第 14 卷第 3 期
2005 年 8 月
数 学 教 育 学 报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION
Vol.14, No.3
Aug., 2005

# 从一次测试看关于学生认知的历史发生原理

汪晓勤[1]，方匡雕[2]，王朝和[3]

（1．华东师范大学 数学系，上海 200062；2．浙江临海杜桥中学，浙江 临海 317000；3．江苏宝应中学，江苏 扬州 225800）

摘要：历史发生原理是运用数学史于数学教育的重要理论基础之一．就数学教育而言，个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展顺序．研究表明：高中一年级学生对虚数相乘问题和无穷级数求和问题的认知过程在很大程度上重蹈了历史发展过程，这验证了学生认知的历史发生原理的有效性．

关键词：历史发生原理；虚数；无穷级数
中图分类号：G442 文献标识码：A 文章编号：1004–9894（2005）03–0030–04

## 1 问题的提出

数学教师在教学中为什么需要运用数学史？继泰尔凯（O. Terquem, 1782—1862）、卡约黎（F. Cajori, 1859—1930）、史密斯（D. E. Smith, 1860—1944）、M. 克莱因（M. Kline, 1908—1992）等HPM先驱之后，20 世纪 70 年代以来，西方学者又提出了各种论据．据英国数学史家J. Fauvel的统计，总共不下二十余种．其中最重要的论据之一是所谓的“历史发生原理”(Historical-genetic-principle)．该原理可以上溯到 18 世纪孔德（A. Comte, 1798—1857）时代[1]，19 世纪，人们将德国生物学家海克尔（E. Haeckel, 1843—1919）所提出的生物发生学定律——“个体发育史重蹈种族发展史”运用于教育中，重新得出“个体知识的发生遵循人类知识发生的过程”，历史发生原理因此而形成．就数学教育而言，个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展顺序．教育家们相信，有效的学习要求每个学习者回溯所学学科历史演进的主要步骤．F. 克莱因(F. Klein, 1849—1925)、庞加莱(Poincare, 1854—1912)、波利亚（G. Polya, 1887—1985)、弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905—1990）等都是历史发生原理的支持者．

20 世纪 80 和 90 年代，西方学者对历史发生原理进行了广泛的讨论，一些学者提出质疑，另一些学者则给予支持，还有为数不多的学者就某个主题进行了实证研究[2]．Harper 对英国两所文法学校的 1~6 年级各 12 名学生（共 144 人）进行测试，测试内容为古希腊数学家丢番图（Diophantus）《算术》中的一个问题：“已知两数的和与差，证明这两数总能求出．”结果表明，学生对符号代数的认知发展过程与符号代数的历史发展过程（修辞代数—半符号代数—符号代数）具有相似性[3]．G. T. Bagni在意大利一所理工科中学对 88 名 16~18 岁、尚未学过无穷级数概念（但已学过无穷集合概念）的高中生进行测试和访谈，测试的问题是：“1703 年，数学家格兰第研究了 1–1+1–1+1–1+⋯的和（有无穷多个加数，1 和–1 交替出现）．你对此有何看法？”结果发现：就无穷级数而言，历史发展与个体认知发展是相似的[4]．

鉴于国内相关研究的缺乏，本文借鉴西方学者的研究方法，对我国中学生进行类似的测试，旨在考察我国的中学生在解决某些数学问题时是否也会重蹈历史，历史发生原理在他们身上究竟是否成立．

## 2 研究方法

被试为江苏扬州某中学高一 3 个班级共 155 名学生，他们在学校里都没有学过复数和无穷级数概念．试题如下：

（1）瑞士大数学家欧拉（L. Euler, 1707—1783）曾经遇到这样的题目：求 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}$．欧拉的结果是：$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$．丹麦著名数学家邹腾（H. G. Zeuthen, 1839—1920）在大学考试中也碰到类似的题目：求 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$．邹腾的答案是 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$．你认为欧拉和邹腾的答案对吗？请发表任何评论．

（2）1703 年，意大利数学家格兰第（G. Grandi, 1671—1742）研究了 1–1+1–1+1–1+⋯的和（有无穷多个加数，1 和–1 交替出现）．你能求出这个和吗?

