HPM视角下的一般的一元二次方程的解法(配方法)

上海市市西初级中学(200042)　王进敬

3500年以前,"方程"就是古巴比伦人浓墨重彩地展现自身文明的一颗明珠.那时候,虽然没有今天意义下的任何代数符号,但巴比伦人从实际问题中抽象出方程问题,并用文字叙述和图形语言来解决,同时享受着"问题解决"带来的乐趣.

当然,不仅是巴比伦人,在方程问题上,数学家从未停止过探索的脚步.

那么站在巨人的肩膀上,如何看待古人曾经给出的配方法,它与教材中给出的配方法有什么联系?在滚滚的历史洪流中,为什么废弃历史上而采用现在的配方法?能否在教师的引领下,将历史上的所有方法重现,达到返璞归真、古为今用的目的? 融入数学史的教学设计如何既传承古人的智慧,又超越已有的方法,既注重过程与能力,又立德树人,关注文化?为此笔者提出了如下教学目标:(1)会用"配方法"解一元二次方程.(2)通过数学史和数学文化的渗透,体会从不同的角度思考"配方"的方法,即"化归"思想的多样化.(3)鼓励学生积极探索、主动学习,培养发散思维,体会创新思想.

一、历史材料及其运用

公元9世纪,阿拉伯数学家花拉子米(Al-Khwarizmi,780?~850?)在他的名著《代数学》中就用与巴比伦人同样的思考方式,图解一元二次方程.花拉子米把方程写成 $x^2+10x=39$ 的形式,并把方程左边 x^2+10x 看作是由一个正方形(边长为x)和两个同样的矩形(长为x,宽为5)构成的矩尺形,它的面积为39,如图1所示.于是只要在这个图形上添加一个边长为5的正方形,即可得到一个完整的正方形,这个正方形的面积为 $39+5^2=64$.于是知它的边长为8,因而得方程的正根 $x=3$.

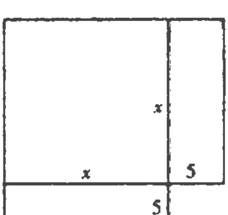


图1

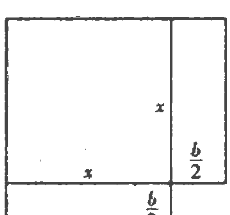


图2

虽然那时候还未出现负根,但图解的直观性与现在符号语言的一致性是最宝贵的财富.

其实,早在公元前3世纪《几何原本》第II卷命题6就给出了配方法的图解:若一条线段被平分,在其尾端再增加一条线段,那么总线段与增加线段所构成的矩形的面积与原线段一半上的正方形面积之和,等于原线段一半加上增加线所构成的正方形的面积.

图解如下(如图3):

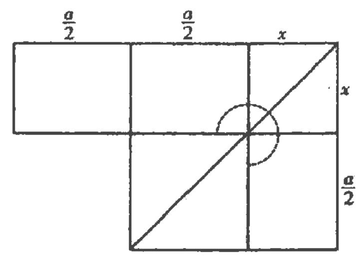


图3

现在的符号语言:$x(x+a)+(\frac{a}{2})^2=(x+\frac{a}{2})^2$,这就是配方法解一元二次方程的根源.

还值得关注的是:中国汉代《九章算术》中已载有一元二次方程问题.中算家将方程 $x^2+px=q$($p>0$,$q>0$)的解法称为"开带从平方".三国时代数学家赵爽在注释《周髀算经》时,讨论了以下问题的解法:已知矩形的半周长和面积,求矩形的长和宽.赵爽的几何方法实际上可以用来解三类方程:

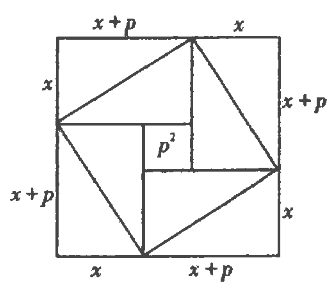


图4

$x^2+px=q$,$x^2-px=q$,$-x^2+px=q$,其中 $p>0$,$q>0$.若解 $x^2+px=q$,则将四个长为 $x+p$,宽为 x 的矩形(面积均为 q)和一个边长为 p 的小正方形拼成一个大正方形.如图4,于是大正方形的面积为 p^2+4q,边长为 $\sqrt{p^2+4q}$,故得 $x^2+px=q$ 的正根为 $x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$.

