

文章编号: 1000-8934(2004)06-0073-05

# 古为今用:美国学者眼中数学史的教育价值

汪晓勤<sup>1</sup> 林永伟<sup>2</sup>

(1. 华东师范大学 数学系, 上海 200062;

2. 杭州师范学院 数学系, 浙江 杭州 310012)

**摘要:** 数学史与数学教育关系(HPM)是兴起于20世纪70年代的一个数学教育研究领域。从19世纪末开始,美国数学史家和数学教育家们对数学历史的教育功能多有阐述,成为促进HPM创立并深入发展的重要推动力量。这些功能包括:激发学生的学习兴趣、改变学生的数学观、使数学人性化、让学生从原始文献汲取数学家的原始思想和社会文化信息、帮助学生更好地理解和欣赏数学、增强学生的自信心、通过历史可以了解学生学习数学的困难和认知过程、为教材编写提供借鉴等等。这些功能对于我们今天运用科学史于科学教育的实践具有一定的借鉴和指导意义,也让我们树立这样的信念:数学史并不是无用的学问。

**关键词:** 数学史; 数学教育; M. 克莱因

**中图分类号:** N4 **文献标识码:** A

19世纪以前,数学史研究的中心是法国、德国和意大利。但到了19世纪末,美国学者在该领域异军突起,可以说,他们领导着20世纪的数学史研究。除了纯粹的学术研究,他们同时也十分关注数学史在数学教育中的作用问题。为什么数学教育需要数学史?数学史到底有什么教育功能?这是从19世纪末开始美国数学史家和数学教育家们一直试图回答的问题。20世纪70年代,数学史与数学教育关系(HPM)成为西方的一个学术研究新领域,美国学者的有关研究、论述和大力提倡是该领域创立与深入发展的重要推动力量。

## 1 数学史激发学生的兴趣, 改变学生的数学观

美国学者 Bidwell 曾给传统的数学课堂打了这样的比喻:

“在课堂里,我们常常这样看待数学,好像我们是在一个孤岛上学习似的。我们每天一次去岛上学习数学,埋头钻进一个纯粹的、洁净的、逻辑上可靠的、只有清晰线条而没有肮脏角落的书房。学生们觉得数学是封闭的、呆板的、冰冷无情的、一切都已发现好了的。”<sup>[1]</sup>

的确,由于传统的数学教育只注重数学的技术,这势必导致学生错误的数学观。“数学是枯燥的”这种普

遍的刻板印象也就应运而生。1893年,美国学者 Heppel 在改进几何教学协会会议上宣读的一篇文章中,曾引用下面诙谐的诗句来说明当时学生心目中的数学课本<sup>[2]</sup>:

如果又一场洪水爆发  
请飞到这里来避一下  
即使整个世界被淹没  
这本书依然会干巴巴

Heppel 认为,要让学生不再觉得数学枯燥乏味,教师就必须告诉他:他正在学习的算术、几何、代数和三角是如何为满足人们的需求和愿望而发生进步的。同时代美国著名数学史家卡约黎(F. Cajori, 1859-1930)也强调数学史在激发学生学习兴趣方面的有效性,认为教师通过数学史的解说,可以让学生明白数学并不是一门枯燥呆板的学科,而是一门不断进步的生动有趣的学科。

改变学生错误的数学观,激发他们的学习兴趣,这是一代代美国数学教育工作者们所追求的目标之一。著名数学史家 M. 克莱因(M. Kline, 1908-1992)甚至主张,为了达到这一目标,每一个教师都应该成为一名演员:“他必须用在剧院中使用的每一种技巧来活跃他的课堂。在适当的时候他应该是富于戏剧性的。他不但应该有学识,而且应该有激情。为了激发人的兴趣,他甚至可以行为古怪一点。他