其中第 2 题即为 Bagni 的测试题．测试在数学课内进行，时间 15 分钟．收回有效卷 155 份．

## 3 测试结果

第 1 题测试结果如表 1：

表 1 第 1 题测试结果

| 答案 | 欧拉和邹腾都不对 | 欧拉和邹腾都对 | 欧拉错，邹腾对 | 欧拉对，邹腾错 | 对错不明确 |
|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 74 | 61 | 9 | 5 | 6 |
| 百分比 | 47.7 | 39.4 | 5.8 | 3.2 | 3.9 |

不赞同欧拉和邹腾答案的被试给出了各种各样的理由．少数学生对虚数概念已经有所了解，他们给出了正确的运算或解释，如：由 $i^2=-1$ 可得 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=2i^2=-2$；或 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 是在 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 的前提下才成立的．一位同学还正确地做了分类讨论：当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$；当 $ab\leqslant 0$ 时，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{|ab|}\,i$；当 $a<0$，$b<0$ 时，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$．

但不少学生（约占全体被试的 35.5%）只局限于现有的知识，认为当 $a<0$ 和 $b<0$ 时，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 没有意义．如“首先要保证 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 有意义，即 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$”，或“依我目

收稿日期：2005–02–04
作者简介：汪晓勤（1966—），男，浙江开化人，副教授，博士，主要从事数学史与数学教育研究．

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

前的学习水平来讲是不成立的”．一个学生写道：“欧拉、邹腾（的大脑）比我们的大脑还简单，竟不知道根号下不能用负数．”另一学生反问道：“因为 $\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{-4}$ 都无意义，乘起来怎有意义？如果成立的话，那么以后在任何情况下 $\frac{a}{0}$ 都会有意义了，可能吗？”还有一个学生说：“我认为欧拉的答案不对，因为 $\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{-4}$ 无意义，这条（道）题目本身就不对．邹腾的答案只有 $a$ 和 $b$ 均大于或等于零时才正确，否则题目不对．”

另有少数学生做了错误的解释．一个学生这样写道：“他们是古人，没有现代人聪明．”另一个学生回答说：“我认为答案为 0、$\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{-4}$ 是不存在的数，但又要它们存在，就需要一个极限值，而这个极限值为 0、$+\infty$ 或 $-\infty$，它们再乘一下的极限值就是 0，这跟宇宙差不多，无中生有就是 0．”

赞同欧拉和邹腾的答案的学生也给出了各种各样的理由，主要有如下几类：

一是认为数学概念是人创造出来的，或数学运算法则是人为规定的，所以人可以对其做出新的规定．持这类看法的学生这样解释：“因为数学是人发明的，人有权对它做（作）出新的定义．”“我们用的理论就是他们发明、规定的，即使他们不对，也可以这样规定下来进行运算．”“因为我们平时认为 $\sqrt{a}$ 中的 $a$ 必须大于或等于 0，这是因为有前人规定，但是他们不一定对，$a$ 也可能为负数，这正如爱因斯坦推翻亚里士多德的谬论．”“如果规定 $\sqrt{a}=\sqrt{|a|}$，则 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 就正确了．”“这是一种数学运算，我们可以规定 $a,b$ 取遍一切实数，从而使运算有意义．”“因为 $\sqrt{a}$ 的定义域是人们为了研究方便而自行规定的，我们可以规定 $a$ 为负时 $\sqrt{a}$ 有意义，那么欧拉和邹腾的答案则是对的．”一个学生认为可以规定 $\sqrt{-a}=-\sqrt{a}\quad(a\geqslant 0)$．

二是类比或推广的思想．学生的回答是：“$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}$ 在目前学习中无意义，但经推广后（类似地，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$）就可运算．”“无论 $a$，$b$ 为何数，都有 $a\cdot b=ab$，同理，有 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$．”“因 $\sqrt{4}=\sqrt{(-1)\times(-4)}=\sqrt{1\times 4}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}$，所以我认为 $\sqrt{(-1)\times(-4)}$ 也可以写成 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}$．”一个学生相信，虚数运算与实数运算是一样的．另一个学生写道：“一个数开平方为非负数，非负数乘非负数为非负数，被开方的数不论正负，只须相乘．”

三是认为两个无意义的数相乘，结果不一定无意义．持这类看法的学生解释说：“虚数×虚数=实数，类似于无理数×无理数有可能为有理数，如 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$．”“$\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{-4}$ 均为虚数，两个虚数之积有可能为实数，正如两个无理数之积有可能为有理数（一样）．”“虽然 $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-4}$，这两个‘数’根本没有意义，也根本不存在，但是 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$ 却是符合数学公理的，正如生活中原本不可能发生的两件事情，却可以促成一件或多件可能发生的事情．也就是说世界上没有绝对的真理，也没有绝对的虚伪（谬误）．我相信，这句话放在现行的数学世界中也是可以并应该成立的！”

