第 20卷第 6期　　大　学　数　学　　Vol. 20, №. 6
2004年 12月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Dec. 2004

19世纪上半叶的无穷级数敛散性判别法

汪晓勤
(华东师范大学 数学系 ,上海 200062)

[摘　要] 对 19世纪上半叶欧洲数学家在正项级数敛散性判别方面的工作作了考察和分析.

[关键词] 无穷级数;收敛;发散;德摩根;贝特朗;博内
[中图分类号] O11　　[文献标识码] A　　[文章编号] 1672-1454(2004)06-0127-08

长期以来,我们在数学分析或高等数学课本中所能看到的无穷级数敛散性判别法除柯西收敛准则外,有比较判别法、达朗贝尔判别法、柯西判别法.一些著名的数学分析辅助读物,如吉米多维奇的《数学分析习题集》等,也不过多介绍了一个拉阿伯(Raabe)判别法而已.美国数学家和数学史家 M·克莱因在《古今数学思想》中虽对 18世纪数学家在无穷级数方面的工作有较详细的述评,但对 19世纪数学家的工作却介绍得很少[1].我们的学生在运用上述判别法时,常常面对其中的不确定情形束手无策. M·克莱因说得好,历史上数学家所遇到的困难,今天的学生也同样会遇到[2]. 19世纪的数学史告诉我们,今天的数学分析讲授者,因而还有更多的学习者,对于该课题的了解往往是十分不全面的.本文试图对 19世纪无穷级数收敛性判别法的历史作一考察.文中所述级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (u_n > 0) \tag{1}$$

均为正项级数.

1　19世纪以前的有关工作

无穷级数的历史可以上溯到遥远的古希腊时代.公元前 5世纪哲学家芝诺(Zeno)所提出的四个悖论之一——阿基里斯追龟问题所带来的困惑说明,希腊的哲学家们无法将无穷多个线段之和与有限长度的线段联系起来.尽管后来亚里士多德(Aristotle,前 384-322)曾意识到公比小于 1的几何级数有和,阿基米德(Archimedes,前 287-212)在求抛物线弓形面积时利用双归谬法证明了几何级数

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

的和为$\frac{4}{3}$,中世纪法国数学家奥雷姆(N. Oresme, 1323-1382)以几何直观方法证明了级数

$$1+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$$

的和为 2以及调和级数的发散性,但只有到了 17,18世纪,才产生了真正的无穷级数理论.在这两个世纪,比利时数学家圣文森特(Saint-Vincent G,1584-1667)利用无穷级数解决了芝诺悖论,并指出一个无穷级数可以表示一个数;英国数学家格雷戈里(Gregory J, 1638-1675)给出了“收敛”和“发散”两个术语;英国数学家牛顿(Newton I, 1642-1727)、德国数学家莱布尼兹(Leibniz G W, 1646-1716)利

[收稿日期] 2003-12-01
[基金项目] 上海市重点学科建设项目.

用无穷级数展开式研究了许多代数和超越函数;瑞士数学家雅各°伯努利(Jacob Bernoulli,1654–1705)、约翰°伯努利(John Bernoulli,1667–1748)、欧拉(Euler L,1707–1783)等都在不考虑收敛性的情况下大量使用无穷级数.在发表于 1689年的关于无穷级数的一篇论文中,雅各°伯努利以一首诗表达他对无穷级数有和的惊叹[3,4]:

即使小小有限数也能包含无穷级数

即使无穷无尽中也会有极限踪迹可觅

因此“巨大”之灵魂在细小之中息栖

“有限”可并不是生来就受狭小范围羁縶

多么快乐,在无穷大中识别微细

多么神奇,在细小之中看到无边无际

尽管这个时期的数学家们不太关心级数的收敛性,但有关敛散性的判别法已经出现.英国数学家马克劳林(Maclaurin C,1698–1746)给出了今天被冠以柯西之名的

积分判别法 设 $h(x)$是一单调递减正值函数,则级数

$$h(a)+h(a+1)+\cdots+h(a+n)+\cdots$$

与积分$\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$同收敛或发散.

法国数学家达朗贝尔(D´Alembert J L,1717–1783)给出

比值判别法 如果∃正整数 N,当 $n>N$时,都有$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q\ (0<q<1)$,则(1)收敛;如果 $n>N$时,都有$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则(1)发散.

