【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之五）】

HPM 视角下的分式概念教学

——同课异构课例分析

林庄燕，汪晓勤
（华东师范大学 教师教育学院，上海 200062）

【摘 要】HPM 视角下的数学概念教学关注学生的认知基础和学习动机，将概念的历史序、逻辑序与学生的心理序统一起来，让学生经历概念的发生和发展过程，充分揭示知识之谐，营造探究之乐；通过人文元素的植入，彰显文化之魅，达成德育之效。文章以分式概念的教学为例，运用 HPM 课例的分析框架，比较和分析两位教师的教学内容，以期为未来的 HPM 课例研究提供参考。

【关键词】HPM；同课异构；分式概念；教育价值

一、引言

分式概念是沪教版数学七年级上册第十章“分式”第一节的内容。在学习本课之前，学生已经具备了分数、整式及其基本运算的代数基础知识。教材以生活中学生熟悉的关于分式的实例引入，通过观察代数式的表示与整式的区别，引出分式的概念。以往分式概念的教学设计往往从数学内部出发，采用类比的方式展开：一种是类比分数，抓住运算这一核心，引导学生经历从整数的除法运算到整式的除法运算的一般化过程；另一种是类比有理数系的建立，引导学生尝试建立代数式体系。

HPM 视角下的数学概念教学关注学生的认知基础和学习动机，将概念的历史序、逻辑序与学生的心理序统一起来，让学生经历概念的发生和发展过程，充分揭示知识之谐，营造探究之乐；通过人文元素的植入，彰显文化之魅，达成德育之效。在实践中，由于教师教学风格、个人倾向、在数学史教育价值认识上的差异，以及学生水平的不同，不同教师即使同样采用 HPM 视角实施教学，最终呈现的课例也往往迥然不同。

对于“分式的概念”这一课题，HPM 工作室的 A 教师和 B 教师分别从 HPM 视角进行教学。他们多次参加 HPM 工作室举行的教学设计研讨，其教学设计都经过了多次改进。那么这两位教师是如何选取和运用史料的？数学史在这两节课中都体现了哪些价值？两节课各有哪些特色？为了回答上述问题，我们运用 HPM 课例的分析框架，对这两节课做出比较和分析，以期为未来的 HPM 课例研究提供参考。

二、分式概念的历史素材

（一）分式方程

我们翻开历史的书卷可以发现，早在分式概念产生之前，人们已经会解分式方程了。很多数学家或物理学家往往在解决数学或物理问题时直接使用分式方程，这说明分式的产生源于实际问

【作者简介】林庄燕，华东师范大学教师教育学院硕士研究生，主要从事数学史与数学教育研究；汪晓勤，本文通讯作者，华东师范大学教师教育学院教授，博士生导师，主要从事数学史与数学教育研究。

题，它是构建某些实际问题的数学模型的重要工具。

9 世纪，阿拉伯数学家花拉子米（Al-Khwarizmi）在《代数学》中已经解决过有关分式方程问题，如：

将 10 分成两部分，第一部分除以第二部分，第二部分除以第一部分，它们的和是二又六分之一。相应的分式方程为$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$。

13 世纪，意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci）在《计算之书》中列举了许多用分式方程求解的问题，其中部分问题源于花拉子米。例如：

- 将 10 分成两部分，将 10 除以其中一部分，所得商乘以另一部分，得 $20\frac{1}{4}$。相应的分式方程为$\frac{10}{x}\cdot(10-x)=20\frac{1}{4}$。
- 将 10 分成两部分，10 除以每一部分，两商之和为 5 第纳尔。相应的分式方程为$\frac{10}{x}+\frac{10}{10-x}=5$。

13 世纪，中国数学家李冶在《测圆海镜》中通过建立分式方程来解决部分实际问题，如第七卷第 2 题涉及方程$-x^2+8640+\frac{652320}{x}+\frac{4665600}{x^2}=0$。