四是萌芽状态的图形表示．一个学生的回答是：“$\sqrt{1}$，$\sqrt{4}$ 可看成平面数轴上的数，若把这个数轴扩展成空间上的数轴，$x$ 轴为左右方向，$y$ 轴为上下方向，$z$ 轴为里外方向，$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-4}$ 就为对应 $z$ 轴上的数值．”一个学生试图用面积来解释，但无法正确给出 $\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{-4}$ 的几何意义：“比如两条有向线段，其方向与所取正方向相反：$\sqrt{-1}$、$\sqrt{-4}$，但其面积仍为 2．同样也可得到 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$．”

五是认为现在不可能的事将来会成为可能．一个学生写道：“大千世界无奇不有，有些事物单独来想可能不正确，但结合到一起就可能引起像‘负负得正’一样的结果，随着科学的发展，以前认为是不可能的事，都将成为可能．”另一个学生写道：“数学不是停步不前的，有了有理数，就发现了无理数；有了实数，也就会有虚数．虽然虚数不存在，但仍有研究价值．”

六是认为物质世界不存在的事物，在非物质世界却是存在的．一个学生回答：“在物质世界与非物质世界中必然引出正负、现实与虚幻方面的认识．我们生存在物质的世界，物质指引我们认识到 $\sqrt{-1}$ 与 $\sqrt{-4}$ 在物质世界不存在，但非物质世界，它必然存在，我们无法否认．所以答案是对的．”

回答“对错不确定”学生给出的理由是：欧拉的答案在物理学上是成立的，但 $\sqrt{-1}$ 在数学上是没有意义的；在目前是无意义的，到将来可能有意义；用现在的观点看，他们的答案不对，但数学是不断进步的，一些定理也会随之改变．

第 2 题测试结果如表 2：

表 2　第 2 题测试结果

| 答案 | 0 或 1 | 0 | 1/2 | −1 或 0 | $\infty$ 或 $-\infty$ | $n, n-1, 2n$ | 不能求解 | 未给答案 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 90 | 15 | 10 | 7 | 6 | 3 | 19 | 5 |
| 百分比 | 58.1 | 9.7 | 6.5 | 4.5 | 3.8 | 1.9 | 12.3 | 3.2 |

答案为 0 或 1 的学生给出的理由是：加数为奇数个时和为 1，加数为偶数个时和为 0，或给出部分和公式

$$S_n=\frac{1-(-1)^n}{2}.$$

一个学生的做法是：

$$1+(-1+1-1+1-1+1-1+\Lambda)=1,$$
$$1-1+1-1+1-1+1-1+\Lambda=0+0+0+\Lambda=0.$$

答案为 0 的学生给出的理由是：“对于无穷数列，对于每一个 1 后面，又有一个 $-1$，所以和为 0．”“若将人降生记作 1，死亡记作 $-1$，则人在他降生时就注定了他终将死亡，则和为 0．”“一个人想走两条路中的一条，结果他犹豫不决，一会调头朝第一条路，记作 $+1$，一会调头朝另一条路，记作 $-1$，结果站在原地不动．和为 0．”“因为它们交替，由能量守恒观得和为 0．”

答案为 1/2 的学生给出的理由是：“如果把‘有’记作 1，‘没有’记作 $-1$，而有和没有的可能性各为 1/2．”“若存在为 1，不存在为 $-1$，则存在与不存在的机率均为 1/2．”“1 代表事情发生，$-1$ 代表事情不发生，事情发生与否的概率为 1/2．”“就概率来说，1 和 $-1$ 出现的概率各为 1/2，所以结果为 1/2．”只有一个学生利用有穷数列求和的方法来解：“设 $s=1-1+1-1+1-1+\Lambda$，则 $s-1=-1+1-1+1-1+1-\Lambda$，

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

于是 $2s-1=0$，故得 $s=1/2$."

答案为−1 或 0 的学生给出的理由是：当最后一个为第奇位数时和为−1，当最后一个为第偶数位时和为 0.

答案为 $\infty$ 或或 $-\infty$ 的学生给出的理由是：(1) 若有偶数项则和为 0；奇数项和为 1；无穷个数相加结果为 $\infty$.(2) 设 $A$、$B$ 两地的距离为 1，规定从 $B$ 走到 $A$ 为+1，则 1−1+1−1+…可看作质点在 $A$、$B$ 间的往返运动，则所走的路程为 $\infty$.(3) 因为 1 出现的次数无穷大，−1 出现的次数无穷大，所以 1 和−1 出现次数的和为无穷大.

认为不能求解的学生给出的理由是：无穷多个数不能相加.