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$或极限不存在时,上述判别法失效.因此,达朗贝尔并没有完全解决正项级数的敛散性判别问题.达朗贝尔判别法的极限形式后由英国数学家华林(Waring E,1734–1798)给出,华林还指出级数

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

当 $n>1$时收敛,当 $n<1$时发散.

2 高斯的工作

1813年,德国数学家高斯(Gauss C F,1777–1855)发表论文“无穷级数的一般研究”,首次研究了超几何级数

$$1+\frac{T\cdot U}{1\cdot V}x+\frac{T(T+1)\cdot U(U+1)}{1\cdot 2\cdot V(V+1)}x^2+\cdots+\frac{T(T+1)\cdots(T+n-1)\cdot U(U+1)\cdots(U+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot V(V+1)\cdots(V+n-1)}x^n+\cdots$$

的散敛性、收敛域、余项问题.为确定上述级数在 $x=1$时的敛散性,高斯给出如下的

高斯判别法 如果级数(1)的相邻两项的比值可以表示成

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^T+An^{T-1}+Bn^{T-2}+\cdots}{n^T+A'n^{T-1}+B'n^{T-2}+\cdots},$$

其中 T为正整数,那么,当 $A'-A>1$时级数(1)收敛;当 $A'-A<1$时级数(1)发散.

高斯对无穷级数的研究使无穷级数理论进入了现代时期[5].

3 柯西的工作

19世纪法国数学家柯西(Cauchy A L,1789–1857)常常被看作是无穷级数敛散性理论的创立者.他坚持在使用无穷级数时进行严格的敛散性判定,并给出了有效的判别准则(今称柯西准则).他在出版

于 1821年的《分析教程》中给出

根式判别法 如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=q$,则当 $q<1$时,级数(1)收敛;当 $q>1$时,级数(1)发散.

显然,当 $q=1$时,(1)的敛散性就无法判定了,因此,上述判别法与达朗贝尔判别法一样,有着很大的局限性,只是一个特殊的判别法.为了扩大适用范围,减少不确定情形,柯西给出

对数判别法 如果∃正整数 N,当 $n>N$时,都有 $\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\geqslant q>1$,则(1)收敛;如果 $n>N$时,都有 $\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\leqslant 1$,则(1)发散.

尽管柯西判别法适用于达朗贝尔判别法的某些不确定情形,但它本身也存在不确定情形.如对于级数

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}+\cdots, \tag{2}$$

我们有

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=1+\frac{1}{n}\to 1 \quad (n\to\infty).$$

此时,(1)的敛散性无法判定.

4 拉阿伯判别法

19世纪德国数学家拉阿伯对无穷级数敛散性的判别作了研究. 1832年,他在 Ettingshausen和 Baumgartuer的《数学与物理杂志》(Journal de Mathématiques et de Physique)上发表了适用于达朗贝尔判别法不确定情形的另一个判别法[6].这就是

拉阿伯判别法 若 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=q$,则当 $q>1$时级数(1)收敛; $q<1$时级数(1)发散.

高斯判别法不过是上述判别法的一个推论而已.然而拉阿伯判别法仍然不是普适的,因为当 $q=1$或极限不存在时级数(1)的敛散性仍无法确定.级数(2)正是这样一个不确定情形.

1839年,法国数学家丢哈梅勒(Duhamel J M, 1797– 1872)在对拉阿伯论文一无所知的情况下,刘维尔(Liouville J, 1809– 1882)《纯粹与应用数学杂志》上发表了等价的判别法.丢哈梅勒利用了下面的

比较判别法 如果 $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$,则 $\sum u_n$ 收敛时,级数 $\sum v_n$ 也收敛;如果 $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}>\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$,则 $\sum u_n$ 发散时,级数 $\sum v_n$ 也发散.

他给出的判别法是[7]: 设 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{1+T}$,其中 $T>0$, $T\to 0$ $(n\to\infty)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}nT=q$,则 $q>1$时,(1)发散.

