上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 1 期

（创刊号）

第四届全国数学史与数学教育研讨会会务组

创刊语

“不断学习、不断教书，不断写作，其乐无穷。”这是著名数学教育家、数学史家、ICMI的创立者史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）的座右铭。这本也该成为自己职业生涯的写照，不想，生命中竟多了一个“不断”——不断招徒。

很难因“不断招徒”而感到“其乐无穷”。我常常问那些刚刚通过论文答辩、即将奔赴工作岗位的硕士生：“这三年，你学到了什么？”沉默，吱唔，顾左右而言他。我知道，他/她其实很忙碌，但忙碌的只是几份家教和兼职；我也知道，她/她其实有追求，但追求的只是一份未来的职业；我更知道，他/她其实有收获，但收获的只是一本毕业证书和学位证书。当他/她投笔签约，顺利答辩，憧憬未来，与我道别的时候，我为他/她感到欣慰、默默为他/她祝福。但我也深深地惆怅：漫长的三年，他/她的忙碌、追求和收获，竟离学问如此遥远。

比利时-美国著名科学史家萨顿（George Sarton, 1884-1956）曾告诉我们：19世纪英国考古学家弗雷泽爵士（J. G. Frazer, 1854～1941）在大三（剑桥大学三一学院）的时候因上一个学期只读了57部希腊和拉丁著作而写信向导师致歉！今生能收到这样的信吗？说真的，我连梦都不敢做。

红尘荒岁月，幸有翰墨香。想创办一份内部刊物，为同门子弟提供一个学习交流的平台。具体目的如次：

● 营造纯净的学习氛围。喧嚣都市，物欲横流，灯红酒绿，繁华无限。生存为第一要要旨，我们自不必生活在真空里。无论你学什么专业，都需要融入社会，投身实践，锻炼自己，提高生存能力。但源源不绝的诱惑也难免带来污染。希望本刊能守护一片纯净的天地。

● 促进频繁的思想交流。行则成群结队，聚则济济一堂，倘若一盘散沙，各行其道，外观热闹，内核冷清，实师门之不幸也。在本刊，人人可以撰文，分享读书心得，汇报研究成果，讨论研究方法，追寻思想源流，概述论文摘要，推介佳作美文，展示写作技巧，岂不快哉!

● 培育优秀的学术论文。不积跬步，无以至千里，不积小流，无以成江海。鸿篇巨制，始于小文；宏博学问，始于点滴。本刊为大家提供一个学习论文写作的机会。文章千古事，得失众人知。只要工夫至，不愁无佳作。

期待你的热情参与，因为《上海HPM通讯》是我们共同的精神家园！

目　录

CONTENT

理论探讨

HPM 的若干研究与展望*

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

早在 19 世纪，数学史与数学教育之间的关系已经受到欧美数学家和数学教育家们的关注。1972 年，在英国 Exeter 召开的第二届国际数学教育大会上，成立了数学史与数学教学关系国际研究小组（*International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, 简称 HPM），1976 年开始隶属于国际数学教育委员会。自此，数学史与数学教育关系成了数学教育的重要研究领域之一。

1 国外 HPM 研究述略

总的说来，国际上 HPM 领域的研究工作主要包括以下几个方面。

1.1 关于“为何”和“如何”的探讨

国际学术界对数学教育中运用数学史的必要性和运用方法已作了大量的探讨。关于“为何运用”的问题，学术界讨论得较为成熟，英国学者 John Fauvel 曾总结出 15 条理由[1]；Tzanakis 和 Arcavi 从数学学习、关于数学本质和数学活动观点的发展、教师的教学背景与知识储备、数学情感、对数学作为文化活动的鉴赏等五个方面总结了数学史对支持、丰富和改进数学教学的作用[2]。Jankvist 则将数学史对于数学教学的作用归为“作为工具的数学史”和“作为目标的数学史”两类[3]。

关于“如何运用”的问题，学术界并无定论，Fauvel 总结出十种具体方式[1]；Tzanakis 和 Arcavi 总结了三种方式[2]：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识。而 Jankvist 则提出另三种方式[3]：启发法、模块法和基于历史法。

*本文为《中学数学月刊》特约稿，发表于该刊 2012 年第 2 期。

1.2 教育取向的数学史研究

早年美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）曾研究过如下问题：未知数为什么用 x 来表示？指数记号是如何演进的？谁最早使用了数学归纳法？“数学归纳法”之名是如何产生的？“对数”之名是怎么来的？为什么等差和等比级数又叫算术和几何级数？这些问题具有明显的教育取向。教育取向的历史研究主要通过对数学课程中的概念、公式、定理、问题的历史进行研究，不是为历史而历史，而是为教育而历史。这是 HPM 研究的基础性工作，如果我们不了解一个概念、公式或定理的历史，就无从谈论概念理解的历史相似性以及借鉴历史的概念教学。HPM 为历史研究提供了丰富的问题。在十年前荷兰学者 Gulikers 和 Blom 的有关几何历史与教学的文献综述[4]中，教育取向的历史研究占了相当大的比例。

1.3 历史相似性研究

历史发生原理告诉我们，学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性，历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍。因此，庞加莱（H. Poincaré, 1854～1912）说：“教育工作者的任务就是让儿童的思维经历其祖先之所经历，迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段；鉴于此，科学史应该是我们的指南。”[5]波利亚（G. Polya, 1887～1985）说：“只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断。”[6]M・克莱因也说：“历史顺序是教学的指南。”[7]

历史相似性的研究对数学教育具有重要意义。因为，如果某一概念的历史相似性得到检验，那么，我们可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而有针对性地制订相关教学策略。国外学者就符号代数、角的概念、平面概念、数轴上序关系等，对有关被试的理解进行了实证研究，印证了历史相似性的存在。

1.4 教学设计与实践探索

目前已积累了相当多各层次的实践案例，如 Ransom 利用 1747 年拉丁文版《几何原本》第一卷命题 47 来讲授勾股定理，并选取历史上的勾股定理应用问题供学生探究[8]；Perkins 在女子学校通过让学生解决历史上数学家感到很难的概率问题来增加她们的学习自信心[9]；Radford 和 Guérette 基于古巴比伦的“原始几何”方法，设计了一元二次方程求根公式的教学[10]；Chun Ip Fung 等人将刘徽《海岛算经》第一题、海伦的测量问题以及达・芬奇的“猫

眼图”用于教学设计[11]；Kool 选择 16 世纪荷兰数学教科书上的行程问题、年龄问题和“手指算”问题进行课堂教学，作者将原教科书上的解法称为“班级里的一名额外学生”[12]；Paola 将历史上著名的“点数问题”（或称“分割问题”）用于概率的教学，且在课堂上发现了学生解法的历史相似性[13][14]；Farmaki 等借鉴 14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323～1382）用图像表示运动的方法，设计了一类行程问题的教学[15]；Panagiotou (2011)借鉴对数的历史进行对数概念的教学设计，并将其付诸实践[16]，等等。在台湾，基于数学史的教学设计的主要采用学习单的方式，已有案例涉及圆与圆周率、对数、三角函数、数学归纳法、曲线下的面积等等。

2 我们的一些研究

我国大陆学术界直到本世纪初才开始普遍关注 HPM 领域。但从过去的四届全国数学史与数学教育学术研讨会（2005-2011）来看，尽管 HPM 实践开发已成为人们的共识，但迄今仍缺乏科学有效的研究方法，有价值的研究成果并不多见，HPM 作为一个研究领域的学术地位还有待于提高。

近年来，笔者在华东师大开设硕士研究生课程“数学史与数学教育”，建立了如图 1 所示的课程框架。

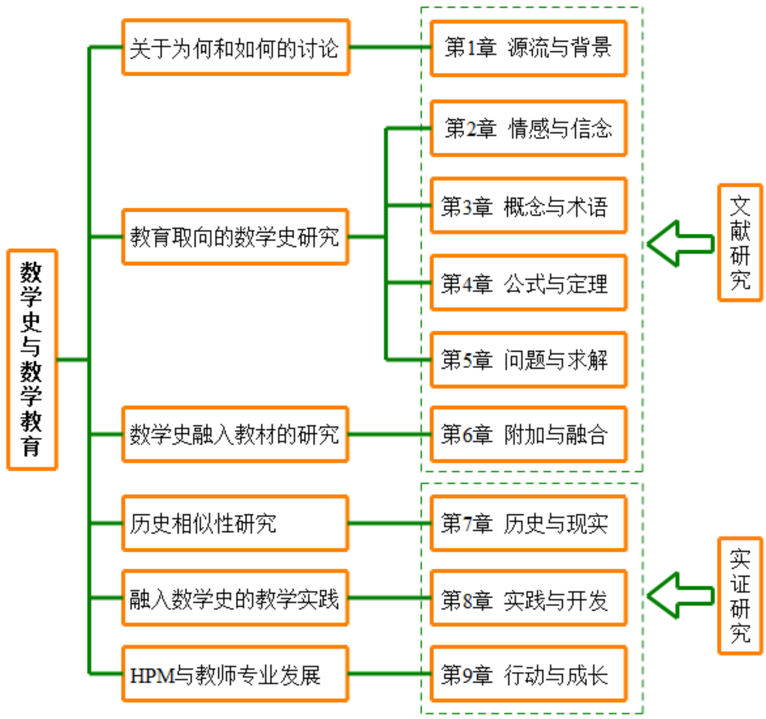


图 1 华东师大“数学史与数学教育”课程框架

我们的研究基本上是在该框架之下进行的，现概述如下。

2.1 数学教育取向的数学史研究

笔者在从事 HPM 研究的初期，在这方面作了很多文献研究，部分工作收入《中学数学中的数学史》一书中，但在 HPM 视角下数学教学设计过程中，深感一本书远远不能满足需要。在数学史融入数学教学的实践过程中，教师往往感到“巧妇难为无米之炊”。例如，一位教育硕士考虑“数学史融入数列教学的行动研究”这一毕业论文选题，搜集文献后发现，有关数列的历史材料不够丰富。于是，“数列历史系列研究”应运而生。通过考察古埃及纸草书、两河流域泥版、古代中国、印度、希腊、阿拉伯、犹太文明、中世纪斐波纳契《计算之书》、文艺复兴时期、19 世纪《大英百科全书》等文献上的数列问题及其解法，我们获得了丰富的历史素材。类似地，“用字母表示数的历史”、“平方差公式的历史”等研究都是出于有关教学设计的需要。

2.2 历史相似性研究

针对学生对虚数、发散级数、函数、切线、符号代数等的理解，我们进行了历史相似性研究。以切线和代数字母符号为例。

我们知道，切线概念经历了古典几何阶段和近代分析阶段，古典阶段的代表数学家为古希腊的欧几里得、阿波罗尼斯和阿基米德；近代阶段的代表人物为 17 世纪的费马、笛卡儿和莱布尼茨。欧几里得对圆的切线的理解是：(1) 切线与圆的公共点个数为 1；(2) 切线不能穿过圆；(3) 圆位于切线的同一侧；(4) 切线与过切点的直径垂直。阿波罗尼斯对圆锥曲线切线的理解是：(1) 切线与圆锥曲线公共点个数为 1；(2) 圆锥曲线位于切线的同一侧。阿基米德也通过公共点个数来理解螺线的切线。

对鄂、苏、沪、皖四地 332 名高中生的调查表明：绝大多数高中生对切线的理解只达到古典几何阶段，他们只是根据公共点个数、直线与曲线相对位置或直线与圆半径位置关系来判别切线，与古希腊欧几里得、阿波罗尼斯、阿基米德等的理解具有相似性。[17]例如，关于直线 $y=0$ 是否曲线 $y=x^3$ 的切线问题，给出肯定判断的 125 名被试中，超过三分之一的学生以“公共点个数为 1”作为依据；而给出否定判断的 207 名被试中，超过半数的学生以“曲线位于直线同一侧或直线不穿过曲线”作为依据。尽管高三被试和大部分高二被试已经

学过导数的几何意义，但他们之中没有一人用“割线的极限位置”来判断$y=0$是否$y=x^3$的切线，只有五分之一的学生得到“$y=x^3$在$x=0$处导数为零”的结果，有 3 名高三被试甚至认为“$y=x^3$在$x=0$处不可导”。关于“圆锥曲线切线的定义”，高二和高三两个年级共 224 名被试中，45%的被试以“与圆锥曲线只有 1 个公共点的直线”或“圆锥曲线位于其同一侧的直线”作为定义。只有 3 名高三被试明确以“割线的极限位置”作为定义。此外，所有被试对切线所持有的表象均停留在古典几何阶段，没有一位学生提及“割线的极限位置”。

因此，绝大多数被试未能从特殊曲线的切线顺利过渡到一般曲线的切线，这也表现出高度的历史相似性，因为从古典几何阶段过渡到近代分析阶段，历史上的切线概念也经历了漫长而艰辛的过程。

另一项研究是 6-8 年级学生对字母符号理解的历史相似性。[18]我们知道，代数发展经历了修辞代数、缩略代数和符号代数三个基本阶段。从古希腊代数学鼻祖丢番图的《算术》中选取两题作为测试题（第 2 题略有改动）：(1) 已知两数的和与差，求这两个数；(2) 从一个数中分别减去两个已知数，已知其中一个差是另一个差的若干倍，求这个数。”测试结果表明，尽管被试已经学习过“用字母表示数”，但学生所用的方法中，兼有修辞代数、缩略代数和符号代数三种方法，随着年级的增加，符号代数方法的比率逐渐增高，但即使在 8-9 年级，仍然出现修辞和缩略的方法。因此，从修辞代数到符号代数的过渡并非一蹴而就之事，符号代数理解的历史相似性昭然若揭！

2.3 数学教学中运用数学史的方法

关于数学教学中运用数学史的方法，我们将国外已有的几种分类方法进行整合与改进，得到附加式、复制式、顺应式和重构式四类，见表 1。

许多中学教师误认为，在课堂上运用数学史，就是讲点数学家的故事，其实这只是数学史的较低层次的用法，属于附加式，中学课堂里采用得较多。在复数概念的教学设计中，浙江省诸暨中学张小明老师曾经采用莱布尼茨问题来引入：已知$x^2+y^2=2$，$xy=2$，求：（1）$x+y$=？（2）分别求x和y的值。[19]这里，教师直接采用了数学史问题，属于复制式。在“空间向量的坐标运算”的教学设计中，张小明老师利用我国古代数学中的基本立体图形“鳖臑”来编制如下问题：

表 1　数学教学中运用数学史的方式

类 别	描　述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
附加式	展示有关的数学家图片，讲述逸闻趣事等，去掉后对教学内容没有什么影响	直接运用法	启发法
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	直接运用法	启发法
顺应式	根据历史材料，编制数学问题	—	—
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	间接运用法	基于历史法

