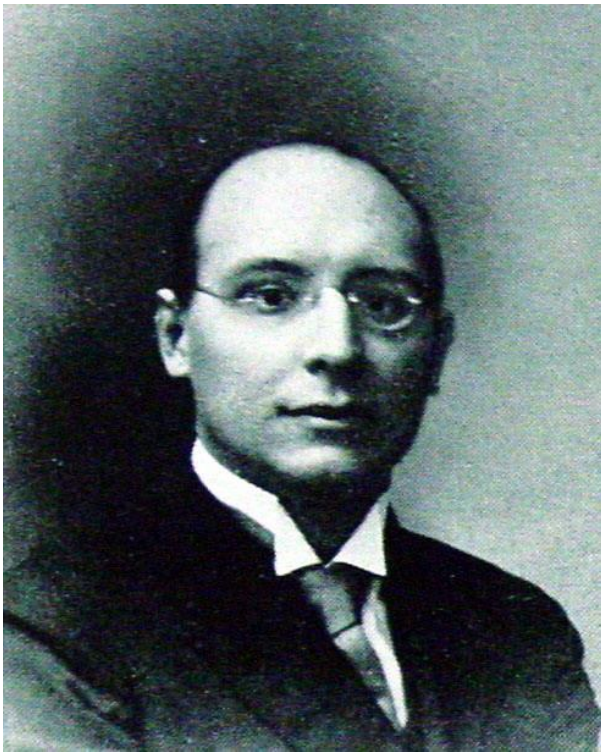
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2016 年第 5 卷第 2 期



乔治·萨顿

（George Sarton, 1884～1956）

《上海HPM通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物为比利时-美国科学史家乔治·萨顿（George Sarton, 1884～1956）。

萨顿于 1884 年 8 月 31 日出生于比利时佛兰德省的根特。父亲是比利时国家铁路公司的负责人和总工程师，母亲是一名艺术家，在他未满周岁时就去世了。萨顿早年对文学、艺术和哲学有浓厚的兴趣，1902 年进入根特大学学习哲学，但很快厌倦；经过一年的自学和思考，1904 年回到根特大学学习化学，于 1906 年毕业并在两年后获得一枚化学金质奖章；之后专修数学和物理学，1911 年 5 月，他以题为“牛顿力学原理”的论文获得科学博士学位；而后开始具体着手筹划和实施科学史的研究工作。1915 年初，由于第一次世界大战，萨顿辗转来到美国，于 1916 年 5 月被聘为哈佛大学科学史讲师，为期一年；1918 年 7 月被卡内基研究院任命为副研究员，1920 年开始兼任哈佛大学的科学史讲师；1940 年 9 月被聘为哈佛大学的科学史教授。

萨顿的科学史研究工作开始于科学史和科学哲学杂志《伊西斯》（*Isis*）的创办，该杂志于 1912 年筹办，1913 年正式出版，目前已成为国际上最权威的科学史刊物之一。1936 年，萨顿又着手创办了姊妹刊物《欧西里斯》（*Osiris*）。萨顿一生出版了 15 部专著，最有影响力的当属《科学史引论》（*Introduction to the History of Science*, 1927~1948）和《科学史》（*A History of Science*, 1952 & 1959），遗憾的是两部著作均未完成；发表了 300 余篇论文，编辑 79 份详尽的科学史重要研究文献目录；其中有四条主要思想贯穿始终，即“统一性的思想，科学的人性，东方思想的巨大价值，对宽容和仁爱的极度需要”。“把科学人性化”，是萨顿毕生所追求的理想，他想要建立完整的科学哲学，提供自然科学与人文科学之间的桥梁，萨顿将其称为“新人文主义”。

在进行科学史研究的同时，萨顿极为热情地致力于科学史的教育教学工作三十余年，并在美国许多大学进行演讲。萨顿指出，科学史的目的是说明科学事实和科学思想的发生和发展，古老的思想观点常常会周期性重复出现，给当代科学家很大的启发，科学史实际上是人类文明的历史，因此科学史具有教育和道德的职能。他认为按历史叙述的教科书能使课程讲得更明白、更直观，科学史教学最终应扩展到整个学校教育时期，学生体验了科学事实的发生发展，才有可能真正理解它们；向学生详细追溯一项发现的全部历史，包括如何解决困难、达到目标，有利于启发学生的批判精神、检验学生的才能；同时，优秀的科学家传记能把青春时期的想象引导至最好的方向。他强调科学史的道德教育价值，认为科学史上充满着“最

纯粹、最光荣、最勇敢的事迹”，体现着人类精神文明的发展与进步。他说，科学史能够教导人们，认识取得科学知识的艰难曲折，认识科学知识总体的博大精深；指引人们去为真理而奋斗，使人们更加谦虚，更加勇敢……。

萨顿通过评论重要文献建立科学史资料库，提供大量科学史课程，成立科学史学会、扩大科学史的影响，最终科学史成为一个独立的学科，因此萨顿被认为是科学史学科的奠基人，被称为“科学史之父”；科学史学会创造奖被称为萨顿奖章，是科学史学会最负盛名的奖项。《爱西斯》杂志在萨顿诞辰 100 周年纪念的时候(1984 年)发表了萨顿的女儿、著名诗人和小说家梅·萨顿悼念她父亲的诗：《一种纪念》（1957）。诗的结尾写道：此时，死亡的余音只是人们对他的颂赞，就像一位邻居所写所说的那样：“我不认识你的父亲，但是他的灯光曾在那里，我把那灯光怀念。”

1936 年，萨顿出版了《数学史研究》。按照萨顿的观点，数学史可以让数学变得人性化，而且，人性化的数学教学能使学生热爱并深刻理解数学。正因为如此，萨顿指出，研究数学史的主要理由在于人文，而数学史家的主要职责之一是解释数学的人性。

今天，在数学与人文之间构建一座桥梁，始终是 HPM 教学所追求的目标之一，每一个成功的 HPM 教学案例，都体现了萨顿的人文主义思想。

目 录

Content

一元一次方程求解的历史*

齐丹丹　洪燕君　汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

一元一次方程是学生从算术思维到代数思维过渡时最早遇到的方程，对于学生后续的代数学习具有十分重要的意义。然而，教师在教授一元一次方程解法时，往往只注重“移项”、“合并同类项”、“系数化为 1”等机械步骤，但学生在实施上述机械步骤时常常会出错；同时，符号操作也会让学生觉得数学枯燥乏味。英国教育家斯宾塞（H. Spencer, 1820～1903）曾说：“一般教起来使人觉得枯燥或是讨厌的知识部门，依照自然的方法就成为极其有趣又非常有益的。”[1] 那么，怎样的教学算是自然的方法？历史相似性告诉我们，教师可通过数学知识的发生和发展历史来了解学生的认知过程和学习难点。大量的文献及课堂实践均表明，数学史融入数学教学能够有效地激发学生的学习兴趣、增强学生的自信心、促进其欣赏和理解数学。因此，我们希望从数学史中寻找一元一次方程解法的教学良方。同时，为了制作一元一次方程的 HPM 微课，我们也需要掌握相关的历史素材。

1 古埃及人的假设法

古埃及纸草书上已经记载了许多一元一次方程问题。著名的莱因德纸草书（约写于公元前 1650 年）第 24-29 题就是形如 $ax+bx=c$ 的一元一次方程问题。第 24 题为：“一个量，加上它的 $\frac{1}{7}$ 等于 19，求这个量。”[2]

祭司用假设法来解这个方程。先假设一个答案 $x_1=7$，则得结果 $x_1+\frac{x_1}{7}=8$。因此，所假设的值再乘以 $\frac{19}{8}$（古埃及人表示为 $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$），结果才是题设的 19。因此，正确答案为 $\frac{19}{8}x_1=\frac{19}{8}\times 7=16\frac{5}{8}$（古埃及人表示为 $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$）。

古埃及人的假设法在求解方程问题时确有突破，但由于该方法需借助比例思想，故只能

* 上海市教育科研项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“数学史融入中小学数学课程的实践研究”（项目编号：D1508）系列论文之一。

求解形如 $ax+bx=c$ 的一次方程。

2 移项法的起源

由于解方程的需要，中国古代数学家最早使用了负数，汉代《九章算术》提出了正负数的运算法则。有了负数概念和运算法则，方程的变形就变得水到渠成。移项的方法已出现于《九章算术》中。该书方程章有许多问题所涉及的方程都需要通过移项来化简。

方程章第 2 题为：“今有上禾七秉，损实一斗，益之下禾二秉，而实一十斗；下禾八秉，益实一斗，与上禾二秉，而实一十斗。问：上、下禾实一秉各几何？”“术曰：如方程。损之曰益，益之曰损。损实一斗者，其实过一十斗也；益实一斗者，其实不满一十斗也。”[3]

设上、下禾每秉各有 x 和 y 斗谷物，由题意得方程 $\begin{cases}7x-1+2y=10\\2x+1+8y=10\end{cases}$。第一个方程中，左边损 1，相当于右边益 1；第二个方程中，左边益 1 相当于右边损 1。因此，原方程可化为 $\begin{cases}7x+2y=11\\2x+8y=9\end{cases}$。“损之曰益”、“益之曰损”说的是常数项的移项规则。

同章第 6 题为：“今有上禾六秉，损实一斗八升，当下禾一十秉；下禾一十五秉，损实五斗，当上禾五秉。问：上、下禾实一秉各几何？”“术曰：如方程。置上禾六秉正，下禾一十秉负，损实一斗八升正。次，上禾五秉负，下禾一十五秉正，损实五升正。以正负术入之。”[4]

设上、下禾每秉各有 x 和 y 斗谷物，由题意得方程 $\begin{cases}6x-18=10y\\15y-50=5x\end{cases}$，两个方程分别移项得 $\begin{cases}6x-10y=18\\-5x+15y=50\end{cases}$。本题中，同时移了常数项和未知数项，刘徽称之为“互其算”。

3 盈不足术的最早运用

或许有人会说：既然汉代中国数学家已经提出了移项法，也知道合并同类项，那么，所有一元问题就应该用代数方法来解决了。但事实并非如此，《九章算术》中所有的一元问题都是通过算术方法求解的，其中最重要的方法就是“盈不足术”。该书“盈不足”章设题：“今有垣高九尺。瓜生其上，蔓日长七寸；瓠生其下，蔓日长一尺。问几日相逢？”[4]若设经过 x 日相逢，则由已知条件可得十分简单的方程 $17x=90$。但书中给出的解法却是：假设

5 天后相逢，则离实际垣高还差 5 寸；假设 6 天后相逢，则超过实际垣高 12 寸。于是得相逢天数为 $x=\dfrac{5\times12+6\times5}{12+5}=5\dfrac{5}{17}$。

实际上，已给一元一次方程 $ax=b$，由 $ax_1=b_1<b$， $ax_2=b_2>b$ ($x_2>x_1$)，得 $a\left(x-x_1\right)=b-b_1$， $a\left(x_2-x\right)=b_2-b$。于是，

$$a\left(x-x_1\right)x_2+a\left(x_2-x\right)x_1=x_2\left(b-b_1\right)+x_1\left(b_2-b\right)$$

$$a\left(x-x_1\right)+a\left(x_2-x\right)=\left(b-b_1\right)+\left(b_2-b\right)$$

即

$$a\left(x_2-x_1\right)x=x_2\left(b-b_1\right)+x_1\left(b_2-b\right)$$

$$a\left(x_2-x_1\right)=\left(b-b_1\right)+\left(b_2-b\right)$$

所以，

$$x=\frac{x_2\left(b-b_1\right)+x_1\left(b_2-b\right)}{\left(b-b_1\right)+\left(b_2-b\right)}$$

4 花拉子米的还原与对消法

9 世纪，阿拉伯数学家花拉子米（al-Khowarizmi）在《代数学》中给出了解方程的简单可行的基本方法。主要方法有二：一是“还原”，即将负项移至方程另一端后变成正项；二是“对消”，即将方程两端相同的项消去或合并同类项。再加上算术运算即可求得结果。全书不用符号，故没有方程的形式，但有明显的方程的思想[3]。花拉子米是用文字来叙述方程解法的，并没有采用字母符号。

例如，书中设题：“将 10 拆成两部分，各部分自乘，大的减去小的，差为 40。求这两部分。”[6]花拉子米的解法相当于：

$\left(10-x\right)^2-x^2=40\Rightarrow100-20x=40\Rightarrow100=20x+40\Rightarrow60=20x\Rightarrow x=3$。

在对此题求解的第二步中，将负项$\left(-20x\right)$移至方程另一端后变成正项 $20x$，称为“还原”；第三步中，方程两边同减去 40，称为“对消”。