5 德摩根的工作

19世纪英国著名数学家德摩根(De Morgan, 1806– 1871)试图建立一个普适的判别法.在 1842年出版的《微积分》中,他给出了

德摩根判别法 设(1)的一般项为

$$u_n=\frac{1}{\mathrm{h}(n)},$$

其中 $\mathrm{h}(x)$是 x 的单调递增函数.记

$$\frac{x\,\mathrm{h}'(x)}{\mathrm{h}(x)}=p_0(x),$$

并设

$$\lim_{x\to\infty} p_0(x) = d_0.$$

如果 $d_0 > 1$,则级数(1)收敛;如果 $d_0 < 1$,则级数(1)发散.如果 $d_0 = 1$,则设

$$[p_0(x) - 1]\ln x = p_1(x), \quad \lim_{x\to\infty} p_1(x) = d_1.$$

如果 $d_1 > 1$,则级数(1)收敛;如果 $d_1 < 1$,则级数(1)发散.如果 $d_1 = 1$,则设

$$[p_1(x) - 1]\ln\ln x = p_2(x), \quad \lim_{x\to\infty} p_2(x) = d_2.$$

如果 $d_2 > 1$,则级数(1)收敛;如果 $d_2 < 1$,则级数(1)发散.如果 $d_2 = 1$,则设

$$[p_2(x) - 1]\ln\ln\ln x = p_3(x), \quad \lim_{x\to\infty} p_3(x) = d_3.$$

如果 $d_3 > 1$,则级数(1)收敛;如果 $d_3 < 1$,则级数(1)发散.如果 $d_3 = 1$,继续类似的判定程序.

如对级数(2)应用上述判别法,我们有

$$p_0(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}, \quad d_0 = 1,$$

$$p_1(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}, \quad d_1 = 0 < 1,$$

故(2)发散.

6 贝特朗对柯西判别法、拉阿伯判别法的改进

法国著名数学家、巴黎科学院终身秘书贝特朗(Bertrand J, 1822–1900)对柯西判别法和拉阿伯判别法中的不确定情形作了进一步的判定.设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = c_0,$$

根据柯西判别法,当 $c_0 > 1$ 时,级数(1)收敛;当 $c_0 < 1$ 时级数发散.当 $c_0 = 1$ 时,不能确定级数(1)的敛散性.此时考虑极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n u_n}}{\ln\ln n} = c_1.$$

若 $c_1 > 1$,级数(1)收敛;若 $c_1 < 1$,级数发散.当 $c_1 = 1$ 时,不能确定(1)的敛散性.此时考虑极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n\ln n \cdot u_n}}{\ln\ln\ln n} = c_2.$$

若 $c_2 > 1$,级数(1)收敛;若 $c_2 < 1$,级数发散.当 $c_2 = 1$ 时,级数敛散性不能确定.此时考虑极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot u_n}}{\ln\ln\ln\ln n} = c_3.$$

若 $c_3 > 1$,级数(1)收敛;若 $c_3 < 1$,级数发散.当 $c_3 = 1$ 时,继续类似的判定程序.

贝特朗先利用柯西积分判别法证明下面的

引理 级数 $\sum \frac{1}{n^{T}}, \sum \frac{1}{n(\ln n)^{T}}, \sum \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{T}}, \sum \frac{1}{n\ln n \cdot \ln\ln n(\ln\ln\ln n)^{T}}, \cdots$ 当 $T > 1$ 时均收敛,当 $T \leqslant 1$ 时均发散.

由此,可根据比较判别法证明上述改进的判别法.但当所考虑的极限不存在时,上述改进的判别法就无能为力了.

在拉阿伯判别法中,设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$,将 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 表示成

$$\frac{1}{1+T}$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty} nT = r_0,$$

则 $r_0 > 1$时级数收敛，$r_0 < 1$时级数发散．若 $r_0 = 1$,则将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+T'}$$

的形式，设

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n)T' = r_1,$$

则当 $r_1 > 1$时级数收敛；当 $r_1 < 1$时级数发散．若 $r_1 = 1$,则将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+T''}$$

的形式，设

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n\circ\ln\ln n)T'' = r_2,$$

则当 $r_2 > 1$时级数收敛；当 $r_2 < 1$时级数发散．若 $r_2 = 1$,则将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n\ln n\circ\ln\ln n}+T'''}$$

的形式，设

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n\circ\ln\ln n\circ\ln\ln\ln n)T''' = r_3,$$