我国古代数学家对立体图形有深刻的研究，著名数学家刘徽在此方面取得了很大的成就，他发现："邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也"．这个结果被称为"刘徽原理"，其中鳖臑是指四个面都为直角三角形的四面体。在如图所示的鳖臑中，$\angle AOC=\angle BOC=\angle OBA=\angle ABC=90°$，$AB=OC=2$，$OB=a$　（$a>0$），F 为线段 OB 上的动点，E 为 DB 的中点，问，当点 F 运动到什么位置时，直线 AF 与 OE 所成的角最小？

该用法即属于顺应式。

数学史最高层次的用法为重构式，发生教学法即属于该方式。托普利茨（O. Toeplitz, 1881～1940）曾指出，发生法的本质是追溯一种思想的历史起源，以寻求激发学习动机的

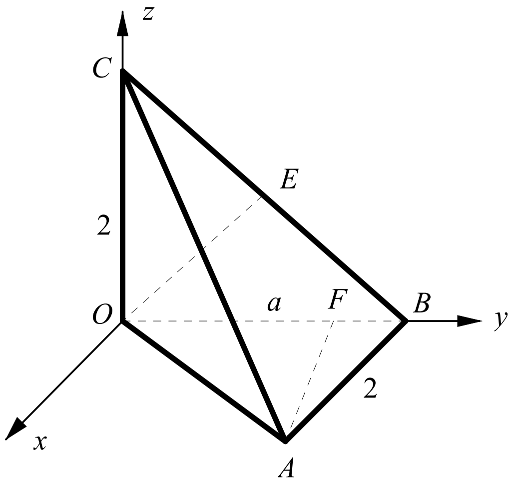


图 2　鳖臑问题

最佳方式。[20]但追溯历史起源、重演历史发展并非原原本本地、精确地复制历史，而是借鉴历史、重构历史。原原本本的历史往往很复杂，而发生法所重构的历史却是线性的。发生法强调知识的自然发生过程，即教学必须建立在学生已有的认知基础之上；同时也强调知识的必要性，即教学必须激发学生的学习动机。

以圆的参数方程为例。显然，圆的直角坐标方程是学生的认知起点，既然有了直角坐标方程，为什么还要学参数方程呢？这是学生的困惑所在。追溯曲线参数方程的历史，我们发现：数学家乃是因为研究物体在运动过程中的位置才引入参数方程的。借鉴历史，我们可以采用发生法来引入课题。首先问学生是否坐过摩天轮？然后引出第二个问题：前面我们已经学过圆的直角坐标方程。假设摩天轮的半径为 50 米，你能建立它的直角坐标方程吗？接着，提出第三个问题：假定摩天轮按逆时针方向转动，转动的角速度为 2π 弧度/小时，如过你坐上最靠近地面的车箱，如何确定 40 分钟后你的在空中的位置呢？直角坐标方程能帮上忙吗？从学生认知起点出发，有效地激发学生的学习动机，参数方程知识的发生可谓水到渠成、自然而然。

2.4 HPM 视角下的数学教学设计与实践

2005 年，在第一届数学史与数学教育学术研讨会上，组委会倡议在全国范围内征集 HPM 案例，未果。2011 年，在第四届数学史与数学教育学术研讨会上，张奠宙教授建议开发一套 HPM 案例。HPM 案例的开发已成当务之急。

近两年来，笔者与研究生、中学教师合作，从 HPM 的视角对椭圆概念进行了教学设计。椭圆的历史大致可以分成椭圆的发现、截线定义的形成、基本性质的推导、焦半径性质的获得、机械作图的产生、轨迹定义的确立以及椭圆方程的推导等七个重要环节，但教材只截取了最后三个环节，显然，所呈现的椭圆知识并非自然发生。鉴于椭圆历史的复杂性，我们对椭圆历史进行了重构。从球的影子、建筑、水杯等现实例子出发将椭圆知识建立在生活经验基础之上；利用圆柱中的旦德林双球，推导出椭圆焦半径性质，从而实现了从古希腊截线定义到课本轨迹定义的自然过渡，并创造学生的学习动机。[21]

该设计先在沪上某中学付诸实践，接着，浙江省义乌市王芳数学教育工作室的陈锋老师在义乌市两所不同中学的多个班级进行实验；之后，安徽淮南、新疆克拉玛依等地的个别中学也相继作了尝试，各地的教学实践均取得十分理想的效果。受椭圆案例的鼓舞，王芳数学教育工作室的另一位学员方国青老师最近完成了“数系的扩充与复数的引入”的设计，并数次付诸实践。目前，该 HPM 案例的文字稿正在整理之中。

HPM 在初中数学课堂上也找到了用武之地。近两年来，上海市市西中学王进敬老师相继将数学史融入用字母表示数、同底数幂的乘法、平方差方式、实数的概念、全等三角形应用、相似三角形应用等知识点的教学，深受学生的欢迎。[22]在 HPM 的引领之下，王老师逐

渐形成了自己的教学风格，同时也让更多的教师开始关注 HPM。

3 展望未来

德国数学家 F·克莱因（F. Klein, 1849～1925）曾指出：“教学应遵循人类从知识的原始状态到更高级形式的道路。……推广这种自然的真正科学的教学的主要障碍是缺乏历史知识。”[23] 一百多年后的今天，克莱因所说的障碍依然存在，HPM 不过是少数人的爱好。要让 HPM 在中学生根、发芽、开花、结果，我们需要抓好“五个一”。

一门课程　多数中学数学教师缺乏数学史知识，对数学史与数学教育之间的关系更是不甚了了。我们认为，“数学史与数学教育”应该成为数学教师在职培训的课程。

一个论坛　多年前，张奠宙教授就建议设立中学数学教师数学史论坛。在有经费支持的情况下，我们希望论坛尽快成立，成为 HPM 同好的交流平台和传播 HPM 的阵地。

一种模式　我们无法期望数学教师都熟悉数学史。在进行 HPM 教学设计和教学实践时，先由大学教师完成相关主题的历史研究，获得历史材料，然后由大中学教师合作，根据需要对材料进行加工，使之适合于教学；最后由中学教师将加工后的材料用于教学设计，并付诸实践。因此，大中学教师的合作是 HPM 实践研究的理想模式。

一批案例　要让更多的数学教师接受 HPM，首先就必须让他们看到 HPM 教学案例的成功之处，椭圆案例已经证明了这一点。目前，笔者和王芳数学教育工作室正在制订新的计划，在新的一年里开发更多的 HPM 案例。

一个团队　独木难成林。台湾的 HPM 研究之所以在世界上产生影响，就是因为有一个 HPM 团队。HPM 爱好者的不断涌现，以及与王芳数学教育工作室的合作，都使笔者看到希望：在不久的将来，我们一定会拥有一个志同道合、不断进取的 HPM 团队。

辞旧迎新之际，且让我们期待 HPM 美好的明天。

参考文献

[1] Fauvel, J., 1991. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

[2] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 201-240

[3] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[4] Gulikers, I. & Blom, K., 2001. ‘A historical angle’: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, **47**: 223-258

[5] Poincaré, H., 1899. La logique et l’intuition dans la science mathematique et dans L’ enseignement. *L’ Enseignement Mathématique*, 1: 157-162

[6] Pólya, G., 1965. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons, 132-133

[7] Albers, D. J. & Alexanderson, G. L., 1985. *Mathematical People: Profiles and Interview*. Boston: Birkhäuser

[8] Ransom, P., 1991. Whys and hows. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 7-9

[9] Perkins, P., 1991. Using history to enrich mathematics lessons in a girls’ school. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 9-10

[10] Radford, L., Guérette, G., 2000. Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. In: V. J. Katz (Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington: Mathematical Association of America. 69-75

[11] Fauvel, J. & van Maanen J., 2000. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 262-264

[12] Kool, M., 2003. An extra student in your classroom: How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school. *Mathematics in School*, **32** (1): 19-22

[13] Furinghetti, F. & Radford, L., 2002. Historical conceptual development and the teaching of mathematics : from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 631-654

[14] Furinghetti, F., Paola, D., 2003. History as a crossroads of mathematical cuture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32 (1)

[15] Farmaki, V. *et al*.., 2004. Integrating the history of mathematics in educational praxis. An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

505–512

[16] Panagiotou, E. N., 2011. Using history to teach mathematics: the case of logarithms. *Science & Education*, 20: 1-35

[17] 殷克明, 2011. 高中生对切线的理解: 历史相似性研究. 华东师范大学硕士论文

[18] 张连芳, 2011. 初中生对代数字母符号的理解. 华东师范大学硕士论文

[19] 张小明, 汪晓勤, 2007. 复数概念的 HPM 教学设计. 中学数学教学参考, (6): 4-7

[20] Edwards, H. M., 1977. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer-Verlag, vi-vii.

[21] 汪晓勤等, 2011. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例. 数学教育学报, 20 (5): 20-23

[22] 王进敬, 2011. 数学史融入初中数学教学的行动研究. 华东师范大学硕士论文

[23] Klein, F., 1932. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. London: Macmillan & Co. 268

HPM 与初中数学教师的专业发展：一个上海的案例*

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

HPM 是数学教育的一个研究领域，2005 年至今连续四届全国数学史与数学教育会议使得 HPM逐渐为国内学术界所熟悉，但学术研究与课堂实践之间的鸿沟使得数学史在中学“高评价、低应用”的境遇迄今并未得到实质性的改善。要让 HPM 真正走进课堂，就必须有中学教师通过专业发展进入 HPM 学术共同体。那么，HPM 介入数学教学，能带给教师什么样的变化？HPM 究竟能否促进教师的专业发展？本研究试图对上述问题作出回答。

1 研究方法

1.1 研究的参与者

本研究的参与者 J 是上海某初级中学的一名数学教师，2001 年毕业于一所师范学院，大学期间并未修读过数学史课。在 7 年的教学生涯中，J 教师积累了丰富的教学经验，“对初中数学的教材、教法、考试都非常熟悉”，但从未在课堂上用过数学史。J 教师于 2009 年开始在某师范大学攻读教育硕士学位，有机会在暑期里修读“数学史与数学教育”课程（框架如图 1 所示），首次接触数学史及其与数学教学的关系，对其产生了浓厚的兴趣，用她自己的话说，“学了二十几年的数学，教了七年的数学，原来对数学中那么宝贵的一角竟是如此陌生，当时既惭愧又兴奋。暑假结束后回到三尺讲台，再也不忍心将这么宝贵的教学资源置之不理。”新学期伊始，J 教师开始实施数学史融入数学教学的行动研究计划，由此成为本研究的参与者。

* 本文的英译版曾在东亚四国“通过课例研究提高数学与科学教师教学能力”国际会议（2012 年 1 月 26 日-28 日，广岛）上宣读。作者对广岛大学教育学研究科教育学部的资助表示感谢。

1.2 资料的收集

本研究的资料通过以下途径收集。

（1）HPM 教学设计与教学反思的收集。J 教师在以“计划-行动-观察-反思”为基本流程的行动研究过程中，对融入数学史的每一节课都有基于学生反馈（通过问卷调查和访谈获得）的教学反思，从这些反思中我们可以看到她在 HPM 介入教学之后的心路历程。

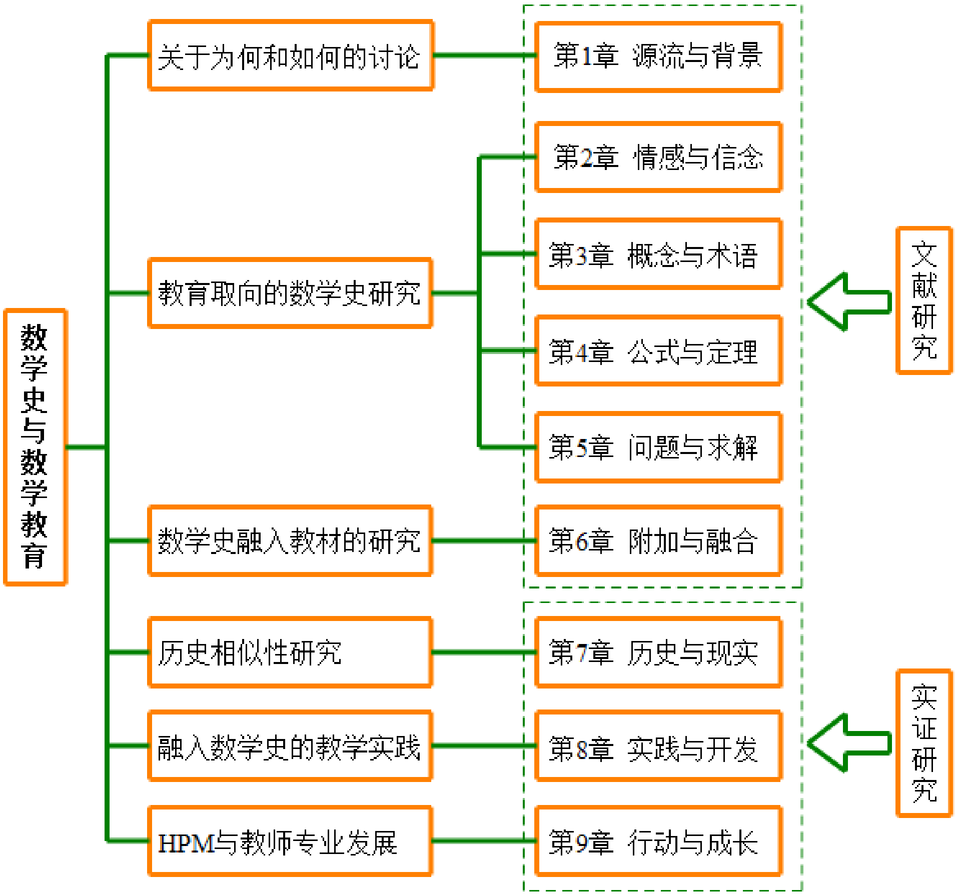


图 1 “数学史与数学教育”课程框架

（2）课堂观察与录像研究。J 教师开设的部分公开课的课堂观察和录像文字整理由研究生完成。

（3）J 教师在区教研活动中的演讲。J 教师所在区的教育局承担了全国教育科学十一五规划教育部重点课题“提升中小学生学业效能：‘轻负担、高质量’的实证研究”，在该课题的研究过程中，教育局实施了一项在全区范围内征集“课堂增值”案例的活动。J 教师撰写的案例“利用数学史，激发火热思考”在总共 2072 篇案例中脱颖而出，被评为优秀案例；最终她作为唯一一位数学教师参加“中学课堂增值行动专题论坛”演讲赛。她的演讲成了本

研究的资料。

（4）对 J 教师与她所在学校的教研组长、所在区的教研员的非结构式访谈。参加上面提到的论坛时，笔者针对 J 教师的专业成长，对教研员、教研组长进行了访谈，了解她的教学风格、学生与同事对她的评价、她所任教班级的学习状态等。