二、教学设计与实施

前面我们研究了"特殊的一元二次方程的解法",

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

学习了开平方法和因式分解法，过程体现了“化归”的数学思想和“降次”的基本策略．这节课我们开始学习“一般的一元二次方程的解法”并思考它们之间有怎样的联系？（写课题：一般的一元二次方程的解法）．

（一）一般的一元二次方程的解法探索．

例1　解下列方程：

（1）$(x+5)^2=40$；（2）$x^2+10x-15=0$

明显地，方程（1）用开平方法来解．

问1：如何解方程（2）？

生1：我发现这两个方程是同一个方程的不同形式．可以把方程（2）转化成（1）的形式来解．

问2：怎样将（2）转化成（1）？

生1：先将常数项15右移，化成 $x^2+10x=15$ 的形式，再两边加上25，即可．

问3：为什么要加上25？它和原方程的系数有何关系？

生1：根据完全平方公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，只要两边同时加上一次项系数一半的平方，左边就配成了完全平方式．（这个时候不做纠正，等例2后一起纠正）（很棒！简洁明了）

问4：除了根据完全平方公式从（2）到（1），还有其它的转化方法吗？

生2：先将常数项15右移，化成 $x^2+10x=15$ 的形式，左边再化成 $x(x+10)=15$ 的形式，到 $[(x+5)-5][(x+5)+5]=15$ 的形式，再利用平方差公式即可．

（很棒，利用平方差公式，也可以将方程一边配成完全平方的形式．思考得当）

问5：这个变形中的5是如何想到的？它与原方程的系数之间有怎样的关系？

生2：$(x+5)$ 是 x 与 $(x+10)$ 的平均数，5就是一次项系数的一半．

可见，这两种过程在本质上是相同的，可以说有异曲同工之妙，配成的完全平方式都与一次项系数有关．至此，也为完全平方公式与平方差公式的学习之必要性找到了根源．

我们把原方程进行变形，转化成 $(x+m)^2=n$ 的形式，再开平方法解之，这种解一元二次方程的方法叫配方法（补充课题）．

（二）追本溯源．

在前几节课的学习中，已经了解到：古代巴比伦人在3500年以前，就给出了一元二次方程的解法．那时候没有今天意义下的任何代数符号．想象一下，他们是怎么解方程的呢？

生：用文字叙述或者用图表示．

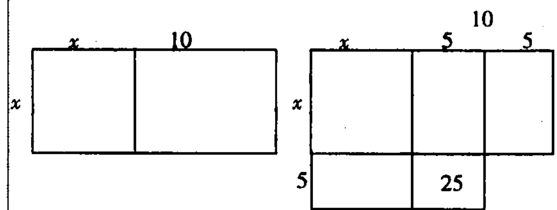
（观看BBC记录片《数学的故事》节选，做简单了解）

根据观看，发现：3500年前的巴比伦人，确实用文字叙述来解一元二次方程，但后来又发展到用图形来解．我们试着来还原一下图形解释，看与我们现在的“配方法”有何异同？

问6：古人巧妙地将平方对应正方形面积，乘积对应长方形面积．方程（2）可做怎样的图解？

生3：先将常数项15右移，化成 $x^2+10x=15$ 的形式．

生3：将如下左图分割再补拼成正方形，如下右图．



（很棒！数形结合，拓宽思维．）

问7：如果将前面的代数解法和图形解释进行比较，其实相当于对方程做了怎样的变化？

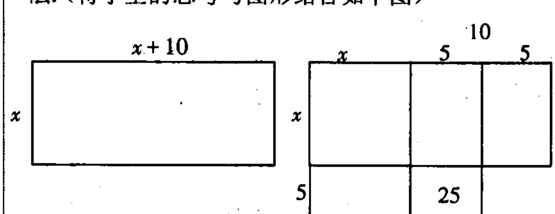
与我们总结的“常数项右移，两边加上一次项系数一半的平方”有关系吗？

把这个过程用代数语言写出来：$x^2+10x-15=0 \Rightarrow x^2+10x=15 \Rightarrow x^2+10x+5^2=15+5^2 \Rightarrow (x+5)^2=40 \Rightarrow x+5=\pm2\sqrt{10} \Rightarrow x_1=2\sqrt{10}-5$，$x_2=-2\sqrt{10}-5$．可见，代数解法和图形解释完全一致．图解可以更好地理解配方的法则．

