上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2013 年第 2 卷第 1 期

弗朗索瓦·韦达

(Francois Viete, 1540–1603)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

江南二月，雪兆丰年。

在各位作者和编委会的共同努力下，《上海HPM通讯》第2卷第1期与大家见面了。

本期的封面人物是弗朗索瓦·韦达，十六世纪法国最杰出的数学家之一。

韦达1540年生于法国的普瓦图，年轻时学习法律并当过律师。后从事政治活动，当过议会的议员。尽管韦达并不以数学为主业，但他一直都对数学研究保持着浓厚的兴趣，这一兴趣贯穿了这位业余数学家的一生，并在代数和三角学方面做出了杰出的贡献。1579年，韦达出版了标题为《数学准绳，附关于三角学的附录》的著作的前两卷，介绍了如何利用三角函数去解平面和球面三角形，给出了自己得到的积化和差公式等等。

韦达对数学的最大的贡献就是数学符号系统化，这也为他赢得了“代数学之父”的美誉。1591 年，韦达发表了《分析术引论》，该书中韦达引入了一套规则，将方程中的所有未知和已知量均用字母来表示；其中，元音字母 A,E,I,O,U 以及 Y 用来表示未知量或者变量，而大写辅音字母则用来表示已知量或者常量，韦达将其称为“系数” (coefficient)。韦达提出的符号体系，使数学家们构建通用的方程理论成为可能——他们可以普遍的讨论整个一类方程及其求解的方法，而不再纠缠于一个个特定的方程之中。同时，他们还可以用过抽象的方法来表达方程的解以及系数值之间的关系。这种通过元音-辅音来表示方程的方法，被认为是数学史上最具重要意义的革新，为后来现代代数学的发展铺平了道路。

韦达还利用在代数运算中所采用的方法以及文字记号，发展了系统的方程解法。他提出了通用的方程理论，可以将各种不同的方程变换为有限的几种规范形式，然后使用代数、几何以及三角的方法来求解这些具有规范形式的方程。对于这些方法的阐述见于1593年发表的《几何补篇》，以及另外两篇在1615年他去世后才发表的《丰特奈的弗朗索瓦·韦达：两篇关于方程的整理与修正的论文》之中。

韦达于 1603 年 2 月 23 日去世，此前两月他刚从亨利四世的宫廷职务退休，身后留下了大批数学著作。1615 年，他的苏格兰同事亚历山大·安德森汇编并刊印了他的一些未完成的手稿。1646 年，荷兰数学家弗兰斯·凡司顿编辑了韦达的著作集，并以《数学著作集》为标题出版。

目 录

CONTENT

理论视角

发生教学法：从理论到实践

吴 骏

(华东师范大学数学系，上海，200241)

数学史融入数学课堂教学是近年来国际上 HPM（数学史与数学教育）研究者关注的中心话题。著名数学史学家 John Fauvel 和 van Mannen 曾指出："对于数学史引入数学教学的研究，乃是数学教学研究的重要组成部分"[1]。发生教学法是数学史融入数学教学的一种重要方法，也就是我们通常所说的 HPM 视角下的数学教学方法。深入开展发生教学法的研究，不仅可以丰富 HPM 的理论，还能对中小学数学的教学实践提供具体指导。

1 发生教学法的基本思想

在数学教学中运用数学史，历来有两种截然不同的观点：一种观点是简单地忽视历史，认为逻辑方法才是最适合的教学方法。另外一种观点与此相反，强调完全遵循数学学科的历史发展，使用原始素材进行教学。显然，这两种教学方法都存在一定的缺陷。采用严格的演绎方法，隐藏了介绍新概念、理论和证明的动机，因此很难获得对所学知识的深刻理解。另一方面，严格的历史方法也不适合教学。由于一门学科的历史演化从来都不是直线发展的，其间经历了停滞和困惑的时期，因此，一个新概念不可能用最简单和最明显的方式引入。为此，我们可以采用介于这两个极端之间的一种教学方法，它既不遵循严格的演绎方式，也不遵循严格的历史顺序，这就是发生教学法。其基本思想要求在学生产生足够的学习动机，并在学生心理发展的恰当时机，才开始讲授某个主题[2]。此时，该主题在那个阶段所论述的问题才易以被学生接受，而该主题的出现往往是由于解决问题的需要。发生教学法不是强调理论、方法和概念的运用，而是更多地关注为什么这些理论、方法和概念能够解决特定的数学问题。

发生教学法的本质是追溯一种思想的历史起源，以寻求激发学习动机的最佳方式，研究这种思想创始人所做工作的背景，以寻求他试图回答的关键问题[3]。通常的教学法更多地强

本文将刊于《教育理论与实践》杂志。

调结果，而对产生结果的问题关注不够。从逻辑的观点来看，提供答案是需要的，但是从心理学的观点来看，解决一个问题而不知道问题的起源是多么的困难，简直就是不可能的。因此，在学习一个抽象的理论时，克服困难最好的方法就是研究问题的起源。

托普利茨（O. Toeplitz，1881-1940）在 1926 年的一次演讲中阐述了发生教学法的思想。他认为，发生教学法是在保持数学探究和教学结构严谨性的同时，剖析数学的演绎呈现方式，让学习者认识到数学的发展过程，而不仅仅是逻辑顺序。发生教学法的基础是数学史，但并不是研究数学史，而是选择相关的历史背景，使用现代的符号和术语来呈现历史。历史仅是提供有利于学生学习的素材，发展学生的直觉，教学的目的不是讲授历史，而是寻找学生学习的最佳方式。他在 1963 年出版的《微积分：发生方法》一书中，探索了极限、导数、积分等关键概念和微积分基本定理的思想起源，详细阐述了发生教学法在微积分教学中的实际应用[4]。

弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）提供了发生教学法的另一种解释。他运用历史的方法称为“再创造”，即应该让学生体验到：如果古代的人们有幸具备了我们现在拥有的知识，他们是如何把那些知识创造出来的[5]。这就意味着，学生要利用已有的知识，把要学的东西自己去发现或创造出来，教师的任务不是把现成的知识灌输给学生，而是借助于历史设计教学活动，引导学生沿着历史发展的路径，了解知识的发生发展过程，以帮助他们实现这种再创造的工作。

2 发生教学法的主要特征

2.1 主题引入的必要性与可接受性

发生教学法强调借鉴历史引入主题，但需要掌握恰当的教学时机。由于学生学习某个主题往往是由于解决问题的需要，因而教师在教学中需要关注“主题的必要性”和“主题的可接受性”。其中“主题的必要性”指教师要激发学生的学习动机，让学生认识到所引入的新主题乃是解决问题的需要；“主题的可接受性”指教师需要寻找学生的认知起点，所引入的新主题建立在学生已有的知识基础之上。波利亚（G. Polya, 1887-1985）提出教学的三原则，即主动学习原则、最佳动机原则和阶段序进原则，是与上述特征相一致的，发生教学法就是要求实现教学三原则的有机统一。

2.2 历史融入的显性与隐性

发生教学法需要对历史进行重构，重构的历史可能是显性的，也可能是隐性的。显性的历史融入，就是让数学的发现从教学的各个方面表现出来。它通过对一些确定历史时期的描述，按照主要的历史事件安排教学进程，尽量显示数学的演化和进步。隐性的历史融入，关注的是历史的思想方法，教学的过程不必遵循历史事件出现的顺序，而是从这个主题目前的概念形式和逻辑结构来了解历史的发展。需要注意的是，这两种历史融入的方式虽然彼此相互独立，但并不是相互排斥的，它们在同一个主题的教学中又互为补充。

2.3 教学形式的直接性与间接性

发生教学法分为两种不同的教学形式，即直接发生式与间接发生式。如果要追溯一个概念的起源，那么数学教学就有两种方法可供选择：一种方法是教师可以直接给学生呈现这个概念的历史起源，把问题和事实放在学生的面前，这就是直接发生式。第二种方法是教师引导学生从历史的角度去分析这个概念的实际意义和真正精髓，教学中不必讨论它的历史发展过程，但却遵循了它的历史发展规律，这就是间接发生式[6]。换言之，直接发生式需要使用历史材料，历史的融入是显性的；而间接发生式不必提及历史细节，历史的融入是隐性的。

3 发生教学法的理论基础

数学教育的研究已经表明，数学的历史发展对学生理解数学知识起到了重要的作用。学生学习数学的思维过程和数学思想的发展分属两个不同的领域，即心理学和历史学，二者常依据德国生物学家海克尔（E. Haeckel 1834-1919）提出的“生物重演律”进行联结，即“个体发育重蹈种族发育史”。后来人们将这个生物学定律运用于教育中，得出“个体知识的发生遵循人类知识发生的过程”。就数学教育而言，指的是个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展顺序，这就是历史发生原理，也就是我们通常所说的“历史相似性”。

对于个体发育与种族发展史之间的关系，皮亚杰和加西亚不是在历史与心理发生发展之间寻求内容的相似性，而是从认知的心理机制出发，寻求从一个历史时期到下一个历史时期的转变机制。他们指出：“在科学思想史从一个阶段到下一个阶段实现的发展除了一些罕见的特例一般不是连续的，但可以是有序的，正如心理发生的过程中存在着有序‘阶段’的形式。”[7]。他们还指出，从一个历史时期到下一个历史时期的转变机制与从一个心理发生阶段到下一个心理发生阶段的转变机制是类似的。与皮亚杰和加西亚的观点不同，维果斯基（L. Vygotsky,1896-1934）强调了文化的认识论作用。按照维果斯基的观点，数学的历史发展和

课堂教学是两个不同的现象，在文化、社会、心理和教学环境等方面存在较大的差异，个体思维发展是由生物过程和历史文化共同决定的，因此“历史发生原理”运用于数学教学存在一定的困难。不过，虽然社会历史条件在每一个阶段都是不同的，但人类获取知识的心理机制却是相似的。

衔接心理和历史现象的一种认识论上的假设，是对学生数学学习中认识论障碍特征的刻画。法国科学哲学家巴什拉（G. Bachelard，1884-1963）最先提出了认识论障碍的理论。认识论障碍不是通常意义上外在的障碍，而是指在认识活动内部出现的迟钝与混乱。在人的认识过程中，只有不断跨越精神本身的障碍，纠正错误的认识才能获得真理[8]。20 世纪 70 年代，Brousseau 将认识障碍理论引入到数学教学中。数学历史发展过程中出现的障碍又在当代个体数学学习中重演，这就是他所说的认识论障碍特征。他说：“内在的认识论障碍在构建新知识的过程中起到了重要的作用，它们是不能也不可避免的。人们可以通过了解概念的历史发展去认识这些障碍”[9]。因此，教师在数学教学中，应选用合适的概念起源问题，构建或再现教学情景，帮助学生识别并克服这些认识论障碍。

综上所述，皮亚杰和加西亚、以及 Brousseau 的观点为历史发生原理提供了支持，从而为发生教学法奠定了重要的理论基础。历史发生原理可以用来预测学生的认知障碍，诊断产生障碍的根源，从而有针对性地制订相关教学策略，帮助学生顺利跨越学习障碍。发生教学法就是根据学生学习的过程与数学发展的历程存在相似性，将数学思想逐步演化的历史过程与数学严格的逻辑推理过程有机地结合起来，运用数学史的观点和材料来重新组织教学的体系与内容，使学生真正理解课本上形式化推理体系背后所包含的真正内涵。

4 发生教学法的教学设计

发生教学法的应用最终落实在课堂教学中。John Fauvel 总结了数学史的 15 种用法，其中“借鉴历史设计一个话题的教学方法”就是指利用发生教学法进行教学设计。

4.1 教学设计方法

运用发生教学法进行教学设计的关键在于教师，对教师的要求是：[2]（1）了解所讲授主题的历史；（2）确定历史发展过程中的关键环节；（3）重构这些环节，使其适合于课堂教学；（4）设计出一系列由易至难的问题，后面的问题建立在前面问题的基础之上。Furinghetti 认为，教师进行教学设计主要包括以下几个阶段：[10]

了解历史资料 ⟶ 选择合适话题 ⟶ 分析课堂需要 ⟶ 设计课堂活动 ⟶

⟶

实施教学计划　　　　评价课堂活动

Furinghetti 指出，历史材料的选取应符合学生的认知发展水平，适合于相关知识点的课堂教学；课堂活动计划的制定要考虑到方法的可行性、活动的目的及其背景；在评价历史方法对数学教育的影响时，通常采用质性的方法去分析，而不是定量的方法。

Safuanov 认为，在运用发生教学法设计教学时，需要从历史、逻辑、心理学和社会文化这四个方面对所讲授的内容进行详细的分析。另外，从认识论的视角进行分析也是重要的。在此基础上，他提出发生教学设计的实施过程包括以下四个阶段：[11]（1）创设问题情境：在设计教学活动时，思维和认知过程的起源是构造问题情景的最佳方式；（2）自然引出新问题：思考和理解的第一步是产生问题，而且每解决一个问题就会产生一些新的问题，因此，在解决了最初的问题后，需要不断思考新的、自然出现的问题；（3）教学素材的合理组织：在构造了问题情景和讨论了相关的问题后，已经激发了学生的学习动机，此时，就需要给出概念的精确定义；（4）理论的应用和发展：理论建立起来之后，就要考虑它的实际应用和本身的发展，并与其他概念和其他学科产生联系。

结合我国数学课程教学的实际情况，教师在利用发生教学法进行教学设计时应考虑一些相关因素：学生的数学学习情况、数学概念的历史发展、相应的数学教材及课程标准等。为此，我们提出数学史融入数学教学的具体设计方法：

（1）选定合适的教学内容：在数学教学中，不是任何一个教学内容都适合融入数学史，只有具备丰富历史文化信息的内容，才适合用发生教学法进行教学设计。

（2）分析教学内容的历史发展：历史分析能够揭示隐含在教学材料中的数学知识的起源，发现产生数学知识需求的问题和在构建数学知识过程中存在的障碍。

（3）考察相关主题的教材内容：了解课程标准中教学内容的教学目标、教材编写意图及呈现方式，并与历史发展过程进行比较，从而分析教材使用存在的局限性。

（4）分析学生的认知需求：确定学生思维能力的水平，估计学生在数学活动中可能存在的困难，更重要的是寻求激发学生学习动机的方法。

（5）重构历史顺序：在现代教学背景下，重构关键的思想和问题，使之更适合新知识的教学。这通常意味着教学顺序不遵循严格意义上的历史发展过程，但却更符合学生的认知发展规律。

