材对函数概念的处理符合这一顺序（变量的对应关系—集合的对应关系）．限于认知水平和知识范围，学生没有也不可能给出“序偶集”这个现代定义．除此之外，学生的回答涵盖了历史上所有类型的定义．

表 2 历史上数学家对函数的理解

类别	对函数的理解	历史上的数学家
1	运算	格雷戈里（1667）
2	解析式	伯努利（1696、1718）；欧拉（1748）；拉格朗日（1797）；布尔（1854）
3	曲线（图像）	欧拉（1748）
4	变量的依赖关系	莱布尼兹（1714）；欧拉（1755）；拉克洛瓦（1797）；柯西（1821、1823）；罗巴契夫斯基（1834）；狄利克雷（1837）；斯托克斯（1847）
5	变量的对应关系	孔多塞（1778）；傅立叶（1822）；罗巴契夫斯基（1834）；狄利克雷（1837）；黎曼（1851）；汉克尔（1870）；哈代（1908）；古尔萨（1923）
6	映射	戴德金（1887）
7	集合的对应关系	坦纳里（1904）；卡拉泰奥多里（1917）；维布伦（20 世纪）；布尔巴基（1939）
8	序偶集	皮亚诺（1911）；豪斯多夫（1914）；布尔巴基（1939）

从两个年级学生回答的情况看，近半数高一新生给出“变量的对应”这类定义，说明了初中教材的显著影响；其它类型频数由高到低依次为：解析式、运算、集合的对应、图像、变量的依赖关系．超过三分之一的高三学生给出“集合的对应”与“映射”两类定义，也反映了高中教材的影响；其它类型频数由高到低依次为：变量的对应、依赖关系、运算、解析式和图像．相比之下，高三年级受教材的影响要小一些，对函数概念的理解更趋多样化．

因此，尽管中学生已经学过函数概念，但他们对函数的理解却仍然是多种多样的，与 17 世纪到 20 世纪上叶不同时空数学家的理解有着高度的相似性．

函数概念从产生到完善历经数世纪之久，可见函数思想之难．即使在教材和教学的影响之下，也仍然有那么多的被试给出不同于教材、却类似于历史上数学家的回答，这就充分说明：无论在初中还是在高中，课本上函数的抽象定义并不易于理解和记忆，学生也往往并不从定义出发来理解函数．仅仅枯燥地讲述函数的定义，其效果远比我们想象的要差．函数概念理解中的历史相似性还表明：函数概念历史发展过程中的认识论障碍也会成为今天课堂上学生的认知障碍，比如函数的单值性、对应的任意性等．

因此，在函数的教学中，如果能恰当地借鉴历史，无疑会改善我们的教学，帮助学生更好地理解该概念．教师应补充函数实例，提供丰富的函数原型．在初中，教师可以同时

从运算、解析式、图像、变量的依赖关系等多角度来讲述同一个函数实例，最后归结到变量的对应关系上来；而在高中，教师可以同时从运算、解析式、图像、变量的依赖关系、变量的对应关系等多角度来讲述同一个函数实例，最后归结到集合的对应关系上来．这样做，实际上是基于历史相似性，将函数的历史发展过程浓缩到数学课堂之中．

[参 考 文 献]

[1] Cooney T J, Wilson M R. Teachers' Thinking about Functions: Historical and Research Perspectives [A]. In: Romberg T A. Integrating Research on the Graphical Re-presentation of Function [C]. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Association Publishers, 1993.

[2] Ponte J P. The History of Concept of Function and Some Educational Implications [J]. Mathematics Educator, 1993, 3(2): 32.

[3] Dreyfus T, Eisenberg T. Intuitive Functional Concepts: a Baseline Study on Intuitions [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1982, 13(5): 360–380.

[4] Kennedy J, Ragan E. Function [A]. In: Hallerberg A. Historical Topics for the Mathematics Classroom [C]. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

[5] Kline M. The Ancients Versus the Moderns: a New Battle of the Books [J]. Mathematics Teacher, 1958, 51(6): 418–427.

[6] Hansson Ö. Preservice Teachers' View on the Concept of Function—A Study Including the Utilization of Concept Maps [M]. Licentiate Thesis: Luleå University of Technology, 2004.

[7] Malik M A. Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function [J]. International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 1980, 11(1): 489–492.

[8] Vinner S. Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function [J]. International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 1983, 14(3): 293–305.

[9] Vinner S, Dreyfus T. Images and Definitions for the Concept of Function [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20(4): 556–566.

[10] Tall D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof [A]. In: Grouws D A. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning [C]. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

[11] Tall D, Bakar M. Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs [J]. International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 1992, 23(1): 39–50.

[12] 波耶 C B．微积分概念史[M]．上海：上海人民出版社，1977．

[13] Rüthing D. Some Definitions of the Concept of Function from J. Bernoulli to N. Bourbaki [J]. Mathematical Intelligencer, 1984, 6(4): 72–77.

[14] Youschkevitch A P. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1976, 16(1): 37–85.

[15] 欧拉．无穷分析引论[M]．张延伦译．太原：山西教育出版社，1997．

[16] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times [M]. New York: Oxford University Press, 1972.

Middle School Students' Understanding about Mathematical Function

REN Ming-jun[1], WANG Xiao-qin[2]

(1. No. 1 Middle School of China First Tractor Corporation, Henan Luoyang 471003, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: This paper reported an empirical research on the understanding of functions among senior middle school students by means of a questionnaire survey. It was revealed that most of the definitions given by our students had their analogues in history, and were similar to those by many mathematicians from Leibniz to Bourbaki, some of which hadn't been mentioned in the classroom. Therefore, the abstract definitions of function in mathematics textbooks in both junior and senior middle school were difficult for students to understand and memorize, and their images of this concept, more often than not, were separated from its formal definitions. It was proposed that teaching in accord with the historical sequence could lead to better understanding of this concept.

Key words: definition of function; concept of function; history of function; historical parallelism

[责任编校：陈汉君]