问8：在观看短片时，巴比伦人是直接给出的长方形的面积，并没有画成正方形加长方形的形式，而是直接将长方形通过拼补成正方形，从而开方求解的．

思考对于方程 $x^2+10x-15=0$ 而言，长方形表示什么含义？又是怎么拼补成正方形的呢？

生4：先将常数项15右移，化成 $x^2+10x=15$ 的形式，左边再化成 $x(x+10)=15$ 的形式，其中的 x 表示长方形的一条边，$x+10$ 表示另一条边，长方形的面积就是15．取长与宽的平均数，以平均数为边就可以拼补成正方形了．正好解释了我们上面配方的第二种方法．（将学生的思考与图形结合如下图）

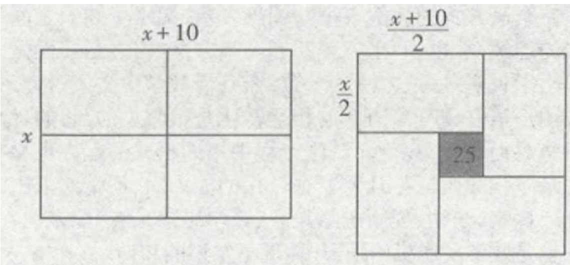


代数过程同上．

生5：将边长为 x 和 $x+10$ 的长方形面积平均分成4份，再重新拼组成边长为 $x+5$ 的正方形，中间恰好空出一个以一次项系数的一半为边长的正方形，这样边长为 $x+5$ 的正方形的面积就是 $15+5^2$，再开平方解

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

之.图形如下.



在上课过程中,所有同学都对这种方法大加赞赏.静静地聆听该生的作图讲解,然后给出欣赏之后发自内心的“哇”的赞叹!而这种倾听、分享、提升的过程本身就是立德树人!

其实,这种方法就是历史上赵爽在注释《周髀算经》时用的解一元二次方程的方法,学生与数学家在方法上的异曲同工之妙,大大增强了学习的自信心.由于我对这一历史不熟悉,错过了深刻讲解的机会,只有留到课后弥补,缺失了教育的时效性,实乃憾事.

师:从方法的角度而言,图解可以更好地帮我们理解文字语言与符号语言,简洁的符号语言是从复杂的文字语言过渡到直观的图形语言,再总结得到的.三种语言之间是相通的.从知识的角度而言,也发现,完全平方公式与平方差公式是相通的,配方法与因式分解法、开平方法也是互相转化,相通的.

问9:通过对历史的了解,你怎样看待一元二次方程的图解?

生6:这种图形解释很直观,与代数方法也是相通的,但它也有其弊端,就是:在当时,人们还不能接受负数,也不考虑负根.

生7:它可以很好地解释:为什么配方时两边要加上一次项系数一半的平方,让我的理解更深刻.

公元9世纪,阿拉伯数学家花拉子米(Al-Khwarizmi,780? ~850?)在他的名著《代数学》中也解过类似的方程,由于当时符号语言还未得到发展,他采用的就是同学们给出的第一个图形的解释方法.进而上升到更一般方程的解法.

师:数学知识就如潺潺流淌的清泉,研究历史,可以让我们的立脚点更高,站在巨人的肩膀上,一定看得更高,虑得更远;研究历史不是为了复古,而是借古明今,古为今用.

(三)发散思维,举一反三.

上面得到的配方法是否适用于其它的方程?你会采用哪种方法解下列方程?