收稿日期: 2003-10

基金项目: 本文得到上海市重点学科建设项目基金、数学天元青年基金(10226008)资助。

作者简介: 汪晓勤(1966-), 浙江开化人, 副教授, 博士, 主要从事数学史研究; 林永伟(1964-), 浙江温州人, 讲师, 主要从事数学史的研究。

不应害怕幽默,而应随意使用它。即使是一个无关的玩笑或故事也能大大地活跃课堂。”<sup>[3]</sup>事实上,克莱因将激发学习兴趣作为数学教学的四个原理之一<sup>[4]</sup>。他认为,教师应该介绍历史背景,如果它是有趣的和有启发意义的。

数学史家琼斯(P. S. Jones)则指出:希腊著名几何难题、阿基米德、卡丹、伽罗瓦、高斯等人的故事、费马最后定理等等都是可用于课堂的精彩有趣的历史话题。即使简略提及一个问题的研究者,研究的原因,最早的解法是什么,最后的解法是什么,最重要的或最好的解法又如何等等,都能激发学生的兴趣,因为学生对于人物、原因和最佳结果等有着天生的好奇心<sup>[5]</sup>。研究数学文化史的数学家魏尔德(R. L. Wilder)更是强调数学史对于吸引学生学习数学的重要性。他于1972年8月24日在全美数学教师协会(NCTM)大会演讲中称:“众所周知,一个最困难的问题是学生自以为对数学没有任何需要,愤恨被迫学习数学。假如他能够精神自主的话就不要学数学。要解决这类问题,只强调数学的技术是不够的,一定要用到别的一些方法。对有能力欣赏数学在历史上所扮演的角色的学生,如一位教师还不能使学生们被数学所吸引,这位教师就不应再任教了。”在魏尔德看来,数学史素养对于一个合格的数学教师而言是不可或缺的,因此他提倡在大学开设数学史课程。

Bidwell则指出:在教学中融入数学史,可以将学生从数学的孤岛上挽救出来,并将他们安置于一个生机勃勃的新大陆上,这个新大陆包含了开放的、生动活泼的、充满人情味的并且总是饶有趣味的数学。Bidwell提出运用数学史的三种方式:一是在课堂上展示趣闻轶事,使用数学家的图片、写有出生日期的日历以及数学或数学家的邮票等,可以抓住学生的注意力,激发他们的兴趣;二是在讲课过程中注入历史材料,给课堂讨论增添了趣味,将数学与人联系起来;第三种方式是将历史发展过程作为课程本身的一部分。

美国学者McBride和Rollins于1977年进行了一项为期12周的实验研究。实验对象是67名大学生。在一半学生组成的实验组的每次代数课上,教师用5分钟时间对数学史进行简介。通过数学态度修正等级(RMAS)的前测和后测,发现使用数学史知识的课程对提高学生学习的积极性是十分有效的。

## 2 数学原始文献的价值

英国著名物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell,

1831—1879)认为:“对于学习任何一门学科的学生而言,阅读该学科的原始论文是十分有用的,因为科学在最初状态下总是最容易被完全吸收的。”而德国著名物理学家马赫(E. Mach, 1838—1916)在解释一种思想时,总会参考原始文献,追溯该思想的历史。美国数学家米勒(G. A. Miller, 1863—1951)认为,对于那些“只寻求完全掌握数学本身的人”来说,数学史的作用正在于原始文献。他引用美国数学家洛维特(E. O. Lovett, 1871—1957)的话说:“数学的学习者不应相信中间人的话,而应自己去寻找原始文献,寻找大师们自己的东西。二手的思想就像二手的书本和二手的衣服一样充满细菌。”<sup>[6]</sup>米勒指出,最早发展一门学科的大师往往留下比他们的解释者所传递的更为深刻的思想,而为了查阅原始文献,学习者常常需要了解他所学习的这门学科发展史上的重要步骤。

## 3 数学史使数学人性化

曾任国际数学教育委员会第二任主席的史密斯(D. E. Smith, 1860—1944)一直关注数学史的教育价值,他和卡约黎一样,是HPM的先驱者。史密斯告诉我们,“数学史已被公认为师范教育及大中学校学生自由教育中的重要学科”,长期在大学教数学的经历使他深信:“为了将数学发展与人类发展联系起来,为了揭示数学是一条大河而不是一潭死水,为了强调数学的人文因素,一般的历史介绍是十分必要的”<sup>[7]</sup>。