花拉子米的“还原”与“对消”两大步骤，还被后人编成歌诀，以便记忆。12 世纪的一本波斯代数书中记载[3]：

方程做整理，负项当先移。

符号须改变，还原无偏离。

两边看仔细，同类合而一。

对消有智巧，古法人称奇。

5 古代印度的任意数算法

12 世纪印度数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114～1193）在《丽拉沃蒂》中也用假设法来解决一类一元一次方程。书中设题：“一个数乘以 5，减去所得乘积的$\frac{1}{3}$，差除以 10，加上原数的$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$，结果为 68。求该数。”[7]相当于解一元一次方程

$$\frac{1}{10}\left(5x-\frac{5}{3}x\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x=68。$$

婆什迦罗的解法是：假设所求数为 3，则得$\frac{17}{4}$，但实际结果应为 68，故所求数为$x=\frac{3\times 68}{\frac{17}{4}}=48$。由于所假设的数可以是任意的正数，婆什迦罗称上述方法为“任意数算法”。

6 斐波那契的假设法

13 世纪意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 1170?～1250?）在《计算之书》中利用单假设和双假设法来解一元一次方程。

6.1 单假设法

斐波纳契的单假设法与古埃及人的假设法一脉相承。对于一元一次方程$ax=b$（a通常是分数），假设$x=x_1$，得b_1，那么 x 为多少时，得 b？于是，将原方程转化为比例式$x_1:x=b_1:b$，解得$x=\frac{bx_1}{b_1}=\frac{b}{a}$。

斐波那契在《计算之书》第 12 章中设有许多“树长问题”，均用单假设法来解决。第 1 题为：“有一棵树，它的$\frac{7}{12}$部分在地下，地下部分长 21 掌（掌为长度单位），求树长。”[8]

相当于解一元一次方程$\frac{7}{12}x=21$。斐波那契的解法如下：假设树长 12 掌，则得地下部分长为 7 掌；那么假设树长为多少，才得 21 掌？将外项 12 与 21 相乘，再除以 7，即得树长 36 掌。

第 2 题为："有一树，它的$\frac{7}{12}$部分在地下，剩下的地上部分长 21 掌，求树长。"[8]相当于解一元一次方程$x-\frac{7}{12}x=21$。斐波纳契的解法是：假设树长为 12 掌，则地上部分长为 5 掌；那么假设树长为多少，才得 21 掌？将 12 和 21 相乘，除以 5，得树长为$50\frac{2}{5}$掌。

很多问题都可以化为树长问题。如年龄问题："一个年轻人现在的年龄未知。如果他继续活同样多年，再活同样年数，再活同样年数的$\frac{7}{12}$，再加一年，他就活了 100 岁。求他现在的年龄。"该题相当于解一元一次方程$3x+\frac{7}{12}x=99$。假设年轻人现在的年龄为 12，则得 43，那么他的年龄为多少时可得 99？由比例式得到$x=27\frac{27}{43}$。

6.2 双假设法

《计算之书》第 13 章专门讨论双假设法的应用。对于一元一次方程$ax=b$（a 往往是正分数，b 为正数），假设$x=x_1$，得b_1；假设$x=x_2$($x_2>x_1$)，得b_2。即，若假设的值变化x_2-x_1，则结果变化b_2-b_1；那么，在第二次假设的基础上，假设的值变化多少，结果变化$b-b_2$？于是，原方程转化为比例式$(x-x_2):(x_2-x_1)=(b-b_2):(b_2-b_1)$，解得

$$x=x_2+\frac{(b-b_2)(x_2-x_1)}{b_2-b_1}。$$

该章的树长问题为："有一树，它的$\frac{7}{12}$部分在地下，剩下的地上部分长 20 腕尺。求树长。"[8] 相当于解一元一次方程$x-\frac{7}{12}x=20$。斐波纳契的解法是：假设树长为 12 掌，则地上部分长为 5 掌；假设树长为 24 掌，则地上部分为 10 掌。因此，假设的值发生 12 掌的变化，结果变化了 5 掌。那么，在 24 掌的基础上，假设的值变化多少，结果会变化 10 掌呢？化将 12 和 10 相乘，除以 5，得 24 掌，加上第二次假设的 24 掌，结果为 48 掌。

中国的盈不足术是通过阿拉伯传到西方的，不难发现，斐波纳契的双假设法其实就是盈不足术，只不过上述斐波那契的例子属于"两不足"的情形。

7 16 世纪的假设法

16 世纪，单假设法和双假设法在欧洲十分盛行。荷兰数学家范·瓦伦布拉肯（van Varenbraken）在其数学教科书（1532）中设题："皮尔特对简说：'你 50 岁了！''不'，简说，'我没到 50 岁。如果取我年龄的一半，加上我年龄的$\frac{1}{3}$，加上我年龄的$\frac{1}{4}$，最后加上我的年龄，总数才是 50 岁。'问简多大了？"[9]相当于方程$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=50$。作者用假设法来解该问题：假设简的年龄为 12，则结果为 25；但实际结果为 50，故简 24 岁。

在中国，明代数学家程大位（1533～1606）在《算法统宗》中也用假设法来解一元一次方程。书中设题："甲赶羊群逐草茂，乙拽肥羊随其后。戏问甲及一百否？甲云所说无差谬。若得这般一群凑，再添半群小半群，得你一只来方凑，玄机奥妙谁参透？"[10]相当于解一次方程$2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$，即$2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=99$，程大位假设羊的数目为 10，得$27\frac{1}{2}$，但实际结果是 99，故羊数为$x=\dfrac{99\times 10}{\frac{55}{2}}=36$。

8 欧拉的解法

16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）首次用字母来表示一类数或任意数，从而使得代数学告别旧时代，进入了崭新的符号代数阶段。韦达在其《分析艺术引论》中基于等式性质证明了命题："方程经过移项后保持不变"、"方程两边同除以一个不等于零的常数后保持不变"[5]。韦达用符号语言表达出了一千五百年前中算家用文字语言表达的思想。从此，人们在解一元一次方程时不再依赖于假设法。

符号代数阶段，一元一次方程的解法以欧拉在《代数基础》中的讨论[11]最为典型。欧拉的解法见表 1。

表 1 各类一元一次方程的解法

方程的一般形式	解	解法
$x+a=b$	$x=b-a$	方程两边同减 a
$x-a=b$	$x=b+a$	方程两边同加 a
$x-a+b=c$	$x=c+a-b$	方程两边同加 a，再同减 b，或两边同加 $a-b$
$ax=b$	$x=\frac{b}{a}$	方程两边除以 a

$ax+b-c=d$	$x=\frac{d-b+c}{a}$	方程两边同加 $c-b$，再在所得方程两边同除以 a
$\frac{x}{a}=b$	$x=ab$	方程两边乘以 a
$\frac{x}{a}+b-c=d$	$x=ad-ab+ac$	方程两边同加 $c-b$，再在所得方程两边同乘以 a
$\frac{ax}{b}=c$	$x=\frac{bc}{a}$	方程两边同乘以 b，再在所得方程两边同除以 a
$\frac{ax}{b}-c=d$	$x=\frac{bc+bd}{a}$	方程两边同加 c，所得方程两边同乘以 b，最后在所得方程两边同除以 a
$ax-bx+cx=d$	$x=\frac{d}{a-b+c}$	方程左边合并同类项，然后在方程两边同除以 $a-b+c$
$ax+b=cx+d$（$a\neq c$）	$x=\frac{d-b}{a-c}$	方程两边同减 cx，再同减 b，然后在所得方程两边同除以 $a-c$
$ax+b=d-cx$	$x=\frac{d-b}{a+c}$	方程两边同加 cx，再同减 b，然后在所得方程两边同除以 $a+c$
$b-ax=d-cx$（$a\neq c$）	$x=\frac{d-b}{c-a}$	方程两边同加 cx，再同减 b，然后在所得方程两边同除以 $c-a$

由表 1 可见，欧拉借助代数符号，轻而易举地表达出古代中算家的“损益”法和“互算”法以及古代阿拉伯数学家的“还原”法与“对消”法。

9 结语

美国著名数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）在其《数学史》中写道：“对于一个符号操作得心应手的现代学生来说，我们这个世界竟然会被简单的方程 $ax+b=0$ 所困扰，这似乎是不可能的事情。”[3]一元一次方程的求解经历了漫长的历史发展过程，由于代数符号的缺失，在韦达之前，西方人无法简单地表达一个方程，而且负数概念、分数运算也成了人们解方程的巨大障碍。这就是为什么 16 世纪以前人们离不开假设法的原因。中算家尽管早在《九章算术》成书时代就掌握了负数概念、分数运算法则以及移项的方法，但由于代数符号的缺失，所有的一元问题都被视为算术问题，有关代数方法并没有被用于一元一次方程的求解。在阿拉伯，花拉子米的还原与对消法同样没有改变一元一次方程的历史。韦达创立符号代数之后，一元一次方程的现代解法才变得可能。虽然韦达提出方程的移项与同除命题，

但由于不接受负数，他依然没有解决任意一元一次方程的求解问题。欧拉的讨论才为一元一次方程的历史划上了句号。

一元一次方程的历史可以在课堂上发挥重要价值。首先，在早期历史上，含分数系数的定和问题导致了假设法的诞生。课堂上运用这类问题（如猜年龄问题），可以为学生创造机会，对古今方法进行对比，从而让他们体会代数方法以及代数符号语言的优越性，激发他们的学习动机，实现算术思维到代数思维的顺利过渡。其次，教师在课堂上介绍一元一次方程的求解历史，可以让学生理解数学的演进性，感悟数学家在数学发展过程中的作用，体会数学背后的人文精神。再次，中国古代数学家最早使用负数，最早提出用移项法对方程进行变形，最早使用双假设法（盈不足术），因此，一元一次方程求解的历史也是爱国主义教育的良好素材。最后，古代不同文明的数学文献中都含有一元一次方程问题以及求解方程的假设法，因此，学生在一元一次方程求解的历史中可以开阔视野，感悟数学文化的多元性。

参考文献

[1] Spencer, H.. *Education: Intellectual, Moral & Physical*. New York: Hurst & Company. 1862.

[2] Fauvel, J. & Gray, J.. *The History of Mathematics: A Reader*. Hampshire: Macmillan Education. 1987.

[3] Smith, D. E.. *History of Mathematics*(Vol.2). Boston: Ginn & Company. 1925. 388-389.

[4] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社, 2004.

[5] Viète, F.. *The Analytic Art*. New York: Dover Publications. 2006. 25-27.

[6] Rosen, F.. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. London: The Oriental Translation Fund. 1831.

[7] Colebrooke, H. T.. *Algebra with Arithmetic and Mensuration,from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London: J. Murray. 1817. 290-294.

[8] Siegler, L. E.. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag. 2002.

[9] Kool, M.. An extra student in your classroom: How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school. *Mathematics in School*. 2003, 32 (1): 19-22.

[10] 程大位. 算法统宗[M]. 见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇（数学卷）（第 2 册）[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1994.

[11] Euler, L.. *Elements of Algebra*. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co.. 1822. 189-206.

教学实践

HPM视角下的数列概念教学*

李 玲 汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

“数列的概念与简单表示法”是人教版《数学5》（必修）第二章“数列”的开篇。教科书从毕达哥拉斯形数引入，是其在正文中运用数学史的少有的例子之一。这一引入方式引发了我们的思考：为什么要采用数学史来引入数列概念？无论是教科书的编写还是课堂教学，用来引入一个数学概念的材料所起的作用不外乎承前启后，凸显概念的必要性，创造学生的学习动机。形数直观易懂，学生在初中时已经会用字母来表示任意一个正方形数或三角形数，故对于数列及其通项概念而言，这则材料能起承前启后的作用。然而，在凸显数列概念的必要性、激发学生学习动机方面，其作用并不明显。那么，哪些数学史料更适合于用来引入数列概念？它们究竟能起到哪些作用？我们希望从HPM的视角来设计和实施数列概念的教学，以便回答上述问题，为即将开始的高中数学教科书的修订提供参考。

本节课的教学目标如下：

（1）理解数列的有关概念，了解数列和函数之间的关系；了解数列的通项公式，并会用通项公式写出数列的前几项或任意一项。

（2）培养学生观察、归纳和抽象概括的能力。

（3）体会数学来源于生活并服务于生活的道理，感悟数学的价值，欣赏数学的文化，增加数学学习的兴趣。

1 史料选取与加工

数列的历史源远流长，古代埃及、美索不达米亚、中国、希腊等国家的数学文献中很早就有关于数列的记载。

* 本文是课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）教学案例之一。

1.1 神奇的月相

1854 年，爱尔兰学者辛克斯（E. Hincks, 1729～1866）在大英博物馆所藏巴比伦泥版 K 90（新亚述时期，公元前 7 世纪）上发现了记录月相变化的一个数列[1]：将满月分成 240 部分，则从新月开始，每天的月相变化情况如下表：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	10	20	40	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240