4.2 教学设计案例：椭圆的教学设计

这是我们近年采用发生教学法设计的一个教学案例，已经经过了教学实践的检验，并取

得了较好的效果。根据我们上述提出的设计方法，该案例的设计经历了以下几个阶段：[3]

（1）选定椭圆内容：高中数学教材采用平面截圆锥的方法得到椭圆，而且要求学生了解从具体情境中抽象出椭圆模型的过程，这恰是历史上人们认识椭圆的开始。因此，选择椭圆内容容易从历史问题中找到学生的认知起点。

（2）椭圆的历史发展：考察椭圆的历史，发现其发展过程包括以下七个重要环节：

椭圆的发现 ⟶ 截线定义 ⟶ 基本性质 ⟶ 焦半径性质 ⟶ 机械作图法 ⟶ 轨迹定义 ⟶ 椭圆的方程

（3）教材编排存在的问题：现行教材省略了椭圆历史发展的前面四个环节，只保留了最后三个环节，因而未能体现椭圆知识的形成过程。

（4）学生的认知障碍：学生从第一个环节到第二个环节的过渡比较容易，但从第二个环节到第三个环节、再到第四个环节的过渡则比较困难。

（5）教学设计顺序：利用 19 世纪比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794-1847）发明的旦德林双球，可以直接完成从椭圆的发现到焦半径性质的过渡。重构后的教学顺序简化了历史发展过程，这就是 HPM 视角下的教学设计顺序：

椭圆的发现 ⟶ 焦半径性质 ⟶ 机械作图法 ⟶ 轨迹定义 ⟶ 椭圆的方程

该案例设计的关键在于重构历史，正如 Sfard 指出，“在同化、创造或学习一个新概念时，历史相似性表现尤为明显。此时，已有的知识系统需要经受一个彻底的重建，整个认识论基础也必须重新建构”[9]。因此，在运用发生教学法时，需要根据重构的历史进行教学，呈现知识的自然发生过程。

参考文献

[1] Bagni, G. T., 2000. The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. In: Schwank, I. (Ed.), Proceedings of CERME-1. Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, II, 220-231

[2] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey.In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in Mathematics Education—The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201-240

[3] 汪晓勤,王苗,邹佳晨, 2011. HPM视角下的数学教学设计：以椭圆为例.数学教育学报，20(5): 20-23

[4] Toeplitz, o., 2007. *The Calculus: A genetic approach*. Chicago: University Press

[5] Freudenthal, H., 1981. Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2): 133-150

[6] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the "why" and "how" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3)：235-261

[7] 皮亚杰, 2005. 心理发生和科学史[M].姜志辉译.上海：华东师范大学出版社

[8] 赵瑶瑶, 张小明, 2008. 关于历史相似性理论的讨论.数学教育学报，17(4): 53-56

[9] Radford, L., 2000. Historical formation and student understanding of mathematics. In: J. Fauvel & J. van Maanen（Eds.）, History in Mathematics Education—The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 143-170

[10] Furinghetti, F., 2000. The long tradition of history in mathematics teaching. In V. Katz (Ed.), Using history to teach mathematics: An international perspective. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 49– 58

[11] Safuanov, I. S., 2005. The genetic approach to the teaching of algebra at universities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3): 255-268

从指数律到对数

汪晓勤

（华东师大数学系，上海, 200241）

给定双数列

1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8 ⋯
0	1	2	3	4	5	6	7	8 ⋯

第一个数列中某两项的乘和除对应于第二个数列某两项的加和减；第一个数列某一项的乘方和开方，对应于第二个数列某一项与次数的乘和除。这就是下面的指数律：

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \tag{2}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn} \tag{3}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \tag{4}$$

自 19 世纪德国数学史家卡斯涅（A. G. Kästner, 1719～1800）在其《数学史》中介绍 16 世纪德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487～1567）的工作以来，斯蒂菲尔常常被误认为是历史上第一个提出指数律的数学家。人教版高中数学教材的阅读材料“对数发明”中，也仅仅提到斯蒂菲尔的工作。实际上，这不过是历史的冰山一角而已。本文将对更多的相关文献作出梳理。

1 阿基米德与指数律

我们很难确定指数律的起源，但从现有文献来判断，最早明确提出该定律的是古希腊大数学家阿基米德（Archimedes, 前 287～前 212）。在《数沙者》中，阿基米德提出[1]：

已知等比数列 A_1，A_2，A_3，…，A_m，…，A_n，…，A_{m+n-1}，…，其中 $A_1=1$，$A_2=10$。若取任意两项 A_m 和 A_n 相乘，则乘积 A_mA_n 仍为该数列中的一项，它距离 A_n 的项数等于 A_m 距离 A_1 的项数；它距离 A_1 的项数比 A_m 和 A_n 距离 A_1 的项数之和小 1。

定理的结论是 $A_m A_n = A_{m+n-1}$，用今天的记号，即 $10^{m-1} \times 10^{n-1} = 10^{m+n-2}$。在我们今天看来，阿基米德实际上给出了双数列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 & 10^6 & 10^7 & 10^8 \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \cdots \end{array}$$

之间的对应关系。从定理的叙述可以看出，阿基米德知道定理结论对任一等比数列均成立。

在中世纪和文艺复兴早期的一些数学著作中，常常能见到等差数列和等比数列并列的情形。如，博伊休斯（A. Boethius, 480?～524）在《算术原理》中，给出了"毕达哥拉斯乘法表"，第一行为等差数列，对角线为等比数列。在写于 1480 年的德雷斯顿手稿中，类似于阿基米德的做法，作者给出了同底数幂乘积的求法[2]（采用今天的符号及写法）：在数列 1，a，a^2，a^3，…中，看 a^m 距 1 有几项，然后从 a^n 开始依次向后数同样多项，则数到最后的一项即为 a^m 和 a^n 的乘积。此即公式（1）。

2 指数律在 15-16 世纪的欧洲

稍后的法国数学家许凯（N. Chuquet, 1445～1488）在其《算学三部》中给出了双数列

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \cdots & 1048576 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 20 \end{array}$$

之间的对应关系，如"4 对应的数 16 自乘，等于 8 对应的 256"；"7 对应的 128 乘以 9 对应的 512，等于 16 对应的 65536"[3]，等等。故许凯已知公式（1）和（3）。

欧洲使用印刷术后，最早给出指数定律的大概要算德国数学家施雷伯（H. Schreyber, 1495～1525）在《艺术新作》（1521）中，他根据双数列

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \cdots & 65536 \end{array}$$

之间的对应关系，给出了四种计算方法[2]：

（1）第二个数列中两数的乘积对应于第一个数列中两数的和。如：要求 16×32，将两数所对应的 4 和 5 相加，得 9，则 9 对应的 512 即为所求。

（2）第二个数列中三数的乘积对应于第一个数列中三数的和。如：要求 4×8×32，将三数所对应的 2、3 和 5 相加，得 10，则 10 对应的 1024 即为所求。

（3）第二个数列中平方数的开方对应于第一个数列中偶数除以 2。如：要求 $\sqrt{256}$，将 256 所对应的 8 除以 2，得 4，则 4 对应的 16 即为所求。

（4）第二个数列中某数开立方对应于第一个数列中某数除以 3。如：要求 $\sqrt[3]{64}$，将 64 所对应的 6 除以 3，得 2，则 2 对应的 4 即为所求。

施雷伯还给出了同底数幂的除法表（具体参阅[4]），从表中可见，公式（2）对他来说已是一个十分平常的公式了。

施雷伯的学生、德国数学家鲁道夫（C. Rudolff, 1499～1545）在其《计算之术》（1526）中也给出了双数列

0	1	2	3	4	5	6	7	…
1	2	4	8	16	32	64	128	…

之间的对应关系，即第二个数列的乘法对应于第一个数列的加法，但鲁道夫没有给出其它运算的对应关系。另一位德国数学家阿皮亚努斯（P. Apianus, 1495～1552）以鲁道夫的著作为蓝本，在其算术著作中也给出了同样的对应关系。

荷兰数学家弗里修斯（G. Frisius, 1508～1555）的《实用算术》（1540）是 16 世纪欧洲流传最广的算术课本，从 1540 年到 1601 年，共有约 60 个版本。书中，作者给出双数列

3	9	27	81	243	729	…
1	2	3	4	5	6	…

之间的对应关系：第一个数列中第 m 项与第 n 项的乘积等于同一数列中的第 $m+n$ 项；第一个数列中第 n 项的平方等于同一数列中的第 $2n$ 项。

鲁道夫另一名著《物之术》（1525）是德国历史上第一部代数学著作，此书未涉及指数律，但其评注者、另一德国数学家斯蒂菲尔在其《完全的算术》（又译《整数算术》，1544）中却多次论及指数律。对于双数列

0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	…

他把第一个数列中的数称为第二个数列中相应数的“指数”，指出第二个数列中两数的指数之和等于这两个数乘积的指数，指数之差等于商的指数。注意，与今天不同，他把 6 称为 64 的指数，而不是 2 的指数，这是因为在斯蒂菲尔那个时代，仍没有幂指数记法。斯蒂菲尔较以前的数学家更明确地提出了四条一般的运算法则[2]：

(1) 等差数列中的加法对应于等比数列中的乘法；

(2) 等差数列中的减法对应于等比数列中的除法；

(3) 等差数列中的简单乘法对应于等比数列中的乘方；

(4) 等差数列中的除法对应于等比数列中的开方。

斯蒂菲尔还将指数律推广到负数情形：

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \cdots \end{array}$$

这就在施雷伯等人的基础上前进了一大步。斯蒂菲尔说："关于数的奇事，我可以写出整整一本书来，但我必须克制住，对其视而不见。"[3] [5]斯蒂菲尔还知道哪些奇事？他为何要克制自己？对此我们只能猜测了。

15-16 世纪，源于印度棋盘问题的马靴钉问题也促使数学家对双数列对应关系进行研究。该问题说的是：一位铁匠制作了 24 个马靴钉，第一个售价 1 便士，第二个售价 2 便士，第三个售价 4 便士，第四个售价 8 便士，……。问铁匠出售全部马靴钉后共得多少便士？与斯蒂菲尔同时代的德国数学家瑞斯（A. Riese, 1492～1559）在其算术著作（1550）中为解决上述问题，列出了双数列，并给出了指数律的乘法情形。

16 世纪的许多法国数学家也知道指数律，不过大多仅仅局限于公式（1）。佩勒蒂埃（J. Peletier, 1517～1582）在其《算术》（1549）中给出了双数列

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 6 & 12 & 24 & 48 & 96 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

作者写道，为求 9 上面所对应的数，将 4 上面的 48 除以第一个数列的第一项 3，得 16；将 16 乘以 5 上面的 96，得 1536，即为 9 上面的数。

之后，布瓦希埃（C. de Boissière）在《算术》（1554）中再次给出指数律，并称之为"神奇的运算"[3]。对于佩勒蒂埃的双数列，布瓦希埃一般性地指出，将第一个数列中的某两数相乘，所得乘积除以第一项，得同一数列中的一数，它在第二个数列中的对应数等于前两数的对应数之和。这就是：$\left(3\times 2^m\right)\times\left(3\times 2^n\right)\div 3 = 3\times 2^{m+n}$ 。

年轻时曾为富家子弟做仆人、自学成才的数学家拉姆斯（P. Ramus, 1515～1572）在其《算术》（1569）中也讨论了双数列的对应关系。其弟子、德国人肖内尔（L. Schonerus）在注释《算术》（1586）时首次将指数律推广到分数底数的情形。他先给出双数列

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \cdots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \cdots \end{array}$$

之间的对应关系（加法对应于乘法），然后把上述关系推广到双数列

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \cdots \end{array}$$

上。另一位法国数学家肖维（J. Chauvet Champenois）在其《算术原理》（1578）中给出双数列

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	…
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

的对应关系：为了在第一个数列中求一个对应于第二个数列中 n 的数，先求出 p 和 q，使得 $p+q=n$，然后将 p 和 q 所对应的数相乘，即得所求。

与斯蒂菲尔一样，德国数学家雅各布（S. Jacob, ?～1564）在其《算术基础》（1560）中，明确提出了等差和等比数列之间的所有四种对应关系，即公式（1）-（4）。雅各布的教材对瑞士著名钟表制造者、对数发明者之一比尔吉（J. Bürgi, 1552～1632）产生了重要的影响。

德国数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538～1612）在《实用算术概论》（1583）中讨论了指数律（乘法和乘方两种情形）。对于双数列

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	…
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

他写道："32 自乘，得 10 上面的 1024，而 10 等于 32 下面的 5 的两倍；8 乘以 256 等于 11 上面的 2048，而 11 等于 8 和 256 下面 3 和 8 之和。"[3] 而在另一部著作《代数学》（1608）中，克拉维斯和斯蒂菲尔一样将指数律推广到了负指数情形：

…	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
…	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	…

如，$\frac{1}{4}$ 与 32 相乘，对应于-2 和 5 相加。16 世纪有关指数律的讨论至克拉维斯而臻于完善。

3 从指数律到对数

以上我们看到，在 16 世纪，等差数列和等比数列之间对应运算关系——指数律——已经广为人知。然而，在实际计算中，指数律的用处却极为有限：由于人们所使用的等比数列的公比都是大于 1 的正整数，随着项数的增大，两项之间的间隔越来越大。比如，要求 1048576×65536，我们能够在等差数列中分别找到 16 和 20，于是所求乘积为以 2 为公比的等比数列中与 36 相对应的项，即 $2^{36}=68719476736$。但是，若求 1047523×85496，则在上述等比数列中根本找不到乘数和被乘数。这时，指数律就发挥不了什么作用，乘法运算也就无法得到简化。

鉴于此，苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550～1617）和前面提到的比尔吉分别采用递减等比数列

$$10^7，10^7\left(1-10^{-7}\right)，10^7\left(1-10^{-7}\right)^2，10^7\left(1-10^{-7}\right)^3，\cdots，10^7\left(1-10^{-7}\right)^n，\cdots$$

和递增等比数列

$$10^8,\ 10^8\left(1+10^{-4}\right),\ 10^8\left(1+10^{-4}\right)^2,\ 10^8\left(1+10^{-4}\right)^3,\ \cdots,\ 10^8\left(1+10^{-4}\right)^n,\ \cdots$$