18 世纪，英国数学家桑德森（N. Saunderson）将分式方程写入《代数基础》中。在这本书中，桑德森提出分式方程的若干应用题，例如：

在酒馆中，若干人需付费 7 英镑 4 先令（1 英镑=20 先令），其中两人溜之大吉后，其余的人每人不得不多付 1 先令。问：共有多少人？(可列分式方程$\frac{144}{x-2}-\frac{144}{x}=1$求解)

（二）圆周率的分数近似值

根据《隋书·律历志》的记载，南北朝时期著名数学家祖冲之曾获得圆周率的两个分数近似值为$\frac{22}{7}$与$\frac{355}{113}$，分别称为“约率”和“密率”。前者最早由古希腊数学家阿基米德（Archimedes）求得，后者则是祖冲之首创。日本著名数学史家三上义夫（Y. Mikami）建议将其命名为“祖率”。由于祖冲之的《缀术》失传，祖冲之计算圆周率的具体方法成了千古之谜。人们对此曾做过许多猜测，调日法（夹逼法）便是其中之一。

调日法背后的数学原理是分数的如下性质：若$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$（$0<b<a$ 且 $0<d<c$），则$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。15 世纪法国数学家许凯（N. Chuquet）在其《算术三编》中最早给出该性质。该性质也适用于假分数的情形，即若$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$（$0<a<b$ 且 $0<c<d$），有$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。因此，从分数$\frac{3}{1}$和$\frac{4}{1}$出发，可以逐步得到 π 的各个分数近似值，最终得到祖率[1]。

三、两节 HPM 课的宏观比较

（一）教学目标

两位教师设定的教学目标基本相同：（1）了解学习分式的必要性，理解并掌握分式的概念；（2）会求分式有意义、无意义、分式值为零时字母的取值条件；（3）通过对相关数学史的了解，感悟数学与生活之间的密切关系，感悟数学文化之魅力。不同之处在于，A 教师着重从历史上的实际问题引入分式概念，同时通过整式与分式的比较，加深学生对分式概念的理解；B 教师则让学生经历从分数到分式的探究过程，体验分式的一般性优势，了解学习分式的必要性，了解祖率的由来，体验数学文化之魅力。

（二）教学重难点

教学重点：理解分式的概念，会求分式有意义、无意义、分式值为零时字母的取值条件。

教学难点：调日法求圆周率的分数近似值，如何用字母表示此类分数的特征。

（三）教学过程

A 教师和 B 教师的教学过程均由四个环节构成，即创设情境、概念探究、新知运用、课堂小结。具体内容见表 1。

表1 两位教师的教学环节对比

教学环节	A 教师	B 教师
创设情境	引入斐波那契的分10问题和桑德森的酒馆付账问题，引导学生得到分式与分式方程	(1) 比较$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$和$\frac{1+2}{2+3}$的大小，猜想并验证两个分数的分子和分母分别相加得到的新分数与原来两个分数的大小关系; (2) 运用调日法求出π的分数近似值——约率$\frac{22}{7}$
概念探究	通过比较整式与分式的不同，得出分式概念	用字母表示上述调日法得到的一系列数，给出分式定义
新知运用	(1) 判断哪些式子是整式，哪些式子是分式; (2) 已知字母的赋值，求分式的值; (3) 求分式有意义、无意义、分式值为零时字母的取值条件	(1) 给分式中的字母赋值，求出分式的值; (2) 探讨字母是否可以赋任意值，得出分式有意义、无意义以及分式值为零的条件; (3) 探究密率$\frac{355}{113}$的逼近过程
课堂小结	(1) 思考本节课的收获; (2) 我国古代数学家对于分式的应用; (3) 分式概念是如何提出的	(1) 分式的概念、分式的值、分式有意义的条件; (2) 方法回顾：调日法(夹逼法); (3) 历史回眸：祖冲之与π的分数近似值

从表1可以看出，A、B两位教师均从HPM视角进行教学，且在新知运用环节，都让学生探讨了分式的赋值和分式有意义、无意义以及分式值为零的条件。但是，两位教师在创设情境和概念探究两个环节的设计上却大不相同，各有千秋。A教师主要从数学史上有趣的数学问题引入，让学生通过观察表达式的特点，区别于整式，给出分式概念；B教师利用调日法让学生经历π的分数近似值的产生过程，体会分式是分数抽象化的结果。