米勒则指出,数学史对数学教育的最大作用乃是它在该学科的学习中注入更多的活力,它把数学概念从静态转向动态;通过记录数学家们在形成数学思想过程中所产生的影响,数学史使得数学人性化了。

把科学人性化,这也正是著名科学史家萨顿(G. Sarton, 1884—1956)所追求的理想。在1953年的一次演讲中,萨顿这样说:“我说如果你不热爱和了解科学,人们就不会期望你对它的历史感兴趣;另一方面,把科学教得人性化能够使人热爱科学,并且更深刻地理解它。我们有太多的科学家(甚至是最著名的科学家)不过是技术员而已。我们的目标是将科学人性化,而这样做的最佳方法是讲述和讨论科学的历史。如果我们成功了,科学工作者将不再只是技术员,而将变成文化人。”<sup>[8]</sup>显然,按照萨顿的上述观点,如果要使数学人性化,最佳方法是讲授科学的历史。

M. 克莱因则主张:数学教材的编写者应该读

一读历史上诸如帕斯卡、开普勒、伽利略、牛顿这样的大科学家的有关著作, 将教材写得更人性化一些。他举了一个例子, 说明科学著作中人性化的风格。1606年, 德国数学家和天文学家开普勒(J. Kepler, 1571—1630)著《关于巨蛇座的新星》, 解释和讨论了一颗新星的出现和消失。在其中一段, 他说原子的力量与星的出没毫无关系, 他妻子芭芭拉·米勒(Barbara Müller)(并非科学家)与他所见略同: 一天, 他坐下来吃妻子做的色拉, 问妻子道:“如果从上帝创造世界以来, 铁皮、莴苣叶、几粒盐、几滴油和醋、以及煮老了的鸡蛋碎块漂浮在空间里, 每个方向都有, 杂乱无章, 今天它们会有可能聚合在一起形成色拉吗?”“我肯定, 我妻子一定这样回答: 没这么巧, 也没这么好。”<sup>[3]</sup>

#### 4 数学家遇到的困难或挫折 同样也会为课堂上的学生所经历

米勒认为, 许多重要的数学概念如此缓慢地进入人类的智力生活, 并遭遇重重阻挠, 这对于那些初次遇到这些概念的人, 或试图把它们教给他人的人来说是极有意义的。意义何在? 琼斯举例说: 当学生了解到负数概念发展并被人们接受、使用和理解经过了漫长岁月时, 他就不会因自己不理解这个概念而感到特别担心。

M. 克莱因则坚信, 历史上大数学家所遇到的困难, 正是学生也会遇到的学习障碍, 因而历史是教学的指南: 从一流数学诞生开始, 数学家花了1000年才得到负数概念, 又花了1000年才接受负数概念, 因此我们可以肯定, 学生学习负数时必定会遇到困难, 而且他们克服这些困难的方式与数学家大致也是相同的<sup>[9][10]</sup>。另一方面, 他认为讲述数学家遭遇困难、挫折、失败的经历对学生有着很好的教育意义: “课本中的字斟句酌的叙述, 未能表现出创造过程中的斗争、挫折, 以及在建立一个可观的结构之前, 数学家所经历的艰苦漫长的道路。而学生一旦认识到这些, 他将不仅获得真知灼见, 还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气, 并且不会因为自己的工作并非完美无缺而感到颓丧。”<sup>[11]</sup>

事实上, 数学史告诉我们: 数学不过是人类的一种文化活动, 人人可学, 人人可做, 尽管并非人人都有数学家的才能; 而从事这种文化活动的数学家也是平凡的人, 同样会遇到困难、挫折、失败。了解这一点, 那么学生就不会为自己在学习过程中所遇困难、挫折和失败而灰心丧气, 甚至错误地认为自己没有数学头脑了。