例2　解下列方程:

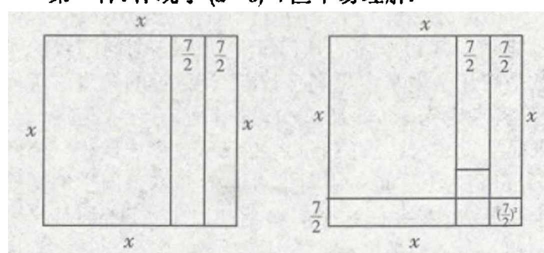
(1) $2x^2+3x+\frac{1}{2}=0$.(在错误中形成规范,强化细节)

(2) $4x^2+12x-7=0$.(因式分解、多种形式配方,两种图解,为下节课做铺垫)

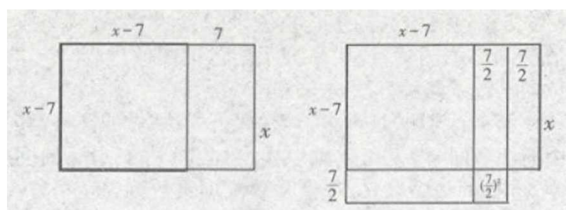
(3) $x^2-7x-50=0$.(可考虑另一个完全平方式图解)

方程(1)不能图解,配方时强调:先将二次项系数化为“1”,两边加上一次项系数一半的平方,才能配方.也就是图解是帮助我们理解的,落脚点还得在从复杂到简单的符号总结上,这才是古为今用的体现.方程(2)学习配方的同时,不要忽视已学的方法,因式分解、多种形式配方,两种图解,体现思考的多样性,也为下节课做铺垫.方程(3)的解法图形形式有两种:

第一种:体现了 $(a-b)^2$,但不易理解.



第二种:融会贯通,简单易懂.



上述解法中,无论是代数语言与图形语言,都完美体现了两个完全平方公式学习之必要性.都是通过适当分配或变形将原代数式或图形变成完全平方式或正方形,解决问题,“顾名思义”,这就是“配方法”名称的由来.

(由于时间的缘故,这种配方法没有让学生自行设计完成,但在课下学生的问卷调查中,有不少学生给出了第二种画法,他们达到了融会贯通的程度)

我的导师曾说:“今人不见古时月,今月曾经照古人”,浩瀚的数学历史正如这天上的明月,古人曾经让数学如此辉煌,而我却对此知之甚少,多想和你们一起找到打开这把大门的钥匙啊!用曹操《短歌行》中的一段话表达我的感受:明明如月,何时可掇,忧从中来,不可断绝.

三、学生反馈

课后对31名听课学生进行了问卷调查:所有学生都认为“了解配方法解一元二次方程的历史”,对学习有帮助,具体如下:使学习的内容更有趣,对配方的理解更到位,了解配方法的源头,开阔视野,与现在的方法做出比较,可以站在巨人的肩膀上学习和探索.学

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

到了可以用多种方法解决同一问题.试着将自己融入那个时代,理解古人是如何从无到有地创造出一种方法,用古人的思维解决问题,体会到古人的智慧,激励我们要将智慧传承下去并想办法创造出自己的思维.

所有学生都认为不可以去掉"图解"的教学环节,理由如下:图解可以把代数、几何与实际生活联系起来,是当时解法的巅峰.图解很直观,也可以很好地解释现在符号语言的配方法,让我深入地了解并掌握这节课的知识,而且可以了解配方法的演变与完善的过程.让我认识到自己在创造图形方面的不足,可以拓宽思维.虽然没有负根,但我认为图解是完美的,不仅简洁直观,也可以与完全平方公式、平方差公式的图解找到联系.

用配方法解关于 x 的方程:$x^2+bx=c$($c>0$),你还能画出其它形式的几何模型吗?这个问题我的本意是想让学生从字母表示数,分类讨论的角度思考问题,再考虑无论 b 是正或负,图解是一致的.但这一要求显然过高,其中有7位(占22.6%)同学未给出任何图形;11同学(占35.5%)同学对课上杨修远同学的图解十分感兴趣,并在这个问题上加以了实践,但都是考虑的 b 为正的情况;还有2位(占6%)同学想从分割成三角形后再拼成正方形入手,但发现并不正确.14位(占45.2%)同学选择了花拉子米的方法入手,从一般情况画出了图解,说明掌握了配方的图解过程.(有3位同学选了两种方法画出图解)

第4个问题,是为下节课的"公式法"做的铺垫,其中有3个同学,说可以乘以 $4a$;15位(占48.4%)的同学,选择两边乘以 a,理由是二次项系数为完全平方;还有12位(占38.7%)同学说两边乘以 $\frac{1}{a}$,即用本节课的配方法来解决.有1位同学直接配方.整体而言,可以说都掌握了本节课的配方法,也达到了思维拓展的目的.