2 数学史融入初中数学教学的实践

如何将数学史融入数学教学？Fauvel 总结出十种具体方式[1]；Tzanakis 和 Arcavi 归纳出三种方式[2]：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识；而 Jankvist 则提出另三种方式[3]：启发法、模块法和基于历史法。我们将上述两种分类方法进行整合与改进，得到附加式、复制式、顺应式和重构式四类，见表 1。

表 1 数学教学中运用数学史的方式

类 别	描 述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
附加式	展示有关的数学家图片，讲述数学故事	直接运用法	启发法
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	直接运用法	启发法
顺应式	根据历史材料，编制数学问题	—	—
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	间接运用法	基于历史法

根据表 1 的分类法， 2009-2011 年间 J 教师的 HPM 教学可以分为两个阶段。

2.1 第一阶段

在该阶段，J 教师主要采用复制式，代表性案例为“相似三角形的应用”（共 3 节课）。在第一节课，直接采用《九章算术》勾股章中的问题来讲授相似三角形的性质。

例 1. 今有邑方二百步，各开中门。出东门一十五步有木。问：出南门几何步而见木？

例 2. 今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九十五尺。人立木东三里，望木末适与山峰斜平。人目高七尺，问：山高几何？

例 3. 今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问：井深几何？

课堂练习题也直接取自《九章算术》勾股章，思考题则要求学生复原泰勒斯测量金字塔高度的方法。

第二节课先利用相似三角形性质解决《九章算术》的“勾股容方”问题（已知直角三角形的勾和股，求其内接正方形的边长），然后将问题拓广到一般三角形容方问题。

第三节课为拓展课，J 教师先介绍公元前 6 世纪古希腊萨默斯岛上的引水隧道，引导学生展开讨论：设计者欧帕里诺斯（Eupalinos）究竟采用什么方法，确保南北两侧工程队沿同一直线向山体内部开凿，最后完美会合？学生讨论未果，J 教师向学生讲解公元 1 世纪海伦（Heron）测量著作中的隧道设计方法，该方法正巧妙地利用了相似三角形的性质。

课后的问卷调查表明，84.4% 的学生对数学史知识感兴趣；86.7%的学生认同数学史融入数学教学；93.3%的学生愿意了解数学史知识，并对数学史的作用给予积极的评价。受学生反馈的鼓舞，J 教师决定继续她的 HPM 教学。

2.2 第二阶段

在与研究者、教研员交流讨论之后，她感觉到，尽管学生反响很好，但第一阶段的教学偏于“为历史而历史”，有很大的改进空间。在调往另一所初中之后，J 教师开始了第二阶段的 HPM 教学，课型更丰富，方式更灵活多样，包括附加式、复制式、顺应式和重构式，代表性案例为“用字母表示数”、“同底数幂的乘法”、“平方差公式”等。

在“用字母表示数”一节，J 教师利用英国幽默作家杰罗姆（J. K. Jerome, 1859～1927）《懒人懒办法》中的片段引入课题，然后，再采用顺应式，将古希腊毕达哥拉斯学派的三角形数和正方形数改编成探究问题，通过让学生探究第 n 个点阵的点数，使学生理解“字母表示数”的意义，体会用字母表示数的重要思想。

在“同底数幂的乘法”一节，J 教师采用重构式，通过古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 前 287 年～前 212 年）数沙问题（填满宇宙的沙粒数）来再现“幂”这个概念的发生过程，创造学生的学习动机，并从阿基米德在《数沙者》中所提出的以 10 为底的幂的乘法公式出发，导出以 a 为底的幂的乘法运算公式。

在“平方差公式”一节，J 教师从三国时代数学家赵爽的故事引入，并采用复制式，用赵爽在“勾股圆方图注”中所用的图形导出平方差公式；再利用古巴比伦时期的数学问题（已知两个数的和与积，求这两个数）来说明平方差公式的应用。

本阶段教学后的问卷调查表明，86.3% 的学生对数学史知识感兴趣；90.2%的学生认同数学史融入数学教学；96.1%的学生愿意了解数学史知识，并对数学史的教育价值给予积极的评价。

3 从诠释学循环看 J 教师的变化

科学史的诠释学循环最初由德国学者 Jahnke 提出。Jahnke 认为，从方法上看，科学史研究与其他历史研究一样，实质上是一种诠释工作，这种诠释工作具有假设甚至直觉的特征。科学史家对科学理论及其创建者作出诠释，而理论创建者本身又是所在领域的诠释者，无论是科学史家还是科学家，他们的诠释都经历“形成假设、检验假设和修正假设”的循环过程。如图 2 所示，科学家（S）对所在领域（O）进行诠释，建立科学理论（T）；由 S、T 和 O 所构成的循环称为初圈。而科学史家（S_1）对初圈进行诠释，构建科学史（T_1）；S_1、T_1 和初圈构成的循环称为次圈。相应的数学史诠释学循环如图 3 所示，其中 H 为数学史家，M 为古代数学家、O 为数学对象，T 为数学理论，I 为诠释的结果——数学史。

Jahnke 认为，如果数学教师要在课堂上运用数学史，他就必须进入数学史的诠释学循环之中[4]：在数学史家诠释结果（次圈）的指导下，设想自己进入生活在另一个时代、另一种文化的数学家的心灵之中，从而对有关领域作出自己的诠释（初圈），而这种诠释反过来又促进了对数学史家诠释结果的理解。

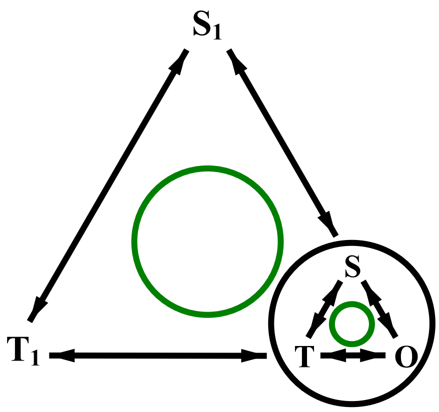


图 2 科学史的诠释学循环图

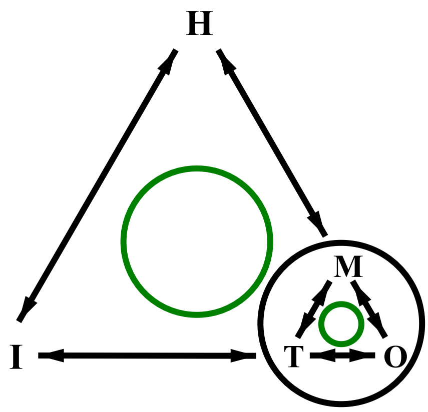


图 3 数学史的诠释学循环图

仿此，洪万生提出数学教学的诠释学循环[5]，如图 4 所示。教材编写者（E）通过对课程标准与数学学科知识（S）的诠释，编成教材（C），E、C 和 S 构成初圈（C_1）；数学教师（T）设想自己进入教材编写者的心灵之中，对初圈进行诠释，确定教学内容知识（I），T、I 和 C_1 构成次圈。洪万生和苏意雯借助两种诠释学循环图，建立数学教师基于 HPM 的专业发展模型[5][6][7]。我们借鉴他们的方法，对 J 教师的 HPM 教学的历程作一简略分析。

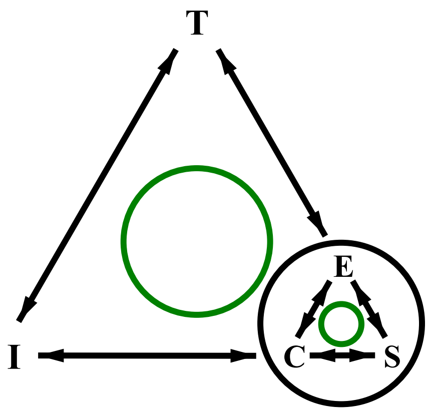


图 4　数学教学的诠释学循环

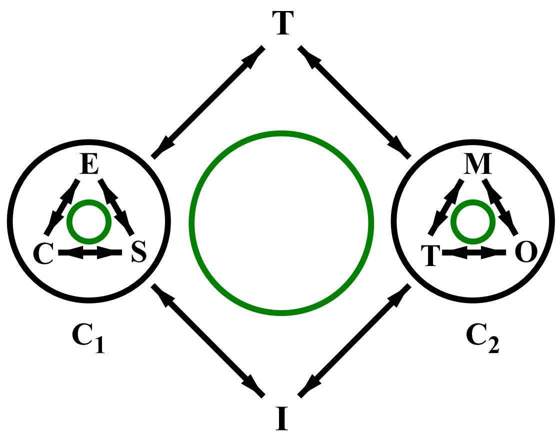


图 5　基于 HPM 的新诠释学循环

J 教师走上教学岗位之后，有幸得到名师引领，钻研教材和教法，逐渐进入图 4 所示的 T-C_1-I 循环之中。7 年的教学实践让她积累了较为丰富的教学内容知识（PCK），用她自己的话说："几个教学轮回下来，已经太熟悉哪一个知识点上该注意些什么。"但其中并不含有任何数学史知识。

在 HPM 介入教学的第一阶段，对数学史的浓厚兴趣以及与学生分享这种兴趣的强烈愿望使 J 教师很快进入图 3 所示的 T-C_2-I 循环（其中 C_2 为 M、T 和 O 构成的初圈）。在"相似三角形的应用"的教学设计中，她确定了如下教学目标：

● 了解《九章算术》和刘徽的相关知识与贡献，了解古希腊数学家几何学的鼻祖泰勒斯测量金字塔的故事，体会数学源于生活并服务于生活的道理。

● 通过例题体会古人如何将实际问题转化为数学问题，并运用相似三角形的性质解决相关问题。

● 通过数学史的引领与融入，提高他们的学习兴趣，增加他们的学习动机，改变学生的数学观。

可见，在这个阶段，J 教师过于偏重数学史的教学，而忽略了原来的 T-C_1-I 循环，换言之，她并未在 C_1 和 C_2 之间建立联系。

在 HPM 介入教学的第二阶段，基于学生与教师的反馈，以及与 HPM 研究者的深入交流讨论，J 教师反思第一阶段的得失，对教学进行了较大的改进。如，在"同底数幂的乘法"的教学设计中，她确定了如下教学目标：

● 知道幂的历史及幂出现的必要性，体会"同底数幂规律"的形成是源于实际问题的解决。

● 通过推导同底数幂运算的性质形成抽象思维的能力。

● 理解并掌握同底数幂运算的性质，并会文字语言与符号语言之间的转化。

● 会运用同底数幂运算的性质进行相关计算。

同样是运用数学史，但 J 教师不再在 T-C_1-I 和 T-C_2-I 两个循环之间顾此失彼，而是将两者融合在一起，换言之，在 C_1 和 C_2 之间建立起密切的联系，如图 5 所示。在这个阶段，教学不再为历史而历史，而是将历史和教材、课程标准有机地融合在了一起。

4 初步的发现

通过课堂观察以及对于她本人、她的同事和区教研员的访谈，我们发现，经过两年的数学史融入数学教学的行动研究，J 教师发生了很大的变化，主要体现在以下方面。

4.1 初步形成了自己的教学风格

对于一名教师来说，要形成自己的教学风格是十分不易的。J 教师自己说："在拥有七年教龄之后，如果没有新的力量来推动，那么教师的教学瓶颈是很难突破的。" HPM 引领她走进一片广阔的新天地，两种诠释学循环的融合导致了教学风格的逐渐形成。她的教学风格可用三个"一"来概括。

● 一种超越。"无时间"、"无资料"、"无知识"、"无考试"是反对在教学中运用数学史的现实理由[8]。考试的压力使得多数教师将教学局限于技术层面，唯恐数学史挤占了课堂训练的时间。在 J 教师的 HPM 教学中，数学史不是摆设，而是改进教学的工具，实践表明，数学史的融入促进了学生的学习，最终也提高他们的学习成绩。因此，J 教师的教学摆脱了应试的藩篱，实现了一种超越。

● 一座桥梁。在 J 教师的课堂上，学生为萨默斯隧道的神奇而惊叹，为泰勒斯的智巧而称奇，为希帕索斯追求真理的执着而震撼，为阿基米德的海边奇思而顿悟，为赵爽的"负薪余日、聊观周髀"而感动，……J 教师的教学已经在数学和人文之间架起了一座美丽的桥梁。美国学者 Bidwell 曾说过："在教学中融入数学史，可以将学生从数学的孤岛上挽救出来，并将他们安置于一个生机勃勃的新大陆上，这个新大陆包含了开放的、生动活泼的、充满人情味的并且总是饶有趣味的数学。"[9]J 教师的 HPM 实践印证了这一断言。

● 一个视角。数学概念的教学设计多种多样，并无定式。但数学史视角关注知识的自然发生过程，从学生认知基础出发，创造学生的学习动机。HPM 介入教学后，J 教师不再"吝惜"概念引入的时间，而常常采用发生教学法，追求自然无痕的境界，学生们在课堂里

获得了如沐春风般的愉悦感。J 教师的实践印证了英国教育家斯宾塞（H. Spencer, 1820～1903）的断言："一般教起来使人觉得枯燥甚至讨厌的知识部门，依照自然的方法就成为极其有趣和非常有益的。"[10]

J 教师在"中学课堂增值行动专题论坛"上的演讲"融入数学史，激发火热思考"荣获一等奖。如今，她的一些 HPM 案例已经成为所任教学校的范例，她的教学风格也引起越来越多人的关注。

4.2 对学生的认知规律有更深的理解

历史发生原理告诉我们，学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性。HPM 先驱者、美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）曾指出："学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难。"[11]而史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）则认为："困扰世界的东西也会困扰儿童，世界克服其困难的方式提示我们，儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难。"[12]M·克莱因（M. Kline, 1908～1992）的观点与卡约黎和史密斯一脉相承：历史上数学家所遇到的困难，正是学生也会遇到的学习障碍[13][14]，因而历史顺序是教学的指南[15]。因此，参照一个数学概念（公式、定理或思想方法）的历史，就可以预测学生对该概念（公式、定理或思想方法）的理解过程，从而实施符合学生认知发展规律的教学。HPM 介入教学后，J 教师经常会在教学中参照历史这面镜子，以历史指导自己的教学。她在"课堂增值行动"案例中写道：

比利时-美国科学史家萨顿（G. Sarton, 1884～1956）说得好："历史告诉我们，一种工具的采用几乎在每一种情形下都是极其缓慢的。""用字母表示数"的历史横跨两千多年，直到 16 世纪末，法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）才首次用字母来表示任意数。历史启示我们：学生对这一思想的理解必定是一个缓慢的过程，在后续的教学中要慢慢体会，绝不能一蹴而就。只有让学生明白这一点，他们才会有信心把它学好，并充满期待。