在月相数列中，前 5 项构成公比为 2 的等比数列，第 5-15 项构成公差为 16 的等差数列。

神奇的月相表体现了数列知识在日常生活中的应用，也散发着历史的芳香。教学设计中，我们直接运用了这则史料。

1.2 古老的趣题

大约公元前 1650 年，古埃及祭司阿莫斯抄录了一本书（今称莱茵得纸草书），其中的问题 79 以下图所示的财产表来呈现[2]：

1	2801	房屋	7
2	5602	猫	49
4	11204	老鼠	343
	19607	麦穗	2401
		容积	16807
		总数	19607

图 1 莱茵得纸草书上的等比数列问题

这是一个等比数列 7，7^2，7^3，7^4，7^5 的求和问题，其中左边两栏就是 2801×7 的具体算式。教学中，我们也直接将这个问题作为引例之一。

1.3 智慧的游戏

公元前 4 世纪的一部著作里，海格希普斯告诉世人，在乱世中约瑟夫怎样以其智慧挽救了自己的性命：当罗马人攻陷 Jotapat 后，约瑟夫和另外 40 个犹太人躲到一个山洞里避难。可是，除了约瑟夫和他一位好朋友之外，其余 39 人都决定自杀以免落入罗马人之手而遭受

折磨。约瑟夫当然不希望这样做，但他也不好公然提出反对。聪明的他口头上答应跟大家保持一致行动，但他提出临死之前大家不妨玩一个游戏自娱自乐一下，他提出如下游戏规则：所有人排成一圈，随机从某一位置开始点数，将逢三者拉出圈子杀掉，最后剩下的一个人自杀。约瑟夫将他自己和好朋友分别安排在 16 和 30 号位置上，成功地避开了死神[3]。

为了增加课堂的趣味性，我们将“约瑟夫”问题改编成一个有趣的小游戏，游戏中设置了小奖励，旨在提高学生的参与度。

2 教学设计与实施

2.1 情境引入

引例一：月相

在本节课的前几天（2015 年 4 月 4 日），发生过月全食现象，月全食是月相的一种，正好由此引入“月相”话题。首先展示一张“月食”图片，并且提问：你们知道这是怎样一个过程吗？

图 2 月食与中央电视塔

师：所谓“人有悲欢离合，月有阴晴圆缺”，这里的圆缺就是指“月相变化”：在地球上所看到的月球被日光照亮部分的不同形象。接下来我们就来看一段月相变化视频。（播放月相形成示意视频，并加以解说）

教师接着解释道，其实，关于月相的记载很早就有了。通过 PPT 展示泥版 K 90 上记录月相变化的一列数，月相表已在上文展示。

师：这些数字用以代表月亮日复一日、从新月到满月的照明部分。因此，将月盘分成

240 个部分，第一天月亮的可见部分为 5。如果将每天月亮的可见部分按时间顺序排成一列数，得到：

5，10，20，40，80，96，⋯

师：远古时代没有我们今天所用的日历，你们知道古人是怎样知道日期的吗？他们也需要春耕秋种，需要生活。

生：是看月相吗?

师：聪明！我国大约是到 1100 多年前的唐顺宗永贞元年才开始使用日历，所以在这之前人们每个月就是根据月相的变化来推测日子，从而指导生产生活，可见我们的祖先是很聪明的。

引例二：猫和老鼠

接着进入第二个情境，通过 PPT 展示：

一位富人的家里有 7 间储藏室，每间储藏室有 7 只猫，每只猫捉了 7 只老鼠，每只老鼠吃了 7 棵麦穗，每棵麦穗长出了 7 升麦粒。问储藏室、猫、老鼠、麦穗、麦粒各有多少?

这对学生来说并不难，他们很快就说出了答案，数量依次为7，7^2，7^3，7^4，7^5。

引例三：约瑟夫游戏

师：我们来玩一个游戏，如果有 10 个人围成一个圈，编号 1 到 10，游戏规则是：从 2 号开始点数，按从 1 点到 3 的方式，每点到 3 的小伙伴拉出队列，剩下的小伙伴继续按此规则点数，最后剩下的小伙伴要给其他小伙伴每人买一包薯愿。如果是你，你愿意站在几号的位置？请你把拉出队列的小伙伴按顺序记下来。

这是根据约瑟夫问题改编的一个趣味小游戏，由于规则有点复杂，一部分学生刚开始并不能一下子就找到不需要买薯片的位置编号。经过仔细思考和修正后，大部分学生都能选出不需要买薯片的位置。拉出队列的小伙伴顺序应为：4，7，10，3，8，2，9，6。最后剩下 1 号和 5 号同学需要给其他小伙伴买薯片。

思考 1：以上三个例子中的各组数有什么共同特征？

在教师的引导和提醒下，得出三组数的共同特征：都是一列数，并且都有特定的次序。

2.2 概念生成

根据上面几组数归纳出数列的概念：按一定次序排列的一列数。

接着，教师介绍“项”、“首项”等与数列相关的一些概念及其符号表示，以引领学生由

感性认识上升到理性认识，明确数列的定义。

概念剖析一：数列与集合的区别

思考 2：数列 1、2、3、4、5 与 4、3、1、5、2 是同一数列吗？

思考 3：{1，2，3，4，5}与{4，3，1，5，2}表示的是同一个集合吗？

将数列与之前学过的集合进行对比，总结得到：数列是有序的，而集合的元素是无序的。

概念剖析二：数列是一种特殊的函数

写出数列：3，4，5，6，7，8，9 每一项对应的值，并在平面直角坐标系中找出其对应的点。

数列各项依次为：$a_1=3$，$a_2=4$，$a_3=5$，$a_4=6$，$a_5=7$，$a_6=8$，$a_7=9$，如

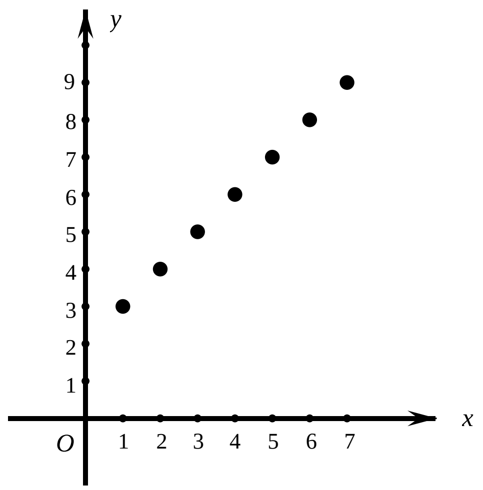


图 3 数列 3，4，…，9 的图像

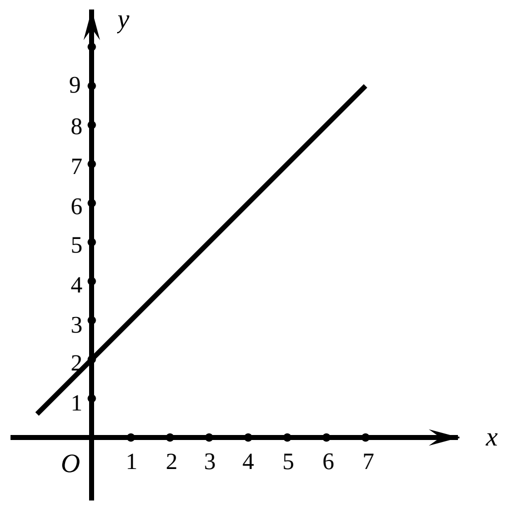


图 4 函数 $y=x+2$ 的图像

图 3 所示。通过图像，引导学生将数列与函数联系起来，说明数列是一种特殊的函数，它的图像是一些孤立的点，并且分析这类特殊函数的三要素。本例中，数列的定义域为{1，2，3，4，5，6，7}，值域为{3，4，5，6，7，8，9}。但其对应法则是什么呢？图 3 所示的各点都位于图 4 所示的一次函数 $y = x + 2$ 的图像上，易知，数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系是 $a_n=n+2$。由此引入数列通项公式概念：

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做该数列的通项公式。

例 1 写出引例 2 中的数列的通项公式。

例 2 如果数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$，你能写出数列的前 5 项对应的值吗？

本节课的最后一个内容，是按不同标准对数列进行分类。按照项数有穷或无穷分为有穷数列和无穷数列；按照项的大小关系分为递增数列、递减数列、摆动数列和常数列。

2.3 牛刀小试

练习 1：写出以下数列的一个通项公式

（1）$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

（2）3，6，9，12，…

（3）0，2，0，2，…

（4）1，3，5，7，9，…

（5）2，2，2，2，2，…

（6）9，99，999，9999，99999，999999

在学生完成练习后，选取大家有找出不同通项公式的一道题举例说明，数列的通项公式有时是不唯一的。

练习 2：写出练习 1 中的 6 个数列所属的类型。

2.4 知识拓展

最后，教师播放 2 分钟的微视频，展示数列在天文学中的神奇应用。18 世纪，德国数学家提丢斯（J. D. Titius, 1729～1796）将数列

4，7，10，16，28，52，100，196，388，772，…

与行星和太阳之间的相对距离对应起来，得到了一个惊人的法则，今称提丢斯-波德律：若以第三项 10 作为日地距离，则水星、金星、火星、木星与太阳之间的相对距离分别为 4、7、16、52、100，见下表。

行　星	提丢斯数列	与太阳实际平均距离（1/10 天文单位）
水星	4	3.9
金星	7	7.2
地球	10	10.0
火星	16	15.2
——	28	——
木星	52	52.0

土星	100	95.3
天王星	196	192
海王星	388	301
冥王星	772	396

1781 年，英国天文学家赫歇尔（W. Herschel，1738～1822)）发现天王星，其与太阳距离基本符合波德律。那么：提丢斯数列第五项 28 是否对应着一颗人类尚未发现的、位于火星和木星轨道之间的行星？一个天文学研究小组开始寻找这颗可能存在的未知行星。1801 年元旦，意大利天文学家皮亚齐（G. Piazzi, 1746～1826)）率先发现了火星和木星轨道之间的第一颗、也是最大的一颗小行星——谷神星，这是皮亚齐送给世界天文学界最好的新年礼物！不久，德国数学家高斯（C. F. Gauss, 1777～1855）设计了一种新的轨道计算方法，根据皮亚齐的观测数据，在数周内计算出谷神星的公转周期为 4.6 年，成功地预测了谷神星的轨道[4]。

3 学生反馈

课后，我们搜集了全班 40 名学生对本节课的反馈信息。

所有 40 人都表示对本节课印象深刻、感觉良好；34 人表示对数学的历史感兴趣；35 人觉得数列在生活中很有用。34 人认为，本节课中数学史的融入有助于他们的学习。作为“数列”这一章的开篇，本节课算得上是一个良好的开端。

绝大多数学生对月相的视频、“猫和老鼠”问题、约瑟夫游戏以及关于“数列与小行星的发现”的微视频产生了浓厚的兴趣。学生认为，数学史吸引了大家的注意力，活跃了课堂气氛，而视频、图片等多媒体元素的加入又使得课堂更加生动。关于学习本节课的最大收获，一些学生感叹：没想到月食中还包含数学知识，好神奇！还有学生说，以前只知道学知识、做题目，从来没有了解过数学的历史，本节课激发了他们对数学史的兴趣。

4 结语

本节课中，我们运用数学史展示了数列的以下几个特征。

- 数列之奇。古老的泥板上的一列数字记载着月相变化的规律，令人拍案称奇。“月相”这一情境的引入，成功地吸引了学生的注意力，让他们带着一颗好奇心和一声惊叹开始了美妙的数列之旅。

- 数列之趣。改编自约瑟夫问题的那个小游戏将课堂气氛推向了高潮，学生在探索和讨论过程中感受到了数列的趣味性。“猫和老鼠”问题则是一个更为古老的趣味数学问题，读来朗朗上口，有效激发了学生的兴趣。

- 数列之本。虽然数列是一种特殊的函数，其定义域是正整数集或正整数集的子集，它的项必须是按照正整数从小到大的顺序排列的。月相变化规律以及约瑟夫游戏恰当地体现了“序”这一数列的本质特征。

- 数列之用。“知识拓展”部分的探索题“数列与小行星的发现”，是数列在近代天文学上的典型应用，让学生感受到了数学的价值以及数学与天文学之间的密切联系，从而让他们产生积极的数学信念。

- 数列之韵。整节课揭示了数列知识背后的文化韵味，让数列不再是一组组冷冰冰的数字，而是散发着文化的芬芳。

数列之奇、数列之趣、数列之本、数列之用、数列之韵，共同成就了“数列之要”，形成了“数列之义”，有效地激发了学生的学习动机。我们相信，蕴含数列的上述五种特征的数学史料必为理想的教学素材。

参考文献

[1] 汪晓勤. 泥版上的数列问题[J]. 数学教学, 2009. (12): 封 2, 1-2, 45.

[2] 汪晓勤. 纸草书上的数列问题[J]. 数学教学, 2010. (1): 29-31.

[3] Ball, W. W. R.. *Mathematical Recreations and Essays*. London: Macmillan & Co.. 1956. 303-304.

[4] 汪晓勤. 数学文化透视[M]. 上海: 上海科技出版社, 2013.