#### 5 学生学习数学的认知过程与 数学史的发展过程相似

早在18世纪, 法国实证主义哲学家、社会学创始人孔德(A. Comte, 1798—1857)提出, 个体知识的发生与历史上人类知识的发生必然是一致的。卡约黎认为, 如果孔德的理论正确的话, 那么数学史对于数学教学来说就是一种十分有效、不可或缺的工具<sup>[12]</sup>。19世纪, 德国生物学家海克尔(E. Haeckel, 1843—1919)提出一个生物发生学定律: “个体发育史重蹈种族发展史”。德国著名数学家F. 克莱因(F. Klein, 1849—1925)认为, 数学教学至少在原则上要遵循这项定律, 因为科学的教学方法只是诱导人去作科学的思考, 而不是一开头就教人去碰冷漠的、经过科学洗练的系统。按照历史顺序教授数学, 能使“看清一切数学观念的产生是如何迟缓; 所有观念最初出现时, 几乎常是草创的形式, 只是经过长期改进, 才结晶为确定方法, 成为大家熟悉的有系统的形式”。法国著名数学家庞加莱(H. Poincaré, 1854—1912)主张数学课程的内容应完全按照历史发展顺序展现给读者, 他说: “动物学家坚持认为, 在一个短时期内, 动物胚胎的发育重蹈所有地质年代其祖先们的发展历史。人的思维发展似乎也是如此。教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历, 迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段。鉴于此, 科学史应该是我们的指南。”<sup>[9]</sup>匈牙利著名数学家和数学教育家波利亚(G. Pólya, 1887—1985)则指出: “只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识, 我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断。”荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905—1990)亦持有类似观点, 称“年轻的学习者重蹈人类的学习过程, 尽管方式改变了”<sup>[13]</sup>。

M. 克莱因完全赞同上述各家观点, 坚信历史顺序是教学的指南, 并以此为依据, 对美国当时的新数运动进行了尖锐的批判: “数学家花了几千年时间才理解无理数, 而我们竟贸然给中学生讲戴德金分割。数学家花了三百年才理解复数, 而我们竟马上就教给学生复数是一个有序实数对。数学家花了约一千年才理解负数, 但现在我们却只能说负数是一个有序自然数对。从伽利略到狄利克雷, 数学家一直绞尽脑汁去理解函数的概念, 但现在却由定义域、值域和有序对(第一个数相同时第二个数也必须相同)来玩弄把戏。从古代埃及人和巴比伦人开始直

到韦达和笛卡儿,没有一个数学家能意识到字母可用代表一类数,但现在却通过简单的集合思想马上产生了集合这个概念。”<sup>[4]</sup>

M. 克莱因指出:“数学绝对不是课程中或教科书里所指的那种肤浅观察和寻常诠释。换句话说,它并不是从显明叙述的公理推演出不可怀疑的结论来。”<sup>[14]</sup>算术、代数、几何、三角和微积分都不是通过操作无意义的符号或按规则玩弄游戏而产生的。从历史上看,在曾经鼎盛过的数以百计的文明中,只有一个希腊文明发展起我们今天所崇尚的演绎数学,这就充分说明:抽象的、演绎的数学并不是自然的,它远离一般人的思想、兴趣和行为,是一门高度复杂、深奥难懂的学科。历史是一面镜子。无理数、负数和复数概念以及微积分等学科的历史都说明:数学家更多地往往是以直观的方法进行思考,因而在数学教学中,直观方法是主要的,而演绎方法则是一个辅助性的工具。“新数”教材把数学当作一系列严密的演绎结构,无疑是本末倒置的。

一些美国学者坚信,指导个体认知发展的最佳方法是让他回溯人类的认知发展<sup>[15]</sup>。即使知识点A在逻辑上先于知识点B,但如果B在历史上先于A出现,那么我们仍应先教B。