以史为鉴，J 教师对学生在学习过程中所出现的错误也有了更深刻的理解。

4.3 批判教材的能力得到了提升

随着研究的深入，J 教师从 HPM 的视角来审视教材，批判能力也得到了提高。以下是她对教材中的全等三角形判定定理的思考。

数学课本上给出了"边角边"、"角边角"、"角角边"和"边边边"四种判定方法，其中

对“边角边”、“角边角”的证明是用叠置法进行的，而“边边边”则未经证明直接作为定理给出，只在注释中说明：我们将在以后补上关于“三边对应相等的两个三角形全等”的说理。翻阅教参，发现在该节课的“注意事项”中有这样的说法：“边边边”判定方法，教材是直接给出的，在八年级第一学期将对它进行证明。但事实上，教材利用拼接和等腰三角形知识，只对直角三角形全等作了证明，并未进一步说明“边边边”定理。实际上，用拼接和等腰三角形知识说明“边边边”的方法，根本不用等到八年级，按照课本的体例安排，只要学完等腰三角形的知识，在七年级上学期就马上可以说明了。

数学史上，公元前 1 世纪拜占庭数学家菲罗（Philo）就已经用拼接法证明了“边边边”定理：移动其中的一个三角形，使其一边与另一个三角形的对应边重合，而该边所对顶点与另一三角形的对应顶点位于它的两侧，联结这两个顶点，得到两个等腰三角形，故重合边所对的角相等，于是根据“边角边”定理，两个三角形全等。可见，如果掌握数学史知识，就可以在较短时间内让全等三角形知识形成系统，使学生“知其然又知其所以然”。数学史的教育价值由此可见一斑！

J 教师在设计全等三角形和等腰三角形这部分知识时，对课本的体例作了改动：在讲解完“边角边”、“角边角”、“角角边”这三个定理，就以例题课的形式讲解了等腰三角形定理及欧几里得的证明。以此为铺垫，“边边边”定理的拼接证明也就水到渠成了。

4.4 拓展课本知识的意识得到了增强

用历史的眼光审视教材，J 教师常发现其中的不足之处，于是，就常常拓展一些有利于学生理解、体现知识应用、引人入胜的内容。“全等三角形的应用”就是其中一例。

从历史上看，全等三角形和相似三角形一样，也源于测量。但教材有相似三角形的应用，却无全等三角形的应用，对两个知识点的处理并不一致。J 教师对全等三角形知识作了拓展，结合数学史，增加了一节全等三角形应用课。

首先用“拿破仑遇河”的故事作为情境，引入课题：拿破仑军队在行军途中为一湍急的河流所阻，为架浮桥，亟需测出河的宽度。如何测河宽？这位叱咤风云的法国将军急得团团转。同学们能帮他想想办法吗？J 教师提示：可用全等三角形知识来解决。学生想出了各种各样的测量方法，其中一位学生借助角边角定理来解决，与古希腊泰勒斯的方法如出一辙，而且恰恰也是拿破仑的一名随军工程师想出的方法！但由于没有学过立体几何，这位学生刻画得不够清晰，班里的其他学生对此不甚了了。此时，J 教师介绍泰勒斯及其测量方法，并

图 6 学生在课堂上展示泰勒斯的测量方法

取出课前制作好的教具，让那名学生上台演示，于是，古人的方法清晰而生动地再现于课堂。接着，J 教师让学生进一步设计其他的方案。基于泰勒斯方法的引领，学生不断提出各种新方法。最后，J 教师通过三个例子进一步讲解全等三角形在测量上的应用。

对学生的问卷调查和对师生的访谈都表明，这样的拓展课非常成功，受到师生一致的好评。一位观摩 J 教师“全等三角形应用”课的教师如是说：“如果所有的课都能以这种形式来上，那么学生一定都会喜欢数学课。”一位学生受访时表示，希望学校每周都能开设一次这样的拓展课。

4.5 教学研究能力得到了提高

经过两年的行动研究，J 教师的教学研究能力有了很大的提高。在《数学教学》上发表了一篇 HPM 教学论文，并在上海市教学论文评比中获奖；另一篇论文也在投稿之中。

2011 年 5 月，在华东师范大学主办的第四届“数学史与数学教育国际研讨会”上，J 教师作了“数学史融入初中数学教学的行动研究”的学术报告，获得与会者的好评。自此，J 教师不定期与大学数学教育研究者、研究生以及具有共同爱好的中学数学教师聚会，讨论初中数学中的数学史以及 HPM 视角下的数学教学设计，J 教师如今已经成为国内 HPM 学术共同体的一员。

J 教师在 HPM 教学实践中，充分感受到了数学史的无穷价值，但也深深感受到 HPM 教学的艰难，她在教学反思中写道：“数学史功底的薄弱是一线教师充分发挥数学史教育功能的最大障碍。”HPM 让她认识到自己在历史知识上的欠缺，时时激励她不断学习、不断进步。

5 结语

J 教师的经历表明，HPM 可以有效地促进中学数学教师的专业发展。因此，在教师培训中，有必要加强数学史的教学。不是泛泛讲授数学的通史，而是挖掘中学数学中各个知识点背后的历史；不仅讲授历史，而且讲授如何将数学史用于课堂教学设计。这样，数学史才会引起数学教师的兴趣。

另一方面，研究者可以先开发若干成功的 HPM 教学案例，并将其推广，使广大一线教师看到数学史融入数学教学的真实效果。这样，必有更多的中学数学教师走进 HPM 领域。J 教师让我们看到，中学教师完全能够进入 HPM 学术共同体。

要让 HPM 从书斋真正走进中学课堂，还应加强大学研究者与中学一线数学教师之间的合作，前者进行深入的教育取向的数学史研究，同时引领后者进入数学史的诠释学循环；后者根据自己的诠释，选取适合课堂教学的历史材料，然后将数学史的诠释学循环与原有的数学教学诠释学循环融合起来，设计并实施课堂教学。J 教师的专业成长表明，这种合作富有成效，前景广阔，令人期待。

参考文献

[1] Fauvel, J., 1991. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

[2] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 201-240

[3] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[4] Jahnke, H. N., 1994. The historical dimension of mathematics understanding--objectifying the subjective. *Proceedings of the 18th PME*, Lisbon: University of Lisbon. 139-156

[5] 洪万生, 2005. PCK vs HPM: 以两位高中数学教师为例. 数学教育会议文集, 香港: 香港教育学院数学系. 72-82

[6] 苏意雯, 2004. 数学教师以 HPM 促进专业发展之个案研究. 数理教师专业发展学术研讨会论文, 彰化: 国立彰化师范大学

[7] 苏意雯, 2007. 运用古文本于数学教学——以开方法为例. 台湾数学教师电子期刊, (9): 56-67

[8] Fauvel, J. & van Maanen, J., 2000. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 91-92.

[9] Bidwell, J. K., 1993. Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, **86** (6): 461-464

[10] Spencer, H., 1862. *Education: Intellectual, Moral, & Physical*. New York: Hurst & Company. 151

[11] Cajori, F., 1899. The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 7(5): 278-285

[12] Smith, D. E., 1900. *Teaching of Elementary Mathematics* New York: The Macmillan Company. 42-43

[13] Kline, M., 1966. A proposal for the high school mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, **59** (4): 322-330

[14] Kline, M., 1970. Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, **77** (3): 264- 282

[15] Albers, D. J. & Alexanderson, G. L., 1985. *Mathematical People: Profiles and Interview*. Boston: Birkhäuser

文献研究

椭圆方程之旅

汪 晓 勤

（华东师大数学系，上海, 200241）

今天的中学数学教科书采用椭圆的第一定义，并以此为出发点，通过两次平方，推导出椭圆的标准方程。我们已经太熟悉该推导法，以致不会去想：椭圆方程有过怎样的发展历程？我们还有别的推导方法吗？历史上数学家或数学教科书的作者是怎么做的？对我们有何启示？本文试图对这些问题作出回答。

1 古希腊的几何传统

众所周知，古希腊人先从圆柱或圆锥的截痕中发现了椭圆及其几何性质。公元前 3 世纪，阿波罗尼斯（Apollonius）在《论圆锥曲线》第 1 卷命题 21 中明确给出了椭圆的基本性质：从椭圆上两点分别向直径作两条线段与共轭直径平行，则两线段的平方比等于直径上两条相应线段乘积之比。[1]

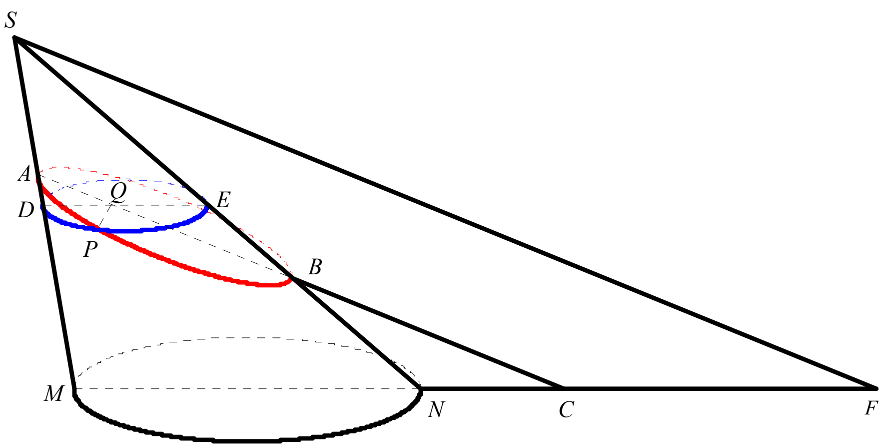


图 1

阿波罗尼斯是从一般斜圆锥（底为圆，顶点为底面所在平面外一点）上获得这一性质的。如图 1，SMN 为圆锥的轴截面三角形，一个平面与底面所在平面的交线垂直于 MN，该平面截圆锥得一椭圆，AB 为它的一条直径。延长 AB，交 MN 的延长线于 C，作 SF $//AC$。过椭

圆上任意一点 P 向 AB 引线段 PQ，与上述平面与底面交线平行；过 Q 作 $DE//MN$，交圆锥与 D、E，过 DE 和 PQ 的平面截圆锥得一圆。于是

$$PQ^2 = DQ \cdot QE = \left(AQ \cdot \frac{MF}{SF}\right) \cdot \left(QB \cdot \frac{NF}{SF}\right) = \left(\frac{MF \cdot NF}{SF^2}\right) AQ \cdot QB$$

因此，$\dfrac{PQ^2}{AQ \cdot QB}$ 为一常数（等于通径与直径之比）。

欧几里得和阿基米得都已熟知该性质，他们同时也知道，这个常数即为椭圆长短半轴的平方比。

据此，若从椭圆上任一点 P 向长轴 AB 引垂线，垂足为 Q，则 $\dfrac{PQ^2}{AQ \cdot QB}$ 为常数，如图 2 所示。在椭圆方程的历史上，该性质起着十分重要的作用，曾在解析几何诞生后的相当长时期内，左右着椭圆方程的形式

$$y^2 : \left(a^2 - x^2\right) = b^2 : a^2 \tag{1}$$

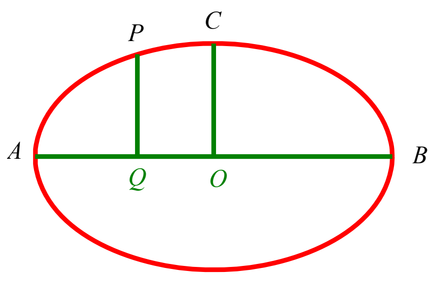


图 2

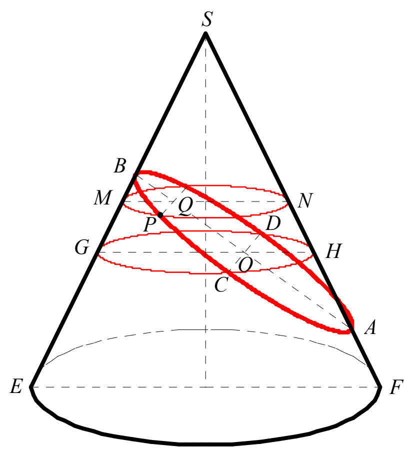


图 3

17 世纪法国数学家费马（P. de Fermat, 1601～1665）在《平面与立体轨迹引论》中证明，方程

$$a^2 - x^2 = ky^2 \ \left(k > 0, k \neq 1\right) \tag{2}$$

表示椭圆[2]，费马依据的就是古希腊数学家所熟知的椭圆的基本性质。

与阿波罗尼斯类似，17 世纪英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616～1703 ）在其《圆锥曲线论》中从圆锥上导出椭圆的基本性质，但用代数语言来表达[3]（以椭圆左顶点为原点）：

$$e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$$

其中 e、d 分别为椭圆上点的纵、横坐标，l 和 t 分别为椭圆的通径和长轴。这等价于我们今天的

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax - x^2\right) \tag{3}$$

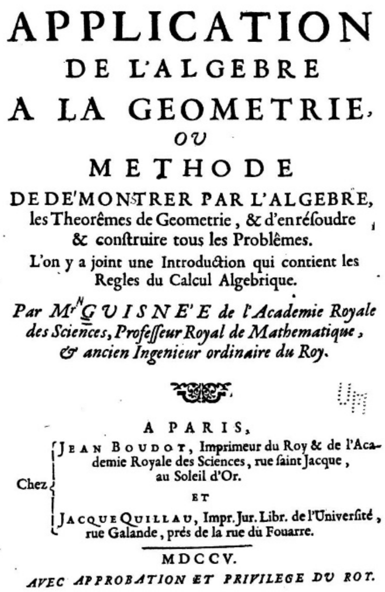
沃利斯首次将椭圆定义为满足上述二次方程的平面曲线。

17 世纪荷兰数学家德・维特（J. de Witt, 1625～1672）在其《曲线基础》（该书曾被誉为历史上第一部解析几何教材）中给出了两类椭圆方程[3]：

$$\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2,\quad \frac{lx^2}{g} = f^2 - y^2 \tag{4}$$

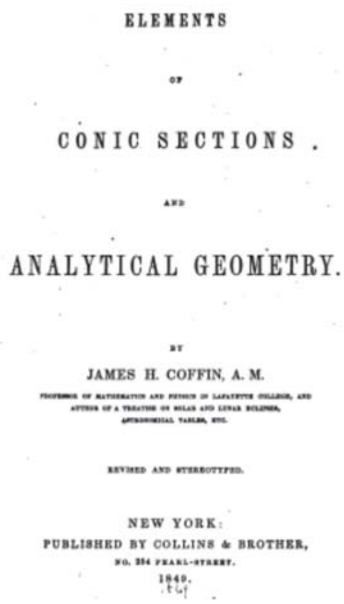
德•维特首先从几何上推导椭圆的基本性质，然后证明方程(4)表示具有该性质的曲线。德•维特还证明了如下命题：平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹为椭圆。

费马和德・维特都没有明确说明方程(2)和(4)中常数（k、l/g）的几何意义（虽然他们一定是知道的），这使得 17 世纪的椭圆方程与今天的标准形式相隔一步之遥。


APPLICATION
DE L'ALGEBRE
A LA GEOMETRIE,
OU
METHODE
DE DE'MONTRER PAR L'ALGEBRE,
les Theorêmes de Geometrie, & d'en résoudre
& construire tous les Problêmes.
L'on y a joint une Introduction qui contient les
Regles du Calcul Algebrique.
Par Mr GUISNE'E de l'Academie Royale
des Sciences, Professeur Royal de Mathematique,
& ancien Ingenieur ordinaire du Roy.