与首项为 0、公差为 1 的等差数列相对应[6]。比尔吉和纳皮尔不约而同地采用了与 1 十分接近的底数，这样就能保证在一定范围内相邻两项间隔非常小，而且，在纳皮尔数列的情形中，间隔越来越小。于是在该范围内小于10^7或大于10^8的任何整数（或与该整数十分接近的有理数）均可在同一个等比数列中找到，于是就可以利用指数律来简化乘除运算了。比尔吉因此写道：

> “考虑算术级数和几何级数的性质和对应关系：后者中的乘法是前者中的加法，后者中的除法是前者中的减法，后者中的开平方是前者中的取半数，……我发现，拓广这些数表，使得在表中能够找到所有有关的数，这是极为有用的。……我们不仅可以避免乘、除、开方运算中的困难，而且，更重要的是，我们也可以在两个已知数之间随意放置多少个几何中项。任何在该领域做过尝试的人都知道，没有这些数表，计算是多么地困难。”[2]

4 “对数”一词的起源

对数由 17 世纪波兰传教士穆尼阁（J. N. Smogolenski, 1611～1656）传入中国。“对数”一词最早出现于明代数学家薛凤祚（?～1680）根据穆尼阁所授编成的《比例对数表》（1653），是纳皮尔所创用的 logarithm 一词的汉译，原意为“比数”，即等比数列各项中公比的次数。实际上，《比例对数表》中对等比数列（“比例算”）和等差数列（“同余算”）的对应关系作了详细介绍，如下表，比例算中的$\left(256\times512\right)\div128=1024$，对应于同余算（a）中的$\left(9+10\right)-8=11$；比例算中的$\left(16\times32\right)\div8=64$，对应于同余算（b）中的$\left(13+15\right)-11=17$。

比例算	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同余算(a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同余算(b)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

清代《数理精蕴》下编卷 38“对数比例”称：“对数比例，乃西士若往·讷白尔（今译纳皮尔）所作。以借数与真数对列成表，故名对数表。……其法以加代乘，以减代除，以加倍代自乘，故折半即开平方。以三因代再乘，故三归即开立方。推之至于诸乘方，莫不皆以假数相乘而得真数。盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也。”[7]书中对双数列（真数与假数）之间的对应关系作了详细介绍。

显然，“对数”中的“对”即“对应”、“相对”之意，“对数”即与实际参与运算的

真数（等比数列中的项）相对应的假数（等差数列中的项）。

5 结语

我们今天的教材（包括现行人教版新课程教材）是直接利用指数式来定义对数的，即，若 $a^x = N$（$a > 0, a \neq 1$），则称 x 为以 a 为底的 N 的对数，此即欧拉（L. Euler, 1707～1783）在《无穷分析引论》中所给出的定义，它完全抛开了双数列之间的对应关系，脱离了“对数”这个术语之原意。名称与定义的分离，已经成为学生对数学习的障碍之一。或许，对教师来说，聆听一下 F • 克莱因（F. Klein, 1849～1925）的教导是不无益处的：“如果希望进一步全面了解对数的理论，最好是大体上遵循其创造的历史。”[8]

参考文献

[1] Heath. T. L. *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications, 1959. 229-230

[2] Kaunzner, W. Logarithms. In I. Grattan-Guinness (Ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (Vol. 1). London: Rourledge, 1994. 210-228

[3] Smith, D. E. The law of exponents in the works of the sixteenth century. In C. G. Knott (Ed.) , *Napier Tercentenary Memorial Volume*, London: Longmans, Green & Company, 1915. 81-91

[4] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史. 北京: 科学出版社, 2002

[5] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol.2). Boston: Ginn & Company, 1925

[6] Moulton, L. The invention of logarithms: its genesis and growth. In C. G. Knott (Ed.) , *Napier Tercentenary Memorial Volume*, London: Longmans, Green & Company, 1915. 1-24

[7] 康熙. 数理精蕴. 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇数学卷（3）, 郑州: 河南教育出版社, 1998. 1144

[8] Klein, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. London: Macmillan & Co., 1932. 146

高中生解古典概率问题的策略*

沈金兴

（浙江省桐乡市凤鸣高级中学，桐乡，314500）

1 引言

关于概率知识，国内外已有的实证研究大多通过对学生的测试来了解学生对概率的理解（如 Bagni, 1999a; Fischbein, E. et al. 1991; Jones et al., 1999; Konold, C. et al., 1993; 李俊, 2003; Shaughnessy, 1977）。那么，研究工具能否改用历史上数学家曾经研究过的概率问题？我们能否结合古典概率的早期历史进行概率的教学？事实上, Bagni 等（1999b）已开始尝试用概率论历史上的问题作为例子来探讨概率的教学了。概率的历史与教学之间的关系作进一步的深入研究。

另一方面，正如汪晓勤等（2005）、任明俊（2005）、汪晓勤等（2006）、赵瑶瑶（2007）、张连芳（2012）、殷克明（2012）等所已就某些数学概念进行了历史相似性的实证研究。但这类研究十分有限，从 HPM 研究的视角看，我们需要对更多的数学概念进行相关研究。

我们知道，概率论从诞生开始到现在，主要经历了三个发展阶段：即古典概率论、分析概率论、测度概率论。20 世纪的概率论已实现了公理化，在此基础上，现代概率论取得了一系列理论突破和迅速发展。而现在中学教材中的概率学习主要是以古典概率论为主。所以本文试图以古典概率产生早期数学家们讨论的“投掷问题”与“点数问题”入手，调查高中学生对古典概率的理解，并将此结果与概率的早期历史发展作一对比研究，从中寻找其“历史相似性”。本文主要研究问题是：

（1）中学生在解概率论早期历史上的古典概率问题时采用了什么策略？是否具有历史相似性？

（2）中学生在解决这些问题时有哪些错误认识？

2 研究方法

本研究主要采用问卷调查和访谈调查方法。

---

* 本文根据作者硕士毕业论文的一部分整理而成。

● 问卷调查法：了解中学生对概率的理解情况，同时发现学生对古典概率的解决方法。

● 访谈调查法：每个班的问卷调查完成后，笔者马上进行详细的统计，然后根据不同程度的回答情况，特别是理由说得不够充分或模糊不清或前后矛盾的，抽取个别被试在一个星期内进行访谈。访谈时，笔者都先将学生的测试卷还给他，并表明自己对有一些地方不太明白，希望他进一步解释。所有的访谈都作了详细的笔录。

2.1 测试卷的设计

预研究之后，确定正式测试卷，测试卷由三个问题组成。第 1 大题为骰子问题，第 2 大题为 “点数问题”，该问题曾经导致概率论的诞生，其中第 1 小题为两个赌徒的情形；第 2 小题为三个赌徒的情形；第三大题为“随机散步问题”。限于篇幅，我们只讨论第 2 答题的测试结果。

2.2 样本的选取

正式测试的样本是选自作者所在市的三所不同层次的学校，分别是桐乡市高级中学、桐乡市凤鸣中学、桐乡市信息技术学校，依次对应的是省一级重点中学、普通中学和综合高中。每所学校都分高一（16-17 岁）、高二（17-18 岁）两个年级，总共是 16 个班级的 652 名学生，具体信息见表 1。

表 1　被试的学校和年级分布情况

		重点中学	普通中学	综合高中	年级总人数
高一		97	95	侧理 69 侧文 69	330
高二	理科	48	46	70	164
	文科	47	39	72	158
各学校总人数		192	180	280	652

注：综合高中的高一按中考成绩分了侧文、侧理两类班级

正式测试的时间是 07 年 5-6 月，高二学生的数学教材都是采用 2001 年的人教版，都是

在学了排列组合后学概率的。而高一学生的教材是浙江省第一次采用的新课程的人教版，还没有学过高中的概率，只是在初中学过。笔者自己主持了两个班级的测试，是在自修课堂上，时间为 30 分钟。其余的班级都是让班主任代替，大多数也是在课堂上当场完成，少数班级的班主任让学生在夜自修上完成后在第二天上交。测试卷发到的学生都上交，回收率为 100%。

3 研究结果与分析

3.1 第 1 小题的测试结果

测试题二分了两个小题，第 1 小题改编自苏慧珍（2003），题目如下：

赌技相当的甲、乙两人各出资赌金 96 金币，规定必须要赢三场者才能赢得全部赌金共 192 金币，但比赛中途因故终止，且此时甲乙胜局数为 2:1。若你是仲裁者，请问此时应如何分配赌金，并说明理由。

统计学生的回答后发现主要有四种答案，分布在各个学校的年级中。

表 2 第 1 小题主要答案的分布情况

类别	答案	高一			高二						合计
		重点	普通	综高	重点		普通		综高		
					理	文	理	文	理	文	
I	甲 128，乙 64	43	54	94	12	21	12	17	37	33	323(49.5)
II	甲 144，乙 48	18	8	7	16	3	22	1	4	8	87(13.3)
III	甲 96，乙 96	19	8	20	10	8	2	7	13	9	96(14.7)
IV	甲 192，乙 0	10	3	8	0	3	0	4	3	5	36(5.5)

对于表中的每一类答案，被试也都给出了各自的方法。因为许多方法在各学校的学生中都存在，且惊人地一致，所以只用代号来表示。现总结如下。

第I类答案（记为 A）

给出这类答案的被试所使用的策略主要有五种。

(1) 策略 A_1：甲胜两局乙胜一局，甲获胜的概率大，故按胜局数分配为 2 : 1，所以甲得

192 金币的三分之二，即 128 金币，乙得三分之一为 64 金币。共有 254 位同学持这种理由。（如图 1）

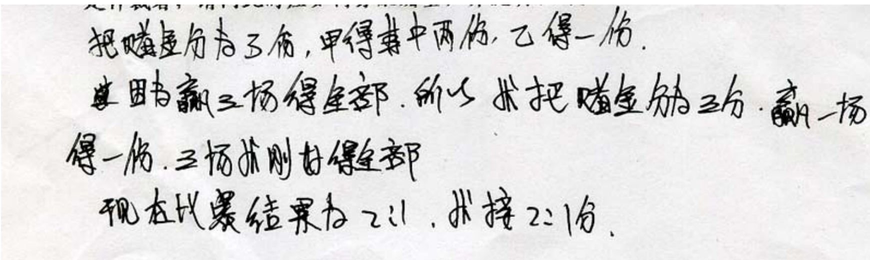


图 1　策略 A1

(2) 策略 A2：若继续比赛，甲只须赢一场就可获得全部赌金，而乙还须再赢两场才可获得全部赌金，应该按其再须赢的场数反比分配。甲:乙=1:$\frac{1}{2}$ =2:1，故甲得 128 金币，乙得 64 金币。

(3) 策略 A3：继续赌下去，甲只要再赢一场就胜，而下一场赢的概率为$\frac{1}{2}$，但乙要连赢两场才能胜，概率是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以甲 ：乙$=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2:1$，即甲应得的金币是乙的两倍，故甲得 128 金币，乙得 64 金币。

(4) 策略 A4：赢三场可得 96 金币，所以赢一场可得 32 金币，输一场就失去自己的 32 金币，因此，甲得 $\left[2+\left(-1\right)\right]\times 32+96=\left[2+\left(-1\right)+3\right]\times 32=128$ 金币，乙得：$\left[1+\left(-2\right)\right]\times 32+96=\left[1+\left(-2\right)+3\right]\times 32=64$ 金币。（如图 2）

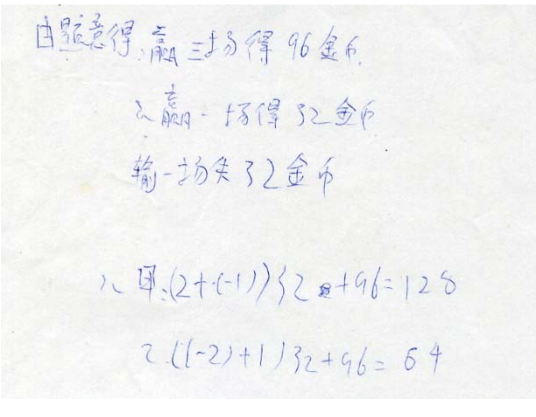


图 2　策略 A4

(5) 策略 A5：若继续比下去，如果第 4 局甲赢，则甲最终胜出，如果第 4 局乙赢，则第 5 局甲赢还是甲胜出，第 5 局乙赢，则乙最终胜出，所以甲赢有$\frac{2}{3}$的机会，乙赢有$\frac{1}{3}$的机会。因此甲得 128 金币，乙得 64 金币。

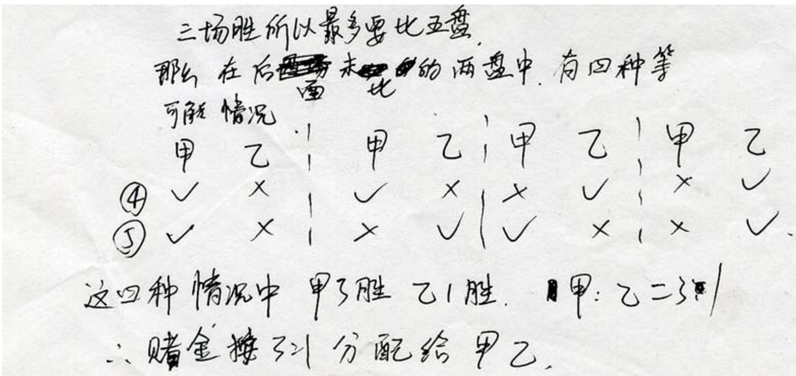
当然，给出答案 A 的被试中，还有一部分没有给出理由。

第II类答案（记为 B）

给出这类答案的被试所使用的策略主要有四种。

(1) 策略 B1：直接计算出甲、乙获胜的概率。$P_{甲}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，$P_{乙}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以甲、乙赌金之比为 3:1。因此甲可得$192\times\frac{3}{4}$=144 金币，乙可得$192\times\frac{1}{4}$=48 金币。此类学生共有 37 人，大多数是高二学过概率的同学。

(2) 策略 B2：因为甲只要再胜一局就能获得乙的 96 金币，而乙则还要连赢两局才能获得甲的 96 金币。若继续赌下去，只需两局肯定能决出胜负。而这样总共有四种情况，甲有三种情况能胜，乙只有一种，所以甲:乙=3:1，因此甲得$192\times\frac{3}{4}$=144 金币，乙得$192\times\frac{1}{4}$=48 金币。（如图 8）


三场胜所以最多要比五盘
那么在后~~两局~~未~~比~~的两盘中 有四种等可能情况

	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
④	✓	×	✓	×	×	✓	×	✓
⑤	✓	×	×	✓	✓	×	×	✓