四、两节HPM课的微观比较

我们根据HPM课例评价的四个指标——史料的适切性、融入的自然性、方法的多样性和价值的深刻性对这两节HPM课进行微观比较[2]。

(一) 史料的适切性

在HPM实践中，选择史料的原则有趣味性、科学性、有效性、可学性和人文性[3]。本文从教学的四个环节分析史料的适切性，具体分析见表2。

表2 A教师和B教师所用的史料分析

教学环节	A 教师	B 教师
创设情境与概念探究	(1) 花拉子米的分10问题; (2) 桑德森的酒馆付账问题; (3) 斐波那契、桑德森的故事	(1) 《九章算术》及其刘徽注中的圆周率近似值$\left(3, \frac{157}{50}, \frac{3927}{1250}\right)$; (2) 祖冲之的约率$\frac{22}{7}$和密率$\frac{355}{113}$; (3) 15世纪法国数学家许凯在《算术三编》中给出的关于分数的一个定理
新知运用与课堂小结	(1) 斐波那契关于分10问题的另一种设法; (2) 历史上的分式方程与分式	(1) 南北朝天文学家何承天的调日法; (2) 许凯关于分数的定理; (3) 祖冲之的密率

A教师最先提出的“分10问题”与“酒馆付账问题”分别选自花拉子米的《代数学》和桑德森的《代数基础》，根据问题写出各项式子并列出方程，符合学生的认知规律，因此具有一定的科学性和可学性。其中，数学家桑德森的“酒馆付账问题”与生活实际息息相关，能够快速吸引学生的注意力，具有一定的趣味性。此外，A教师还讲述了两位数学家的生平故事，着重介绍了数学家桑德森励志的一生，体现了数学背后的人文精神，符合人文性原则。A教师在新知运用环节引导学生思考，对于分10问题还可以设为

$5-x$和$5+x$的形式，在潜移默化中渗透“和差术”的思想，最后介绍了历史上的分式与分式方程，为后续“和差术”思想与分式方程的学习埋下了伏笔，符合有效性原则。

B教师在创设情境环节中设计学生熟悉的圆周率情境，并介绍多位古代数学家在计算圆周率时得到精度越来越高的近似值，激起了学生的学习兴趣，激发学生继续探索的动机，符合趣味性原则。此外，B教师将古人探索真理过程的艰辛和他们不断追求真理、不断钻研、永不言弃的精神传递给学生，符合人文性原则。通过简单的三个分数之间的大小比较，引出许凯在《算术三编》中给出的关于分数的定理，既扩大了学生的知识面又符合学生的认知基础，还为求圆周率的调日法提供了思路，符合可学性和有效性原则。B教师利用上述定理和调日法，经过一定的引导，使学生成功地探究出约率，有助于学生后续进一步理解分式概念，符合可学性和有效性原则。在课堂小结环节，有了前面的引导与铺垫，B教师继续让学生通过调日法进一步探究密率，体现了可学性原则。

（二）融入的自然性

数学史融入数学教学，需要同时考虑所讲授主题的逻辑序、历史序和学生的心理序，自然地将数学史融入课堂教学中。以下是A教师和B教师的教学片段。

1. A教师的教学片段

师：9世纪阿拉伯数学家花拉子米在其《代数学》中提出如下问题：将10分成两部分，第一部分除以第二部分，第二部分除以第一部分，它们的和是二又六分之一。如果我们假设第一部分是x，那第二部分是多少呢?

生：第二部分就是$10-x$。

师：那么由此得到的关于x的等式是什么呢?

生：等式是$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$。

师：很好！看来同学们对列方程解决问题掌握得很不错。我们接着看下一道题目。1739年，英国数学家桑德森在《代数基础》一书中提出过这样一个问题：在酒馆中，若干人需付费7英镑4先令（1英镑＝20先令），其中两人溜之大吉后，其余的人每人不得不多付1先令。问：共有多少人？这道题怎样求解呢?

生：和上一题一样，通过设未知数求解。

生：可以假设一共有y人，那最开始每个人付$\frac{144}{y}$先令；走了两个人后剩$y-2$人，那么每个人就要付$\frac{144}{y-2}$先令。

师：那你能由此得出关于y的等式吗?