## 4 讨 论

### 4.1 虚数及其乘积

我们知道，虚数概念的历史可上溯到 16 世纪[5]．尽管意大利数学家卡丹（G. Cardan, 1501—1576）在其名著《大术》中使用过两数 $5\pm\sqrt{-15}$，但他认为这种数“奥妙且无用”，实际上并没有理解和接受它们．同时期意大利数学家是邦贝利（R. Bombelli, 1526—1572）在运用卡丹在《大术》中所给出的三次方程 $x^3+px=q$ 的求根公式

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (1)$$

时发现：当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 时会出现负数开方问题，而三次方程却至少有一个实根，这就出现了实数和虚数之间的“矛盾”．就方程 $x^3=15x+4$ 而言，邦贝利解决了这个“矛盾”，得到 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$．他说：“这在许多人看来是一个野蛮的思想；我自己很长时间以来也持同样的看法．整件事似乎依靠的是诡辩，而不是事实．但我通过长期思索，终于证明这是个事实．”[6]尽管如此，人们却并没有因此理解虚数．16 世纪比利时最有影响的数学家斯蒂文（S. Stevin, 1548？—1620？）对此评论说：“有足够多的，甚至是无限多的合情合理的事可训练你自己，用不着把时间和精力浪费在（负数开平方这个）不确定的事情上．”[6]

莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646—1716）面对公式（1）在 $\Delta<0$ 的情形，也经历了长时间的困惑，他说这个问题“难倒了直到今天的所有的代数学家”[6]．当莱布尼兹在给荷兰数学家惠更斯（C. Huygens, 1629—1695）的信中给出等式 $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ 后，惠更斯的反应是：“人们决不相信 $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ 会等于 $\sqrt{6}$，个中所隐藏的某种东西是我们无法理解的．”[7]

即使到了 19 世纪，魏塞尔（C. Wessel, 1745—1818）、阿甘德（J. R. Argand, 1768—1822）和高斯（C. F. Gauss, 1777—1855）为虚数奠定了直观基础，但虚数仍未为人们所普遍理解和接受．英国著名数学家德摩根（A. De Morgan, 1806—1871）在其《数学学习与困难》中这样写道：“虚数 $\sqrt{-a}$ 与负数 $-b$ 相类似，当作为问题的解出现时，它们都表示了某种矛盾或荒谬．就实际意义而言，它们都是假想的数，因为 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 一样不可理解．”[8]剑桥大学的教授们仍然将 $\sqrt{-1}$ 拒于千里之外．

从本次测试来看，1/3 以上的学生并不理解和接受虚数，他们对负数平方根的排斥和抗拒与卡丹之后三百余年间数学家们的态度是相似的．近 8%的学生认为数学法则只是人为的规定，这正应验了高斯所说的“对许多人来说，虚数似乎只是一种符号游戏”[9]．学生将 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时成立的 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 推广到 $a$、$b$ 为负数的情形，则完全重蹈了欧拉的覆辙．

英国数学家沃里斯（J. Wallis, 1616—1703）在其《代数》（1673）试图用图形来表示复数．他认为，既然可以有负线段，那么也可以有负面积，如面积为−1 600 单位的正方形，其边长应为 $\sqrt{-1\,600}$ 或 $10\sqrt{-16}$ 或 $20\sqrt{-4}$ 或 $40\sqrt{-1}$．而瑞士的一位簿记员阿甘德则将 $\sqrt{-1}$ 看成是由+1 按逆时针方向旋转 90°而得到的．学生用图形来表示虚数的尝试与沃里斯（J. Wallis, 1616—1703）和阿甘德的思路之间仅一步之遥．

欧拉对于虚数不甚了了，他在《代数学引论》（1769）中写道：“因为所有可想象的数要么大于 0，要么小于 0，要么等于 0，所以负数的平方根显然是不能包含在这些可能的数中的……本质上它们是不可能的，通常被称为想象的数，因为它们只存在于想象之中．”可见学生的“虚数只存在于非物质世界”之说不过是欧拉的话的翻版．