在印象最深环节的调查中,有16位(占51.6%)的同学对BBC的视频感兴趣,原因有:那一刻,感觉自己走进了巴比伦人的生活,和他们的思想和智慧产生了共鸣和交流.真正感觉到了把数学运用到现实生活中去.之前看过,但没有深刻的印象,学过配方法后,再看,觉得有所感悟.而且,这种方法到现在还在用,体现出古人解法的重要性,对古人的智慧充满崇敬之心.13位(占41.9%)的同学对图解方程感兴趣,原因是方法很巧妙,除了老师预设的方法,同学还想出来别的方法,很了不起,开动思维的过程也很有趣.感觉数学是灵活的,没那么死板.让我感受到了发散性思维,没想到解个方程会有那么多方法.还有一位同学对总结的环节印象深刻,认为总结是非常必要的,不仅仅是老师的总结,学生更应该去做总结,总结不仅巩固课上的知识,还让同学对知识和数学的理性精神有更深的研究.

四、教学反思

(一)知识之谐:HPM视角下的"配方法"教学过程中,处处体现的是前后知识的贯通:七年级的平方差、完全平方式的代数表征与图形表示,揭示了知识之间的连续性,也为"平方差和完全平方"学习之必要性做出了说明.思维方法的一致:在几何教学中文字语言、图形语言和符号语言的相互转化是很常见的,它的优势显而易见.解一元二次方程中不同形式的配方也显示了代数表征与几何表征转化的能力.它还是前人不断探索、归纳、创新的结果.从数学思想来看"配方法"也是数学发展史的缩影.体现了知识的和谐.

(二)探究之乐:在探究如何配方的过程中,学生不仅给出了直接用完全平方式来配方的过程,还在探究的基础上用平方差公式达到配方的目的,体会到异曲同工之妙.更甚者有学生将这方法在作业中用得得心应手.在还原历史上配方的过程中,学生不仅还原出古巴比伦人的方法、还推导出公元9世纪,阿拉伯数学家花拉子米的图解方法,有种穿越时空与古人对话之感.更甚者学生的思维更深,更远,探究出教师预设之外的配方法,让他们很自信地相信:自己不比数学家逊色,有时甚至能超越他们.这种探究互相启发,其乐无穷.正如学生在问卷中所说:"大家不仅还原了古人的方法,还'脑洞大开',想出了连老师都没有思考到的方法,很了不起,这种开动思维的过程很有趣."

(三)方法之美:不同的代数配方之间存在着异曲同工之妙;而代数解法与几何图解之间相依相偎,互相转化,柔美地游弋在理性的数学之间,让理性的数学变得柔和.不同的图解显示出图形本身的对称美,思考方法多样性展现出智慧纷呈美,思维的发散美,最终发现所有方法可以归纳到同一种情况,犹如百川归海,感悟到思维本质的一致性,这是数学的最高境界之美.正如学生在问卷中所说:"一道简简单单的一元二次方程,竟不只是一道方程,还是一块拼图,一亩田地,甚至可以形成头脑中千变万化的图形,这才是数学的美."

(四)文化之魅:从古巴比伦人解一元二次方程的视频中,可以充分体会到古人的智慧.感悟到:数学源于生活,高于生活,绝不等同于生活,是人类经过抽象、推理、建模后思想的结晶.所以教育教学中的关注点一定是:数学的精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和看问题的着眼点,因为这才是数学文化的本质.正如学生在问卷中所说:"那一刻,我感觉自己走进了古巴比伦人的生活,和他们的思想和智慧产生了共鸣."这正是文化的魅力所在.

(五)一点儿遗憾:由于教师对《九章算术》中的"开带从平方"和《几何原本》命题II.6的思考不是很深刻,导致在学生给出新的图解时无法从本质上给予解释,让我深刻地体会到"学无止境".另外,由于学生拼图时间太长,所以"小结"有些匆匆,这些只得在课后弥补,缺失了时效性.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net