这四种情况中 甲3胜 乙1胜 ∴甲:乙=3:1
∴赌金按3:1分配给甲乙

图 3　策略 B_2

(3) 策略 B_3：甲乙胜局数为 2:1，还未分出胜负，此时甲占优势。不管下一场乙输还是赢，甲终究是胜或平，即甲不输，所以甲应保留自己的赌金 96 金币。又由于下场比赛两人赢的机会均等，故应平分乙的赌金，这样甲又可得 48 金币，共 144 金币，乙得 48 金币。

(4) 策略 B_4：赢得多当然要拿的多，而比赛没有结束，所以输者也应该得到自己的一份，这样才公平。只有三局全赢了才能得全部赌金，而此时甲乙胜局数为 2:1，甲已领先乙，所以甲应到输的一方乙那儿拿一半的赌金，再加上自己的那份共 144 金币，而乙也可得自己赌金的一半 48 金币。（如图 9）

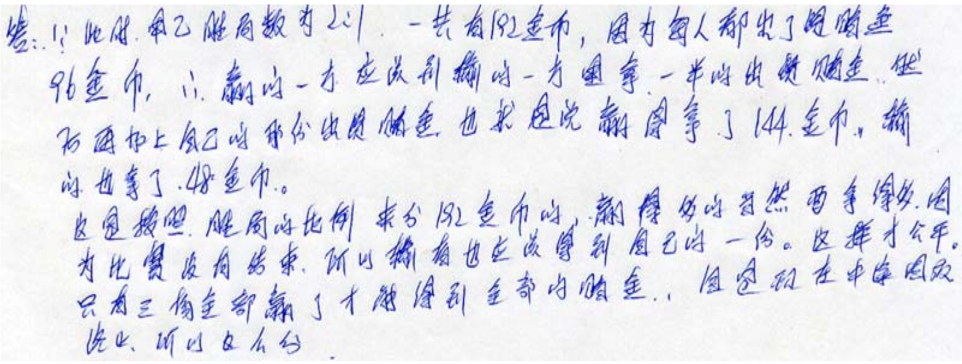

答：∵此时甲乙胜局数为2:1，一共有192金币，因为每人都出了的赌金96金币，∴赢的一方应该到输的一方那拿一半的赌金，但还要加上自己的那份的赌金，也就是说赢的拿了144金币，输的也拿了48金币。
这是按照胜局的比例来分192金币的，赢得多的当然要拿得多，因为比赛没有结束，所以输者也应该得到自己的一份。这样才公平。只有三局全部赢了才能得到全部的赌金，但因为在中途因故停止，所以这么分。

图 4 策略 B_4

第III类答案（记为 C）

给出这类答案的被试所使用的策略主要有三种。

(1) 策略 C_1：因为甲、乙两人中没人是赢三场的，所以谁也不知道下一局会是谁赢，因此只能拿各自原来的赌金。有 28 人是这样的理由。（如图 10）

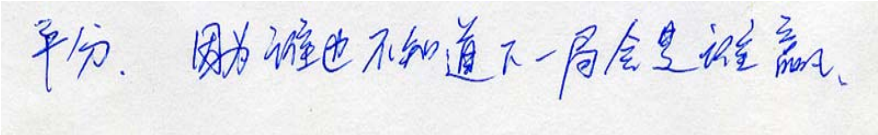


图 5 策略 C_1

(2) 策略 C_2：因为甲、乙两人赌技相当，因此下一次、再下一次谁都有可能获胜，概率相同，所以两人平分赌金。有 25 人持此种理由。

(3) 策略 C_3：按规定是必须赢三场才能得全部赌金 192 金币。而现在无一人赢三场却已终止，说明他们还未分胜负，因此应取消比赛，视作无效，两人各自拿回自己的赌金。有 20 人持这种看法。

第IV类答案（记为 D）

给出这类答案的被试所使用的策略主要有两种。

(1) 策略 D_1：因为甲胜了两局，乙只胜一局，甲比乙多赢一局，所以甲获胜概率比乙大，故赌金应全给甲。

(2) 策略 D_2：按照形势，若比赛继续进行，甲获胜概率大于甲输的概率，所以赌金全给甲。

以上是学生中出现较多的一些答案，除此之外，还有两类答案也在各校的学生中出现。

第V类答案（记为 E）：甲得 160 金币，乙得 32 金币。被试所用的策略是：由于甲乙的胜局数为 2:1，所以甲无论如何也不能分自己的赌金，只能分乙的赌金，因此按比例分甲可再拿乙的$\frac{2}{3}$，即$96+96\times\frac{2}{3}=160$金币，乙得 32 金币，共有 12 人持此理由。

第VI类答案（记为 F）是：甲得 120 金币，乙得 72 金币。给出这类答案的被试有使用的策略是，先把总赌金分成 4 份，每份 48 金币。因为甲:乙=2:1，所以甲占 2 份，乙占 1 份。而第四场赢的概率相同，因此平分剩下的 48 金币，即甲得$48\times2+\frac{1}{2}\times48=120$，乙得$48\times1+\frac{1}{2}\times48=72$，有 10 人这样认为。

上述答案与理由是各校的被试中普遍出现的，当然有些被试只写答案没写理由。而另外各种各样的答案还有，只是个别的、零碎的，也就不统计和归纳了。

3.2 历史视角

此测验题的背景就是 3.3 节提到的 17 世纪帕斯卡与费马通信讨论的“点数问题”，而参与讨论的数学家有很多。用数学家们的方法来解这一测试题，大致有这几种答案。

第一类答案是：甲得 128 金币，乙得 64 金币。有 15 和 16 世纪意大利数学家帕西沃里、卡兰奇和塔塔里亚。他们的方法也各异。最早是帕西沃里，他把这个问题简单地当成了关于比例的问题：赌金应按胜局比数 2:1 来分配；而同世纪的卡兰奇则认为：赌金分配应考虑不终止比赛，两人各须赢几场，然后按各须赢的场数反比来分配，即$甲:乙=\frac{1}{1}:\frac{1}{2}=2:1$，所得结果与帕西沃里一样。而在以后的一个多世纪里，无人给出这类问题的正确答案。到了 16 世纪的塔塔里亚，他给出了“点数问题”的公式是：$(p-m+n):(p-n+m)$，根据此题，有 $p=3, m=1, n=2$，解为$甲:乙=(3-1+2):(3-2+1)=2:1$，即甲得 128 金币，乙得 64 金币。

第二类答案是：甲得 144 金币，乙得 48 金币。有意大利数学家卡丹，法国数学家费马和帕斯卡，荷兰数学家惠更斯。他们的方法也有区别。其中 16 世纪的卡丹对“点数问题”给出的公式是：$(1+2+\cdots+n):(1+2+\cdots+m)$，根据此题有 $m=1$，$n=2$，即$甲:乙=(1+2):1=3:1$，所以甲得 144 金币，乙得 48 金币。尽管卡丹在这道测试题上的答案是正确的，但他的算法是错误的，换成其他情形就不对。到了 17 世纪，费马和帕斯卡通信再次讨论“点数问题”，费马的方法就是列出赌局继续下去是甲可能出现的情况，见 3.3 节。而帕斯卡的解法是用“期望值方法”，用在此题就是：假设继续，若甲赢，则可得全部赌金 192 金币，若乙赢，则两人平局，而两人赢下一局的机会均等，故各取 96 金币，因此甲可对乙说：“即使我输了下一局，也总能得 96 金币，至于另外 96 金币，我们机会均等，应平分。”即甲应得 144 金币，乙得 48 金币。随后帕斯卡在他的《论算术三角形》一书中对点数问题给出了一般的公式：

$$\left(C_{m+n-1}^0+C_{m+n-1}^1+C_{m+n-1}^2+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}\right):\left(C_{m+n-1}^0+C_{m+n-1}^1+C_{m+n-1}^2+\cdots+C_{m+n-1}^{m-1}\right)$$

应用此公式计算测试题可得：$\left(C_2^0+C_2^1\right):C_2^0=3:1$。而后惠更斯独立进行了研究，但他所用的方法与帕斯卡相一致。

历史上数学家们的方法在这次测试中的分布情况如表 3 所示。

表 3 数学家的方法在测试题中对应的人数

方法	帕西沃里	卡兰奇	卡丹	塔塔里亚	费马	帕斯卡、惠更斯
学生数	254	12	10	10	17	11
百分比	39.0	1.8	1.5	1.5	2.6	1.7

从表中可知，历史上数学家们思考的方法在学生中都出现了，特别是超过三分之一的同学所用方法与帕西沃里相同，历史上一百多年的漫长时间里，人们都认可他的方法而无人对此法提出异议，今天学生的理解所具有的历史相似性昭然若揭！

表 4 给出了学生的方法于历史上数学家方法的对应关系。其中学生 A_4 的方法与塔塔里亚的公式完全一致，而学生 E 的方法实际上是塔塔里亚的公式中当甲:乙 = 2:0 时的结果。学生 B_4 的方法就是卡丹公式的计算方法。而学生 A_3、A_5 的思路与费马的相同，但甲胜的概率算错了导致出错。学生 B_1 的方法是用了现在所学的概率知识才得出的正确答案，而历史上当时还处于概率的诞生期。至于第三和第四类答案，历史上没有出现，但这次有一部分被

表 4 学生所用方法与历史上数学家的比较

方法	人 数	百分比	历史上的数学家
A_1	254	39.0	帕西沃里
A_2	12	1.8	卡兰奇
A_3	11	1.7	
A_4	10	1.5	塔塔里亚
A_5	10	1.5	
B_1	37	5.7	
B_2	17	2.6	费马
B_3	11	1.7	帕斯卡、惠更斯
B_4	10	1.5	卡丹
C_1	28	4.3	
C_2	25	3.8	
C_3	20	3.1	
D_1	20	3.1	

D_2	12	1.8	
E	12	1.8	塔塔里亚
F	10	1.5	

试认同，这可能与学生同情弱者（乙处于劣势）的感情因素和学生仅凭概率直觉而未继续计算有关。

3.3 第 2 小题的测试结果

第 2 小题：赌技相当的甲、乙、丙三人赌博，规定先赢三局者胜，并得三人的全部赌金。现甲、乙、 丙三人赢的局数之比为 2:1:1 时，赌博因故终止，你认为此时三人应得的赌金之比为多少？并说明理由。

第 2 小题在前一小题的基础上，由两个赌徒变成了三个赌徒，难度增大了。许多同学感到很棘手。一些同学能继续沿用第 1 小题的方法去思考，但一些同学却不能了，因此改变了策略，更有一些同学干脆放弃，空白不答。表 5 统计了一些较为普遍的答案。

表 5 测试题 2 主要答案的分布

类别	答 案	重 点		普 通		综 高		合 计
		高一	高二	高一	高二	高一	高二	
I	2 : 1 : 1	34	27	46	27	91	66	291(44.6)
II	17 : 5 : 5	4	4	0	2	0	0	10(1.5)
III	1 : 1 : 1	17	15	9	7	20	26	94(14.4)
IV	1 : 0 : 0	5	2	3	1	3	14	28(4.3)
V	4 : 1 : 1	8	2	1	5	1	5	22(3.4)
VI	5 : 2 : 2	2	3	4	3	1	4	17(2.6)

各类答案相应的策略概述如下。

第I类答案（记为 a）

给出这类答案的被试所用的策略主要有三种。

(1) 策略 a_1：按胜局数比例来分，即甲:乙:丙=2:1:1，共有 106 人使用了这类策略。

(2) 策略 a_2：甲赢局数比乙、丙各多一倍，但又不到 3 局，所以得一半赌金，而乙、丙赢的局数相等，平分剩下的赌金，即甲 : 乙 : 丙 $= \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 2:1:1$，78 人使用此一策略。

(3) 策略 a_3：若继续比赛，甲要胜只须一局，而乙、丙还各须赢 2 局，按各再须赢的局数反比分配，即甲 : 乙 : 丙 $= 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 2:1:1$，共有 18 人认为这样。

第II类答案（记为 b）

给出这类答案的被试所用的策略主要有两种。

(1) 策略 b_1：沿用前一小题的策略，用树状图列出继续比赛下去会出现的所有情况，发现甲最终赢有 17 种，乙和丙各为 5 种，得出甲:乙:丙=17 : 5 : 5，但只有 4 人是用了此法且最后计算正确的。（如图 6）

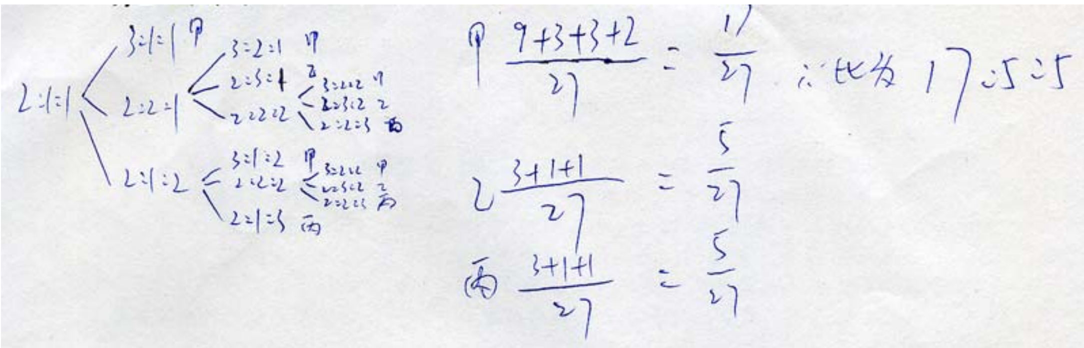


图 6 策略 b_1

(2) 策略 b_2：直接计算甲、乙、丙赢的概率：

$$P_{甲} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) \times 2 = \frac{17}{27}，\ P_{乙} = P_{丙} = \left(1 - \frac{17}{27} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{27}$$

所以甲:乙:丙=17:5:5。有 6 人用此策略，主要集中在高二学过概率的理科班。

第III类答案（记为 c）

给出这类答案的被试所用的策略主要有三种，与前一小题完全类似。

(1) 策略 c_1：由于赌技相当，而现在谁都没有赢三场，所以无法确定最后谁赢，因此平分。

(2) 策略 c_2：三人都有可能最后获胜，概率相等，所以平分。

(3) 策略 c_3：现在并没有分出胜负而终止，应视作无效，各自拿回自己的赌金。

第IV类答案（记为 d）

给出这类答案的被试所使用的策略主要集中于一种：比赛终止时，甲占优势，所以甲赢的可能性大，故赌金应全归甲。

第V类答案（记为 e）

给出这类答案的被试所使用的策略主要也只有一种：因为甲赢两局，而乙、丙只赢 1 局，比甲少赢 1 局，所以要拿出自己赌金的一半给甲，即甲:乙:丙= $2:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=4:1:1$。