A PARIS,
Chez JEAN BOUDOT, Imprimeur du Roy & de l'Academie Royale des Sciences, rue saint Jacque, au Soleil d'Or.
ET
JACQUE QUILLAU, Impr. Jur. Libr. de l'Université, rue Galande, prés de la rue du Fouarre.
MDCCV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

《代数在几何上的应用》扉页


ELEMENTS
OF
CONIC SECTIONS
AND
ANALYTICAL GEOMETRY.
BY
JAMES H. COFFIN, A. M.
REVISED AND STEREOTYPED.
NEW YORK:
PUBLISHED BY COLLINS & BROTHER,
1849.

《圆锥曲线与解析几何基础》扉页

18 世纪初，法国数学家居西尼（N. Guisnée）出版《代数在几何上的应用》，书中仍然用几何方法来推导椭圆的方程[4]。如图 3，假设 SEF 是一个圆锥，平面截圆锥得到椭圆 $ACBD$；AB 为长轴。设 AB 的中点为 O，过点 O 且平行于圆柱底面的平面，截圆锥得圆 $CGDH$，与

椭圆交于 C、D 两点，于是 CD 即为椭圆的短轴。设 P 为椭圆上任意一点，过 P 且平行于圆柱底面的平面截圆锥得直径为 MN 的圆 PMN，MN 于 AB 交于 Q。设 $OQ=x$，$PQ=y$，$OA=OB=a$，$OC=OD=b$。由三角形 AOH 和 AQN、三角形 OGB 和 QMB 的相似性得

$$\frac{a}{OH}=\frac{a+x}{QN},\quad \frac{a}{OG}=\frac{a-x}{MQ}$$

相乘得 $\frac{a^2}{OG\cdot OH}=\frac{a^2-x^2}{MQ\cdot QN}$，由相交弦定理得 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{y^2}$，即

$$a^2-x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2 \tag{5}$$

19 世纪的部分解析几何著作，如美国数学家柯芬（J. H. Coffin, 1806～1873）的《圆锥曲线与解析几何基础》[5]，干脆直接利用椭圆基本性质来推导椭圆方程。柯芬给出的方程形式是：

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \tag{6}$$

到了 20 世纪，具有悠久历史传统的古希腊几何方法完全被抛弃，椭圆知识的原始发生过程与椭圆方程之间彻底失去了联系。

2 十八世纪的新传统

尽管阿波罗尼斯在《圆锥曲线》中已经发现椭圆的焦半径性质，但在 17 世纪以前，人们所用的椭圆定义仍然是古希腊人的原始定义——圆锥截线定义。18 世纪初，法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）在其《圆锥曲线分析》[6]中彻底抛弃了古希腊人的原始定义，在推导椭圆方程时也完全摆脱了几何方法。和今天的教材一样，洛必达将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹，据此推导椭圆方程。如图 4，设长轴 $|AB|=2a$，短轴 $|CD|=2b$，焦距 $|F_1F_2|=2c$，点 $P(x,y)$ 为椭圆上任意一点。因 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，故设

$$|PF_1|=a+z,\quad |PF_2|=a-z \tag{7}$$

其中 z 为待定参数。这种设法被称为“和差术”，它可以在古代两河流域的数学中找到远源；

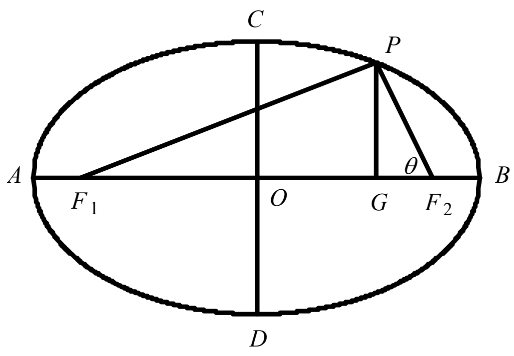


图 4

而古希腊数学家丢番图在其《算术》中频繁用于二次方程的求解。利用两点之间距离公式，洛必达有

$$\left|PF_1\right|^2=\left(a+z\right)^2=\left(x+c\right)^2+y^2 \tag{8}$$

$$\left|PF_2\right|^2=\left(a-z\right)^2=\left(x-c\right)^2+y^2 \tag{9}$$

$(8)-(9)$得$4az=4cx$，故得

$$z=\frac{cx}{a} \tag{10}$$

将(10)代入(8)得

$$a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=x^2+2cx+c^2+y^2$$

于是得椭圆方程（令$a^2-c^2=b^2$）

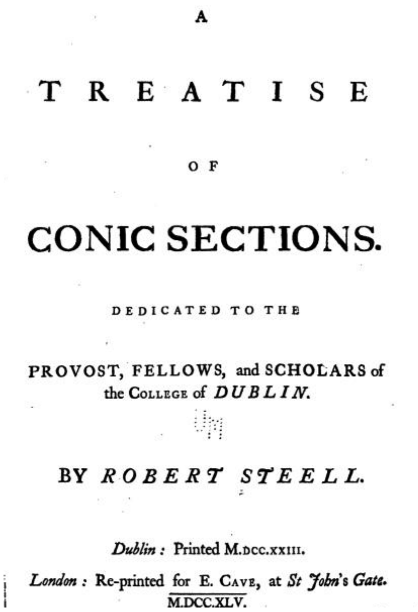
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \tag{11}$$

洛必达称该方程用长、短轴之比完美地表达了椭圆的性质，但他并没有把方程化成我们今天的标准形式。从上述推导过程中，洛必达获得了焦半径公式

$$\left|PF_1\right|=a+\frac{c}{a}x\text{，}\left|PF_2\right|=a-\frac{c}{a}x \tag{12}$$

18 世纪英国数学家斯蒂尔（R. Steell）在《圆锥曲线论》中从椭圆定义出发，给出了另一种推导方法[7]。仍如图 4，设$\left|PF_2\right|=z$，因$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，故$\left|PF_1\right|=2a-z$。由余弦定理得

$$\left(2a-z\right)^2=z^2+4c^2-4cz\cos\theta=z^2+4c^2-4c\left(c-x\right)$$


A

TREATISE

OF

CONIC SECTIONS.

DEDICATED TO THE

PROVOST, FELLOWS, and SCHOLARS of the COLLEGE of *DUBLIN*.

BY *ROBERT STEELL*.

Dublin: Printed M.DCC.XXIII.

London: Re-printed for E. CAVE, at *St John's Gate*.

M.DCC.XLV.

斯蒂尔《圆锥曲线论》扉页


TRAITÉ

ANALYTIQUE

DES

SECTIONS CONIQUES

ET DE LEUR USAGE

POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS

dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.

A PARIS,

Chez MONTALANT, Quay des Augustins, à la descente du Pont saint Michel

M. DCCXX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

洛必达《圆锥曲线解析》扉页

解得$z=\dfrac{a^2-cx}{a}$。再由勾股定理得

$$z^2=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}=y^2+\left(c-x\right)^2$$

整理得方程(6)。

洛必达和斯蒂尔显然并不认可我们今天课本上“平方再平方”的方法，尽管该方法循规蹈矩，按部就班，但毕竟计算繁琐，缺乏创新。洛必达创建了一个新传统。

19世纪众多作者继承了这一新传统。美国数学家杰克逊（I. W. Jackson, 1805～1877）的《圆锥曲线基础》[8]和罗宾逊（H. N. Robinson, 1806～1867）的《圆锥曲线与解析几何》[9]就是其中的例子。后者将(8)和(9)相加，得

$$c^2+x^2+y^2=a^2+z^2 \tag{13}$$

将(10)代入(13)，得方程(6)。

如果说洛必达的“和差术”技巧性太强，不易为新学者所理解的话，那么，19世纪英国数学家赖特（J. M. F. Wright）在《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》[10]中所给的“平方差法”则更为自然，是对新传统的发展。仍如图4，设$\left|PF_1\right|=r_1$，$\left|PF_2\right|=r_2$，则由定义，

$$r_1+r_2=2a \tag{14}$$

且

$$r_1^2=\left(x+c\right)^2+y^2 \tag{15}$$

$$r_2^2=\left(x-c\right)^2+y^2 \tag{16}$$

$(15)-(16)$ 得 $r_1^2-r_2^2=4cx$，即 $\left(r_1+r_2\right)\left(r_1-r_2\right)=4cx$，由此得

$$r_1-r_2=\frac{2cx}{a} \tag{17}$$

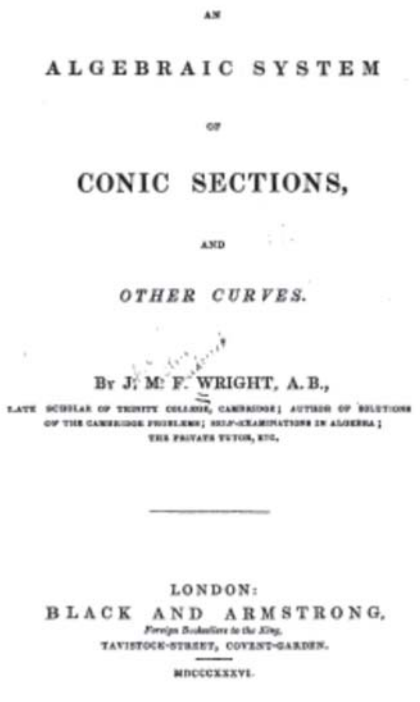
由(14)和(17)得

$$r_1=a+\frac{cx}{a},\quad r_2=a-\frac{cx}{a} \tag{18}$$

代入(15)，整理得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{19}$$

我们司空见惯的标准形式终于闪亮登场了。



AN

ALGEBRAIC SYSTEM

OF

CONIC SECTIONS,

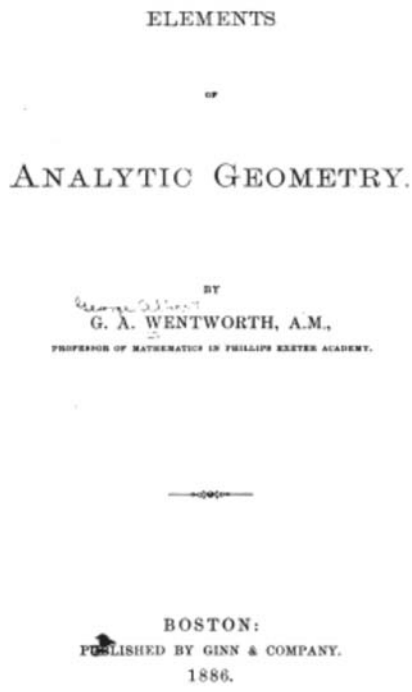
AND

OTHER CURVES.

By J. M. F. WRIGHT, A.B.,

LATE SCHOLAR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AUTHOR OF SOLUTIONS OF THE CAMBRIDGE PROBLEMS; SELF-EXAMINATIONS IN ALGEBRA; THE PRIVATE TUTOR, ETC.

LONDON:
BLACK AND ARMSTRONG,
Foreign Booksellers to the King.
TAVISTOCK-STREET, COVENT-GARDEN.
MDCCCXXXVI.



ELEMENTS

OF

ANALYTIC GEOMETRY.

BY

G. A. WENTWORTH, A.M.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN PHILLIPS EXETER ACADEMY.

BOSTON:
PUBLISHED BY GINN & COMPANY.
1886.

赖特《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》　　温特沃斯《解析几何基础》扉页

类似地，美国数学家戴维斯（C. Davies, 1798～1876）在《解析几何基础》[11]中由(15)和(16)同时得到

$$r_1^2+r_2^2=2\left(x^2+y^2+c^2\right) \tag{20}$$

将(18)代入(20)，整理得方程(6)。美国数学家温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835～1905）在《解析几何基础》[12]中也采用了同样的方法。

3 新传统的消失

笔者考察了 18-20 世纪西方 45 种解析几何教材（包括上面提到的各种教材）对椭圆及其方程的处理方式，下表给出了统计结果。

时 代	教材数	采用的椭圆定义	椭圆方程的推导方法
18 世纪	3	原始定义（1）	几何方法（1）
		第一定义（2）	和差术（1）；余弦定理（1）
19 世纪	16	原始定义（1）	几何方法（1）
		第一定义（10）	和差术（2）；平方差法（3）；两次平方法（5）
		第二定义（5）	平方法（5）
20 世纪	26	第一定义（14）	平方差法（1）；两次平方法（13）
		第二定义（11）	平方法（11）
		变换定义（1）	变换法（1）

在 19 世纪的教科书中，基于第一定义的椭圆方程推导方法呈现多元化的特点，和差术、平方差法以及两次平方法并存。除了前面提到的教材，英国数学家萨尔蒙（G. Salmon, 1819～1904）的《圆锥曲线论》[13]（1855）、卡西（J. Casey, 1820～1891）的《点、线、圆与圆锥曲线之解析几何论》[14]（1885）、美国数学家纽库姆（S. Newcomb, 1835～1909）的《解析几何基础》[15]、哈代（A. S. Hardy）的《解析几何基础》[16]均采用了两次平方法。

然而，到了 20 世纪，教材中的这种多元化特点消失殆尽。一方面，更多的教材采用椭圆的第二定义；另一方面，采用第一定义的教材在推导椭圆方程时，几乎都选择了两次平方法。18 世纪数学家的方法逐渐被人们所抛弃或遗忘。

今天，中国和日本数学教材[17]采用的就是椭圆第一定义和两次平方推导法。但俄罗斯数学教材是个例外。俄罗斯教育出版社出版的数学教材[18]从椭圆第一定义出发，采用了平方差法，但不再引入新的参数：

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{4cx}{2a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

4 结语

椭圆方程的历史表明：历史上椭圆方程的推导方法经历了不同的传统，折射出了解析几何的发展轨迹；18-19 世纪数学家或教科书作者“八仙过海，各显神通”，他们所设计的方法精彩纷呈，各具特色；20 世纪以后，教材所采用的方法逐渐趋于单一，古希腊的几何传统和以洛必达为代表的 18 世纪数学家所创建的新传统逐渐被人们遗忘。