## 6 数学史帮助学生理解和欣赏数学

琼斯认为,历史可以帮助学生理解许多数学术语,如正弦、零、根、根号等词的历史将帮助学生理解和记忆。非欧几何的发展史使学生理解现代数学中公理的性质和作用,同时告诉他们:数学发展的连续性常常导致同时期不同数学家的发现(高斯、罗巴契夫斯基和波尔约);数学成果具有国际性;好奇心和美感促进了数学理论的发展(对欧几里得第五公设的不满意最初乃是出于美学上的考虑);一些意想不到的应用常常发生在数学理论发展之后(非欧几何后来在相对论中起着重要作用)。另一方面,数学史可以帮助学生欣赏数学的抽象性和逻辑性、数学与物理的关联、数学内部诸分支之间的相互关系、数学与其他抽象思维领域如哲学、逻辑学、宗教的关系以及数学与文化的关系、数学家研究数学的动机、数学发展到今天的连续性和生命力、数学的价值以及数学成果的国际性。此外,琼斯还认为,数学史能为数学教师提供新课引入的话题以及帮助学生“发现”新概念的方法;历史材料也是教师改进教学的工具。

Bidwell指出,数学史能解释数学中的许许多多“为什么”:为什么要用“分子”、“平均”、“半径”、“斜

边”这样的术语?为什么一小时包含60分钟或一星期包含7天?为什么在数学上要使用符号?等等。

## 7 历史上的数学问题提供了丰富的社会文化信息

美国学者史韦兹(F. J. Swetz)认为,用历史来丰富数学教学和数学学习,一个直接的方法是让学生去解一些早期数学家感兴趣的问题<sup>[16]</sup>。这些问题让学生回到问题提出的时代,反映当时人们所关心的数学主题。学生在解决数世纪以前的数学问题时,会经历某种激动和满足。他主张,教师可以搜集历史上不同时期和不同文化的数学问题,并布置给学生去解决、比较,如不同文化背景(如巴比伦、中国、意大利)下的勾股定理应用问题。史氏认为,从历史上的数学问题中,学生还可以获得一些文化的和社会的信息。如“给船制作帆布,每块帆布1000平方腕尺,帆高与宽之比为1比 $1\frac{1}{2}$ 。问帆高为多少?从中可以了解到公元前250年一艘埃及船只桅杆的高度;“当1蒲式耳小麦值8里拉时,面包师傅可制作一块重6盎司的面包;问:当1蒲式耳值5里拉时,一块面包重几盎司?”从中可以推出15世纪威尼斯一块面包的大小;“一位先生劳动一天,得工钱4元,每周付伙食费8元;10周后他挣得144元;问他空闲的天数和劳动的天数?从中可以确定内战后美国人12小时工作日每小时的薪水,等等。

## 8 余论

1995年,美国数学协会在国家科学基金资助下成立了数学史及其在教学中的应用研究所,专门致力于研究如何将数学的历史运用于课堂教学。由此可知,美国人近年来不仅仅从理论上论证数学史的教育价值,而且已经开始寻找运用数学史于数学教育的具体方法了。在我国,老一辈数学家余介石等人曾受F. 克莱因的深刻影响,主张:“历史之于教学,不仅在名师大家之遗言轶事,足生后学高山仰止之思,收闻风兴起之效。更可指示基本概念之有机发展情形,与夫心理及逻辑程序,如何得以融和调剂,不至相背,反可相成,诚为教师最宜留意体会之一事也。”显然,这样的主张早已被人遗忘。尽管近10年来也有一些学者对数学史的作用加以论述,但收效甚微。一个普遍的看法是:数学史是没有用的学问,是数学做不下去的人不得已的选择。另一方面,尽管数学史专业研究队伍不断扩大,却很少有人

对数学史与数学教育的关系进行理论和实证研究。诚然, 我们做一门学问, 无需“老王卖瓜, 自卖自夸”, 但数学史的价值不是靠“夸”出来的。美国学者所论数学史对于数学教育的作用, 其中一些是经过长期的、不同文化背景下的数学教学实践或实验总结出来的, 必将成为人们的共识; 也有一些需要我们通过数学教育实践或实验来进一步检验, 当然, 也未必适合于我国的教学实际。但无论如何, 我们没有理由漠视数学史的这些教育价值而心安理得地做着所谓无用的学问。