则当 $r_3 > 1$时级数收敛；当 $r_3 < 1$时级数发散．若 $r_3 = 1$,则继续类似的判别程序．

贝特朗还证明了：改进之后的柯西判别法和拉阿伯判别法与德摩根判别法是等价的[8]．

1°如果按德摩根的记号，则在柯西判别法中，

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \frac{\ln h(n)}{\ln n}.$$

因此，

$$c_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln h(n)}{\ln n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln h(x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln h(x)]'}{(\ln x)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{x h'(x)}{h(x)} = d_0,$$

$$c_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{nu_n}}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{h(n)}{n}}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln h(n)-\ln n}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln h(n)}{\ln\ln n}-\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln h(n)}{\ln\ln x}-\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{h'(x)}{h(x)}-\frac{1}{x}\right]x\ln x = \lim_{x\to\infty}\ln x\left[\frac{x h'(x)}{h(x)}-1\right] = d_1.$$

类似可证 $c_2 = d_2, c_3 = d_3, \cdots$．因此，改进后的柯西判别法与德摩根判别法是等价的．

2°如果按德摩根的记号，则在拉阿伯判别法中

$$\frac{h(n+1)}{h(n)} = 1+T.$$

因此得

$$T = \frac{h(n+1)-h(n)}{h(n)}.$$

于是

$$nT = n\frac{h(n+1)-h(n)}{h(n)} = n\frac{h'(n+\theta)}{h(n)} = \frac{nh'(n)}{h(n)}\circ\frac{h'(n+\theta)}{h'(n)},$$

其中 $0<\theta<1$,由假设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{h(x+1)}=1,$$

因此有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x+1)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x+\theta)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h'(x+\theta)}{h'(x)}=1.$$

于是,

$$r_0=\lim_{n\to\infty}nT=\lim_{n\to\infty}\frac{nh'(n)}{h(n)}\circ\lim_{n\to\infty}\frac{h'(n+h)}{h'(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nh'(n)}{h(n)}=d_0.$$

类似可证 $r_1=d_1,r_2=d_2,\cdots$.因此,改进后的拉阿伯判别法与德摩根判别法也是等价的.

7 博内的工作

法国数学家博内(Bonnet P O,1819- 1892)对无穷级数敛散性判别法作了研究.他对贝特朗所改进的拉阿伯判别法又作了改进,得到如下的

博内判别法一 如果级数(1)满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$1-T$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}nT=b_0,$$

则 $b_0>1$时级数收敛,$b_0<1$时级数发散.若 $b_0=1$,则将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$1-\frac{1}{n}-T'$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n)T'=b_1$$

则当 $b_1>1$时级数收敛;当 $b_1<1$时级数发散.若 $b_1=1$,则将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}-T''$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n\circ\ln\ln n)T''=b_2,$$

则当 $b_2>1$时级数收敛;当 $b_2<1$时级数发散.若 $b_2=1$,则将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$表示成

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{n\ln n\circ\ln\ln n}-T'''$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n\circ\ln\ln n\circ\ln\ln\ln n)T'''=b_3,$$

则当 $b_3>1$时级数收敛;当 $b_3<1$时级数发散.若 $b_3=1$,则继续类似的判别程序.

易证 $b_i=d_i$, $i=0,1,2,\cdots$,即上述判别法与德摩根判别法也是等价的.博内还给出了另外两种判别法.

博内判别法二 设 X为任意小的正数.如果

$$\lim_{n\to\infty}n^{1+X}u_n=b_0,\quad \lim_{n\to\infty}nu_n=b_0',$$

则当 $b_0<+\infty$时,级数(1)收敛;当 $b_0'\neq 0$时级数发散.当 $b_0=+\infty$且 $b_0'=0$时,考虑两个表达式

$$n(\ln n)^{1+X}u_n,\quad n\ln n\circ u_n.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}n(\ln n)^{1+X}u_n=b_1,\quad \lim_{n\to\infty}n\ln n\circ u_n=b_1',$$

则当 $b_1<+\infty$时,级数(1)收敛;当 $b_1'\neq 0$时级数(1)发散.当 $b_1=+\infty$且 $b_1'=0$时,考虑两个表达式

$$n\ln n\cdot(\ln\ln n)^{1+X}u_n,\quad n\ln n\cdot(\ln\ln n)u_n.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}n\ln n\cdot(\ln\ln n)^{1+X}u_n=b_2,\quad \lim_{n\to\infty}n\ln n\cdot(\ln\ln n)u_n=b_2',$$

则当 $b_2<+\infty$时,级数(1)收敛;当 $b_2'\neq 0$时级数(1)发散.当 $b_2=+\infty$且 $b_2'=0$时,考虑两个表达式

$$n\ln n\cdot(\ln\ln n)\cdot(\ln\ln\ln n)^{1+X}u_n,\quad n\ln n\cdot(\ln\ln n)\cdot(\ln\ln\ln n)u_n.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}n\ln n\cdot(\ln\ln n)\cdot(\ln\ln\ln n)^{1+X}u_n=b_3,\quad \lim_{n\to\infty}n\ln n\cdot(\ln\ln n)\cdot(\ln\ln\ln n)u_n=b_3',$$