椭圆方程的历史对我们有何启示呢？

(1) 解析几何的发展导致古希腊几何传统的失落，从而使椭圆知识原始的自然发生过程逐渐被人忽略。但若要在椭圆的教学中追求返璞归真，就需要历史这面镜子。

(2) 椭圆方程的历史开阔了我们的视野，教材中呈现的两次平方法不过是历史上许多方法中的一种而已。若要丰富椭圆方程的教学，拓宽学生的思维，就需要在历史这座宝藏中汲取养料。

(3) 洛必达的和差术也是通法，因为它们同样适用于双曲线方程的推导。实际上，和差术在指数函数、三角函数、数列、不等式、向量等其他知识领域有着广泛的应用，值得我们进一步关注。

(4) 较之洛必达的和差术，赖特的平方差法更为自然，但毕竟赖特也使用新的字母来表示焦半径，故今日俄罗斯教材的简化处理更为可取。

(5) 椭圆方程的历史是一个十分细微的课题，但其中蕴含了出富有教育价值的内涵。我们有理由相信，面向教育的数学史是一个无限广阔的研究领域，是未来 HPM 研究的重要方向。

参考文献

[1] Apollonius. *Conics* (translated by R. C. Taliaferro). In: R. M. Hutchins (ed.), *Great Books of the Western World* (11). Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc., 1982. 628-629

[2] Struik, D. J. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press, 1986.143-150

[3] Boyer, C. B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956. 110-117

[4] Guisnée, N. *Application de l'Algebre à la Geometrie*. J. Boudot et J. Quillau, 1705. 71-72

[5] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections & Analytical Geometry.* New York: Collins & Brother, 1849. 99

[6] L'Hospital, M. de. *Traité Analytique des Sections Coniques*. Paris: Montalant, 1720. 22-25

[7] Steell, R. *A Treatise of Conic Sections*. London: St John's Gate, 1745. 17

[8] Jackson, I. W. *Elements of Conic Sections*. Albany: Gray and Sprague, 1850. 6-7

[9] Robinson, H. N. *Conic Sections & Analytical Geometry.* New York: Ivison, Phinney & Co., 1862. 140-141

[10] Wright, J. M. F. *An Algebraic System of Conic Sections & Other Curves*. London: Black & Amstrong, 1836. 94-95

[11] Davies, C. *Elements of Analytic Geometry*. New York: A. S. Barnes & Co., 1867. 95-96

[12] Wentworth, G. A. *Elements of Analytic Geometry*. Boston: Ginn & Company, 1886. 136-138

[13] Salmon, G. *A Treatise on Conic Sections.* London: Longman, Brown, Green, & Longmans, 1855. 161-162

[14] Casey, J. *A Treatise on the Analytical Geometry of Point, Line, Circle & Conic Sections.* Dublin: Hodges, Figgis, & Co., 1893. 204

[15] Newcomb, S. *Elements of Analytic Geometry*. New York: Henry Holt & Company, 1884. 131

[16] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry*. Boston: Ginn and Company, 1895. 78-79

[17] 大矢雅则等. 新编数学 C. 东京都: 数研出版株式会社, 2007. 48-49

[18] Атанасян Л. С. *et al. Геометрия*. Москва: Просвещение, 2006. 211-212

教学实践

基于旦德林双球模型的椭圆定义教学*

陈锋[1]　王芳[2]

（1. 浙江省义乌市第四中学；2. 浙江省义乌中学；义乌, 322000）

历史上，古希腊人先是从圆柱或圆锥的截口上发现椭圆。公元 3 世纪，阿波罗尼斯在《圆锥曲线》中采用了截线的定义，并在多达七个命题的基础上，导出了椭圆的焦半径之和等于常数这一性质。17 世纪，荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615～1660）给出了椭圆的三种作图工具，其中一种即利用了焦半径之和为常数的性质。法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）在《圆锥曲线分析》中抛弃了阿波罗尼斯的截线定义，将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹。直到 1822 年，比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794～1847）在一篇论文中才利用圆锥的两个内切球，直接在圆锥上导出椭圆的焦半径性质，从而证明了截面定义与轨迹定义的统一性。

人教 A 版高中数学课程标准实验教科书之"选修 2-1"中，"椭圆及其标准方程"一节先直接给出椭圆的画法，再给出椭圆的定义。调查表明，学生对此心存疑惑：椭圆的画法是怎么产生的？为什么定点是 2 个，而不是 3 个？为什么是距离之和，而不是距离之差呢？为什么是距离，而不是其他呢？显然，这些疑惑源于教学中对椭圆知识发生过程的忽略。

笔者借鉴椭圆知识发生和发展的历史，运用发生教学法，在浙江省某重点中学实施了一次教学实验，取得很好的效果。本文给出课堂实录片段和教学反思。

1 课堂实录

首先通过 PPT 放映校园内的球在太阳下的影子图片，引导学生观察球在水平地面上影子轮廓的形状。学生很快回答说，轮廓是椭圆。显然，学生很熟悉生活中的"椭圆"。

师：为了让大家看得更清楚些，我们做一个模拟实验，用手电筒模拟太阳光照射小球。

师：当平行光垂直照射时，球的影子的轮廓是什么形状？

生：圆。

* 本文为浙江省义乌市王芳数学教育工作室"HPM 系列案例"之一，将发表于《数学教学》。

师：很好，那圆的圆心在哪里？

生：哦，就是球与桌面相切的切点。

师：也就是说，圆上的点到切点的距离是定值。

师：当平行光开始倾斜照射时，球的影子轮廓上的点到切点的距离显然已经不是定值，那它还有没有其它规律可循呢？

（教师用几何画板模拟平行光照射球的过程，在立体几何图形上探究各个几何元素之间的关系。）

师：下面，我们用几何画板动画模拟平行光照射球的过程。（图 1）

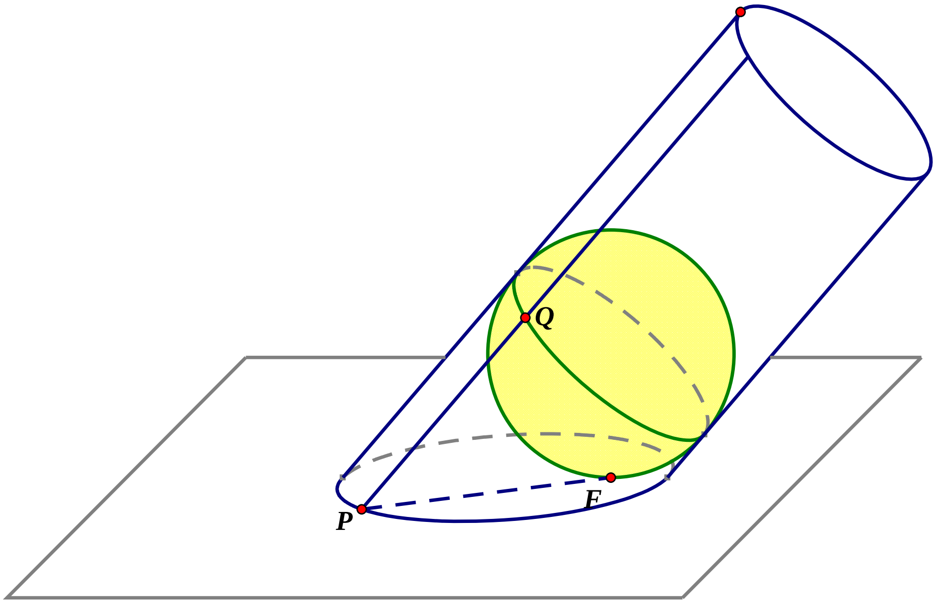


图 1

师：实际上，椭圆形影子的轮廓是由一束特殊的平行光照射在平面上产生的。这一束特殊的平行光可以看成是一个与球相切的圆柱面。这时候，椭圆形影子的轮廓可以看成…？

生：圆柱面与平面的交线（平面与圆柱面截出来的）。

师：很好。我们设球与平面的切点为 F，在轮廓上任取一点 P，连接 PF，经过 P 点的光线 PQ 与球相切于点 Q。当点 P 在椭圆上运动时，有哪些点、线、面的位置与长度在变化，而哪些关系没有变？

（学生观察动画，思考并整理，由于前面的手电筒照射球实验，学生把目光都集中在点 P，和线段 PF 上。）

生：线段 PF 的长度在变化，而且很有规律，好像是先变长后变短；

生：线段 PF 始终在平面上，光线 PQ 始终在圆柱面上；

生：线段 PF 都交于点 F，光线 PQ 始终平行；

生：光线 PQ 始终与球相切，线段 PF 也始终与球相切；

生：线段 PQ 等于线段 PF；

………………

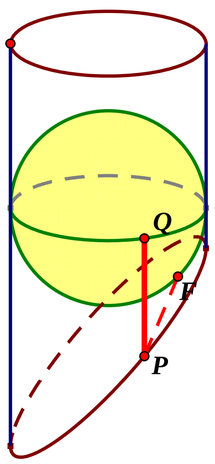


图 2

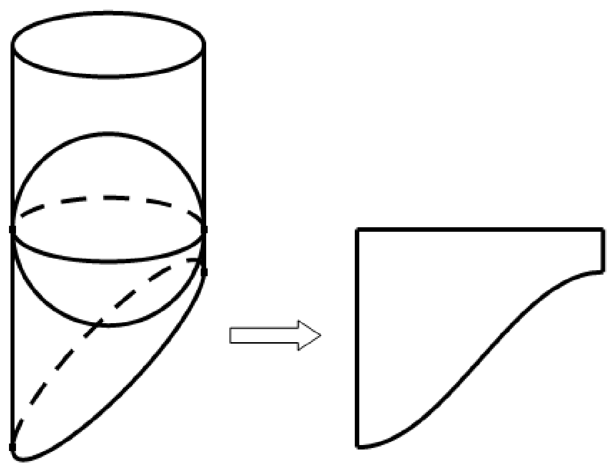


图　3

师：非常好。不论点 P 运动到哪里，线段 PQ 与线段 PF 的长度始终相等，而线段 PQ 是圆柱面上的平行线，研究起来比较方便。为了更方便地研究线段 PQ 长度的变化规律，我们把圆柱面竖直放置。

（利用事先准备好的教具，在实物上借助小纸片将圆柱面展开成平面图形，再开展学生小组活动来研究 PQ 的长度变化规律。）

师：（手拿实物教具）面对圆柱面上的这些平行线，我们一般怎么处理？

生：展开成平面图形。（事先准备好展开的纸片，用蓝黄两种颜色）

师：很好，立体问题平面化是我们常用的策略。展开时，利用前后对称性，其实只要展开一半（边说边展开）。

师：现在我们在这个平面图形上来研究线段 PQ 的变化规律。老师事先也准备了很多这样的彩纸。下面我们前后 6 位同学一组，每组两张不同颜色的彩纸，一起研究，看看大家能否发现有价值的关系或特征。

（学生活动 5 分钟。展示 3 种不同的发现。）

师：经过大家的努力，我们得到了三种不同的方案，下面请发现者叙述他们的结论。

生 1：拼起来是矩形，线段长度之和为定值；

生 2：两张纸拼起来像正弦曲线的一部分；

生 3：两张纸拼起来得到一个曲边的四边形，他们的长度之和好像也是定值。

图 4

师：我们分析一下这三种方案。

生 4：我首先否定方案 2，它实际上只是把圆柱面整圈都展开，没有实质性进展。

生 5：我否定方案 3，曲边四边形不好驾驭。

生：方案 1 最好，矩形中两段线段长度和是定值，很对称。

师：很好。我们回到实物模型上去，方案 1 给我们什么启示？

生：在圆柱面的下方补一个对称的圆柱面，形成一个完整的圆柱面。（马上实现学生的想法）

生：当点 P 在截线上运动时，上下两段线段之和始终不变。

师：很好，我们再一次回到动画中，下方补一个圆柱面。（图 5）当点 P 运动时，$|PQ|+|PR|$ 是定值。根据对称性，上面有一个球与截面相切……

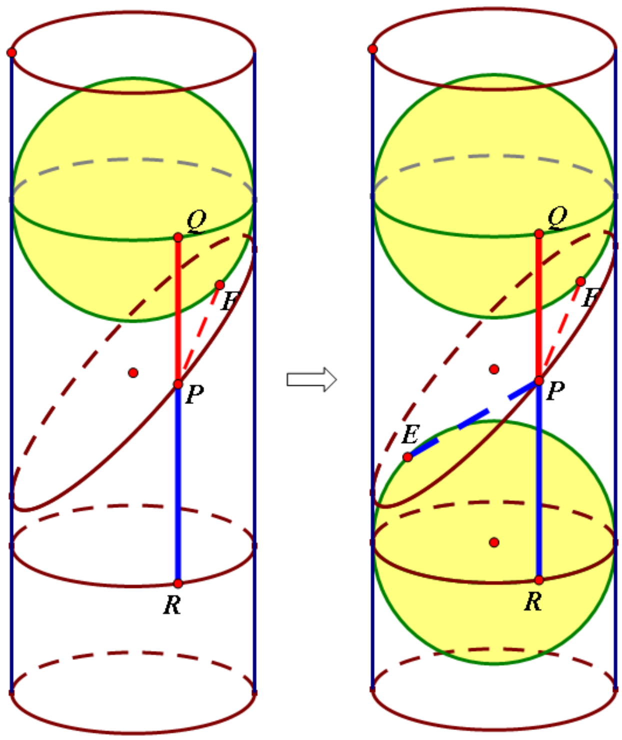


图 5

生：下面也有一个球。

师：很好，我们设球 O_2 与截面相切的切点为 E，根据前面的分析，我们可以得到什么关系？

生：$PE=PR$。

生：哦，原来$|PE|+|PF|$是定值！（学生们不约而同地喊了出来）

师：对，这个性质对椭圆上所有的点都成立吗？

生：成立。

师：毕竟椭圆是平面图形，我们把这个椭圆所在的平面拿出来。从度量的角度来看，$|PE|+|PF|$是定值。（动画演示，如图 6）

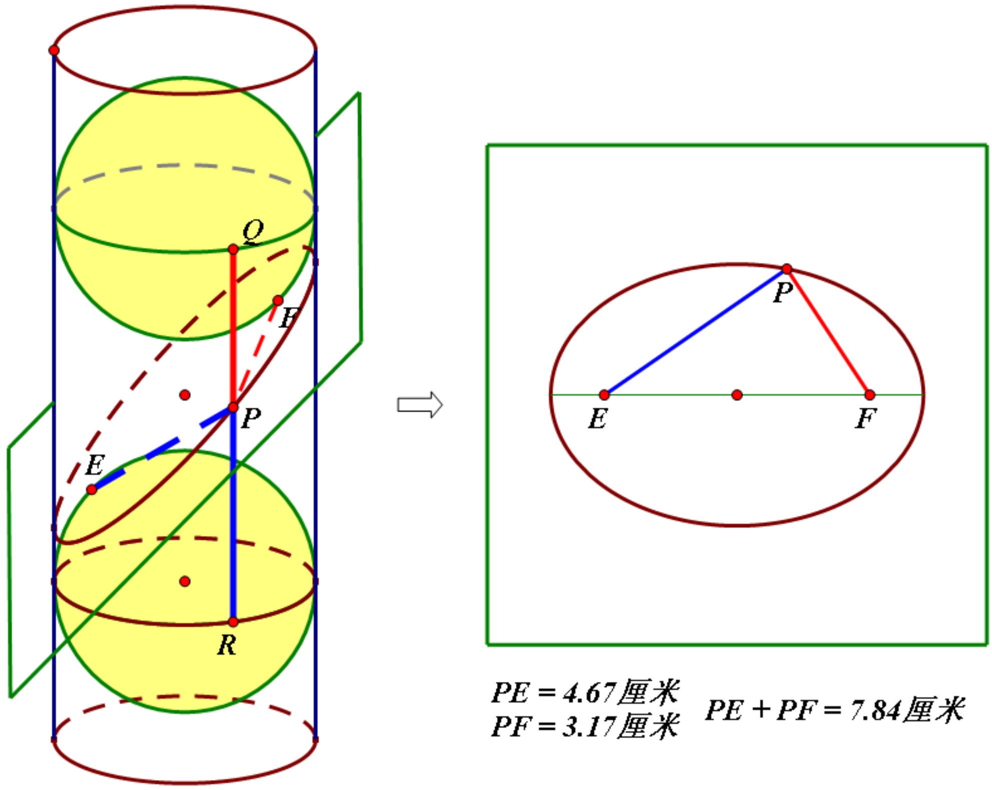


图 6

师：当截面的角度发生改变时，椭圆的大小发生变化，我们再来看看$|PE|+|PF|$是不是都为定值。（动画演示）

师：通过试验，我们发现整个椭圆体系都有这样的特性：都存在两个定点 E，F，使得椭圆上所有的点 P 满足$|PE|+|PF|$是定值。我们把这两个定点叫做椭圆的焦点，通常用 F_1，F_2表示。那么，我们可以给椭圆下一个什么样的定义呢？