让更多的数学史家关注数学史和数学教育的关系, 让数学史不再成为无用的学问。

### 参考文献

- [1] Bidwell J K. Humanize Your Classroom with the History of Mathematics [J]. *Mathematics Teacher*. 1993, 86 (6): 461—464.
- [2] Furinghetti F, Somaglia A. History of Mathematics in School Across Disciplines [J]. *Mathematics in School*. 1998, 27 (4): 48.
- [3] Kline M. Mathematics Texts and Teachers: a Tirade [J]. *Mathematics Teacher*. 1956, 49 (3): 162—172.
- [4] Kline M. The Ancients Versus the Moderns: A New Battle of the Books [J]. *Mathematics Teacher*. 1958, 51 (6): 418—

- 427.
- [5] Jones P S. The History of Mathematics as A Teaching tool [J]. *Mathematics Teacher*. 1957, 50(1): 59—64.
- [6] Miller G A. *Historical Introduction to Mathematical Literature* [M]. New York: The Macmillan Company, 1927. 38—39.
- [7] Smith D E. *History of Mathematics* (Vol I) [M]. Boston: Ginn & Company, 1923. iii.
- [8] Swetz F. Seeking Relevance? Tiy the History of Mathematics [J]. *Mathematics Teacher*. 1984, 77 (1): 54—62.
- [9] Kline M. Logic Versus Pedagogy [J]. *American Mathematical Monthly*. 1970, 77(3): 264—282.
- [10] Kline M. A Proposal for the High School Mathematics Curriculum [J]. *Mathematics Teacher*. 1966, 59 (4): 322—330.
- [11] Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [M]. New York: Oxford University, 1972. iii.
- [12] Cajori F. *A History of Elementary Mathematics* [M]. New York: Macmillan, 1917. v.
- [13] Ernest P. The History of Mathematics in the Classroom [J]. *Mathematics in School*. 1998, 27(4): 25.
- [14] Kline M. Carl B. Boyer — in Memoriam [J]. *Historia Mathematica*. 1976(3): 387—394.
- [15] Jones P S. The History of Mathematics as a Teaching Tool In: NCTM. *Historical Topics for the Mathematics Classroom* [M]. 1969. 1—17.
- [16] Swetz F J. Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction [J]. *Mathematics Teacher*. 1989, 82 (5): 370—377.

## The Educational Value of the History of Mathematics Viewed by American Scholars

WANG Xiao-qin, LIN Yong-wei

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

**Abstract:** The 1970s saw the establishment of a new research field in mathematics education focusing on the relationship between the history and pedagogy of mathematics. From the end of the 19<sup>th</sup> century on, many of the American historians and educators of mathematics have dealt with the educational functions of the history of mathematics, greatly promoting the foundation and development of HPM. The history of mathematics can arouse the students' interest, make them draw mathematical thoughts from the original works, humanize the mathematics, enforce the students' confidence when they encounter the difficulties or frustrations, enable the teachers to perceive the students' cognitive processes, help the students understand and appreciate mathematics. These functions can be used for reference in our practice of using history in the science education.

**Key words:** history of mathematics; pedagogy of mathematics; Morris Kline

(本文责任编辑 刘孝廷)

(上接第 72 页)

## Distinguishing the Concepts Alike in the Theory of Popularization of Science

YIN Zhao-peng

(The Research Center of Science, Technology and Society, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** More and more attention is paid to the theory of PS (popularization of science), but some concepts alike, such as SC (science communication), technology communication and science and technology communication, etc. are not distinguished clearly. Why be so and how to understand it? The author argues that science and technology should be distinguished. By the history of the relation of science and technology, we can explain it reasonably and find more.

**Key words:** science; technology; communication

(本文责任编辑 马惠娣)