HPM 视角下的“对数概念及其运算”的教学

吴晨昊

（上海市进才中学，上海 200135）

1 引言

对数思想与解析几何、微积分一起被恩格斯称为 17 世纪三大重要数学成就。但在沪教版高中数学教科书中，对数产生的历史背景几乎被略去不提，而仅从一个简单的指数方程引出对数概念。这种处理方式的一个后果是，学生在学习对数概念时，对其在历史上产生的必要性缺乏认识，在数概念及其运算的理解上存在困难。

近年来，有多位教师尝试从 HPM 的视角来设计对数概念的教学[1][2]，取得了较好的效果。实践证明，教师以史为镜，将数学史融入教学，不仅增加了课堂的趣味性，更有助于解决教学中的难点，使学生更好地理解相关概念。但已有的教学设计也存在一些不足，如例题选用不符合常规课堂的要求、教学容量偏小、学生练习时间不足等，而这正是人们对数学史融入数学教学提出质疑的缘由。

笔者借鉴已有案例，仍从 HPM 视角设计“对数概念及其运算”一课，既能发挥数学史的教育价值，同时也能弥补已有案例的一些不足。本案例涉及的教学内容为沪教版高中数学课本高一第二学期“§4.4 对数概念及其运算”，教学重点是理解对数的概念、归纳对数运算性质（不含证明），难点是理解对数的意义。

2 教学设计与实施

2.1 情境引入

首先给出问题：不用计算器，计算 1257486953×87415987023109。显然，在不借助工具的情况下计算这个式子需要花费比较多的时间。

接下来，介绍对数的历史背景：

400 年前在欧洲，哥白尼的日心说刚刚成为热门，继而涌现出一大批天文学家。他们几乎每天都要面临这样复杂的计算。有时候为了确定一颗星球的位置，光在计算上就要花去几个月的时间。因此，如何简化运算，就成为当时的科学界迫切需要解决的问题。

1614 年，苏格兰数学家纳皮尔发表著作《奇妙的对数定律说明书》，将他潜心研究二十多年的成果公诸于众，终于为众多科学家带来了希望。400 年后的今天，让我们一起回到纳皮尔的时代，追随他的脚步，来认识一下这项伟大的发明。

2.2 对数的产生

2.2.1 对数思想的起源

教师展示以下数表， 其中第一行表示 2 的指数，第二行表示 2 的对应幂。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

11	12	13	14	15	16	17	18
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144

19	20	21	22	23
524288	1048576	2097152	4194304	8388608
24	25	26	27	……
16777216	33554432	67108864	134217728	……

师：利用表格，我们可以方便地求出一些大数的运算结果。以下述四个算式为例：① 128×1024；② 33554432÷8192；③$64^3$；④ $\sqrt{65536}$ 。

例如① 128×1024：在数表中，128 对应的指数为 7，1024 对应的指数是 10，7＋10＝17，而指数 17 对应的幂值是 131072，所以 128×1024＝131072。 也就是说，较大数的乘法运算，被转化成了较小数的加法运算。

师：用类似的办法，请同学们完成其余三个算式。

生 1：因为 33554432 等于 2 的 25 次方，8192 等于 2 的 13 次方，25-13=12，而 2 的 12 次方是 4096，所以 33554432÷8192=4096。

师：很好，这样一来，较大数的除法运算，就转化成了较小数的减法运算。那么，幂的运算又该怎么做呢？比如 64^3?

生 2：因为 64 等于 2 的 6 次方，所以 64^3 就是 2 的 18 次方，等于 262144。

师：也就是说，这里指数的运算是6＋6＋6＝3×6＝18。而18在表格中对应的是262144，所以 64^3 ＝262144。这样，乘方运算（连乘）就被转化成了乘法运算（连加）。

师：我们再来看开方运算，如何计算 65536 的算术平方根?

生 3：65536 对应的指数是 16，16 除以 2 等于 8，查表得到 $\sqrt{65536}=256$ 。

师：这里我们将开方运算转化成了……?

生 3：除法。

师：上述运算规则，已经达到了简化运算的目的。 我们借用清代康熙皇帝主编的《数理精蕴》中记载的一段话来总结这种算法：

“以借数与真数对列成表，故名对数表．其法以加代乘，以减代除，以加倍代自乘，故折半即开平方．以三因代再乘，故三归即开立方．推之至于诸乘方，莫不皆以假数相乘而得真数．盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也．”

这也是“对数”一词的出处。 仍以上表为例，10（假数/借数）对应 1024（真数），我们就说“10 是以 2 为底 1024 的对数”，其中 1024 被称为“真数”。 同理，4 是以 2 为底 16 的对数，以此类推……

师：我们回到刚才给出的四道计算题，(以①为例)，这里的 7 就是以 2 为底 128 的对数，10 是以 2 为底 1024 的对数，17 就是以 2 为底 128×1024 的对数。所以我们有“两个数的对数之和，等于这两个数乘积的对数”。同理，如何解释另外三组算式?

生 4：（②式表示）两个数的对数之差，等于这两个数的商的对数。

师：很好，第三个算式呢?

生：……

师：这里的 6 是什么?

生：以 2 为底 64 的对数。

师：3 又是什么?

生：64 的指数。

师：所以 3×6 就是对数的倍乘，它等于?

生：乘方（幂）的对数。

师：非常好！④式的开方运算也是同样的道理。我们看到，对数的发明使得运算被大大地简化了。现在，问题解决了吗?

生：没有！刚才的计算题还是不能算。

师：为什么不能算?

生：两个数都不是 2 的整数幂。

师：对，因为这两个因数是老师随机给出的，显然它们都不是 2 的整数幂。也就是说，我们现在解决的是任意实数的乘法，如何用对数表来实现？为此，我们举一个类似的例子：计算 1234×0.5678 的近似值。这两个数都不是 2 的整数幂，但以 2 为底 1234 的对数是否存在？仍然存在(可以猜测该值在 10~11 之间)；以 2 为底 0.5678 的对数也存在(-1 到 0 之间)——此时数表需扩充至负数幂。于是，只要这张对数表足够"精细"，我们就可以求出任意一个正实数以 2 为底的对数近似值（二分法或插值法），从而满足实际问题中的计算需求。由此可见，真数可取任意正实数，其对数值都是存在的，可取到一切实数。

2.2.2 对数符号的产生

接下来，教师先引入对数符号。

师：实际问题是解决了，新的问题又出现了：一方面，我们希望在用文字表述"以 2 为底 1234 的对数"时能够更简洁；另一方面，回忆初中时，如果 $x^2=2$，为了精确地表示 x 的值，我们引入新的符号"$\sqrt{\ }$"，并用 $\sqrt{2}$ 来表示 2 的算术平方根。可见数学概念本身还追求精确性、严谨性。现在我们也可以引入一个新的符号"log"（因为纳皮尔将对数称作"logarithm"），并用 $x=\log_2 1234$ 来表示"以 2 为底 1234 的对数"的精确值。

类似地，如果 $2^y=0.5678$，那么以 2 为底 0.5678 的对数 y，就写作 $y=\log_2 0.5678$。如果 $3^z=10$，那么以 3 为底 10 的对数 z，就写做 $z=\log_3 10$；如果 $7^t=\frac{1}{2}$，那么以 7 为底 $\frac{1}{2}$ 的对数 t，就写做 $t=\log_7\frac{1}{2}$……。

2.2.3 对数的定义

给出教材中的对数定义，并配以相应课堂练习，熟悉指对数式的互相转化。（略）

2.3 对数的运算性质

教师用对数的符号来表示刚才总结过的对数运算性质：如①，可以写作

$$\log_2 128+\log_2 1024=\log_2\left(128\times 1024\right)。$$

让学生依次写出②~④的对数运算式。

师：注意到，式子中的真数 128 和 1024 可以推广到任意正数，也就是说，对任意

$M>0, N>0$，总有$\log_2(MN)=\log_2 M+\log_2 N$。同理，②式和③式可以推广成？

生 5：②式可以写成$\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_2 M-\log_2 N$，③式写成$\log_2 M^n=n\log_2 M$。

师：很好！这三个式子还可以进一步推广吗？

生 6：可以，把底数 2 换成 a。

师：对 a 有什么限制吗？

生：$a>0$ 且 $a\neq 1$。

由此，师生一起归纳得到对数的运算性质：如果 $a>0, a\neq 1$，且 $M>0, N>0$，则

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N;\ \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N;\ \log_a M^n=n\log_a M.$$

2.4 对数的应用

为了充分展示对数的价值，教师引导学生重新发现开普勒的行星运动定律。

师：对数发明后，有很多数学家致力于对数表的编制，为当时很多科学家的工作提供了极大的便捷！纳皮尔的著作《奇妙的对数定律说明书》正文只有 37 页，而对数表长达 90 页！有了对数表，即使是在没有计算器的当时，大数运算也不再是头疼的问题，甚至，对数还可以在科学研究中发挥意想不到的作用！

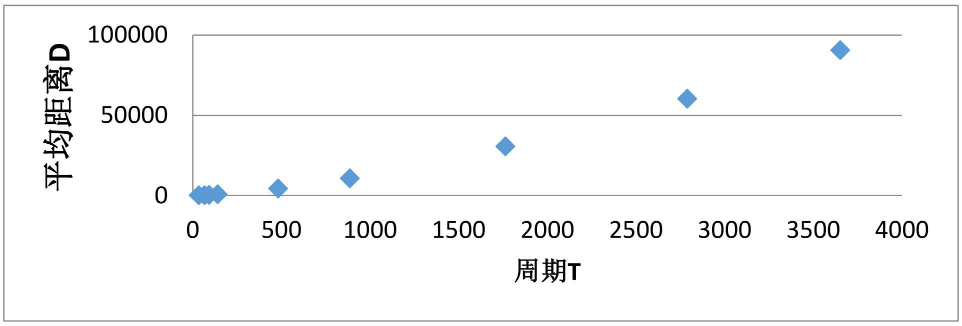
我们来看下面这个例子：天文学家开普勒和第谷对观测获得的天体运动数据，研究了将近 20 年，终于发现行星与太阳之间的距离 D 和行星绕太阳公转的周期 T 之间的关系（1618 年发表）。当时的原始数据如下表：

平均距离 D（百万英里）	36	67.25	93	141.75	483.8	887.97	1764.5	2791.05	3653.9
周期 T（天数）	88	224.7	365.3	687	4331.8	10760	30684	60188	90466.8

师：很显然，要从这两组数据中去发现两个变量之间的关系是非常困难的。同学们有没有比较好的办法？

生 7：看图像。

师：想到了数形结合，很好！为了对数据有更直观的认识，我们尝试在平面直角坐标系中画出散点图，来看看会不会有所启发？（用 PPT 展示散点图）

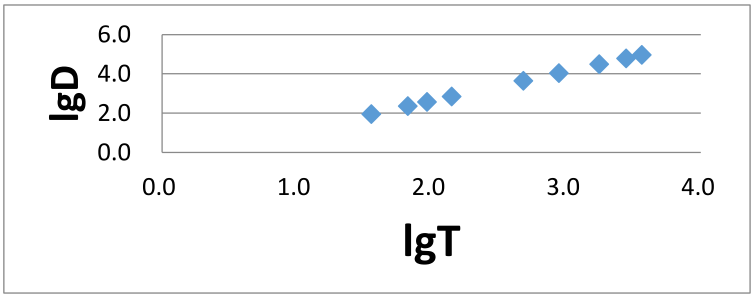


观察发现，图中各点的分布很不均匀（注意到横纵坐标之间的巨大差异，手工作图的难度很大），两组数之间的关系不容易推断。 而且曲线的类型有很多，猜测的结果有太多不确定性。 也无怪乎两位科学家花费了整整 20 年的时间。

师：但是，如果我们对表中所有的数据取常用对数（有常用对数表即可），就会发现数据变得很“好看”，不仅数值小而且分布均匀，描点作图就变得容易多了，准确性也可以大大提高。

lgD	1.6	1.8	2.0	2.2	2.7	2.9	3.2	3.4	3.6
lgT	1.9	2.4	2.6	2.8	3.6	4.0	4.5	4.8	5.0

师：（PPT 展示描点图，停顿片刻）现在，你从图中看到了什么？



生：直线！

师：是的，现在我们可以大胆猜想取对数后的两组数据之间是一次函数的关系——从图上看，这种可能性是非常大的。由此，我们可以建立 D 的常用对数 $\lg D$ 与 T 的常用对数 lgT 之间的函数关系，即 $\lg T = k \cdot \lg D + c$ ，从而根据对数运算性质得到 D 和 T 的函数关系。

可以想见，如果对数再早发明几年，开普勒和第谷就可以大大地缩短他们的研究时间！难怪数学家拉普拉斯会这样评价对数的发明，“一个人的寿命如果不拿他活在世界上的时间的长短来计算，而拿他一生中所做工作的多少来衡量，那么可以说，对数的发现不仅避免了冗长的计算与可能性的误差，而且实际上倍延了科学家的寿命”。