生：平面上到两定点的距离之和为定值的点的轨迹叫椭圆。

师：很好，这位同学提到了在平面内，考虑到椭圆是平面图形。下面请同学们翻到书本

第 38 页认真阅读椭圆的定义这一段内容。

师：请大家思考，为什么这个常数要大于$|F_1F_2|$?

生：因为在三角形中两边之和要大于第三边。

师：对，看来我们给一个数学概念下定义时，要注意措辞的精确性。

师生：我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做椭圆。这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距。

生：丹德林双球试验里上下两个球与截面的切点就是截面椭圆的焦点。也就是说球与地面的切点就是阴影轮廓椭圆的焦点。

2 设计意图说明

本节课采用了发生教学法。从生活中的椭圆入手，重构历史，让学生经历从截面定义到书本定义的知识发生过程，基于旦德林双球实验，开展学生探究，数学实验等一系列活动。

人教 A 版选修 2-1 的课后探究与发现专门介绍了在圆锥内的旦德林双球模型，教材的编者也想让学生了解这段著名历史，但是基于难度较大，需要花较多的教学时间，不得已将这段内容放在课后阅读材料中。本节课采用以下方法来突破旦德林球这一难点：第一，采用圆柱内的旦德林双球模型，上下两个球是等半径的；第二，关键环节运用实物演示实验，设计学生探究活动；第三，利用几何画板，富有立体感地展现各几何元素之间的关系和动态的运动过程。教学时间的问题与上述难点突破是相辅相成的，笔者第一次上这节课时，由于启发不到位需要花费大量的时间来完成整节课，并且学生的学习效果并不好，但是通过改进教学流程，取得了理想的效果。

关于几个教学难点，说明如下。

（1）关于手电筒照射球的实验。

球在斜射阳光的照射下，影子是椭圆这个事实学生是认同的，但从中抽象出旦德林单球模型是很难想到的。我们知道，球与地面的切点就是椭圆的焦点，在本节课中，这个切点的作用至关重要。但由于切点淹没在黑暗中，被球挡住了，不便于观察，也很难去注意它，因此要在图 2 中弄清楚各种几何要素的相互关系就更难了。笔者第一次上实验课时，让学生寻找单球模型中的关系时，由于没有铺垫过，学生的答案五花八门，比如光线越倾斜，影子拉得越长；光线越强，影子越暗等。很少有学生能从相切，长度的角度去研究问题，大部分学生都没注意到切点 F。

为此，笔者设计了用手电筒照射球的现场实验，一是激发学生的兴趣，二是启发学生关注切点的重要性。光线从垂直照射到斜射，影子从圆变成椭圆，而切点就是圆的圆心，并且圆上的点到切点的距离是定值，倾斜照射时，切点还在，但椭圆上的点到切点的距离已经不是定值了。那么，椭圆上的点到切点的距离有其他的规律吗？这就为后面的结论“切点就是焦点”做了铺垫。笔者在重新上课时，学生就能在几何画板中关注到切点 F，关注线段 PF 与 PQ 的长度关系。

圆是学生熟知的知识，阳光斜射球，影子是椭圆也是学生熟知的现象。通过上述实验将两者之间联系在一起，充分考虑到学生的认知基础和教学新知识的过渡与衔接。

（2）关于学生拼凑纸片的活动

面对倾斜的半个圆柱面，学生很难想到它的另一半，更难想到下面再来一个球，得到另一个切点。原因是多方面的，其一，圆柱面是倾斜的，对称思想不易想到；其二，圆柱面出现在几何画板中，出现在学生的抽象思维中，过于抽象不利于学生思考；其三，“补”的过程本身就很难。

因此，为了减低难度，首先将倾斜的圆柱面竖直放置，其次准备圆柱面的实物教具，让学生能看得到摸得着圆柱面，大家想办法。学生面对实物时马上就统一意见：将圆柱面展开成平面图形试试看。笔者顺势将班级分成若干个小组，让学生动手试验，小组讨论。学生的思路很多，经过比较判断，大家能一致认同方案 1，补形思想就已经成型了。

通过这样的学生活动，能让学生自己发现补形思想，体验成功的快乐，也能培养学生的动手能力和思考能力。

（3）关于截面平面化的动画

旦德林双球试验是立体几何的方法，而教材上呈现的是椭圆的平面画法。椭圆毕竟是平面图形，因此有必要将两者统一起来。另外，用不同角度的光线照射球，或者用不同倾斜程度的平面去截圆柱面，会得到大小不一的椭圆。有必要证实一下椭圆体系都满足定义。

基于以上两点，笔者利用几何画板强大的动画功能，将圆柱面上的截面直观图通过一个动态的渐变，变成平面图，再在平面图上制作一个动画，通过度量工具证实了椭圆上的点到两定点的距离之和是定值这个事实，这就实现了旦德林双球试验与教材的统一。最后通过改变截面的倾斜角度，得到大小不一的椭圆，再重复上述动态的度量过程，证实了椭圆体系的严谨性。

3 学生反馈

课后笔者作了大量的跟踪调查，学生们对本节课中的各个环节都作了评价。

（1）对于用手电筒照射球的实验过程，74%的同学认为能激发他们的探究兴趣，26%的同学认为自己可以想象，不需要具体做这个实验。

球在倾斜阳关的照射下，在地面上产生椭圆型轮廓，这是生活中很常见的现象，这就是学生学习椭圆的认知基础。本节课从垂直照射到倾斜照射，影子从圆变成椭圆，圆上的点到切点的距离是定值，到椭圆上的点到切点的距离不是定值。这种认知冲突正是学生的学习兴趣的起源。

（2）对于书本上“两个钉子、一根绳子”的椭圆画法的来历，83%的学生认为很有必要了解，通过丹德林双球实验更能理解椭圆焦点的产生过程，更能理解书本上椭圆的画法。

（3）关于课堂上得出椭圆定义的过程，64%的学生表示能够复述，36%的学生表示有印象。33%的学生课后思考过上课时拼凑纸片环节所得到的曲线和曲边四边形两种情形，并能理解为什么。

用立体几何模型探究椭圆的定义，给学生留下深刻的印象，并能在课后复述整个过程，说明学生已经深刻理解定义。虽然探究环节花的时间比较长，但是学生的体验和感受是很宝贵的收获。

（4）关于本节课的授课方式，82.7%的学生认为，若有条件，教师应多采用。

4 结束语

著名教育家第斯多惠说过：“一个坏的教师奉送真理，一个好的教师则教人发现真理”。普通高中数学课程标准也指出，教学要体现数学知识的发生发展过程，促进学生的自主探索。教师应该注意创设情境，从具体事实出发，展现数学知识的发生、发展过程，使学生能够从中发现问题、提出问题，经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉。发生教学法与第斯多惠的“基础教学法”一脉相承，与新课程理念若合符节。实践表明，采用发生法讲授椭圆的定义，激发了学生的学习兴趣，创造了学生的学习动机，加深了学生的概念理解，得到了学生的普遍认同。

HPM 视角下椭圆概念教学的意义*

王 芳　汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，2000621；浙江省萧山中学，杭州，311201）

1 问题的提出

自 2005 年第一届“全国数学史与数学教育会议”在西北大学召开以来，HPM 日益受到我国数学教育界的关注，关于数学史教育价值的讨论层出不穷，一些 HPM 教学案例亦悄然诞生。HPM 在情感态度价值观方面的作用得到了广大数学教育工作者的认同，而在认知方面的作用却始终受到质疑，这就造成了 HPM 在公开课、评比课上频繁亮相，而在日常教学中却无人问津的现象！

在 2011 年第四届数学史与数学教育会议上，浙江省义乌市第四中学陈锋教师作了“基于旦德林双球实验的椭圆教学”的报告[1]，引发了热烈的讨论。与会者肯定了这一案例在激发学生兴趣，创造学生学习动机方面的作用，但该案例比椭圆概念的传统教学耗时更多，因此，有与会者从“教学效率”和学生认知角度对该案例提出了质疑。针对这些肯定与质疑，笔者结合自己的调查，对 HPM 视角下的椭圆概念教学进行更深入的思考。

本文试图回答以下问题：经历了椭圆教学的学生对椭圆最深刻的印象是什么，他们对椭圆概念的把握是否完整？椭圆概念的传统教学与 HPM 视角下的教学有何本质区别？HPM 视角下的椭圆概念教学除了具备情感态度价值观方面的作用，在认知方面是否也存在不可替代的作用？

2 学生对椭圆概念的认知

2.1 两个问题暴露学生对于椭圆认知的缺陷

有两个数学问题引发笔者关注学生对椭圆概念的认知。

例 1（2008 年浙江高考理第 10 题）：如图，AB 是平面 α 的斜线段，A 为斜足。若点 P

---

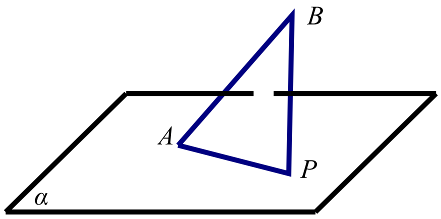
* 本文将发表于《中学数学月刊》2012 年第 4 期。

在平面 α 内运动，使得ΔABP 的面积为定值，则动点 P 的轨迹是

（A）圆　　　　　　　　　　　（B）椭圆

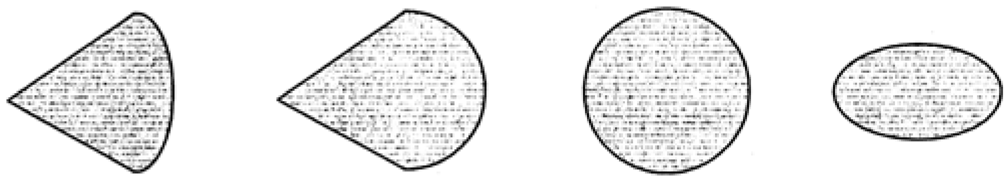
（C）一条直线　　　　　　　　（D）两条平行直线

分析：这一问题是当年浙江高考卷选择题的最后一题，不仅困扰了很多学生，还困扰了很多教师。解决的关键是到直线 AB 的距离为定值的点的轨迹是圆柱面，而圆柱面被平面斜截所得的截线当然是椭圆。该问题的困难之处当然在于把“面积为定值”化归为“点的轨迹



为圆柱面”，但是如果学生对于椭圆的认知是建立在圆锥（柱）截线的基础上，那么这一化归就未必不能完成，更何况四个选项实质就是圆柱面的四类截线，显然大部分教师与学生对此并没有感觉。

例 2（2009 年浙江会考卷第 26 题）一不透明圆锥体的底面半径为 5，母线长为 10，若将它的顶点放在水平桌面上，则该圆锥体在桌面上的正投影不可能为



等腰三角形两腰与半椭圆围成的区域（A）　等腰三角形两腰与半圆围成的区域（B）　圆形区域（C）　椭圆形区域（D）

分析：这一问题虽然出自于会考题，作为笔者任教的省重点中学的学生，处理会考题本不应该成为一种困难，然而这一问题却同样困扰了很多学生，显然他们对于圆面只有在平行于投影面时它的正投影才是圆，当圆面不平行且不垂直于投影面时它的正投影为椭圆这一知识不甚了了。

上述两个问题均与椭圆有关，但所涉及的并不是椭圆的轨迹定义——平面上到两个定点的距离之和为定值的动点轨迹，而是圆锥截线这一椭圆最原始的定义以及椭圆与圆的密切联系。那么，什么才是椭圆最本质的定义？我们在教学过程中是否忽视了对椭圆本质的把握？

2.2 关于椭圆认知的调查及其结果分析

为了大致把握学生对于椭圆的认知情况，笔者分别于 2011 年 12 月 23 日、24 日、28 日对所任教高中的 145 位高三学生（90 位文科，55 位理科）进行了一次问卷调查，问卷只有一个问题："关于椭圆你能想到什么，请把你想到的全部写下来，谢谢！"调查结果如表 1 所示。

（1）第 1-6 类涉及的是椭圆的定义，很多学生尤其是文科生提到鸡蛋、橄榄球、柠檬等生活中的椭圆，理科生提及生活中的椭圆虽然少些，但更多的学生绘制了椭圆的图形，还

表 1　高三学生关于椭圆认知的调查结果

编号	分　类	文科（90）	理科（55）	总计
1	生活中的椭圆	45	7	52
2	绘制椭圆的图形	8	10	18
3	变形的圆	6	3	9
4	圆锥（柱）截线	19	1	20
5	到两定点距离和为定值（第一定义）	24	12	36
6	第二定义	0	5	5
7	圆锥	1	1	2
8	圆锥曲线（圆、双曲线、抛物线）	14	7	21
9	方程（标准、参数、极坐标）	37	18	55
10	椭圆的几何性质	59	26	85
11	解析几何（解题方法）	18	7	25
12	椭圆在生活中的应用	14	4	18
13	其它	19	14	33