则当 $b_3<+\infty$时,级数(1)收敛;当 $b_3'\neq 0$时级数(1)发散.当 $b_3=+\infty$且 $b_3'=0$时,则继续类似的判定程序.上述判别法是利用比较判别法以及贝特朗的引理来证明的.博内又对柯西判别法作了改进[9].

博内判别法三　设 u_n满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$,将 $\sqrt[n]{u_n}$写成

$$1-r$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nr}{\ln n}=b_0,$$

则当 $b_0>1$时级数(1)收敛;当 $b_0<1$时级数发散.当 $b_0=1$时,将 $\sqrt[n]{u_n}$写成

$$1-\frac{\ln n}{n}-r'$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nr'}{\ln\ln n}=b_1,$$

则当 $b_1>1$时级数(1)收敛;当 $b_1<1$时级数发散.当 $b_1=1$时,将 $\sqrt[n]{u_n}$写成

$$1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}-r''$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nr''}{\ln\ln\ln n}=b_2,$$

则当 $b_2>1$时级数(1)收敛;当 $b_2<1$时级数发散.当 $b_2=1$时,将 $\sqrt[n]{u_n}$写成

$$1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}-\frac{\ln\ln\ln n}{n}-r'''$$

的形式,设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nr'''}{\ln\ln\ln\ln n}=b_3,$$

则当 $b_3>1$时级数(1)收敛;当 $b_3<1$时级数发散.当 $b_3=1$时,则继续类似的判别程序.

8 小　　结

从高斯开始,19世纪上半叶一些西方数学家试图建立无穷级数敛散性的一般判别法则.然而,尽管高斯、柯西和拉阿伯部分解决了上一世纪达朗贝尔比值判别法的不确定情形,但他们所建立的判别法各自都存在不确定情形,因而都是特殊判别法.德摩根首次给出了较为一般的可以不断重复进行的机械判别程序,具有重要的历史意义;贝特朗的两种判别法(改进了的柯西对数判别法和拉阿伯判别法)是他在了解德摩根判别法之前独立发现的,无意中与德摩根判别法等价.德摩根和贝特朗的可重复机械判别程序似乎使后来的西方数学家们意识到,只有具备可重复性、机械性,才能使一种判别法具有普适性(极限不存在的情形除外),博内的三种判别法显然是在德摩根和贝特朗判别法的启发下建立起来的.

可以说,正项级数的可重复机械判别程序在 19世纪的高等数学中发挥着重要的作用. 19世纪西方微积分课本中有关函数极值的可重复机械判别法印证了这一点.

[参 考 文 献]

[1] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times[M]. New York: Oxford University Press, 1972. 169- 172.

[2] Albers D J, Alexanderson G L. Mathematical People, Profiles and Interviews[M]. Boston: Birkhauser, 1985. 169- 172.

[3] Smith D E. A Source Book in Mathematics[M]. New York: Dover Publications, 1959. 271.

[4] Struik D J. A Source Book in Mathematics, 1200- 1800[M]. Princeton: Princeton University Press, 1986. 321.

[5] Smith D E. History of Modern Mathematics[M]. New York: John Wiley sons, 1906. 39- 40.

[6] Raabe, J. -L. Note sur la théorie de la convergence et de la divergence des séries[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1841, 6: 85- 88.

[7] Duhamel, J. M. Nouvelle règle sur la convergence des séries[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1839, 4: 214- 221.

[8] Bertrand J. Regles sur la convergence des series[J]. Journal De Mathématiques Pures et Appliquées, 1842, 7: 35- 54.

[9] Bonnet O. Note sur la convergence et la divergence des series[J]. Journal De Mathématiques Pures et Appliquées, 1843, 8: 109.

Criteria for Convergence and Divergence of Infinite Series in the 19th Century

WANG Xiao-qin

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract This paper deals with the work of the 19th century mathematicians on the criteria for the convergence and divergence of the infinite series, which are seldom mentioned in our calculus textbooks.

Key words: infinite series; convergence; divergence; A. De Morgan; J. Bertrand; P. O. Bonnet