第VI类答案（记为 f）

给出这类答案的被试所用策略主要也只有一种：如果设每人赌金为 3 份，而先赢三局者胜，就是赢一局可以从其他人那儿各得 1 份，而输一局就拿出自己的 1 份，所以甲可得 $3+2+2-1-1=5$ 份，乙可得 $3+2-2-1=2$ 份，丙与乙相同，因此甲:乙:丙 $=5:2:2$。

3.4 *历史视角*

这一测试题就是帕斯卡与费马在通信讨论了两个赌徒的“点数问题”后，再次通信讨论的三赌徒“点数问题”。数学家们的方法在 3.2 中已提过，不再赘述。对照学生们的方法，仍可找到对应的历史上数学家们的解法，只是缺少了帕斯卡与惠更斯的“期望值方法”。可能学生还没有学过期望值，而三赌徒情形又较复杂，所以两个赌徒学生能想到这样的方法，但变成三个赌徒就不行了。

表 6 数学家们的方法在测试中对应的人数

方 法	帕西沃里	卡兰奇	卡丹	塔塔里亚	费马
人 数	106	18	15	14	4
百分比	16.3	2.8	2.3	2.1	0.6

显然，帕西沃里的方法仍然是学生中用的最多的，而学生用卡兰奇、卡丹、塔塔里亚的方法的人数反而超过了两个赌徒时的“点数问题”。而使用费马方法的实际学生有十多位，但许多学生在统计甲、乙、丙获胜的情况时出错，因此结果就只统计了计算正确的学生数。

表 7 学生的方法与数学家们的比较

方　法	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_1	c_2	c_3	d	e	f
人　数	106	78	18	4	5	32	18	16	23	15	14
百分比	16.3	12.0	2.8	0.6	0.8	4.9	2.8	2.5	3.5	2.3	2.1
历史上的数学家	帕西沃里		卡兰奇	费马						卡丹	塔塔里亚

从测试题二的两个小题的分析可知，就诞生概率论的“点数问题”而言，不管是两个赌徒还是三个赌徒的情况，学生对它的解决方法确实重蹈了历史上数学家们的解法，它们具有历史相似性，历史发生原理是成立的。

4 结论与教学启示

通过上面的问卷调查、学生访谈的统计与分析，对学生心中的古典概率理解有了较为深入的了解，根据所得结果可得出一些结论，同时也回答了研究问题。

(1) 在“点数问题”上的历史相似性

学生在解决两个骰子的“投掷问题”时，也犯了历史上人们的相同错误，而正确的方法与伽利略的一致，可以说完全重蹈了概率论产生前的历史发展过程。对于两个赌徒的“点数问题”，历史上数学家们的所有方法在学生中都发现了，包括错误的和正确的，而且这些方法在各个类型的学校、年级、科别和性别中都存在。而对于三个赌徒的“点数问题”和改变了数据与背景的“随机散步”问题，尽管学生的解决方法减少了，有些数学家的方法没有出现，但还是出现了一部分数学家的方法。因此，对于诞生概率论的“点数问题”而言，学生的解决方法也重复了历史上数学家们的方法。所以，在解决概率论早期历史的古典概率问题的方法上，历史发生原理是成立，它们具有历史相似性。

(2) 解古典概率问题时的错误认识

通过对测试问卷学生所写理由的分析以及访谈，得到了学生在解古典概率时的一些错误认识：混淆有序和无序，等可能性偏见，错误的样本空间、主观意念判断及代表性。这些错误概念在国内外的文献中都发现。而审题不清这些错误认识可能也普遍存在于其他知识点，而不仅仅局限于概率。因此，发现的学生在概率上的错误概念与同内外的研究结果也是相一致的。

(3) 学生在解古典概率问题的策略

在“投掷问题”的解决方法中，学生大致使用了四类正确策略。而在解决“点数问题”时，得出正确答案的学生中许多使用了列举或画树状图。而在访谈过程中，即使数学程度差的学生，只要提醒他用树状图的方法试试，学生基本上都能做出来。由此可得出，画树状图或列举有利于学生解古典概率题，尤其是能帮助学生弄清样本空间。

(4) 题目数据和背景对学生解题的影响

测试题二的两个小题，实质是一样的，第 2 小题是把第 1 小题的两个赌徒改成了三个，但是这个数据一改，学生就不能很好地把第 1 小题的方法用到第 2 小题上，只有极少数同学仍能用同一方法。因此，题目的背景和数据对学生解题有很大的影响，这一点也与国内外的研究结果相一致。

根据本文的研究结论以及笔者在与学生访谈过程中的一些体会，我们可以获得教学启示如下：

(1) 在古典概率教学中可引入数学史上的例子

由研究结论可知，既然学生解题的思考方法与历史上的数学家们具有相似性，且这些历史例子也可暴露出学生在解概率题时的错误概念，那为何不在概率教学的课堂上引入这些例子呢？因为从多名访谈的学生中发现一个共同点：其实学生很想了解一些数学史上的知识，他们对此都很有兴趣。因此在教材中或课堂上，以其举一些其他例子倒不如直接举一些历史上数学家们讨论的例子，既可发现学生存在的问题又可增强学生的自信（访谈中当学生得知自己的方法与历史上某数学家的方法一致时很兴奋），而且又激发了学生的兴趣，可谓一举三得。

(2) 在古典概率教学中可多采用树状图以帮助学生弄清样本空间

在测试问卷中做得好的学生，大都能自觉地采用树状图来分析，这样容易弄清样本空间。而在访谈中发现，即使数学程度差的学生，经提醒后，也能通过画树状图来解决问题。因此，在课堂教学中，教师应多强调这种方法，并在平时解题中有意识地多采用画树状图。现在的初中教材中已出现这种方法，在高中新教材的必修 3 中也可多采用这种方法。

(3) 在古典概率教学中多应用现代信息技术

在测试中发现了学生的一些错误概念，而题目中数据与背景的改变就要影响学生的解题方法。因此，要改变这种现状，就要让学生经历不同的实验。但由于课堂时间的有限性，教师不可能一个一个演示实验下去，因此借助于信息技术，通过电脑来模拟演示实验，也可起到类似的作用。

本课题通过问卷测试和访谈，得到了一些研究结论和启示，但同是也存在着某些方面的不足。比如测试题的设计，在文字叙述上不够完整与严密，从而导致一些学生产生误解；在测试时间上不够充分，爱思考的同学往往来不及做最后一题，导致只写结果不写理由；另外，访谈的对象偏少，从而没有发现更多的在测试卷中发现不了的错误认识。所有这些不足

都是我以后在进行学术研究时要吸取的教训，也是要不断提高的地方。

参考文献

[1] Bagni, G.. T. et al., 1999a. A paradox of probability: an experimental educational in Italian hight school. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Educatics into the 21st century*, *Cairo*, *Egypt*, Ш, 57-61

[2] Bagni, G. T. et al., 1999b. Ancient Zara game and teaching of probability: an experimental research in Italian High School. *Proceedings of MCOTS-2*, Oshkosh: Department of Mathematics University of Wisconsin

[3] Fischbein, E. et al., 1991. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22: 523-549

[4] Jones, G. A. et al., 1999. Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30: 487-519

[5] Konold, C. et al., 1993. Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24: 392-414

[6] Shaughnessy, J. M., 1977. Misconceptions of probability: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, 8: 285-316

[7] 李俊, 2003. 中小学概率的教与学. 上海: 华东师范大学出版社

[8] 任明俊, 2005. 中学生对函数概念的理解: 历史相似性研究. 华东师范大学硕士学位论文

[9] 汪晓勤等, 2005. 从一次测试看关于学生认知的历史发生原理. 数学教育学报, 14(3): 30-33

[10] 汪晓勤等, 2006. 高中生对实无穷概念的理解. 数学教育学报, 15(4):90-93

[11] 殷克明, 2011. 高中生对切线的理解: 历史相似性研究. 华东师范大学硕士论文

[12] 张连芳, 2011. 初中生对代数字母符号的理解. 华东师范大学硕士论文

[13] 赵瑶瑶, 2007. 复数的历史与教学. 华东师范大学硕士学位论文

无字证明：历史及其意义

彭 刚

(华东师范大学数学系，上海, 200241)

1 “无字证明”概述

所谓“无字证明”(proofs without words)，就是将数学命题用简单、有创意而且易于理解的几何图形来呈现。

近三十年来，以美国 Lewis & Clark 大学教授 Roger B.Nelsen 为首的一些数学家在此方面做出了大量的工作，其内容涵盖代数、几何、三角、微积分以及组合数学等众多数学分支，相关文章发表在 *Mathematics Magazine*，*Forum Geometricorum*，*The College Mathematics Journal* 以及等多个杂志上。鉴于“无字证明”的教育价值，美国 *Mathematics Magazine* 杂志还专门开辟了 Proof Without Words 的专栏。

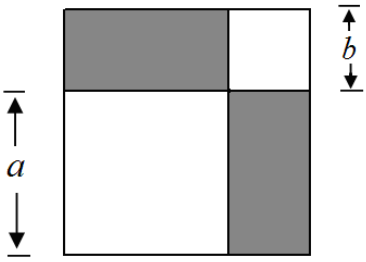
在我国，由丁石孙先生主编的《数学小丛书——智慧之花》中的第 4 本《归纳·递推·无字证明·坐标·复数》(北京大学出版社，1995)，介绍了部分“无字证明”集锦(由我国著名数学家潘承彪先生编写)。近年来，虽然有部分中学教师已开始意识到“无字证明”的价值所在(比如《数学通报》2009 年第 4 期《数学文化 课堂有你更精彩——从必修 5<数列>的第一节引入说起》的作者便将数列求和的“无字证明”引入了课堂教学中)，但整体而言，由于其自身的局限性“无字证明”尚未引起我国数学教育界的重视。

2 “无字证明”溯源

“无字证明”历史悠久，早在 2000 多年前，欧几里得编著的《几何原本》第II卷中表示完全平方公式的图形(如图 1)以及公元 3 世纪我国数学家赵爽在注《周髀算经》时证明勾股定理的 “弦图”(如图 2)，均可以看作是最早的“无字证明”(关于历史上更多的“无字证明”，可参

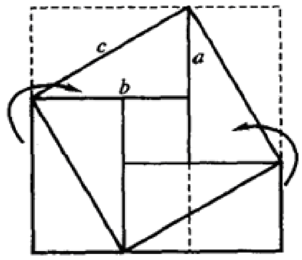
本文曾刊于《中国初等数学研究》第四辑。

阅文献[24])。



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

图 1



$c^2 = a^2 + b^2$

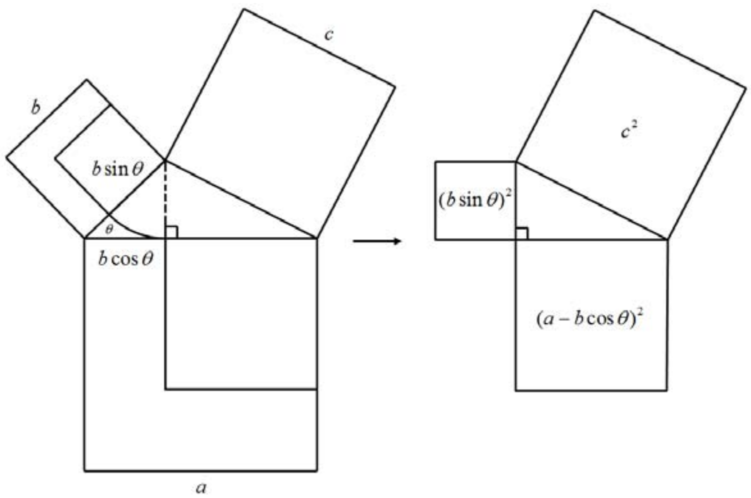
图 2

3 “无字证明”的意义

长期以来，数与形是中学数学的主要研究对象。一般而言，数与运算有关(涉及时间)而形与直观有关(涉及空间)。数与形的有效结合，不但有利于学生的数学学习而且还有助于学生的左右脑的开发。“无字证明”是数与形结合的典范，是中学数学教学中渗透数形结合思想的良好素材。

3.1 促进直观教学

数学以抽象著称但图形却具有很强的直观性， 因而通过构造巧妙的图形可以使得数学问题变得直观、易懂，从而达到一图胜千言(A Picture is Worth a Thousand Words)的功效。



$$c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a-b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

图 3

美国家喻户晓的数学科普大师 Martin Gardner 曾将“无字证明”这种图形视为“一瞥就懂”(“look-see”diagrams)的图形，并认为很多时候一个繁复的证明若能辅以一个几何的类比图形(geometric analogue)，则后者的简洁与美妙让读者几乎可以一瞥即对定理的真实性了然于胸(the truth of a theorem is almost seen at a glance)[1]。比如由图 3[2]，余弦定理及其与勾股定理之间的关系便一目了然:

3.2 提供视觉化表征

“无字证明”的直观性为数学知识的视觉化表征提供了良好素材。所谓表征指的是知识在人们头脑中的存在方式[3]，根据表征与被表征对象的结构相似性，数学表征可分为言语化表征和视觉化表征。视觉化表征描绘了具体的、形象的、直观的意义，便于人们较为快捷地视觉化数学的整体结构和意义。

比如，学生在学习等差数列求和公式时，如果仅仅从代数符号的运算上给出证明，这还不能建立完整的数列求和的数学意义[4]，但若再呈现如图4的“无字证明”，赋予公式以直观意义，则有利于加深学生对这一公式的有意义理解。