有少数同学提及"变形的圆"，虽然表述并不科学，但却隐含着圆与椭圆的联系。可见即使学过椭圆概念，学生对于椭圆最直觉的反应并不是轨迹定义，而是椭圆的几何形态，这才是学生真正的认知起点。同时对于椭圆定义的呈现也能显现出教学干预的结果，人教版的教材已经删去了圆锥曲线的第二定义（统一定义），但在笔者所在学校，理科班教师对此略有补充，所以理科生中有学生提及了统一定义，而文科生没有。参与调查的 90 位文科生源于笔者本人任教的两个班级，这两个班级的椭圆概念教学都始于圆柱截线，借助旦德林球将圆柱截线的定义与轨迹定义联结起来，因此有 19 位学生提及了圆锥（柱）截线这一定义，

几乎与轨迹定义相近，而 55 位理科生中则只有一位学生提及。

（2）第 8-11 类则可以说完全是教学干预的结果，椭圆方程、椭圆的几何性质以及解析几何的方法，已经成为了学生对于椭圆认知的核心内容，掌握解析几何的思想方法，用代数研究几何图形当然是必要而有意义的，调查结果表明了高中解析几何教学的成功，但是对比椭圆的定义，尤其是圆锥（柱）截线定义的苍白，我们不能不说这同样也是椭圆教学的缺憾！

（3）提及圆锥的同学不能确定是想到圆锥截线，还是解析几何，所以将它单独归类。提及椭圆的应用的学生虽然只是少数，但能将椭圆联系到天体运行轨道，尤其是联系到开普勒定理，说明他们对椭圆的认知已经更深一层，椭圆概念不仅仅是数学知识，更是解决实际问题的工具。

（4）还有一些同学提到的是“压轴题”，“计算复杂”，“解析几何很难”等，笔者都将它们归入其他一类中，看着这些字眼，学生虽然掌握了解析几何的知识与技能，是不是也同时牺牲了他们对于解析几何的兴趣与认同，可见我们的教学确实还有值得反思的地方。

从调查结果可见，学生头脑中存在两种椭圆表象：一种是生动鲜活的生活中的椭圆表象，有些学生甚至能将椭圆与圆结合在一起识别比较，更有部分能力强的学生能够体会到椭圆在现实生活中的作用。生活中的椭圆，是学生头脑中磨灭不了的椭圆表象，也是对椭圆最初的认知。另一种椭圆表象，融合了椭圆的轨迹定义、椭圆的方程以及椭圆的几何意义，虽然是教学干预的结果，但是长时间的训练，使得学生对这一椭圆教学形态的印象同样深刻。

然而传统椭圆教学下的学生头脑中的两种椭圆表象是彼此割裂的，他们的头脑中缺乏椭圆基于生活中的椭圆表象的椭圆的截线定义，当然更不能将椭圆的截线定义与轨迹定义的融合。对于学生而言椭圆的定义、方程及几何意义只是解决解析几何问题的工具，与生动的椭圆表象是没有联系的，学生在进行繁琐的解析几何运算的过程中甚至连椭圆的表象也是没有的，这正是传统椭圆教学的缺陷，它割裂了椭圆的原始形态与解析几何形态。

3 HPM 视角下的椭圆概念教学

HPM 视角下的椭圆概念教学是在重构椭圆历史顺序的基础上完成的（图 1），椭圆的历史包括：古希腊人发现椭圆、3 世纪阿波罗尼斯给出截线定义及推导了椭圆的基本性质与焦半径性质、17 世纪荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615～1660）给出利用椭圆的焦半径性质作图的方法、法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）给出椭圆的轨迹定义并推导椭圆的方程。其中最后的机械作图法、轨迹定义、椭圆方程构成了人教版教材的顺序。

HPM 视角下的椭圆概念教学借助于旦德林球沟通了椭圆的截线定义与轨迹定义，由截线定义跨越了复杂的基本性质推导过程直接过渡到轨迹定义，便于学生的理解。教学过程如图 2 所示，包括创设情境、介绍椭圆的截线定义、推导椭圆的焦半径性质、给出椭圆的轨迹定义、推导椭圆的标准方程五个环节。

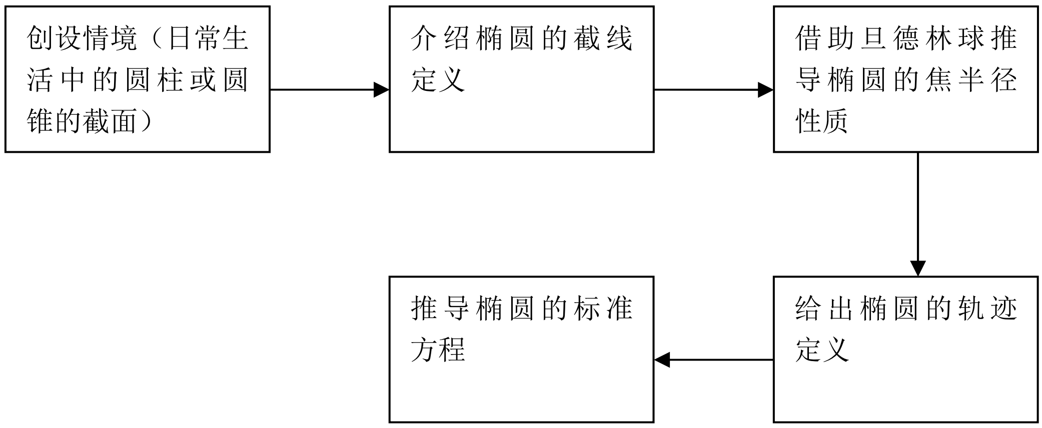


图 2 椭圆概念的教学过程

义乌市第四中学的陈锋老师实施的椭圆概念教学与笔者之一的教学设计[2][3]略有差异，

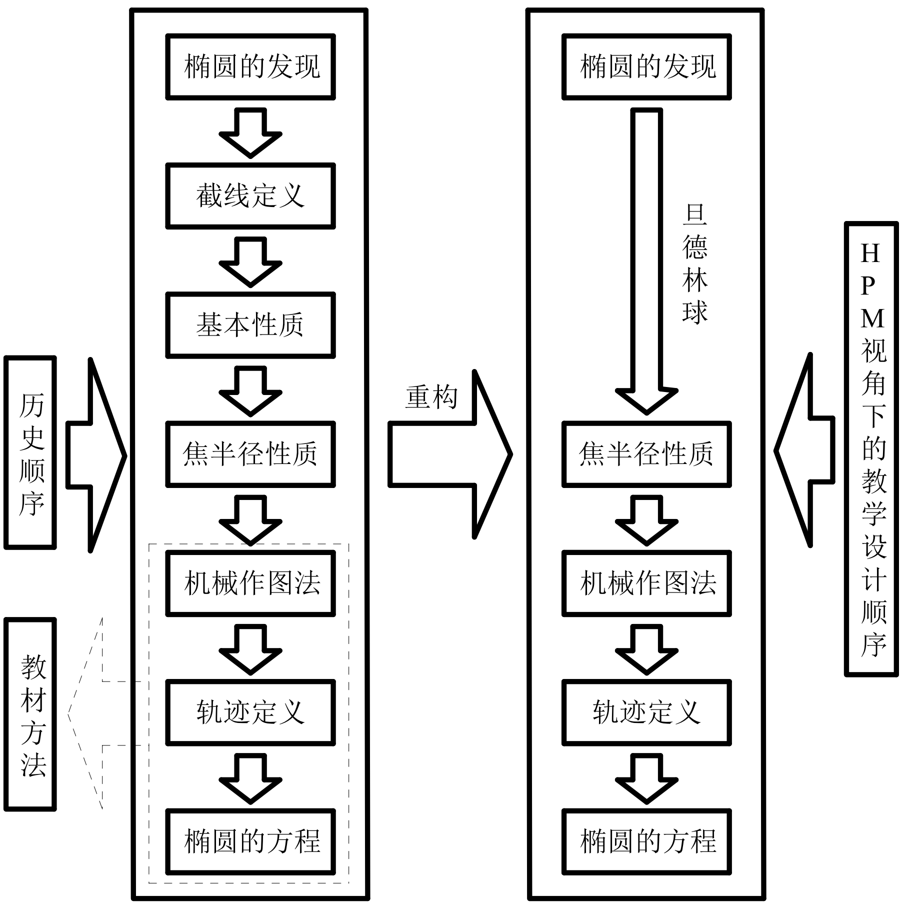


图 1 椭圆的历史及其重构

在借助旦德林球推导椭圆的焦半径性质时有一个从单球到双球的过程，其余部分大致相似。

通过教学反馈与学生问卷调查显示HPM视角下的椭圆概念学生能够为学生所理解与认同，也有助于激发学生的学习兴趣，为学生所喜爱[2]。

4 HPM 视角下椭圆概念教学的意义

椭圆的圆锥截线定义源于椭圆的原始形态，是椭圆概念的本质，而椭圆的轨迹定义是解析几何的产物，便于建立椭圆的方程，用代数方法研究椭圆的性质。椭圆的轨迹定义并不是建立椭圆方程的唯一手段，像椭圆的第二定义，与两定点构成的两直线的斜率乘积为定值的动点的轨迹，甚至古希腊的“三线轨迹”[4]、都可以成为构建椭圆方程的定义。因此，笔者认为椭圆的轨迹定义作为熟悉解析几何思想方法的范例是合适的，但就椭圆本身的理解而言，它确实是存在缺陷的，尤其是割裂了椭圆与圆的联系，使椭圆成了一种孤立的图形。

HPM 视角下椭圆概念教学的实质是利用旦德林球沟通了椭圆的截线定义与椭圆的轨迹定义，使得学生在掌握解析几何典型范例的基础上同样能够把握椭圆概念的本质。这才是这一教学案例在认知上真正的作用，它未必能够加深对椭圆轨迹定义的理解，但它对于椭圆本身的理解却有着深刻的意义。虽然在高中数学教学中椭圆只是解析几何的一种载体，然而在现实生活中椭圆却有及其广泛的应用，天文学、光学、建筑领域都能找到椭圆的身影，因此对椭圆本身更深刻的认识有助于学生对解析几何真正价值的理解：我们之所以学习这门学科，是因为它能让我们更广泛、更深刻地了解几何图形的性质，从而能更好地服务于我们的生活，而不仅仅是因为它能帮助我们解题应试。

5 结 语

德国著名诗人歌德（J. W. von Goethe, 1749~1832）曾经说过：“一门科学的历史就是这门科学本身。”[5]同样，数学的历史也就是数学本身，或者至少是数学本身不可分割的一部分。数学史不仅可以促进学生对数学的理解，最重要的是，它能使学生对数学的理解更加完整。“促进理解”和“使理解更完整”有着本质的区别，“促进理解”主要体现在深度上，主要是一种纵向的联系，“促进理解”可以有多种教育手段，像情境教学、变式教学等等，数学史不过是其中的一种而已；而要使数学的理解更加完整，则不仅要求有纵向的联系，更要有广度，要有横向的联系，那就非用数学史不可。没有数学史，数学的理解就是不完整的，因而数学史是不可替代的！

拿椭圆概念来说，学生头脑中虽然存在椭圆的生活表象与椭圆的解析几何表象，但这两种表象之间是彼此分割的，因而学生对于椭圆概念的把握是不完整的。传统的椭圆概念教学关注的是椭圆的解析几何表象，把重点放在了椭圆轨迹定义的教学上，而未能将椭圆的截线定义与椭圆的轨迹定义融合，这是椭圆概念传统教学的缺陷也是椭圆概念的传统教学与 HPM 视角下的椭圆概念教学的本质区别。椭圆的截线定义是椭圆概念不可分割的一部分，而服务于解析几何的椭圆的轨迹定义与截线定义之间是相互独立的，联结两者的唯一桥梁就是旦德林球。要让学生认识椭圆的本质，截线定义是不可替代的，而联结两种定义时，旦德林球同样也是不可替代的，这就是数学史在椭圆概念教学中的不可替代性。让学生对数学的理解更加完整，应该是在数学教学中融入数学史的主要目标之一。

参考文献

[1] 陈锋, 2010. 基于旦德林双球模型的椭圆概念教学. 第四届数学史与数学教育国际会议论文, 华东师范大学

[2] 汪晓勤等, 2011. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例. 数学教育学报, 20(5): 20-23

[3] 汪晓勤, 2012.. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, 待发表

[4] 汪晓勤, 2008.. “解析几何的诞生”教学设计. 中学数学教学参考(高中版), (6): 57-59

[5] von Goethe, J. W., 1840. *Theory of Colours*. London: John Murray. xiv

写在《上海HPM通讯》创刊之际

黄友初

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1972年，美国学者P. S. Jones和英国学者L. Rogers组织了数学历史与教学国际研究小组（International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics，简称HPM），这标志着数学史与数学教育关系作为一个学术研究领域的出现。但是，我国大陆对HPM的普遍关注则是从本世纪初才开始，特别是在教育部的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》和《普通高中数学课程标准（实验稿）》颁布后，数学教育研究者和广大的中小学数学教师对HPM都给予了高度关注。事实上，这也是数学教育研究范式转换的一个必然产物，数学教育发展的必然结果。

40 年来，数学史与数学教育的研究取得了长足的进步，尤其是在理论研究方面，学术界对数学史的教育价值取得了共识。但是，HPM在实践领域还比较薄弱，数学教学中融入数学史还不普遍。这显然是个矛盾，一方面认为数学史有助于数学教育，另一方面在实际教学中又缺乏数学史。究其原因，主要是两个方面：一是对教育取向的数学史理解还不足；二可获取的HPM的素材较少，特别是缺乏HPM的教学案例。《上海HPM通讯》正是以促进HPM交流，为广大教师提供HPM素材为目的，旨在推动HPM研究，扩大HPM学术共同体，指导HPM教学实践。

要深入开展HPM研究，需要数学教育研究者和一线教师的密切合作，既发挥研究者的理论和研究优势，也可以有效地利用一线教师丰富的教学经验，从而构建HPM的教学模式，彰显数学史的教育价值。而《上海HPM通讯》就是研究者和一线数学教师交流的园地，在这里大家可以对数学史有关的议题畅所欲言，既可探究相关理论、诉说教学心得，也可抒怀、叙事与咏物。

数学史是一座宝藏，有待于我们去不断挖掘。历史也一再证明了，历史上数学家所遇到的困难，正是学生也会遇到的学习障碍，而通过HPM的研究，我们可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而帮助学生跨越知识的难点。《上海 HPM 通讯》为我们创造了一个学习交流的平台，让我们在她的引领下，携手步入HPM的殿堂，为数学教育注入新的活力！