2.5 课堂小结

在本节课，我们重新体验了对数发明的历程，理解了对数的概念和它的基本运算性质。

对数思想，与解析几何、微积分一起，被恩格斯称为十七世纪三大数学成就，在很长一段时间里受到科学家们的狂热追捧。伽利略甚至说，给我时间、空间、对数，可以再造一个宇宙！对我们同学来说，对数的发明也是值得深思的。 它意味着在解决问题时，如果能够找到合适的方法，就可以达到事半功倍的效果。

四百年后的今天，我们可以用计算机方便快捷地进行大数运算，前人辛苦编制的对数表似乎已为时代所淘汰。 但是，大数运算转化为小数运算，乘法变加法、除法变减法，对数背后这种化繁为简的数学思想，展示了人类思维最绝妙的一面，甚至堪称一门精湛的艺术。对数思想在数学史乃至科学史上的地位，依旧是不可动摇的！

2.6 课后思考

1) 用定义证明对数的运算性质

2) 利用计算器计算以下常用对数的值：

   $\lg 0.02351,\quad \lg 0.2351,\quad \lg 2.351,\quad \lg 23.51,\quad \lg 235.1, \ldots$

   观察结果，尝试寻找规律、归纳结论，并证明。

3 学生反馈

课后，笔者对 125 名听课学生进行了问卷调查和作业检测，以了解他们对对数概念的理解程度。

首先，学生对概念的掌握情况比较理想。93.7%的学生表示“听懂了这节课的教学内容”，而在回答指对数形式互化的问题（如：“将 $4^{\frac{3}{2}}=8$ 写成对数式”；“将 $\log_5 \frac{1}{25}=-2$ 写成指数式”）时，正确率基本达到 100%，仅有一位同学出错。而在化简对数式的问题（如：“计算：$\log_2 \frac{1}{64}=$___；$\log_9 27=$ ___.”）上，正确率也达到 96.8%。而涉及对数运算的问题，如“求 $2^{1-\frac{1}{2}\log_2 3}$ 的值” 和 “求 $(\sqrt{5})^{\log_5 10-1}$ 的值”，则正确率相对较低，为 68%和 77.6%. 由于本节课的重点是对数的概念，而未对其运算性质予以证明，因此这一结果也在情理之中。

另一方面，学生对数学史融入数学课堂的这一形式，普遍持积极态度。尽管过去一直喜欢上数学课的学生只有 81%，但超过 90%的学生表示喜欢这样 “融入数学史的授课方式”，

87.3%的学生希望“以后的数学课也用这种方式进行”。而对于数学史，学生显然也表现出较大的兴趣，有 89.7%的学生表示“愿意了解与教学内容有关的数学史知识。”

4 结 语

本节课有以下几处亮点。

其一，教学内容更加丰富，重点更加突出。引例给出的四个算式，贯穿课堂始终——从对数思想的呈现，到对数概念的产生，以及最后对数运算性质的形成，先后三次运用四个算式作为实例，加深学生的理解。教学设计简化了自然对数与常用对数的部分内容，将其分别安排在前期拓展课程与后续教学中，进一步突出本节课的教学重点；

其二，关注学生的认知基础，创设认知冲突，激发学生的求知欲。新课引入时给出的运算式，使学生直观感受到大数运算的繁杂，从而产生学习新知识的需求；而对数符号的产生，则源于对一个新数的精确表示。 创设适当的问题情境，也使课堂教学的节奏更为紧凑，条理更加清晰。

其三，用天文学实例体现对数运算优越性。引用开普勒第三定律的实例，通过对开普勒与第谷的原始观测数据进行再加工（取常用对数），辅以函数图像，鲜明直观地体现对数思想在科学研究中的重要作用。

本节课属于重构式的 HPM 教学案例，在课堂上重现了纳皮尔发明对数的历史过程，并完整地呈现了对数概念及其运算性质等核心知识。数学史的运用使概念的出现更为合理自然，解决了学生学习数学常会提出的问题：“为什么要学这个概念？”同时，遵循历史发生原理的重构式教学很好地解决了学生学习对数概念及运算时的几大难点——包括理解对数的意义、提炼归纳对数运算性质等。

HPM 视角下的数学概念教学，其优势是显而易见的。教师在设计教学时可以以史为镜，创设符合历史实际以及学生认知的问题情境使概念的产生更为自然；也可以通过了解概念形成的历史演变过程，预判学生在理解概念时可能遇到的困难，从而设计出更有针对性的教学方案；而历史上的数学家们为一种新思想或一个新概念的产生而付出的非凡努力，也为数学学科达成“立德树人”的目标提供了丰富的素材。

参考文献

[1] 金惠萍，王芳. HPM 视角下的对数概念教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014.(9): 28-34.

[2] 钟萍，汪晓勤. 对数概念：从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 2015. (5): 50-53.

列方程的翻转课堂教学：HPM 的视角*

沈志兴[1]　洪燕君[2]

（1.上海师范大学附属罗店中学，上海，201908；2.华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引 言

“列方程”是沪教版数学 6 年级下册的内容，是方程学习的第一节课，旨在培养学生从算术思维过渡到代数思维，建立和形成方程的思想，对整个初中阶段的代数学习具有奠基性的意义。以往的教学实践表明，学生对算术方法有一定的依赖性，而且在运用方程思想寻找“等量关系”的过程中，存在着“自信心不足、阅读和表述、对问题类型不够熟悉”等困难，以致不能准确将实际问题中隐含的数量关系挖掘出来。这些问题不仅与学生使用的列方程策略有关，还与题目类型和题目使用的描述性语言有关，另外与任课教师对学生的学习要求也有一定关系[1]。

为了使学生更好地理解方程的概念，培养学生形成方程的思想，并对后续“方程解法”的教学做好铺垫，我们拟定了如下教学目标：

（1）知道列方程的优越性，初步形成方程思想；

（2）理解和掌握列方程的步骤，正确找出等量关系，列出方程；

（3）了解相关数学史料，通过古代问题的对比，让学生感悟悠久的数学历史、多元的数学文化。

历史上的一元一次方程问题可以分成四则问题、行程问题、合作问题、定和问题、余数问题五类[2-3]。在小学，学生已经遇到过前四类问题，他们会用算术方法来解各类问题，也会用简单方程来解最简单的四则问题。所以本节课的教学设计中，我们需要解决以下问题：（1）哪些类型的一元问题最符合学生的认知基础，同时又能激发他们的学习兴趣？（2）如何凸显列方程方法的必要性和优越性，从而创造学生的学习动机？（3）如何在一节课中让学生接触所有的五类问题，使其对一元问题有较为系统的认识？（4）如何让本知识点发挥更多的育人价值？

为了解决上述问题，我们将丰富的数学史问题用于教学设计，并采用了翻转课堂的教学

* 上海市教育科研项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“数学史融入中小学数学课程的实践研究”（项目编号：D1508）系列教学案例之一。

模式。首先，选取有教育价值的数学史内容，制作微视频，供学生课前观看；同时，选择五类典型的一元一次方程问题，制作与微视频配套的学习单，要求学生课前完成。在课中，教师选择与学习单对应的五类古代问题，让学生分别列出方程。最后，选择五类古代问题作为列方程的作业，让学生课后完成。需要说明的是，本节课我们对这五类问题是进行“列方程”的学习，后续“解方程”的教学中将继续运用这五类问题进行求解。

2 微视频的内容

首先，以现实生活中“猜年龄、算人数”的例子引入，由易到难地刻画、分析运用代数思维的必要性，并由此引出方程的话题。然后，概述方程的历史：古埃及纸草书和两河流域的泥板上已记载了大量的方程问题。许多数学典籍，如《孙子算经》、《希腊选集》、《计算之书》、《算法统宗》等含有丰富的方程素材。在我国，“方程”这个名词，最早见于《九章算术》，“方”是把算题用算筹列成方阵的形式，而“程”是度量、计量、考核等意思，这与现代意义中的“方程”虽然定义有异，但其解决问题的思想毫无二致。最后说明，前面的两个实际问题都是根据上述古籍中的某些问题改编而成的。微视频时长约 5 分钟。

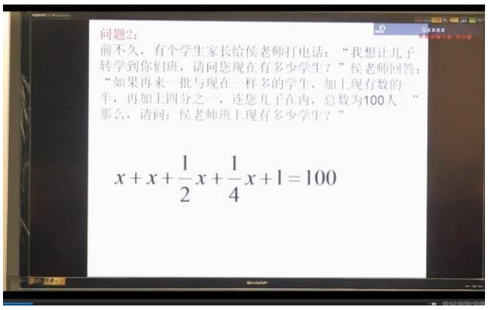


图 1　微视频片段

教师在配套的学习单中给出以现代生活为背景的 5 道题，分别对应“四则运算、行程、合作、定和、余数”等五类古代一元一次方程问题。要求学生根据微视频中讲述的方程思想进行列方程的练习，使学生经历从丰富的实际问题中寻找数量关系、建立方程这一数学建模的过程，为课堂教学做铺垫。

微视频具有短小精悍、自主便捷、表现生动、可重复性等特点，学生们可以反复观看，强化认识和理解，微视频中的数学史料有助于促进教学三维目标的达成。

3 教学过程

3.1 回顾与描述

让学生回顾微视频的内容，用课件展示其中的两个问题：

问题 1（猜年龄）：我再过现在年龄的两倍，再加 4 岁就是 100 岁啦。请大家猜猜我现在的年龄，看谁猜得快。

问题 2（算人数）：前不久，有个学生家长给侯老师打电话："我想让儿子转学到你们班，请问您现在有多少学生？"侯老师回答："如果再来一批与现在一样多的学生，加上现有数的一半，再加上四分之一，连您儿子在内，总数为 100 人。"那么，请问：侯老师班上现有多少学生？"

让学生对其解法进行描述，并对算术方法和代数方法进行比较，引导学生体会列方程解决问题的优越性和必要性。

3.2 交流与展示

接下来，以小组合作的方式让学生对配套学习单上的 5 个现代问题[2-3]展开讨论、交流，自主地发现问题、分析问题和解决问题。

（1）四则问题：已知电线杆的 $\frac{3}{14}$ 部分在地下，若地下部分为 2.7 米，则电线杆的总长为多少米?

（2）行程问题：第一艘船从甲地出发，需行 5 天才抵达乙地；第二艘船从乙地出发，需行 7 天才能抵达甲地。今两船各从甲、乙两地同时出发，相向而行，问几天后相遇?

（3）合作问题：甲、乙、丙三人制砖，一天各能完成 300、250 和 200 块，三人合作制砖 1500 块，需多长时间?

（4）定和问题：开学第一天，小明问新来的数学老师几岁了，数学老师回答说：取我年龄的一半，加上我年龄的 $\frac{1}{3}$，又加上我年龄的 $\frac{1}{4}$，最后再加上我的年龄，总数刚好是 100，请问新来的数学老师多大了?

（5）余数问题：在一次课外活动中，青青班里有一半同学去听讲座，三分之一的同学去踢球，七分之一的同学去跑步。剩下青青一人在琴房练琴。请问青青班里共有多少人?

在学生的交流讨论过程中，我们发现，一些平时喜欢用算术方法的学生也在尝试列方程。

小组展示时，师生们一起画线段图，并在黑板上写出已知量和未知量，建立等量关系，再通过把未知量设为 x，从而成功地列出了方程。

3.3 合作与探究

随后，教师给出了与学习单相对应的 5 个古代数学问题[2-3]。

（1）四则问题（《计算之书》）：树的 $\frac{7}{12}$ 部分在地下，长 21 尺，求树长。

（2）行程问题（《九章算术》）：今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫、雁俱起，问几何日相逢?

（3）合作问题（《希腊选集》）：有一个水池，用第一个喷口注水，1 天可注满；用第二个喷口注水，2 天可注满；用第三个喷口注水，3 天可注满；用第四个喷口注水，4 天可注满；问四个喷口同时注水，多长时间可注满水池?

（4）定和问题（《计算之书》）：四人携粮乘船，各人所携相同。四人分别拿出各自粮食的 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{6}$ 给船主，船主共得 1000 斗。问：四人携粮总数为多少?

（5）余数问题（《希腊选集》）：哲人 A：亲爱的毕达哥拉斯，缪斯的子弟，请回答我的问题：屋子里有多少人在进行着智慧竞赛呢？哲人 B：让我来告诉你吧。他们中的一半在做文学，四分之一在研究不朽的自然，七分之一在沉思默想，还有三位女性，这就是我召集的缪斯女神诠释者的人数。

列出方程之后，教师引导学生思考列方程方法的必要性和优越性。

师：同学们，以上 10 个问题我们通过列方程的方法解决了，现在大家想象一下，如果没有方程，这些问题会怎样解决呢?

生 1：会很复杂吧!

生 2：会很难，不会做!

生 3：有几个问题可以用算术方法做，但是还有几个好像用算术方法就比较麻烦了!