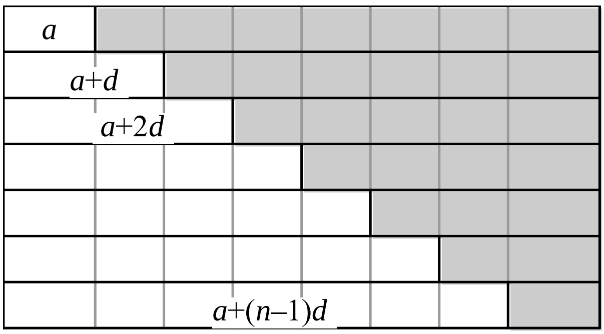
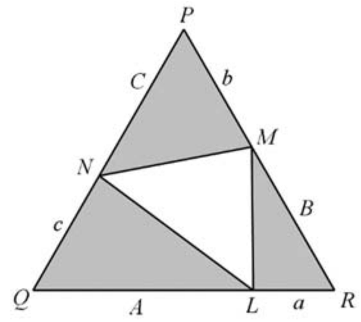


图4

3.3 促进视觉化推理

“无字证明”为数学问题解决的视觉化提供了平台。例如“设正数a，b，c，A，B，C满足$a+A=b+B=c+C=k$，求证$aB+bC+cA<k^2$”这道不等式题一个流行的解法便是通过构造“无字证明”(如图5)。



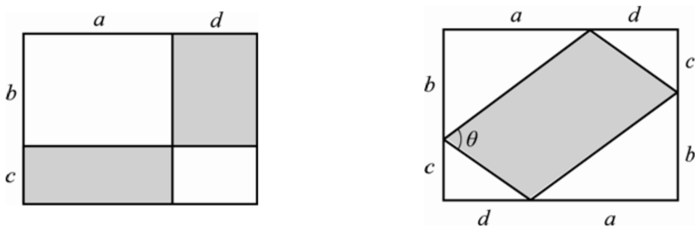
$$S_{\Delta LRM}+S_{\Delta MPN}+S_{\Delta NLQ}<S_{\Delta PQR}\Rightarrow aB+bC+cA<k^2$$

图5

实际上，很多科学家非常看重视觉化推理的运用，一个经常被引用的例子就是：爱因斯坦曾经提及在他的思维中语言似乎没有任何地位，而符号以及图像却不断地复制与自由组合[5]。著名数学家波利亚基于自己的数学经验提出了成功解题的一系列启发性建议，其中的一条就是“画一个图(Draw a Figure)”。

3.4 培养创新精神

“无字证明”为培养学生的创新精神开拓了广阔的空间。比如台北市中山女中林怡萱学生，对柯西不等式提出了如下“无字证明”(如图 6)，而灵感则来自勾股定理的“弦图”证明， 可见她有相当深刻的图形洞察力，非常值得模仿与学习[6]。



$$ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta\Rightarrow(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

图 6

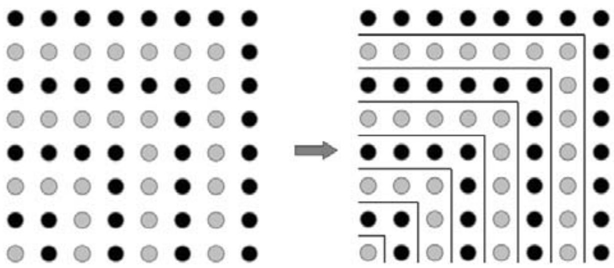
4 “无字证明”的构造

基于一些数学原理(比如“算两次”原理、出入相补原理等)，我们可以利用一些基本的几何图形(比如点、三角形、四边形、圆等)及其有关度量(长度、面积、体积)来构造“无字证明”。

4.1 数学原理

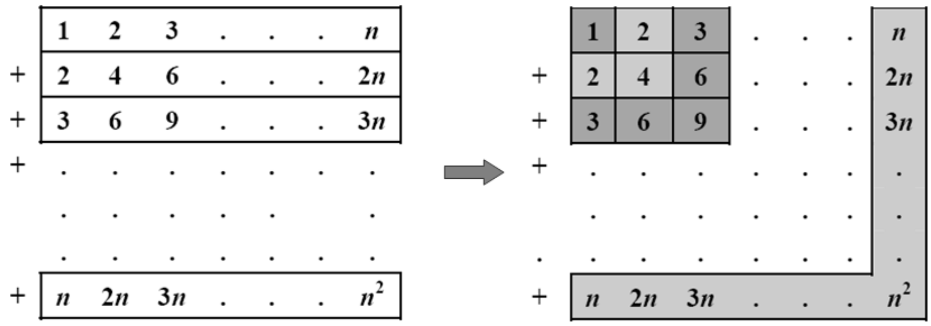
4.1.1 “算两次”原理

“算两次”原理，又称富比尼(G.Fubini)原理，其实质是将同一个量从两个不同的角度计算两次，利用“殊途同归”的等量关系达到“出奇制胜”的目的[7]。巧妙利用该原理我们可以构造数列求和公式的“无字证明”(如图 7[8]和图 8[9])，这与古希腊毕达哥拉斯学派所研究的“形数”有异曲同工之妙。



$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

图 7



$$=\sum_{i=1}^{n} i+2\sum_{i=1}^{n} i+3\sum_{i=1}^{n} i+\cdots+n\sum_{i=1}^{n} i \qquad =1\cdot 1^2+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot n^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \qquad =\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

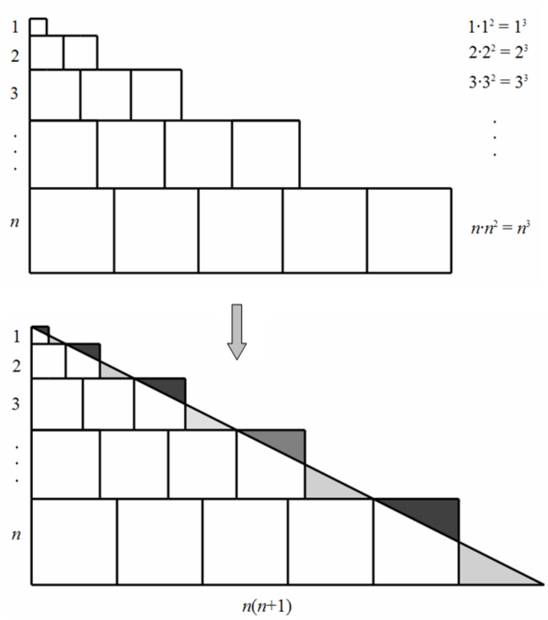
图 8

4.1.2 出入相补原理

出入相补原理是中国古代数学的一朵奇葩。用现代语言来说出入相补原理是指这样的明

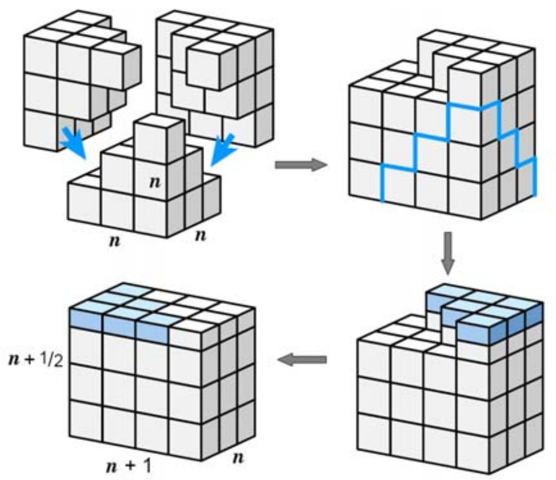
显事实[10]：一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。

出入相补原理是构造“无字证明”的重要原理之一。利用该原理我们可以把几何图形进行分割、重组，然后根据面积或者体积的不变性来构造“无字证明”(如图 9[11]和图 10[12])。



$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{2}\times\left[n(n+1)\right]\times\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

图 9



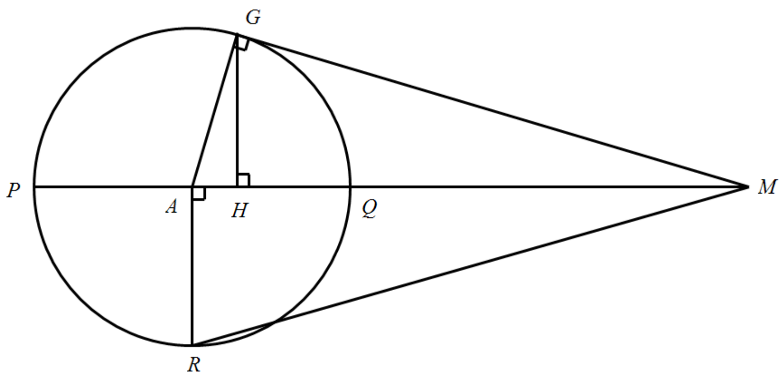
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

图 10

4.2 几何度量

4.2.1 线段的长度

任意正实数都可以用某一条线段的长度来表示，因而我们可以利用线段巧构图形来表征一些(取正值情况的)数学公式、不等式。比如，在不等式教学中，我们经常会提到一些平均数的图形表示。其实，只要利用圆和直角三角形的有关性质，我们便可以构造一个统一的“无字证明”(如图 11[13])，其中 HM 表示调和平均数(harmonic mean)，GM 表示几何平均数



$$PM = a,\ QM = b,\ a > b > 0$$

$$HM = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\ GM = \sqrt{ab},\ AM = \frac{a+b}{2},\ RM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$HM < GM < AM < RM$$

图 11

(geometric mean)，AM 表示算术平均数(arithmetic mean)，RM 表示平方平均数(root mean square)。

再如，只利用“一个基本图形”(如图 12.1)我们便可得到“六个三角公式”的“无字证明”(如图 12.2) [14]，它同样不仅揭示了数学的内在联系，给人以美的享受，同时也能开发学生的智力，发散学生的思维。

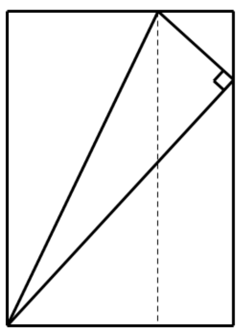
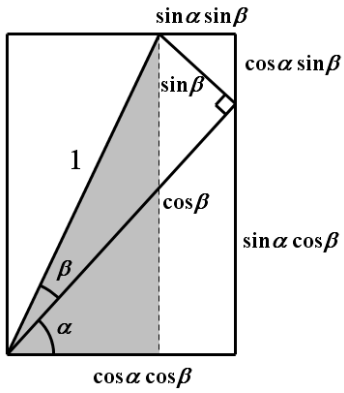
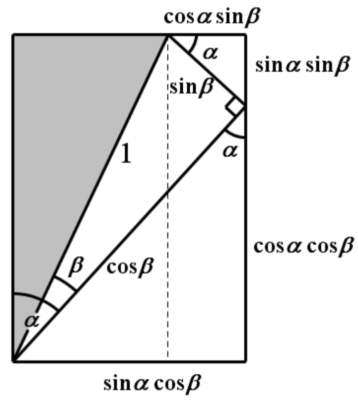


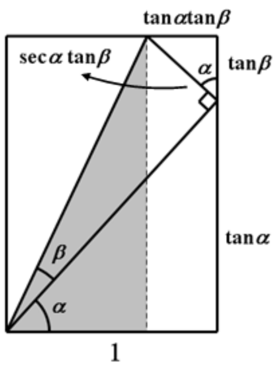
图 12.1



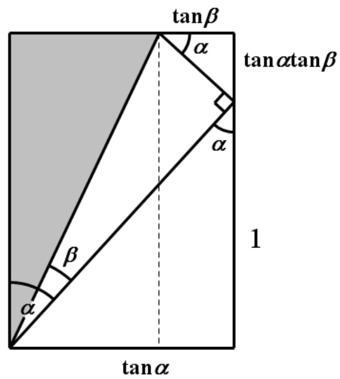
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$



$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$



$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

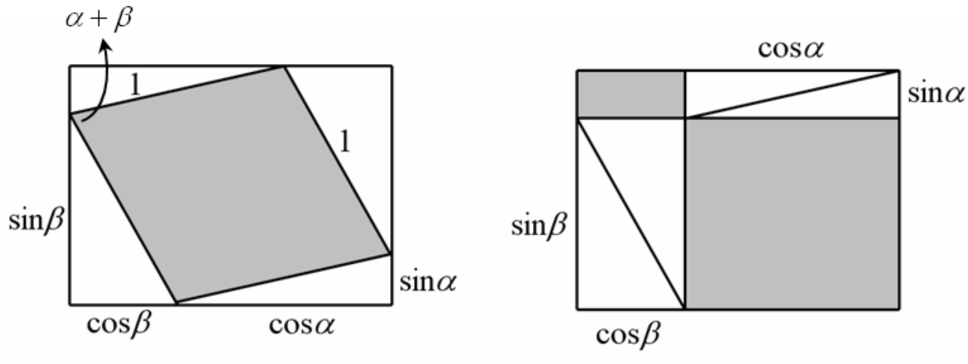


$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

图 12.2

4.2.2 图形的面积

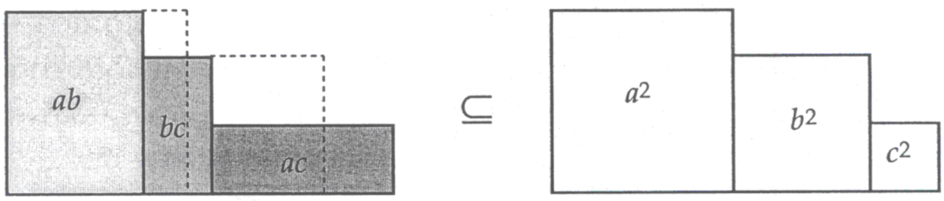
《几何原本》中表示完全平方公式的图形以及勾股 “弦图”可谓利用图形的面积构造“无字证明”的经典之作(如图 1 和图 2)，上述台湾女生对柯西不等式提出的“无字证明”也是如此(如图 7)。再次利用勾股 “弦图”，我们还可以构造两角和正弦公式的“无字证明”(如图 13[15])，它巧妙地利用了正弦定理与三角形面积之间的关系，同样具有简洁、直观的优点。



