阿基米德与圆周率

200062 华东师范大学数学系 汪晓勤 215400 江苏省太仓市实验中学 赵红琴

在古代文明(埃及、美索不达米亚、中国、印度)的数学文献里,都不乏圆的度量问题,而圆的度量少不了圆的周长和直径的比值——圆周率.在数学的漫长发展历程中,又有哪一个常数能像圆周率那样散发着如此经久不衰的魅力?古希腊数学家阿那克萨哥拉(Anaxagoras,公元前500～428)在铁窗下仍醉心于化圆为方问题的研究;在德国数学家固灵(L. van Ceulen, 1540～1610)的墓碑上,刻着他生前焚膏继晷、夜以继日算出的35位圆周率值;巴黎科学宫中单独设有圆周率馆;记忆圆周率的诗歌层出不穷;日本人Hiroyuki Goto在1995年花9小时背诵π达四十二万位数;时至今日,计算圆周率的新公式不断被发现,圆周率位数的世界记录不断被打破……π的魅力何在?在于它的无穷无尽.诺贝尔文学奖得主、波兰著名诗人维斯拉瓦·申博尔斯卡(Wislawa Szymborska)在题为"Pi"的诗中这样写道:

地球上最长的蛇不过四十英尺
神话和传说中的蛇也无分轩轾
组成Pi的数字列队行进逶迤
它不会在页边栖息
它会继续走过书桌,穿过空气
越过墙壁、树叶、鸟巢、云霓
直上九霄
穿过广袤无垠的天际
那彗星的尾巴显得多么短小
就像鼠尾和小辫子
而星光显得多么脆弱
撞在空间上便弯曲了轨迹
……

那么,是谁最早科学地设计了这无穷之旅?不是巴比伦人、也不是埃及人,是希腊天才数学家阿基米德(Archimedes,前287～212).他通过计算边数倍增的圆外切和内接正多边形的周长来求圆周率近似值,开圆周率几何计算之先河.

对于外切正多边形的周长,阿基米德的计算基于如下的定理:

定理1 设AC是圆O在A点的切线,OD是$\angle AOC$的平分线,交AC于D(见图1),则有$\dfrac{OA}{AD}=\dfrac{OA+CO}{CA}$.

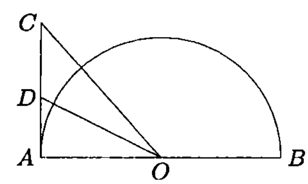

图1

若设$AC=\frac{1}{2}a_n'$ (a_n'为圆外切正n边形边长,相应地$\angle AOC=\frac{\pi}{n}$),$OA=R$,$OC=R_n$,则定理1就是:

$$\frac{R}{\frac{1}{2}a_{2n}'}=\frac{R+R_n}{\frac{1}{2}a_n'} \tag{1}$$

阿基米德从$\dfrac{R}{\frac{1}{2}a_6'}$开始$\left(相应地\angle AOC=\frac{\pi}{6},\ R_6=\frac{2}{3}\sqrt{3}R\right)$,根据(1)以及公式$R_{2n}=\sqrt{R^2+\left(\frac{a_{2n}'}{2}\right)^2}$,依次算出$\dfrac{R}{\frac{1}{2}a_{12}'}$、$\dfrac{R}{\frac{1}{2}a_{24}'}$、$\dfrac{R}{\frac{1}{2}a_{48}'}$、$\dfrac{R}{\frac{1}{2}a_{96}'}$,最后得到$\pi<\dfrac{96a_{96}'}{R}<3\frac{1}{7}$.

对内接正多边形的情形,阿基米德的计算基于如下的定理:

定理2 设$\angle AC'B$是圆O直径上的圆周

角，BD'是$\angle ABC'$的平分线(见图2)，则有 $\frac{BD'}{AD'}=\frac{AB+BC'}{AC'}$.