生：等式是$\frac{144}{y-2}-\frac{144}{y}=1$。

师：很好！我们仔细观察上述得到的各式，它们与我们之前学过的整式相比有什么不同呢?

A教师由此引出分式的概念，并顺便介绍了分式方程。

【评析】A教师利用历史上的两个数学问题，先让学生分析问题并列出分式方程，为后面引出方程中的某些项是分式做好铺垫，与先有分式方程再有分式概念的历史顺序相吻合。在A教师的引导下，学生在学过的整式和整式方程的基础上得到分式并列出分式方程。虽然A教师通过分式方程的建立，让学生感受到了学习分式的必要性，但由于学生对分式方程比较陌生，因而在数学史融入的自然性方面还有待改进。

2. B教师的教学片段

B教师先让学生比较$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$和$\frac{1+2}{2+3}$的大小，接着让学生猜想并验证：把两个分数的分子和分母分别相加，所得到的新分数与原来两个分数有怎样的大小关系?

师：我国南北朝时期的天文学家何承天也发现了这个规律，并利用它来解决一些天文历法问题，因此这种方法也常常被称为“调日法”。直到15世纪，法国数学家许凯才用数学语言将这种性质表达出来，即：若$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$（$0<b<a$，$0<d<c$），则$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。许凯定理中的分数为真分数，将它

推广到假分数依然成立，也就是我们刚才探究的规律：若$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$（$0<a<b$，$0<c<d$），则有$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。

之后，B教师简要回顾了π的历史，并让学生根据调日法得到π的近似分数——约率$\frac{22}{7}$。

师：因为$\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$，根据何承天的调日法，我们应该怎么取中间这个数呢？

生：分子、分母分别相加后可以得到中间这个数是$\frac{7}{2}$。

师：$\frac{7}{2}$和π哪个数更大？

生：$\frac{7}{2}$更大。

师：也就是说$\frac{3}{1}<\pi<\frac{7}{2}$。按照这个做法，利用调日法求出约率需要几步？

生：六步。

师：为什么？

生：因为第一步分母是2，第二步分母是3，每步加1，分母是$n+1$，所以第六步分母就是$6+1=7$。

师：那你有没有验证分子？

生：因为$\frac{4}{1}\to\frac{7}{2}\to\frac{10}{3}\to\frac{13}{4}\to\frac{16}{5}\to\frac{19}{6}\to\frac{22}{7}$，所以分数每次都是分母加1，分子加3。

师：那你们会用字母来表示这一系列分数吗？

生：分母是$n+1$，分子是$3(n+1)+1=3n+4$，即$\frac{3n+4}{n+1}$。

【评析】学生很熟悉用字母来表示一类整数，如用$2n$表示偶数，$2n-1$表示奇数，那么，如何用字母来表示一类分数呢？B教师通过圆周率近似分数的探究，既揭示了分式的必要性，又让学生经历从分数到分式的抽象过程，数学史融入得十分自然。但由于探究过程有一定的难度，因此在该环节花费了较多的时间。

（三）方法的多样性

数学史融入教学有附加式、复制式、顺应式以及重构式四种方式[4]。

A教师在情境创设环节和新知运用环节，根据教学的需要和学生的认知，引入花拉子米和桑德森书中的数学问题，属于复制式。之后，简单介绍几位数学家的生平故事，属于附加式。在最后的课堂小结环节，关于分式方程与分式的历史介绍也属于附加式。

B教师在情境创设和概念探究环节介绍了我国古代数学家在圆周率计算方面所做出的贡献，属于附加式。教师介绍并推广法国数学家许凯的定理，采用定理的推论来推求圆周率的分数近似值，进而得到约率与密率，既有复制式又有顺应式。在探究过程中，教师引导学生经历了从π的一个分数近似值到一系列分数近似值，再到以同一个分式来表达π的近似值，最后产生分式概念的过程，这个过程是对分式概念发生和发展过程的重构，属于重构式。