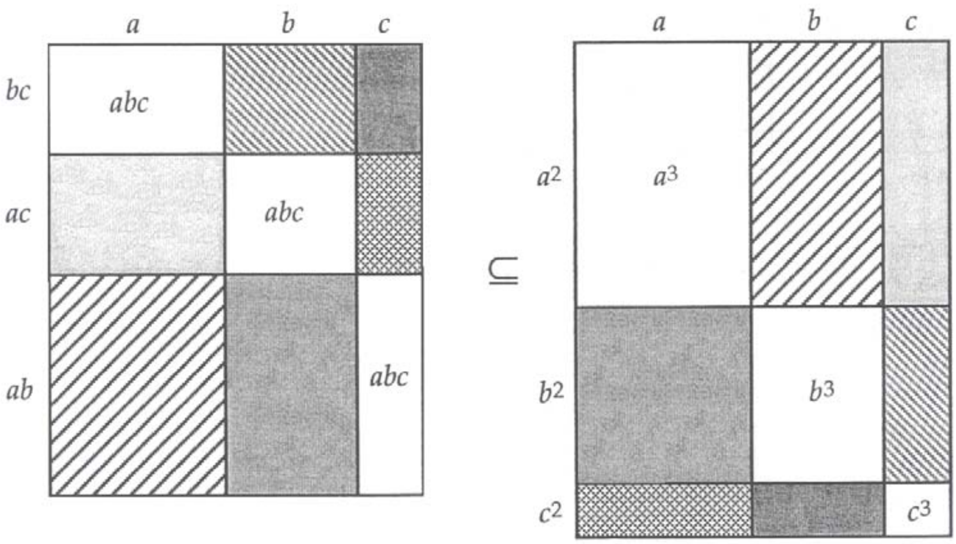
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

图 13

利用图形的面积以及图形的镶嵌关系，我们还可以得到以下均值不等式的“无字证明”(如图 14[16])：$a^3+b^3+c^3\geq 3abc(a\geq b\geq c>0)$。



$$a\geq b\geq c>0\Rightarrow ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$$

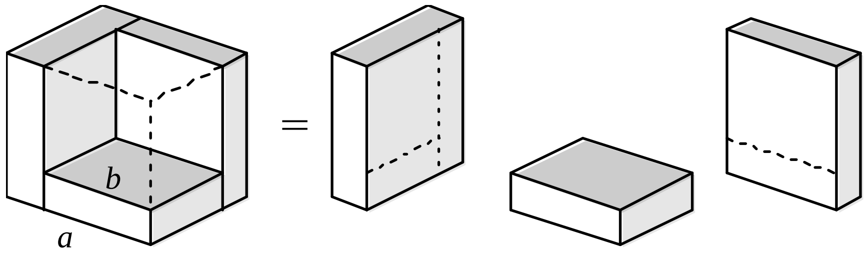


$$(ab+bc+ac)(a+b+c)\leq(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\Rightarrow 3abc\leq a^3+b^3+c^3$$

图 14

4.2.3 几何体体积

与利用图形的面积构造“无字证明”一样，在处理与三次方有关的数学问题时我们也可以利用几何体的体积来构造“无字证明”(如图 15[17])，它对于培养学生的空间想象能力以及代数与几何知识的整合方面有着十分重要的意义。



$$a^3-b^3 \quad = \quad a^2(a-b) \quad + \quad b^2(a-b) \quad + \quad ab(a-b)$$

图 15

除上述方法外，我们还可以利用直线的斜率或者函数的图像等其他数学工具来构造“无字证明”。比如图 16 中的“无字证明”就是利用直线的斜率来诠释著名的辛普森悖论(Simpson's Paradox)：已知 $a,b,c,d,A,B,C,D>0$, $\frac{a}{b}<\frac{A}{B}$, $\frac{c}{d}<\frac{C}{D}$, 但 $\frac{a+c}{b+d}>\frac{A+C}{B+D}$ [18]。

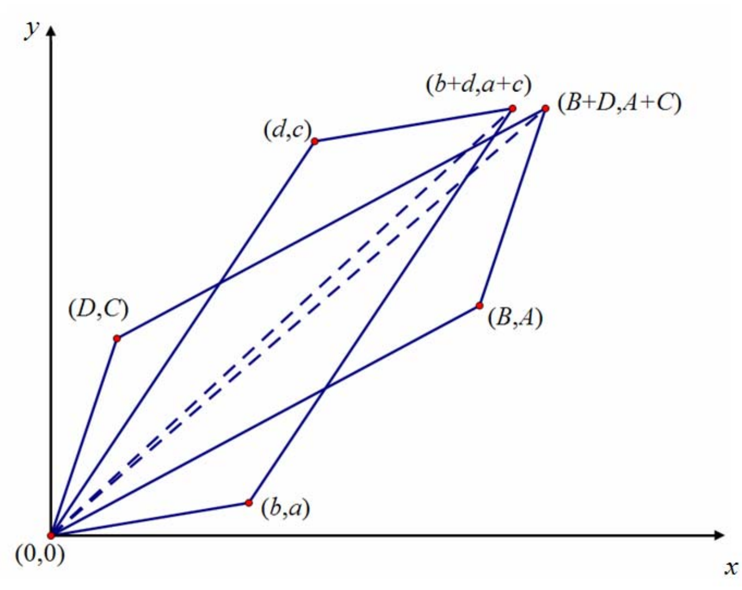


图 16

该悖论是指当人们尝试探究两种变量是否具有相关性时，比如新生录取率与性别，报酬与性别等，会分别对之进行分组研究，在这种研究中，在某些前提下有时会产生在分组比较中都占优势的一方，在总评中反而失势。该现象于 20 世纪初就有人讨论，但一直到 1951 年辛普森在他发表的论文中才算正式被描述解释。

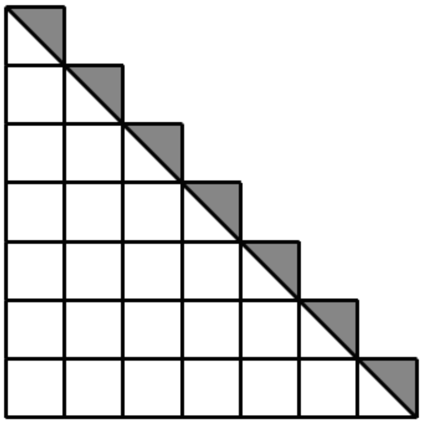
5 “无字证明”的思考

在课堂中引入“无字证明”，可以拉近学生与古代数学文本的距离，尤其是当代数符号演算对初学者极为抽象时，几何图示 (geometric illustration) 往往可以发挥相当大的澄清或说服功能[19]。

当然，“无字证明”也存在一定的局限性。很多时候，“无字证明”只是利用图形来表征数学命题或者定理的某些特殊情况，但同时我们应该注意的是它往往也蕴含着一般化的模式，而正是这种模式会激发人的灵感与想象。因此，我们认为“无字证明”的核心价值不在于“证明”(prove or verify)，而在于“启发”(enlighten) 、“解释”(explain)以及发现未知(see the unseen)。比如利用数学归纳法我们可以严格地证明

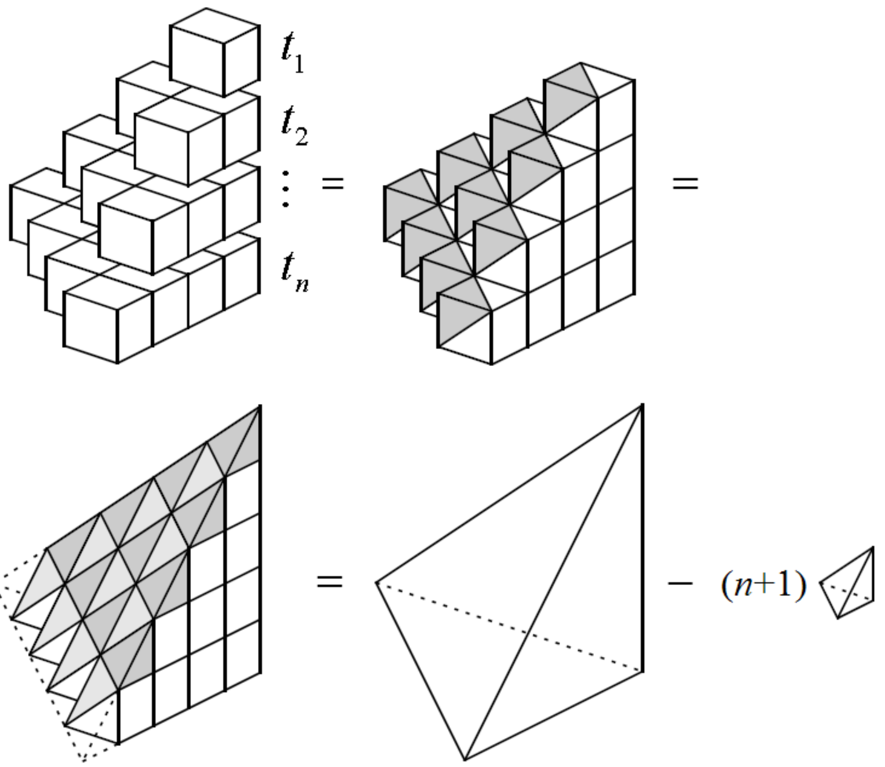
$$t_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, t_1+t_2+\cdots+t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

然而我们很难解释正整数的求和公式中为何会出现 $\frac{1}{2}$ 以及 $\frac{1}{6}$，而这一点我们可以通过“无字证明”来解释(如图17和18)：前者与三角形的面积有关，而后者则与锥形的体积有关[20]。



$$1+2+\cdots+n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

图17



$$t_1+t_2+\cdots+t_n=\frac{1}{6}(n+1)^3-(n+1)\cdot\frac{1}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

图18

另外，“无字证明”作为对证明的启发式的补充资源还可以唤起学生证明一个定理的思路[21]。著名数学家柯尔莫哥洛夫认为：只要有可能，数学家总是尽力把他们正在研究的问题从几何上视觉化[22]。可见，可视化是获得“较高级的抽象平台”的一种方式，特别是在研究代数问题时，借助直观、明了的图形，学生能迅速发现问题解决的思路和方法。

近年来，还有学者尝试利用多幅图形来达到动态的效果，为“无字证明”进入中学数学课堂提供了新的方式，比如欧几里得《几何原本》中勾股定理的证明便可用下面一系列图形来诠释(如图19[23])：

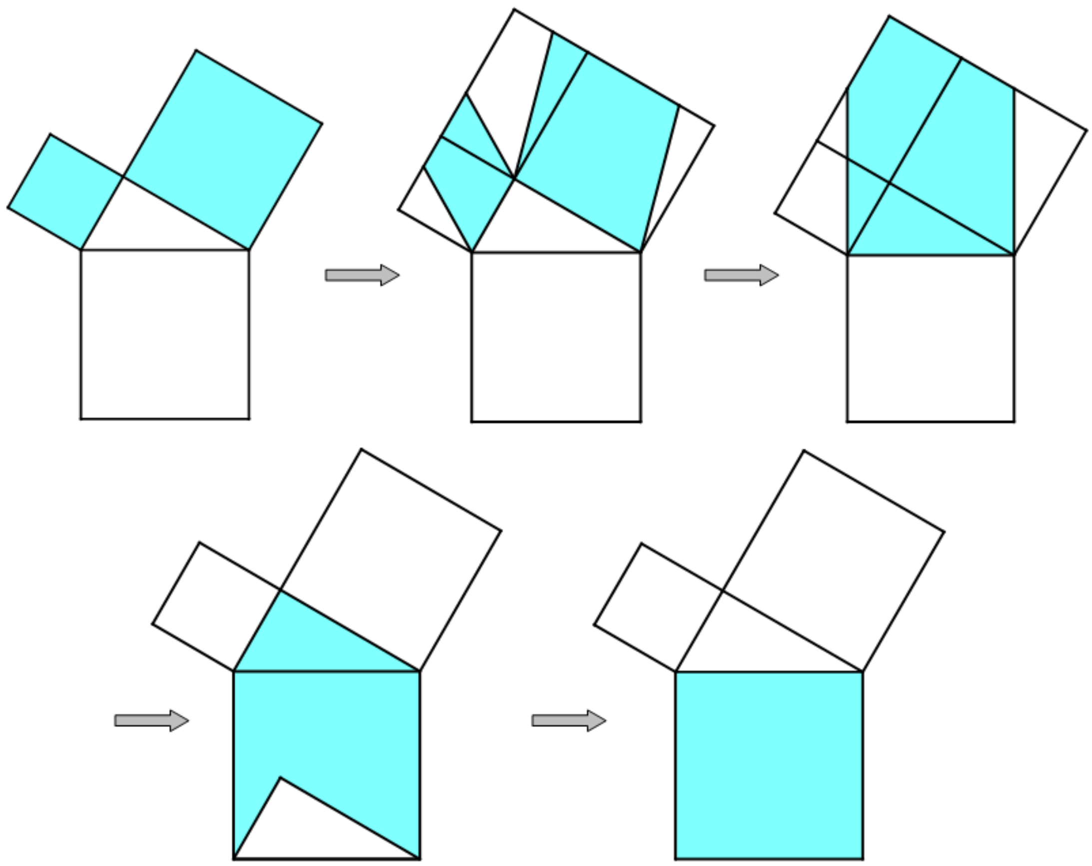


图19

综上所述，虽然“无字证明”通过用图形诠释数学很难作为严格意义上的证明，但它简明易懂，有助于代数、三角知识的直观教学，有利于激发学生的学习兴趣，开拓学生的视野，发散学生的思维，因而对我国当前中学数学教学具有重要的借鉴价值。

参考文献

[1][19] 洪万生, 1992.图说一体、不证自明. HPM 台北通讯, (12):1-3

[2] Timothy A. Sipka, 1988. Proof Without Words. *Mathematics Magazine*,(4): 259

[3] 吴增生, 2008.数学概念及其表征.数学通报,(3):26

[4] 张奠宙主编, 1994.数学教育研究导引.南京：江苏教育出版社

[5] 徐速, 2006.数学问题解决中视觉空间表征研究的综述.数学教育学报, (1):35-38

[6] 洪万生, 2004.一位高中女生的数学才气. HPM 台北通讯,(7): 2-3

[7] 宁连华,赵文静, 2002.“算两次”——方法与思想的耦合.中学数学, (9):23

[8][23] Nelson, Roger B.,1993. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, New York: Mathematical Association of America

[9] F. Pouryoussefi, 1989. Proof without words. *Mathematics Magazine*, (5):323

[10] 吴文俊, 1982. 九章算术与刘徽. 北京：北京师范大学出版社

[11] Georg Schrage, 1992. Proof without words. *Mathematics Magazine*, (3):185

[12] Man-Keung Siu, 1984. Proof without words. *Mathematics Magazine*, (2):92

[13] Nelson, Roger B., 1987. Proof without words. *Mathematics Magazine*, (3):158

[14] Nelson, Roger B., 2001. *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, New York: Mathematical Association of America

[15] V.Priebe and E.A.Ramos, 2000. Proof without Words:The sine of a sum. *Mathematics Magazine*, (5):392