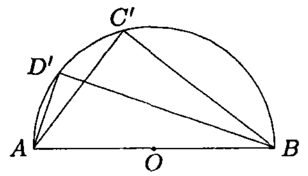

图 2

若设$AC'=a_n$ $\left(a_n\right.$为圆内接正n边形边长，相应地$\left.\angle ABC'=\frac{\pi}{n}\right)$，$BC'=d_n$，则定理2就是：
$$\frac{d_{2n}}{a_{2n}}=\frac{2R+d_n}{a_n} \tag{2}$$

阿基米德从$a_6(=R)$开始$\left(\right.$相应地$\angle ABC'=\frac{\pi}{6}, d_6=\sqrt{3}R\left.\right)$，根据(2)以及公式$d_{2n}^2+a_{2n}^2=4R^2$依次算出$\frac{d_{12}}{a_{12}}$、$\frac{d_{24}}{a_{24}}$、$\frac{d_{48}}{a_{48}}$、$\frac{d_{96}}{a_{96}}$，最后得到$\pi>\frac{96a_{96}}{2R}>3\frac{10}{71}$. 因此阿基米德获得最后结果$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

由(1)和(2)可得下面的递推公式:
$$a'_{2n}=\frac{a'_nR}{R+R_n},\ a_{2n}=\frac{a_nd_{2n}}{2R+d_n} \tag{3}$$

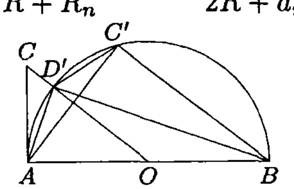

图 3

另一方面，若在阿基米德图2中，连接OD'并延长，交圆O在A点的切线于C(见图3)，则$\angle AOC=2\angle ABD'=\angle ABC'$，这表明，当$AC'=a_n$时，$AC=\frac{1}{2}a'_n$. 又因Rt$\triangle AC'B\backsim$Rt$\triangle CAO$，故得$\frac{BC'}{OA}=\frac{C'A}{AC}=\frac{AB}{CO}$，或$\frac{d_n}{R}=\frac{a_n}{\frac{1}{2}a'_n}=\frac{2R}{R_n}$，即
$$\frac{d_n}{2R}=\frac{a_n}{a'_n}=\frac{R}{R_n} \tag{4}$$

由(3)和(4)得
$$a'_{2n}=\frac{a_na'_n}{a_n+a'_n} \tag{5}$$

又因$\triangle BOD'\backsim\triangle AD'C'$，故有$\frac{BD'}{AC'}=\frac{OB}{D'A}$，即
$$\frac{d_{2n}}{a_n}=\frac{R}{a_{2n}} \tag{6}$$

由(4)和(6)得$\frac{a_n}{a_{2n}}=\frac{d_{2n}}{R}=\frac{2a_{2n}}{a'_{2n}}$，因此
$$a_na'_{2n}=2a_{2n}^2 \tag{7}$$

易从(5)和(7)可得递推公式
$$C'_{2n}=\frac{2C_nC'_n}{C_n+C'_n},\ C_{2n}=\sqrt{C_n\cdot C'_{2n}} \tag{8}$$

其中C_n和C'_n分别为圆内接和外切正n边形的周长.

又因$S'_n=\frac{1}{2}na'_nR$, $S'_{2n}=na'_{2n}R$, $S_{2n}=\frac{1}{2}na_nR$，其中S_n和S'_n分别表示圆内接和外切正n边形面积. 故得
$$\frac{S_{2n}}{S'_n}=\frac{a_n}{a'_n}=\sqrt{\frac{S_n}{S'_n}},\ \frac{S'_{2n}}{2S'_n}=\frac{a'_{2n}}{a'_n}=\frac{a_n}{a_n+a'_n}=\frac{1}{1+\frac{a'_n}{a_n}}=\frac{1}{1+\frac{S'_n}{S_{2n}}}=\frac{S_{2n}}{S'_n+S_{2n}},$$

因此得递推公式
$$S_{2n}=\sqrt{S_nS'_n},\ S'_{2n}=\frac{2S'_nS_{2n}}{S'_n+S_{2n}} \tag{9}$$

从(8)易知，在数列$\frac{1}{C'_n}$, $\frac{1}{C_n}$, $\frac{1}{C'_{2n}}$, $\frac{1}{C_{2n}}$中，第三和第四项分别是它们前面两项的算术中项和几何中项. 因此，若从边长为$\frac{1}{2}$的圆外切正方形开始$\left(\right.$此时圆半径为$\frac{1}{4}$，周长为$\frac{\pi}{2}$，内接正方形周长为$\left.\sqrt{2}\right)$，依次求出边数倍增的圆外切和内接正多边形的周长，它们的倒数构成数列
$$\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{4},\ \cdots. \tag{10}$$