师：大家回答得很好，古人其实是用算术方法来解决这些问题的，很复杂也很繁琐。后来才有人发现解决应用问题可以采用方程的方法来求解，即在解决数学问题时，有一种从未知转化为已知的手段，即通过设“元”，寻找已知与未知之间的等量关系，构造方程或方程组，然后求解方程，完成未知向已知的转化，这种解决问题的思想称为方程思想。

3.4 总结与拓展

在总结环节，老师让学生们自由畅谈本节课的收获，有学生说“发现代数方法比算术方法好”、“知道了生活中有些事需要列方程”、“更深刻地了解了方程，学会了用正向思维看问题”，也有学生说“列方程要先找到等量关系”、“知道了列方程的步骤”等。最后，教师布置了一套如下的课后作业，进一步帮助学生内化“列方程”的知识，见下表。

类型	内容	备注
合作问题	一个水池，有两个进水口和两个排水口，用第一个进水口注水，1 天可注满；用第二个进水口注水，2 天可注满。用第一个排水口排水，3 天可排完；用第二个排水口排水，4 天可排完。问：同时打开两个进水口和两个排水口，多长时间可注满水池?	改编自《九章算术》、《希腊选集》和《计算之书》
行程问题	第一艘船从甲地出发，需行 5 天才抵达乙地；第二艘船从乙地出发，需行 7 天才能抵达甲地。今两船各从甲、乙两地同时出发,相向而行,问几天后第二次相遇?（假设两船到达目的地后，各自立即返回）	改编自《九章算术》和《计算之书》
四则问题	我找到一石，但未称其重量。它的 6 倍，加上 2 斤，再加上所得重量三分之一的七分之一的 24 倍,共重 60 斤。问：石子原重几何?	采自古巴比伦泥版书
定和问题	小明花 77 元买 4 本书，第二本书的价格是第一本的 $\frac{2}{3}$；第三本的价格是第二本的 $\frac{3}{4}$；第四本的价格是第三本的 $\frac{4}{5}$，求各本书的价格。	改编自《九章算术》和《计算之书》
余数问题	圆圆有苹果若干，她把其中的三分之一、四分之一、五分之一和八分之一分别给了四位好朋友，又给她妈妈 10 个，自己只剩下一个苹果，问圆圆原来有几个苹果?	改编自《希腊选集》

下课前，老师让学生回顾并思考微视频中提到的古希腊数学家丢番图的墓志铭问题，同时为了使学生学以致用，进一步体会方程的思想，还布置了如下编题作业：请根据方程 $2x+3(x-1)=27$，自编一道应用题，并与同伴交流你的设计思路。

4 教学反馈

本节课在 6 年级的两个班上相继进行了实践。我们通过课堂观察、问卷调查和随机访谈来获得学生的反馈信息，97%的学生都表示“喜欢这节课”，他们认为：

（1）数学史走进课堂，让知识容易理解。学生认为，“这节课介绍了方程的由来和演变过程，让我感到方程很有趣”，“喜欢有历史故事的情节，简单易懂”。

（2）丰富了数学问题，看到了方程的价值。有学生谈到，“这节课中，我知道了古题具有研究价值，因为现代生活中的问题竟然和古代一样”，“用方程可以让解题变得容易，觉得方程很有用”。

（3）可以自主学习，节约时间。部分同学认为，“翻转课堂有自主讨论，更能培养个人的自学能力，更加节省时间”，“数学史的微视频扩大了我的知识视野”。

5 结 语

用数学史料制作微视频，使之成为课堂教学的线索，并以翻转教学的形式来呈现，这是我们做出的一次大胆的尝试。数学史在本节课中发挥了如下作用。

首先，微视频中的“猜年龄”和“算人数”这两个定和问题，既是历史上非常盛行的数学问题，也符合今日学生的生活经验，能够激发他们的兴趣；学生能够用算术方法来求解，但并不容易，所涉及的方程也不是他们曾经遇到过的简单类型，两个问题能够凸显列方程方法的必要性和优越性，从而创造学生的学习动机。因此，微视频为本节课做了很好的准备。

其次，参照历史，本节课的课前学习单、课中的例子、课后的练习都分别设计了四则、行程、合作、定和和余数五类一元一次方程问题，且后续“解方程”的学习中教师会继续利用这些问题来讲授解法，这就使得这些数学史料不仅是本节课的教学线索，而且也成为了教学单元的主线，让学生系统地而非零散地认识了一元一次方程的应用问题。

再次，通过课前的现代问题与课中、课后的古代问题的对比，让学生感悟悠久的数学历史、多元的数学文化；学生得以穿越时空，与古人交流，走进古人的心灵之中，从而更加亲近数学、理解数学、热爱数学。

参考文献

[1] 张娟. 初中生对方程思想的理解[D]. 华东师范大学, 2007.

[2] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(一) [J]. 中学数学教学参考, 2007. (11): 51-53.

[3] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(二) [J]. 中学数学教学参考, 2007. (12): 54-56.

HPM 视角下的列方程教学*

张君丽[1]　李　霞[2]　洪燕君[2]

（1.友爱实验中学，上海, 200241；2.华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引 言

“列方程”是沪教版数学教科书六年级第六章的开篇。教材通过实例的两种解法引出列方程，逐步让学生认识到列方程的必要性。学生在小学阶段学过简单的列方程，他们对于列算式方法和列方程方法的倾向性可能是并存的。数学教育研究表明，学生从算术思维到代数思维的转变并非一蹴而就，要让六年级学生全然抛弃算术方法而采用“列方程”方法，需要一个缓慢的过程。既然用列算式的算术方法能解决问题，为什么还要学习列方程方法？如何体现“正向思维”的优越性？教学实践中，教师需要回答上述问题以激发学生的学习动机。另一方面，在“列方程”的教学中，人们通常只关注列方程的方法和步骤，往往忽视数学文化的渗透。今天，HPM 视角下的数学教学日益受到人们的关注，那么，将数学史融入“列方程”的教学能否对学生的学习产生积极的影响？上述问题的答案需要在实践中寻找。

因此，我们从 HPM 的视角来设计和实施“列方程”的教学，并拟定了以下教学目标：

（1）掌握列方程的有关概念以及理解列方程的意义；

（2）体会算术方法和列方程方法的异同，感悟列方程方法的优越性，渗透方程思想；

（3）了解古今方程发展历程，感悟数学文化，激发学习兴趣，提升数学学习的自信心。

2 数学史料及其运用

在初等代数学的历史上，方程始终是核心内容，古代埃及、两河流域、中国、印度、阿拉伯、中世纪欧洲的大量数学文献中，都有着丰富多彩的方程问题。面对诸多历史史料，我们拟遵循趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性等五项原则，选取一定的教学素材。

中国数学典籍《九章算术》中的一元一次方程问题可分成四则、行程、合作、定和、余数五大类[1]，见表1。

---

* 上海市教育科研项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“数学史融入中小学数学课程的实践研究”（项目编号：D1508）系列教学案例之一。

表1 《九章算术》中的一元一次方程问题举例

类别	例 子[3]	古代解法	对应方程
四则	今有田广一步半，求田一亩，问从几何？（少广章）	$240\div\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}x=240$
行程	今有垣高九尺，瓜生其上，蔓日长七寸；瓠生其下，蔓日长一尺。问几何日相逢?（盈不足章）	$(5\times12+6\times5)\div(12+5)$	$17x=90$
合作	今有池，五渠注之。其一渠开之，少半日一满；次，一日一满；次，二日半一满；次，三日一满；次，五日一满。今皆决之，问几何日满池。（均输章）	$1\div\left(3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$	$\left(3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x=1$
定和	今有人持金出五关，前关二而税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一。并五关所税，适重一斤。问本持金几何。（均输章）	$1\div\left(\frac{1\times2\times3\times4\times5}{2\times3\times4\times5\times6}\right)$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{420}x+\frac{1}{30}x=1$
余数	今有人持米出三关，外关三而取一，中关五而取一，内关七而取一，余米五斗．问：本持米几何？（均输章）	$\frac{50\times7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$	$\frac{1}{7}x+\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x+50=x$

根据数学史在数学教学中的融入程度，HPM研究者将其分为附加式、复制式、顺应式和重构式四种类型[2]。本研究中，我们采用如下三种方式：

（1）顺应式：引入环节，采用了根据数学史上定和问题改编而成的一元一次方程问题；

（2）复制式：采用了原汁原味的古代问题（包括行程问题、定和问题和余数问题）；

（3）附加式：简单介绍方程的历史以及数学家丢番图（Diophantus，约246～330）和笛卡儿（René Descartes, 1596～1650）。

3 教学设计与实施

3.1 情境引入

师：我们学校上周五刚举行过一年一度的义卖活动，大家都参与其中，相信现在你们都忘不了当时热闹的场面，现在请看一下老师在义卖现场录制的两段视频。

微视频 1 中提出以下问题：小恒在义卖活动中买了很多玩具和娃娃，总共花了 36 元钱，其中买玩具花的钱是书的 3 倍。你猜猜买玩具花了多少钱？

观看视频后，教师让学生列出已知量和未知量，并找出其中存在的关系，两个学生分别给出如下解法：

生 1：（算术方法）将 36 元看成一个整体，共分 4 份，则每一份为 9 元，期中玩具的钱占 3 份。列算式如下：$36 \div (1+3) \times 3 = 27$ 元。

生 2：（列方程法）设买书花了 x 元，则买玩具花 $3x$ 元，因为买玩具的钱+买书的钱=总钱，所以 $x + 3x = 36$，则玩具花了 3×9=27 元。

教师指出，利用“买玩具的钱+买书的钱=总钱”列出算式和方程，这种在已知量和未知量之间建立的一种等式，叫做等量关系。这个问题利用列算式和列方程均能解决。

视频 2 中进一步提出更难的问题：义卖活动结束后，统计员将收入清单交给班长。义卖出去的物品有有玩具、电子产品、书本、首饰四类，共收入 200 元。可是各项物品收入未列入，但只记得卖电子产品的收入是玩具的 $\frac{1}{2}$，书本的钱是玩具的 $\frac{1}{3}$，首饰的钱是玩具的 $\frac{1}{4}$。班长根据以上条件完善了清单，班长是怎么做到的？

师：通过对话，你听到哪些已知条件，未知条件？

生：已知：共 200 元，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$。未知：求玩具的钱。

师：请同学们找出这些已知量和未知量之间的关系并列出方程。

生 3：买玩具的钱+电子产品的钱+书本的钱+首饰的钱=总钱，设卖玩具的收入为 x，则的方程 $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 200$。

师：此题列算式容易求解吗？为什么？

生：不容易。这些都是分数，很难推算出总钱被分成几份。

师：是的，在这里用算术方法就不那么容易了，而列方程却更加简单直接。我们义卖活动中遇到的问题在古埃及纸草书、古巴比伦泥版书、中国古代数学典籍《九章算术》中均可找到其原型。对于问题 1 大家和古人一样往往采用算术方法，根据条件去倒推；而问题 2 ，由于分数运算性质不完整，古人只能采用猜测的方法，而同学们现在采用列方程则直接将题目中的等量关系翻译成符号语言，是不是比古人要高明得多？下面让我们好好学习一下这种解决问题比较直接快捷的工具——方程。

3.2 新课讲授

在本环节，教师首先让学生回顾方程的概念，并给出“列方程”概念：在已知数和未知数之间建立的一种等量关系式，把这种方法叫做列方程。让学生判断一些等式是否属于方程。

接下来，播放微视频 3（时长 2 分 8 秒），让学生了解方程的历史以及早期的应用：

在中国古代的数学史上，“方程”这个名词，最早见于《九章算术》。《九章算术》是中国古代最著名的数学典籍，书中收集了 246 个数学问题，其中，方程是第八章的内容。谈到方程，大家有必要认识下面两位数学家：古希腊数学家丢番图是杰出的古希腊数学家，他一生中解过很多代数方程和不定方程，被人们誉为“代数学鼻祖”。法国哲学家、数学家、解析几何创始人笛卡儿认为：“一切问题都可以转化为数学问题，一切数学问题都可以转化为代数问题，一切代数问题都可以转化为方程。于是，一切的问题均将迎刃而解。”可见，数学家们十分重视方程，方程在解决问题中起到很好的桥梁作用。

师：同学们，喜不喜欢上面介绍的两位数学家？

生：喜欢。

师：好，现在让我们用列方程方法去解决古人在生产生活中遇到的问题吧。请看《九章算术》中的问题：“假设有个人带着米出三个关卡：外关 3 份征税 1 份，中关 5 份征税 1 份，内关 7 份征税 1 份。剩余的米是 5 斗。问本来带的米是多少？” [4]

生 4：设本来带米 x 斗，内关征米斗数+中关征米斗数+外关征米斗数 +余米斗数=原米斗数，列方程得 $\frac{1}{7}x+\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x+50=x$。