[16] Alsina.Claudi, 2000. Proof without Words: The Arithmetic-Geometric Mean Inequality for Three Positive Numbers. *Mathematics Magazine*, (2):97

[17] Nelson,Roger B, Claudi Alsina, 2006.Math Made Visual: creating images for understanding mathematics , New York: Mathematical Association of America

[18] Kocik Jerzy, 2001. Proofs without Words: Simpson's Paradox. *Mathematics Magazine*, (5):399

[20] M.F.Gierdien, 2007. From ‘proofs without words’ to ‘proofs that explain’ in secondary mathematics.*Pythagoras* (*Pretoria*) , (7):53-62

[21] Hanna.G., 2000. Proof, Explanation and Exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, (1- 2):5- 23

[22] [苏]克鲁捷茨基, 1983.中小学生数学能力心理学. 李伯黍等译.上海: 上海教育出版社

[24] 汪晓勤, 桂德怀, 2000. 数学史上的图说一体. 中学教研(数学), (7): 39-40

教学实践

均值不等式的 HPM 学习单设计

张 小 明

(浙江省诸暨中学，诸暨，311800)

大约公元前 500 年，毕达哥拉斯学派就对两个正数的十种平均值展开了研究[1]，在数学发展的历史长河中，均值不等式更像是一朵美丽的浪花，时隐时现，在上下翻滚中绽放出自己独有的美丽，这种美丽也曾吸引阿契塔(Archtas)、希帕索斯(Hippasus)、欧几里得(Euclid)等数学巨人驻足。但是回到当今的数学课堂，中学生却很少有机会领略这独特的美景。就均值不等式的教学而言，教师往往花很少的时间给出均值不等式，然后便是大量的关于“应用均值不等式求最值”的操练，这种作法看似“实用、高效”，但却人为地割裂了数学与人文的联系，使得中学生眼中的数学更像是“X 光下的西施”(项武义教授语)。为了改变这种状况，本文选取部分历史材料，按照均值不等式的教学要求加以剪裁，融入到数学课堂教学之中，编写成可供教学使用的学习单，以求学生在学习数学知识的同时，能够领略古代数学家们的睿智和风采，并能体会数学的文化意涵。

学习工作单(worksheets)[2]是在数学课堂教学普遍使用的一种方式，它由一组有结构、有引导性的问题串构成，学生在教师的组织引导下，通过对学习单设置的问题串的思考和解决，学习新概念、掌握新方法。根据笔者在文[3]中的调查结果，将数学史融入数学课堂的诸多方式中，应用学习单最受高中学生欢迎，这也正是笔者采用学习单形式的直接原因。

在均值不等式学习单的设计过程中，笔者综合考虑了教材知识、学生认知、历史材料三方面的因素[4]，然后根据教学要求、学生的认知特点选择恰当的历史材料，并根据教学的需要进行必要的剪裁和整合，最终形成了三张学习工作单。

1 算术平均数和几何平均数的概念及大小关系

就根据课程标准和教材的要求,本节课的第一个目标是使学生理解算术平均数和几何平均数的概念及其大小关系，人教版教材(必修 5)的处理方法是先由赵爽的弦图引出了不等式 $a^2+b^2 \ge 2ab$，然后换元得出均值不等式。应当说，教材中引出不等式 $a^2+b^2 \ge 2ab$ 的设

计与 HPM 的基本理念是符合的, 笔者在此基础上, 以《几何原本》[5]第 VI 卷的命题 13 为历史素材, 设计了第一张学习单, 学习单在得出 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 之后向学生出示:

Workcard 1 几何图形中蕴含的不等式

成书于公元前 300 年左右的《几何原本》是古希腊数学家欧几里得编著的一部划时代的著作, 其伟大的历史意义在于它是用公理化方法建立起演绎体系的最早典范, 牛顿在《自然科学之数学原理》一书的序言中由衷地赞叹: "从那么少的几条外来原理, 就能取得那么多的成果, 这是几何学的光荣! "。

《几何原本》第 VI 卷的命题 13, 给出了求作两条已知线段的几何中项(也称比例中项)的方法:

设 AB, BC 是两条已知线段, 它们在同一条直线上, 在 AC 上作半圆 ADC, 在点 B 处作 AC 的垂线 BD, 交半圆周于 D, 则 BD 就是所求的几何中项, 即 $AB:BD=BD:BC$.

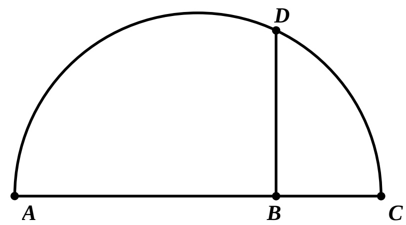


图 1

(1) 你能结合图 1 证明 BD 是 AB 和 BC 的几何中项吗?

(2) 若线段 EF 满足: $AB+BC=2EF$, 则 EF 称为 AB 和 BC 的算术中项, 在图 1 中作出 AB 和 BC 的算术中项, 然后比较代数中项和几何中项大小。

(3) 若 AB, BC 的长度分别为 a, b, 则 AB、BC 的几何中项和算术中项的长度分别为 $\sqrt{ab}$和$\frac{a+b}{2}$, 我们把 $\sqrt{ab}$和$\frac{a+b}{2}$ 分别叫做正数 a、b 的几何平均数和算术平均数, 根据问题 2 的结论, 我们能很容易地得出几何平均数和算术平均数的大小关系, 你能用代数方法证明你的结论吗?

(4) 正数 a、b 的几何平均数和算术平均数何时相等? 请结合图 1 说明之。

(5) 问题(3)的结论与不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 有何关系?

(6)(选做)如果把 $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 和 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 分别定义为正数 a、b 的调和平均数和平方平均数,

你能在图 1 中作出相应的线段表示它们, 并根据图形得出它们之间的大小关系吗? 请在

课后研究之。

作为教材的补充，**Workcard 1** 从几何的角度得出了均值不等式，延续了教材从几何图形抽象出不等式 $a^2+b^2 \ge 2ab$ 的处理方法，使学生进一步体会数形结合的思想，同时也使得学生明白很多看似抽象的代数不等式都源于几何图形，体会了从形到数的转化，更重要的是可以让学生明确了几何平均数等概念的历史渊源，对为什么叫几何平均数这一问题作了很好的回答。其中的问题(6)可以根据实际情况选用。

2 均值不等式的多种证法及最值问题的引入

通过 Workcard 1 的研究，学生已经能够从几何、代数两个角度去证明均值不等式，但是笔者以为，学生探索不等式证明的目的绝不仅仅是为了证实不等式为真，更重要地，应该是在证明均值不等式的同时，体验不同的思想方法，从而提升自己解决问题的能力。本着这个目的，笔者以沃利斯(J.Wallis,1616-1703)和阿贝尔(N.H.Abel,1812-1829)对等周问题的研究为素材，引导学生在领略数学家风采的同时，对均值不等式的证明给出不同的方法，同时，通过对沃利斯问题解决方法的回顾，体会均值不等式在解决最值问题中的应用价值。

Workcard2 等周问题的启示[6]

“在周长一定的平面图形中，谁包围的面积最大？”这就是著名的等周问题，虽然早在古希腊时期人们就猜测问题的答案应该是圆，但是如何证明这个结论呢？这一问题曾经吸引了众多数学家的目光，但是直到 1902 年才由赫尔维茨凭傅里叶级数和格林定理给出一个纯解析的严格的证明。

英国大数学家沃利斯(J.Wallis,1616-1703)在研究等周问题时证明了以下的命题：“周长为定值的长方形中以正方形的面积为最大”。沃利斯首先给出了类似于欧几里得的几何证法，将半圆直径看作是长方形的半周长，面积看成是几何中项的平方，具体过程请同学们参照学习单 1 完成。

(1)我们先给出沃利斯的代数证明：

设长方形的半周长为 p，一边长为 x，面积 $S=x(p-x)$，即有 $x^2-px+S=0$，而关于 x 的此方程有解，于是 $p^2-4S\ge 0$，亦即：$S \le \dfrac{p^2}{4}$，当 $x=\dfrac{p}{2}$ 取等号。

参考沃利斯的证明方法，你能给出均值不等式的另一证法吗？

(参考答案：$A=\dfrac{a+b}{2},G=\sqrt{ab}$，则$G^2=ab=a(2A-a)$，于是$a^2-2Aa+G^2=0$，根据关于$a$的方程有解，有$4A^2-4G^2\geq 0$，即：$A\geq G$)。

(2)挪威的天才数学家阿贝尔(N.H.Abel,1812-1829)就沃利斯的问题给出了一个非常简洁的证法：

长方形的边长总可以表示为线段x和$y(x>y)$的和、差，即$x+y$与$x-y$，于是周长恒等于$4x$，而面积S=$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，显然$y=0$时面积最大，此时长方形两边长相等。

参考阿贝尔的证法，你能给出均值不等式的又一证法吗？

(参考解答：设a,b的算术平均数为 A，则可设$a=A+x,b=A-x$，于是，$G^2=ab=A^2-x^2\leq A^2$，即$G\leq A$.当且仅当$x=0$，即$a=b$时取等号。)

(3)等周问题有一个等价的对偶命题：面积一定的平面图形中，圆的周长最小。

(i)请类比给出沃利斯命题“周长为定值的长方形中以正方形的面积为最大”的对偶命题，并类比上述证法证明之。

(ii)根据沃利斯的命题，我们很容易得到如下命题：“如果两个正数的和为定值，则当且仅当两个正数相等时，它们的积有最大值”。请给出此命题的对偶命题。

通过对沃利斯和阿贝尔的解法的研究，学生体会了函数与方程、换元等重要的数学思想和方法，而这些思想和方法对学生数学能力的提升有着重要的意义，即便是应付高考，也有着重要的实战意义，而通过问题(3)，学生明确了利用均值不等式求最值的依据。

3 利用均值不等式求最值

利用均值不等式求最值是本节课的另一个教学重点，为了落实这一教学任务，笔者选用雷吉奥蒙塔努斯的一个著名问题，选用此问题的理由一方面是利用均值不等式可以圆满解决问题，使学生在历史的脉络中学会利用均值不等式求最值的方法，更重要的是通过对该问题

注：为便于读者阅读，给出部分问题中参考解答，参考答案在学习单中不呈现，下文同。

的解的几何解释，使学生体会了从数到形的转化，同时也给出了几何中项的又一种作法。

Workcard3　Regiomontanus 的最值问题

三角学在 16 世纪之前主要是由天文学家发展出来的，例如希腊的天文学家托罗密、阿拉伯天文学家阿布·瓦法(Abü al-Wafā', 940-998)等都在三角学的发展过程中做出了杰出贡献，而在 15 世纪的欧洲，站在三角学发展最前沿的也是一位杰出的天文学家，他的名字叫雷吉奥蒙塔努斯(Regiomontanus, 1436-1476)，他的三角学巨著《论三角形》对三角学的发展产生了深远的影响.

1741 年，雷吉奥蒙塔努斯在给朋友的信中提到了如下的问题[7]：

“一根垂直悬挂的杆子，从地面上哪点看上去它最长(也就是视角最大)？”，这一问题被宣称是自古以来数学史上第一个极值问题.

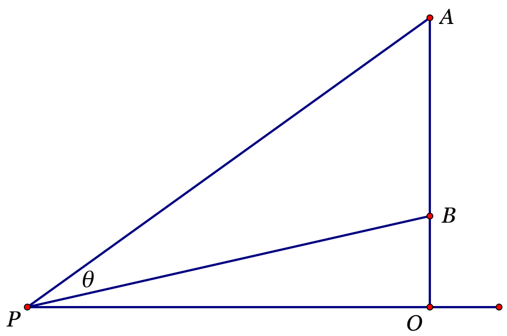


图 2

(1) 在图 2 中杆子用线段 AB 来表示，令 $OA=a$, $OB=b$, $OP=x$，其中 P 是地面上使得 $\theta=\angle APB$ 最大的点，令 $\alpha=\angle OPA, \beta=\angle OPB$.

请同学们研究 θ 与 x 的关系，并由此求出当 x 取何值时 θ 最大？

(解答与提示：$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}=\dfrac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}$，根据均值不等式，$x+\dfrac{ab}{x}\ge 2\sqrt{ab}$，当且进当 $x=\sqrt{ab}$ 时取等号，于是，当 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\tan\theta$ 取最大值，此时 θ 取最大值.)

(2) 根据问题 1 的结论，考虑到几何平均数和几何中项的定义，当 OP 为 OA 和 OB 的几

何中项时，θ最大，此时，若过 A、B、P 三点作圆 C，问：圆 C 与直线 OP 的位置关系如何？为什么？根据这一结果，你是否找到了几何平均数的又一几何表示？

(解答与提示：根据切割线定理，因为 $OP^2 = OA \cdot OB$ 所以圆 C 与直线 OP 相切于 P 点)

(3) 根据问题 2 的结果，你能否给出雷吉奥蒙塔努斯问题的几何解？

(解答与提示：过 A、B 两点作一圆与地面相切，切点 P 即为所求)

(4) 通过对雷吉奥蒙塔努斯的最值问题解答，你认为利用均值不等式求最值需要哪些条件？

今年 7 月，HPM-2012 卫星会议在韩国胜利召开，本次会议的规模给与会者留下了深刻的印象，说明 HPM 研究得到了各国教育者的普遍重视，但和国内的 HPM 研究的情况类似，来自于教学一线的切实可行的案例开发总体来说还是缺乏的，而要改变这种状况，我们中学教师责无旁贷，本文就算是一次以抛砖引玉为目的的尝试吧。

参考文献

[1] 汪晓勤, 2005. 关于均值不等式的历史注记. 中学教研, (10)：47-48

[2] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathematics in the class- room: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (eds.). *History in mathematics education: An ICMI book*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201-240

[3] 张小明, 汪晓勤, 2009.中学数学教学中融入数学史的行动研究, 数学教育学报, (4)：89-92

[4] 张小明, 2011. HPM 视角下的高中数学教学：实践与思考, 中学数学教学参考, (8)：69-72

[5] 欧几里得著, 兰纪正, 朱恩宽译, 2003. 几何原本. 西安：陕西科学技术出版社

[6] 沈康身, 2002. 历史数学命题赏析. 上海：上海教育出版社

[7] Eli Maor 著, 曹雪林, 边晓娜译, 2010. Trgonometric Delights. 北京：人民邮电出版社