可见，A教师主要采用附加式和复制式，而B教师运用数学史的方式更为多元。

（四）价值的深刻性

数学史融入数学教学主要有六种教育价值：知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、德育之效和文化之魅。

在创设情境环节，A教师直接给出历史上涉及分式的两个问题，让学生与已经学过的整式进行比较，从而得到分式的概念。B教师通过引导学生对圆周率分数近似值的探究，从一系列分数抽象为分式的表示，让学生经历了从分数到分式，从具体到抽象，从特殊到一般的认识过程，揭示新知识的必要性，也让知识的产生更为自然。因而，B教师的创设情境环节更好地体现了知识之谐。

A、B两位教师介绍数学家的生平及为数学贡献的事迹，不仅让学生感悟知识的源与流，体会数学文化的多元性，呈现数学史的文化之魅，而且还鼓励学生在数学学习的过程中要学习数学家们永不言弃、孜孜不倦的精神。此外，B教师在课堂上展示了我国古代数学家在圆周率计算方面

所做出的贡献，从而实施了爱国主义教育。因此，两节课都体现了数学史的德育之效和文化之魅。

A教师在新知运用环节介绍“分10问题”的另一种方法时，向学生传递“和差术”思想与方法多样性思想。B教师虽然在概念探究环节花费的时间较多，但是通过圆周率的分数近似值的探究过程，学生不仅掌握了许凯《算术三编》中利用的定理及推论，而且经历了从分数到分式的过程，进一步加深对分式与分数两者关系的理解。因此，B教师的探究设计更能体现方法之美。同时，B教师给予学生充足的探究时间，并充分搭建“脚手架”，使学生对约率和密率的探究更具有方向性和目的性，能初步达到预期的探究目的，同时也充分发展学生的运算能力、逻辑推理能力等，体现了探究之乐和能力之助的价值。

五、结语

尽管A教师和B教师都从HPM视角开展分式概念的教学，但两节课的特点迥异。A教师和B教师所选择的史料都符合趣味性、科学性、有效性、可学性和人文性原则，但A教师只采用了附加式和复制式，而B教师采用了附加式、复制式、顺应式、重构式四种方式。A教师借鉴历史，采用了从分式方程到分式的路径，虽然符合历史序，但不完全符合逻辑序和心理序，因而在融入的自然性上还有改进的空间。从数学史教育价值来看，A教师和B教师的课堂都体现了文化之魅和德育之效，但由于B教师采用了重构式，使分式概念的发生和发展过程更为自然，因而数学史帮助B教师呈现了知识之谐。A教师并未利用或借鉴历史来设计探究活动，而B教师设计了用调日法来推求约率和密率的探究活动，体现了数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养，因而营造了探究之乐，达成了能力之助。总的说来，B教师的教学更能体现HPM教学的特点。

通过对两节课的比较和分析，我们得到如下启示。

（一）注重数学史的选取与运用

数学史素材丰富多彩，但不同的选择与运用方式可能导致课堂教学效果截然不同。恰当的数学史料能够为教师设计探究活动提供参照，而且能够实现数学史价值的多元化。B教师的教学之所以取得了良好的效果，在于让学生通过π分数近似值的探究活动，经历分式概念再创造的过程。这是分式概念教学的创新之举。

（二）寻求探究与练习的平衡

数学史融入数学教学，不可能脱离数学教学的现实，HPM只不过是常态课中的一种新视角，要符合统一的教学进度，留给学生一定的巩固和练习时间。因此，在实施探究活动时，需要确保其他教学环节的完整性。B教师所设计的探究活动，其目的不是许凯定理，而是圆周率的一类分数近似值的获得和分式概念的形成。因此，无须在许凯定理本身花费太多时间。换言之，探究任务必须聚焦。

参考文献:

[1] 汪晓勤. 数学文化透视 [M]. 上海: 上海科学技术出版社，2013.

[2] 沈中宇，李霞，汪晓勤. HPM课例评价框架的建构: 以“三角形中位线定理”为例 [J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2017（1）: 35-41.

[3] 陈晏蓉，汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析 [J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2017（12）: 37-43.

[4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育 [M]. 北京: 科学出版社，2017.