显然其极限为$\frac{2}{\pi}$. 类似地，从(9)知，在数列$\frac{1}{S_n}$, $\frac{1}{S'_n}$, $\frac{1}{S_{2n}}$, $\frac{1}{S'_{2n}}$中，第三和第四项分别是它们前两项的几何中项和算术中项. 因此，从边长为1的圆内接正方形开始(此时圆半径为$\frac{1}{\sqrt{2}}$，面积为$\frac{\pi}{2}$，外切正方形面积为2)，依次求出边数倍增的圆内接和外切正多边形的面积，

(下转第1-39页)

教师: 如果他们的答案是正确的, 那么可用什么方法证明呢?

片刻以后.

学生3: 可以分n是奇偶数进行讨论.

教师: 请你给大家板演一下好吗?

学生3: 设马共跳n步. 当n为偶数时, 前$\frac{n}{2}$步不论怎样跳, 后$\frac{n}{2}$步总可沿原路返回, 所以结论正确.

再证n为奇数时马不能跳回原处. 我想可用解析几何来证明, 但就是说不清楚.

教师: 思路很好, 再想想.

学生4: 我可按此方法解决.

教师: 请你给大家说说好吗?

学生4: 建立直角坐标系, 并设马所在位置的坐标是$P(x_0,y_0)$, 则马跳一步后位置的坐标应为(x_0+x_1, y_0+y_1), 在此x_1和y_1只能分别取$1,-1,2,-2$四个数中的一个. 同样, 跳第二步后, 马的位置为$(x_0+x_1+x_2, y_0+y_1+y_2)$, 这里$x_2$和$y_2$只能分别取$1,-1,2,-2$四个数中的一个, 跳第$n$步后, 马的坐标为$(x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n, y_0+y_1+y_2+\cdots+y_n)$, 如果这马又能回到原处$P(x_0,y_0)$, 那么$x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n=x_0$, $y_0+y_1+y_2+\cdots+y_n=y_0$, 即

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0 & ① \\ y_1+y_2+\cdots+y_n=0 & ② \end{cases}$$

x_k、$y_k\in\{1,-1,2,-2\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

如果方程 ① 和方程 ② 有解, 那么这马就能跳回原处.

学生5: 不对, $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$可能成立, 例如: $n=3$时, 两个取-1, 一个取2, 其和为0. 但是这组解对应的方案不能使马跳回原处.

教师: 这个反例说明这种思路方法不够全面, 哪位同学能进一步完善吗?

学生6: 方程②没有使用, 但我不知如何使用.

教师: 关键是方程②如何使用?

学生7: 可以①+②, 得

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=0.$$

由于上式中的n个数都只能取1、-1、2、-2, 且马走"日字", 所以每一次跳的两个坐标之和不能为2和-2, 因此, x_1+y_1, x_2+y_2, $\cdots$, x_n+y_n, 只能取1, -1, 3, -3,但无论怎样取法, 由于n是奇数, 这样取出的n个数之和不可能等于零. 所以这匹马跳奇数次返回原处是不可能的.

事实上如果马能回到原处, 则所跳的步数必为偶数.

教师: 很好, 通过本题的证明, 同学们能得到什么启发? 你还能得到什么类似的结论?

学生: 生活中处处有数学.

教师: 很好, 类似的结论同学们一定会得到很多, 请大家课后讨论交流, 下一次活动再继续探讨.

(上接第1-41页)

它们的倒数序列为:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1+\sqrt{2}}{4},\ \cdots. \tag{11}$$

其极限为$\frac{2}{\pi}$. 在数列(11)第一项前添一项0, 即得下面的收敛速度很快的圆周率迭代法.

定理3 如果一数列的前两项为0和1, 自第三项起, 交替为前两项的算术中项和几何中项. 那么该数列的极限为$\frac{2}{\pi}$.

我们把定理3称作阿基米德迭代.

参考文献

[1] T.L.Heath. *The Works of Archimedes.* New York: Dovers, 1959.

[2] T. L. Heath. *A History of Greek Ma-thematics.* London: Oxford University Press, 1921.

[3] D.H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein & S. Plouffe. *The quest for Pi. The Mathematical Intelligencer,* 1997, 19(1):50-57.