### 4.2 发散级数

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\Lambda$ 是数学史上最令人困惑的无穷级数．这个级数可否求和，和是多少？17~18 世纪，许多一流的数学家都给出过自己的答案．利用加括号方法可得 0、1 或 1/2．18 世纪，意大利数学家格兰第（G. Grandi, 1671—1742）得到

$$1-1+1-1+1-1+\Lambda=\frac{1}{2},$$

用一个现实生活中的例子来佐证上述结果的“正确性”：两个儿子继承父亲的一块宝石，他们轮流保存这块宝石一年．于是，他们各拥有宝石的一半[10]．

莱布尼兹于 1715 年写给德国数学家沃尔夫（C. Wolf, 1678—1754）的信中认为格兰第的结果是对的，不过他是用概率方法来论证的：由于级数的部分和数列为 1，0，1，0，1，0，…其中 0 和 1 出现的概率相同，因此，最可能的值应为 0 和 1 的平均数，即 1/2．莱布尼兹的这个结果也为瑞士著名数学家雅各·伯努利（Jacob Bernoulli, 1654—1705）、约翰·伯努利（John Bernoulli, 1667—1748）所接受；后来的法国著名数学家拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813）和普阿松（S. D. Poisson, 1781—1840）也对其深信不疑！类似于格兰第，欧拉也得到了格兰第和莱布尼兹的结果．

17~18 世纪，无穷级数的敛散性概念尚未建立起来．面对发散级数，即使是当时世界一流的数学家也犯了许多错误．

从测试结果看，近 70%的学生得到的结果是 0 或 1，而

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

他们所用的方法或是等比数列的求和公式 $S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$，其中 $a_1=1$，$q=-1$，或是对部分和的通项公式的归纳，或是对原级数相邻两项加括号．本质上说，都是将有穷数列的求和方法用于无穷数列，而没有考虑到适用的条件．许多17~18 世纪数学家的许多错误正在于此．

在给出答案 1/2 的学生中，大部分学生运用了概率的思想，尽管他们没有提到部分和数列中 1 和 0 出现的概率，但是这种思想与莱布尼兹的思想又何其相似！

有趣的是，很多学生试图借助于现实生活中的例子来得出自己的结果，与格兰第的思维如出一辙．

因此，学生的做法确实重蹈了无穷级数敛散性理论建立之前的 17~18 世纪数学家们的覆辙．

## 5 结　论

基于以上讨论，我们可以得到如下结论：就虚数和无穷级数概念而言，学生的认知过程确实往往会重蹈历史发展过程，历史发生原理是成立的．庞加莱指出：“教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历，迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段．”[11]波利亚在《数学的发现》中断言道：“只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识做出更好的判断．”[12]弗赖登塔尔则相信：“年轻的学习者重蹈人类的学习过程，尽管方式改变了．”[13]本研究支持了这些论断．

[参 考 文 献]


[1] 汪晓勤，欧阳跃．HPM 的历史渊源[J]．数学教育学报，2003，12（3）：24–27．

[2] Gulikers I, Blom K. “A Historical Angle”: A Survey of Recent Literature on the Use and Value of History in Geometrical Education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, (47): 223–258.

[3] Harper E. Ghosts of Diophantus [J]. Educational Studies in Mathematics, 1987, (18): 75–90.

[4] Fauvel J, Maanen J van. History in Mathematics Education [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[5] 汪晓勤，韩祥临．中学数学中的数学史[M]．北京：科学出版社，2002．

[6] Kleiner I. Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers [J]. Mathematics Teacher, 1988, (81): 583–592.

[7] McClenon R. B. A Contribution of Leibniz to the History of Complex Numbers [J]. American Mathematical Monthly, 1923, (30): 369–374.

[8] Smith D E. A History of Mathematics (Vol.2) [M]. Boston: Ginns, 1923.

[9] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times [M]. New York: Oxford University University, 1972.

[10] Struik D J. A Concise History of Mathematics [M]. London: G. Bell &Sons, 1954.

[11] Kline M. Logic Versus Pedagogy [J]. American Mathematical Monthly, 1970, 77 (3): 264–282.

[12] Polya G. Mathematical Discovery [M]. New York: John Wiley & Sons, 1962.

[13] Ernest P. The History of Mathematics in the Classroom [J]. Mathematics in School, 1998, 27(4): 25.


## Justification of the Historical-genetic Principle from a Test


WANG Xiao-qin[1], FANG Kuang-diao[2], WANG Chao-he[3]

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;
2. Zhejiang Linhai Duqiao Middle School, Zhejiang Linhai 317000, China;
3. Jiangsu Baoying Middle School, Jiangsu Yangzhou 225800, China)



**Abstract:** The historical-genetic principle was one of the important arguments taken as reasons for applying the history to teaching and learning mathematics. Through a test on problems of multiplying two imaginary numbers and summing a divergent series, this study justified the principle: the students’ recognition of these concepts resembles that of mathematicians in the history. Therefore, this study supported the arguments of H. Poincare, G. Polya and H. Freudenthal.



**Key words:** The historical-genetic principle; imaginary numbers; infinite series

[责任编校：陈汉君]


?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net