师：回答得真好！以后我们再来解这个方程。

课件展示古人的解法：剩余米 5 斗乘以 7 除以 6，就是内关未征税时米的斗数，再乘以 5，除以 4，就是中关未征税时米的斗数，再乘以 3 除以 2，就是外关未征税时米的斗数，也

就是最初的米的斗数。教师对古法作以解释，并指出学生小学的时候接触过这种倒推的方法，但大多数同学都不太理解，学生们列方程的方法走出了古人倒推解决问题的套路。这不仅突出了列方程方法的直接易懂，更让学生增强了数学自信！

3.3 古今对照

在该环节，教师分别选择《九章算术》中的盈不足问题以及行程问题作为课堂练习。

练习 1："今有垣高九尺。瓜生其上，蔓日长七寸；瓠生其下，蔓日长一尺。问几日相逢？"

师：用现代汉语理解就是：现在有一堵墙高九尺，也就是 90 寸，瓜生长在墙头上，它的枝蔓一天长 7 寸，瓠生长在墙角，它的枝蔓一天长一尺，也就是 10 寸。问过了几天，瓜和瓠相逢？同学们能不能从中找出等量关系，列出方程？

生 5：设 x 为相逢的天数，相逢的时候，瓜蔓所长长度+瓠所长长度=垣高，列出方程 $7x+10x=90$。

师：很好，那大家想知道《九章算术》是怎么解决这道题的吗？

生：想！

师：《九章算术》是用二次假设的方法来做的：假设 5 天后相逢，则离实际垣高还差 5 寸；假设 6 天后相逢，则超过实际垣高 12 寸。于是得相逢天数为 $x=\dfrac{5\times12+6\times5}{12+5}=5\dfrac{5}{17}$。

师：我们今天的列方程方法要比古人的假设法简单得多。

接下来，教师强调，列方程的关键是找到等量关系，只要找到等量关系，借不难设未知数列出方程。引导学生总结列方程的步骤：一设未知数、二找等量关系、三列方程。

练习 2：甲乙两人从相距 200 千米的 A、B 两地同时出发，相向而行，10 小时后相遇，已知甲每小时比乙快 2 千米，求两人的速度。

教师引导学生建立等量关系，不同学生通过设不同未知数，建立了不同的一元一次方程。并解释说可以根据问题所需设元，不一定是求什么量就设什么量为元。而通过设元，找出已知与未知之间的等量关系，列出方程，然后求解，这种解决问题的思想称为方程思想。

3.4 谜题探究

教师引导大家回顾视频 3 中说到的古希腊数学家丢番图，用 PPT 展示他的墓志铭，让学生一起朗诵：

行人啊，请稍驻足。

这里埋葬着丢番图。

上帝赋予他一生的六分之一，

享受童年的幸福。

再过十二分之一，

两颊长胡。

又过了七分之一，

燃起结婚的蜡烛。

贵子的降生盼了五年之久。

可怜那迟到的宁馨儿，

只活到父亲寿命的半数，

便进入冰冷的坟墓，

悲伤只有通过数学来消除，

四年后，他自己也走完了人生旅途。

师：好的，感谢同学们声情并茂的朗诵。墓志铭利用简洁的数字向大家展示了数学家丢番图的一生，那么丢番图的一生有哪几个阶段呢？

生6：童年、青年、结婚、生子、失子、终年。

师：请大家找出其中的等量关系，列出方程。

生7：设寿命为x岁，童年 + 青年 + 结婚 + 生子 + 失子 + 终年 = 寿命，故得方程$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$。

师：很好，大家认为这个方程列得正确吗？

生:正确。

师：方程已经列出来了，丢番图用一个数学问题为自己的人生画上了句号，可见他对数学的热爱，我们现在解出x就能知道这位数学家的年龄了。那么，如何解方程呢？下节课我们将解决这个问题。

3.5 课堂小结

本节课不知不觉已经到尾声，授课教师请学生们谈一下本堂课的收获。一位学生表示，他不仅了解到什么是方程，更清楚利用方程解决问题简单直接；另一位学生提到视频里介绍

的两位数学家，表示对数学家的敬仰之情，并对丢番图墓志铭的问题很感兴趣；还有一位学生说这堂课与以往不太一样，不仅学习了列方程，更拓宽了知识面，知道方程的发展是一个漫长的过程。最后，教师鼓励学生们以史为镜，努力学习！

4 教学反馈

课后，我们对全班进行了问卷调查。

（1）上完本节课，你印象最深的是什么？

50%的同学回答方程及方程相关的概念，20%的学生回答列方程，方程思想。28.6%的学生回答数学家，丢番图的寿命，《九章算术》等。8.5%的学生回答以视频的形式展现古今实例及介绍数学史印象深刻。

（2）学习“方程”，有什么用处？

22.8%的学生觉得解决问题方便；38.5%的学生觉得方程解决问题简单明了，容易理解；12.8%的学生认为方程能解决算式解决不了的问题；2.8%的学生认为方程能解决实际问题。

（3）通过这堂课，当你看到“方程”这两个字时，你会想到什么？

80%的学生会想到方程的概念；68.6%的学生会想到方程的应用；45.7%的学生会想到方程的历史简介；45%的学生会想到未知数，算式，等式等。

调查表明，学生对方程的历史、数学家的故事都表现出浓厚的兴趣。同时，听课教师也纷纷给出如下反馈：古今对照让学生更有兴趣投入课堂，探讨性强；数学史融入到课堂这种形式，课上需要老师的引导，这更考验老师的教学功底等。听课老师们对这种授课方式十分感兴趣，但也有老师表示数学史理论知识不足，这就需要在职教师的不断摸索实践！

5 结语

数学史融入数学教学的有效性归根到底要经过课堂实践的检验[5]。在本节课，数学史发挥了以下作用。

首先，借鉴一元一次方程的历史，从贴近生活的两道实际问题入手，让学生经历从求解简单定和问题到求解复杂定和问题的过程，体会到算术方法的局限性与列方程方法的必要性；通过古代数学问题的古今不同解法，让学生进一步体会列方程方法的优越性；而微视频中笛卡儿关于方程方法的论述，让学生认识代数学以及方程思想的重要性。因此，数学史激发了学生的学习动机。

其次，丢番图的墓志铭问题激发了学生的数学兴趣，并为后续“解方程”的学习奠定良好的基础。

再次，方程的历史、古代一元一次方程的问题让学生感悟数学的悠久历史、数学思想方法的演进性，从而树立正确的数学观。

最后，有了数学史，学生仿佛穿越时空，与古人对话，古代数学家仿佛是课堂上只会用算术方法的学生；而每一位学生也仿佛成了数学家，他们超越了古人，获得了自信，成了数学学习的主人。

参考文献

[1] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(一)[J]. 中学数学教学参考(初中), 2007. (11): 51-53.

[2] 汪晓勤. HPM 的若干研究和展望[J]. 中学数学月刊, 2012. (2): 1-3.

[3] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998.

[4] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(二)[J]. 中学数学教学参考(初中), 2007. (12): 54-56.

[5] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006. 15(1): 16-18.

HPM 视角下的函数概念教学*

方倩[1]　杨泓[2]

（1. 华东师范大学数学系，上海，200241；2. 上海市罗泾中学，上海，200949）

1 引言

众所周知，函数是中学数学课程中的核心概念。沪教版八年级数学教科书中，首先用一些具体例子来解释变量和常量的概念，然后说明有关式子中两个变量之间的依赖关系，在此基础上给出了函数的定义：在某个变化过程中有两个变量，设为 x 和 y，如果在变量 x 的允许取值范围内，变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系，那么变量 y 叫做变量 x 的函数。

对于初中生来说，从常量到变量是认识上的一次飞跃。大量的研究都表明，学生在函数概念的理解上存在困难。教科书上的例子让学生直接面对一些变化过程，似乎还不符合他们的认知基础，也未能凸显函数概念的必要性。那么，应该如何引入函数概念，既符合学生的认知基础，又能有效地创造学生的学习动机？学生在学习函数概念之前，已经学过代数式的概念，而从历史上看，早期的数学家一开始就是将函数概念视为代数式的。因此，函数概念的早期历史与学生的认知基础之间有一个共同点，函数概念基于这个出发点的演进过程，自然成了教学设计的指南。这是我们选择 HPM 视角来设计函数概念教学的缘由。

本节课的教学目标是：（1）理解函数的概念，由解析式定义知道两个变量之间确定的依赖关系；（2）理解函数的三种表示法；（3）经历函数概念的演进过程，感悟数学背后的人文精神，拉近与数学家之间的距离，增加数学学习的自信心。

2 函数概念的早期历史

早期的函数概念经历了以下演进过程[1]：一开始，x 的函数仅指 x 的幂；接着，其涵义被拓广为含 x 的代数式；之后，又从代数式拓广到含 x 的任意解析式；最后，从任意解析式拓广为依赖于 x 或由 x 所确定的任意变量。

17 世纪，德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646～1716）用“函数”一词来表达与曲

* 上海市教育科研项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“数学史融入中小学数学课程的实践研究”（项目编号：D1508）系列教学案例之一。

线相关的几何量，正是这些几何量与相应点的横坐标之间的关系导致“函数”的涵义发生变化：函数就是一个变量的幂。1718 年，瑞士数学家约翰 •伯努利（John Bernoulli, 1667～1748）首次明确提出函数的新定义：“一个变量的函数是由该变量和一些常数以任何方式组成的量。”伯努利的定义可能仅仅局限于代数式。在此基础上，欧拉（L. Euler, 1707～1783）在《无穷分析引论》（1748）中首次用“解析式”来定义函数：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。因此，如果在每一个解析式中，除了 z 以外，其他所有的量均为常量，则该解析式就是 z 的一个函数。”[2]欧拉此时已经明确突破了代数式的局限。到了 1755 年，欧拉在《微分基础》中更新了函数的定义：“如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些变量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数。”[3]欧拉的“解析式”定义和“依赖关系”定义对后世产生了深远的影响，直到 19 世纪中叶，它们一直是函数定义的蓝本。

1837 年，德国数学家狄利克雷（L. Dirichlet, 1805～1859）对欧拉“依赖关系”定义中的依赖关系进行了修正，给出了新的定义：“设 a、b 是两个确定的值，x 是可取 a、b 之间一切值的变量。如果对于每一个 x，有惟一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时，y 也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一个连续函数。”该定义常常被称为函数的现代定义，它突破了欧拉定义的局限性，用变量的“对应关系”取代了“依赖关系”。

19 世纪，英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806～1871）在《代数学》中、美国数学家罗密士（E. Loomis, 1811～1881）在《代微积拾级》中都用解析式来定义函数。李善兰（1811～1882）和伟烈亚力（A.wylie,1815～1887）在翻译这两部数学教科书时，将“function”译为“函数”，意为“包含变数”。这便是中文“函数”一词的由来。

图 1 给出了函数概念“变量说”的演进过程：

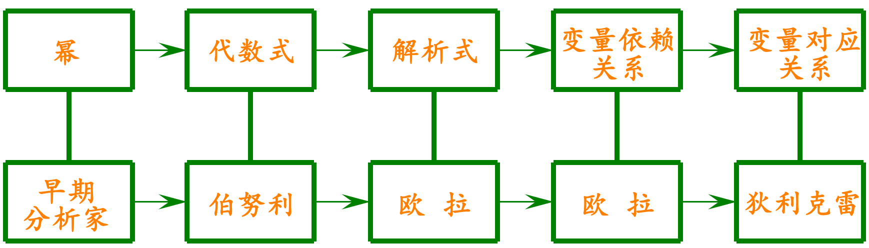


图 1 函数概念“变量说”的演进过程

教学设计中，我们对历史进行重构，让学生在课堂上经历函数概念的演进过程。

3 教学设计与实施

3.1 新课引入

首先，让学生回忆七年级时学过的“字母表示数”，将文字语言转化符号语言，写出有关用代数式。

（1）比 x 的 3 倍还多 2 的数；

（2）x 的平方的倒数减去 2 的差；

（3）9 减去 x 的一半的差；

（4）爸爸的年纪比小明年纪的 3 倍少 2 岁，小明的年纪为 x；

（5）妈妈的身高的一半比小红身高少 10，小红身高为 x。

接着，运用历史材料对函数名称的来历进行解释，引出本节课的学习内容：

聪明的清代数学家李善兰给了“含有 x 的代数式”一个名称，叫做“函数”（板书），这个“函”和“含”是通假字。顾名思义，“函数”就是含有 x 的代数式。我们刚才得到的 5 个含有 x 的代数式都是函数。

同学们心中一定有一个疑问：既然我们已经有了“代数式”这个名称，为什么又要另外给它取一个新名字呢？函数是否也可以不是代数式呢？今天，就让我们来研究这个问题。

3.2 概念生成

选择刚才所得到的代数式中的一个（$3x+2$），通过对 x 进行赋值得到不同的结果，引出变量的概念：变量为可以取不同数值的量；相应地，数值保持固定的量为常量。为了便于表达，将代数式用另一个字母 y 表示，通过观察可知，变量 y 随着变量 x 的变化而变化，变量 y 随着变量 x 的确定而确定，由此给出了函数的依赖关系定义。

教师回到刚才的代数式问题（4），具体剖析函数的定义：

（1）小明的年龄必须取整数，所以“x 允许的范围”是整数；

（2）爸爸的年龄（y）随着小明年龄（x）的变化而变化；

（3）小明年龄（x）确定了，爸爸的年龄（y）就随之确定。

因此，y 是 x 的函数。

3.3 概念辨析

为了让学生更好地理解函数的概念，教师给出如下问题：判断下列情形中的变量 y 是否 x 的函数？（1） $y=2x$；（2） $y=x^2$；（3） $y^2=x$。以下是第（2）题的教学片断：

师：$y=x^2$，y 是否为 x 的函数?

生：不是。

师：为什么?

生：因为 $x=1$ 时，y 等于 1，$x=-1$ 时，y 也等于 1。

从学生的回答可见，仅仅依据函数的依赖关系定义，似乎不能解决学生的疑惑，因为“当 x 由 1 变成-1 时，y 没有发生任何变化”，也就是说，y 并没有如定义中所说的那样，随着 x 的变化而变化。此时，教师承认，课本上的“依赖关系”定义并不完善，有待于进一步修正。实际上，课本上的“依赖关系”定义就是 18 世纪大数学家欧拉给出的定义，德国数学家狄利克雷正是遇到了类似的情形，发现了欧拉定义的局限性，因而对其作出进一步的修正，从而导致变量“对应关系”定义的诞生：在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的每一个确定的值，y 都有惟一确定的值与之对应，那么变量 y 叫做变量 x 的函数。根据这种“对应关系”定义，$y=x^2$ 无疑是一个函数。

接下来，教师通过以下两个问题来凸显解析式的局限性，从而给出函数的图像和表格表示方式。

问题 1：图 2 是某人的心电图，其中横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示心脏某部位的生物电，它们是两个变量。那么，y 是 x 的函数吗?

图 2 心电图

师：这是一张体检的心电图，横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示生物电，在这个图中，

y 是否 x 的函数呢?

生：我感觉不是，因为图中 y 和 x 之间没有规律。

师：你说的“没有规律”指的是什么?

生：就是没有代数式。

师：但没有代数式，就一定不是函数吗？请大家回到函数的定义上来。

生：y 随 x 的变化而变化。

师：很好。对于一个确定的时间 x，可以在图中找出对应的生物电 y，因此 y 由 x 的确定而确定，它们之间具有确定的依赖关系。可见，y 是 x 的函数。由此可知，图像也可以表示两个变量之间的函数关系。

问题 2：在下面的我国人口统计表中，年份与人口数可以记作两个变量 x 与 y，对于表中每一个确定的年份（x），都对应着一个确定的人口数（y）吗?

年 份	人口数（亿）
1999	12.52
2004	13.11
2009	13.51
2014	14.10

师：观察我国人口统计表，请大家判断一下人口数 y 是不是年份 x 的函数?

生：人口数随着年份的变化而变化，也随着年份的确定而确定，它们之间具有确定的依赖关系，y 是 x 的函数。

师：所以，图表也可以用来表示两个变量之间的函数关系。

教师总结函数的三种表示方法。

3.4 知识巩固

以下是课堂练习题。

练习 1：判断下列各题中两个变量是否存在依赖关系？哪个量是另一个量的函数?

（1）一个正常婴儿的体重与该婴儿成长经过的月数；

（2）某学生的成绩与该学生的体重；

（3）汽车行驶的速度与驾驶员的身高；

（4）汽车加油的费用与加油的油量。

从学生的解答可见，他们在变量依赖关系的理解上存在一定困难。教师指出，对于同一个变化过程，两个变量分别可以作为自变量。例如：练习 1 第（4）小题，若将变化过程描述成“加油量随油费的变化而变化，确定而确定”，则自变量为油费，加油量是邮费的函数；若将变化过程描述成“油费随加油量的变化而变化，确定而确定”，则自变量为加油量，油费是加油量的函数。

练习 2：下列变化过程中，两个变量之间是否存在确定的依赖关系？其中一个变量是另一个变量的函数吗？如果是，写出函数解析式。

（1）圆的周长 C 随着半径 r 的变化而变化；

（2）等腰三角形中，顶角的度数 Y 随底角的度数 X 的变化而变化；

（3）周长为 15 的等腰三角形，腰长 a 随着底边长 b 的变化而变化；

（4）一支笔的单价为 2 元，购买 n 只笔的总价 S 随着购买的笔的数量 n 的变化而变化。

解题过程略。

3.5 课堂小结

小结中，让学生自己对函数概念相关知识进行总结，并引导学生回顾函数概念演进过程、函数名称的由来等，启发学生思考。

师：谁来小结一下本节课的收获?

生：我知道了怎么判断函数。如果 y 是 x 的函数，那么 y 会随着 x 的变化而变化，y 会随着 x 的确定而确定，它们具有确定的依赖关系。

生：函数可以有三种表示方式，有解析式、图像和图表，还学习了变量和常量的概念。

生：我知道了“函数”这个名词的意义，函数的“函”是一个通假字，指的是包含的意思。

师：函数概念的发展过程对你们有什么启示吗?

生：函数概念经过了很长的时间才变成现在的这个定义，感觉数学很博大精深，数学也是有历史的。

师：今天我们一起学习了函数的概念，体验了一次函数概念的演进过程，一个数学概念的形成是通过各个时期数学家们不断的修正和完善而来的，并不是从天而降的，所以我们也应该努力学习，将来可以为数学的发展出一份力。

4 学生反馈

课后，对全班 24 名学生进行了问卷调查，结果显示：绝大部分同学表示听懂了本节课的教学内容，70.8%的同学非常喜欢老师用融入数学史的方式来讲授函数概念。所有学生对融入数学史的教学方式持肯定态度。62.5%的学生非常希望在课堂中了解数学概念发生、发展的历史。

为了了解学生对函数概念的理解，我们在问卷中设计了 6 道函数判断题。

（1） $x = 4y$；

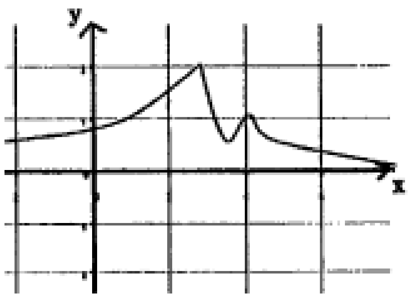
（2） $y^2 = 7x$；

（3）x 是学号，y 是身高，x 和 y 之间的关系；

（4）x 和 y 之间的关系见下表。

x	**3.4**	**4.6**	**2.1**	**3.6**	**5.5.**	**8.7**	**6.9**
y	39	45	12	97	23	45	23

（5）x 和 y 之间的关系见下图。



（6） $y = -7$。

图 3 给出了学生在各题上的正确率。

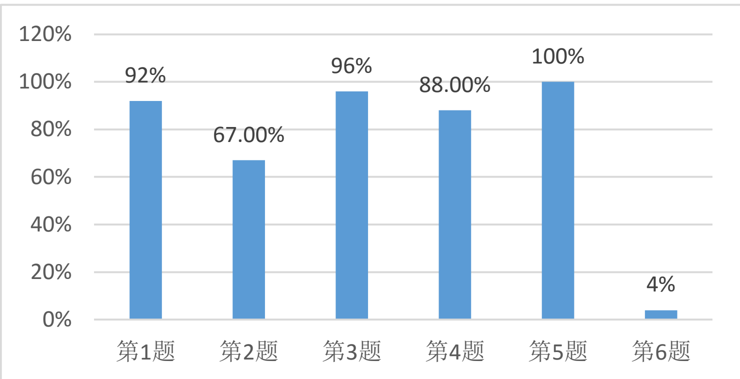


图 3 测试题的正确率

从图 3 中可见，学生对函数概念和函数的三种表示方法掌握较好，但只有 1 名学生在第 6 小题上给出了正确的判断，其理由还是错误的。显然，课本上的“变量依赖关系”定义对学生的理解产生了负面影响，而由于受到教学任务的限制，教师在课上对于“变量对应关系”的现代定义的强调是远远不够的。

关于对本节课的印象，除 5 名学生没有作答，其余学生的回答可分成 3 类。

（1）函数的概念（57.9%）。典型回答：“y 是 x 的函数，x 是自变量”、“函数的定义”、“变量与常量，函数解析式”，“确定的依赖关系”。

（2）函数的历史（31.6%）。典型回答：“发展的历史”、“函数的英文名”。

（3）对本节课的评论（10.5%）。典型回答：“老师的讲课方式”、“老师上课很生动”。

5 结语

本节课从代数式引入，让学生经历了从代数式到变量依赖关系的函数概念演进过程，在历史和现实之间架起了一座桥梁。先通过学生熟悉的代数式引出函数依赖关系的定义，再通过具体实例，凸显代数式在刻画变量依赖关系时的局限性，引发学生的认知冲突；最后，结合函数的定义，引导学生发现，图像和表格也能准确表达两个变量之间的依赖关系，是函数的另外两种表示方法。

从问卷调查的结果看，本节课较好地达成了教学目标。学生能够通过“变量依赖关系”定义来判断函数，绝大多数学生掌握了函数的三种表示方法。学生对融入数学史的教学方式表示认可，课上表现出了浓厚的学习兴趣。函数在历史上经历了曲折而漫长的演进过程，反映了数学概念是动态发展而非一成不变的，本节课有助于学生树立正确的数学观。

课堂观察和问卷反馈表明，由于受教科书函数定义的影响，虽然教师在课上提及“变量对应关系”的定义，但学生仍然对其不甚了了，无法接受常值函数。因此，本节课未能实现从“依赖关系”变量说到“对应关系”变量说的跨越。数学家在刻画现实世界各种现象背后的变量关系时，不断修正函数的定义，体现了数学中的理性精神。在小结部分，如果教师能够引领学生去感悟这一点，那么数学史在本节课将发挥更多的教育价值。

参考文献

[1] 汪晓勤. 19 世纪中期以前的函数解析式定义[J]. 数学通报, 2015. 54(5): 1-7.

[2] Euler, L.. *Introduction to Analysis of the Infinite* (translated by J. D. Blanton). New York:

Springer-Verlag. 1988. 3.

[3] Euler, L.. *Foundations of Differential Calculus* (Translated by J. D. Blanton). New York: Springer-Verlag. 2000. vi.

[4] 顾继玲. 初中阶段函数概念教学中应处理好的几个关系[J]. 中学数学教学参考，1996. (8~9): 22-23.

[5] 简冬梅. 关于初中新课程函数概念教学的调查与分析[J]. 中学数学杂志, 2010. (8): 8-10.

[6] 伍春兰. 初中函数概念起始课有效教学的案例分析[J]. 北京教育学院学报（自然科学报），2012. 7(4): 42-45.

学术活动

樱花漫舞的季节，华东师范大学数学史与数学教育（HPM）研究团队与上海的中学老师一起开发了如下案例：

◆2016 年 3 月 10 日，在上海市西初级中学进行 7 年级“可化为一元二次方程的分式方程”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师分别是王进敬老师和王中慧老师。两位老师通过不同的引入和教学设计给出了解分式方程的三种方法：去分母法，通分法（即费舍尔和施瓦特的完美解法）和几何法（斐波那契）。

（张奕一　供稿）

◆2016 年 3 月 29 日，在上海市格致中学进行高一年级“数列的概念”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是林佳乐老师。林老师采用了四个数学史情境来引入古人对数列的认识和应用，在此基础上展开教学，最后播放了《数列与小行星》的视频，指出数列在天文学上的重要应用。

（齐丹丹　供稿）

◆2016 年 4 月 5 日，在上海市建平远翔学校进行“三角形的内角和”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是贾彬老师。此次活动以“翻转课堂”的形式展开，分为两个环节：第一环节贾老师播放“历史上三角形内角和的发现及证明”的微视频，让学生展开讨论并动手实践；第二环节贾老师启发学生得到新的证明方法并将其加以拓展。

（王鑫　供稿）

◆2016 年 4 月 6 日，在上海市闵行三中进行六年级的“一元一次方程的应用：行程问题”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是陈慧老师。陈老师以斐波那契的故事为课堂主线，首先解决了直线的“相遇问题”和“追及问题”，然后把环形行程问题转化为直线行程问题，最后请同学们自己尝试编写行程问题。

（任芬芳　供稿）

◆2016 年 4 月 28 日，在上海市友爱实验中学进行六年级“二元一次方程组及其解法(2)”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是常道宽老师。常老师以一个简单方程组引导学生观察、猜想得到加减消元法的基本步骤，并用等式性质加以解释；然后通过不同特征的例题介绍中国古代的直除法、互乘相消法和方程新术；最后指出“消元法”背后的转化思想。

（刘欣雨，刘喜喜　供稿）