20 世纪中叶以前的正弦定理历史①

汪晓勤

（华东师范大学数学系　200241）

近年来，HPM 视角下的数学教学日益受到中学数学教育界的关注，即将在德国召开的第 13 届国际数学教育大会将“数学史在数学教育中的作用”列为第 25 个研究专题，该专题的一个重要主题是“历史与认识论在数学教育中的实施：课堂实验与教学材料”．然而，数学史资源的匮乏仍是中学数学教师开展 HPM 实践和案例开发的主要障碍之一．另一方面，在高中数学教科书即将开始修订之际，“数学史融入数学教科书”业已成为人们关注的重要研究课题之一．

在开发正弦定理的 HPM 教学案例以及探讨数学史融入正弦定理的教科书内容编写时，我们首先需要解决“融入什么”，才能解决“如何融入”的问题．为此，我们对 17－20 世纪 144 种三角学文献进行考察（限于篇幅，绝大部分文献未在参考文献中列出），试图回答：20 世纪中叶以前，正弦定理是如何演变的？有哪些推导方法？正弦定理的历史对今日教学有何启示？

1　从纳绥尔丁到韦达

早在公元 2 世纪，正弦定理即已为古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy）所知．中世纪阿拉伯著名天文学家阿尔·比鲁尼（al－Biruni，973－1048）也知道该定理[1]．但是，最早清楚地表述并证明该定理的是 13 世纪阿拉伯数学家和天文学家纳绥尔丁（Nasir－Eddin，1201－1274）[2]．如图 1 所示，延长 BA 到 E，延长 CA 到 G，使得 $BE=CG$；分别以 B 和 C 为圆心、以 BE 和 CG 为半径作圆弧．过 E、A、G 分别作 BC 或其延长线的垂线，垂足分别为 F、D 和 H．则 $EF=\sin B$，$GH=\sin C$．需要指出的是，16 世纪以前，三角函数均为线段而不是比值，线段的大小乃是相对于圆的半径而言的．这里，纳绥尔丁采用了同时大于 AB 和 AC 的半径．利用三角形的相似性，有

$$AB : AD = BE : EF = R : \sin B$$

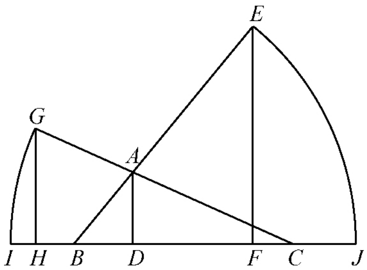


图 1　纳绥尔丁对正弦定理的证明

$$AD : AC = GH : CG = \sin C : R$$

将上面的两个等式相乘，得

$$AB : AC = \sin C : \sin B$$

在欧洲，犹太数学家热尔松（Levi ben Gerson，1288－1344）在其《正弦、弦与弧》中陈述了该定理：“在一切三角形中，一条边与另一条边之比等于其对角的正弦之比”[2]，但他没有给出清晰的证明．15 世纪，德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus，1436－1476）在《论各种三角形》中给出了正弦定理，但简化了纳绥尔丁的证明[2]：如图 2 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AC > AB$，延长 BA 至 E，使得 $BE=AC$，过点 E 作 BC 的垂线，垂足为 F．于是 $EF=\sin B$，$AD=\sin C$．由三角形的相似性得 $AB : BE = AD : EF$，即 $AB : AC = \sin C : \sin B$．

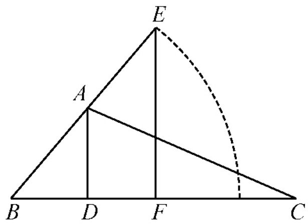


图 2　雷格蒙塔努斯的证明

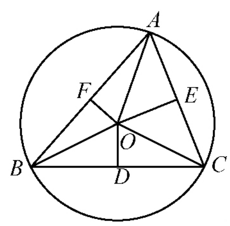


图 3　韦达的证明（锐角三角形情形）

① 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一．

1571 年,法国数学家韦达(F. Viète,1540—1603)在其《数学法则》中用新的方法证明了正弦定理.[2] 如图 3,从三角形 ABC 的外心 O 向 AB、BC 和 CA 引垂线,垂足分别为 D、E 和 F,则 $\angle A=\angle BOD$,$\angle B=\angle AOE$,$\angle C=\angle AOF$. 于是

$$a=2BD=2\sin\angle BOD=2\sin A,$$
$$b=2AE=2\sin\angle AOE=2\sin B,$$
$$c=2AF=2\sin\angle AOF=2\sin C,$$

故得

$$a:\sin A=b:\sin B=c:\sin C$$

1593 年,韦达将正弦定理推广为以下等式:

$$a:\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=b:\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)=c:\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)$$

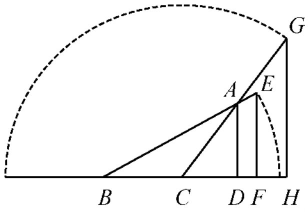
之后,德国数学家毕蒂克斯(B. Pitiscus,1561—1613)在其《三角学》中沿用韦达的方法来证明正弦定理.[3]

2 17—18 世纪

纳绥尔丁的同径法和韦达的外接圆法成为 17—18 世纪数学家证明正弦定理的两种基本方法. 在我们所考察的 27 种 17—18 世纪的三角学著作中,8 种采用了纳绥尔丁的同径法,14 种采用了韦达的外接圆法,3 种采用了直角三角形法,3 种未给出证明.

2.1 纳绥尔丁的方法

意大利数学家卡瓦列里(B. Cavalieri,1598—1647)、中国数学家梅文鼎(1633—1721)、英国数学家海尼斯(S. Heynes,18 世纪)、辛普森(T. Simpson,1710—1761)等采用了纳绥尔丁和雷格蒙塔努斯的方法. 纳绥尔丁并未明确讨论三角形的一个底角为钝角的情形,卡瓦列里在《平面与球面三角学》中对此作了补充[4],如图 4 所示. 类似地,海尼斯补充了雷格蒙塔努斯证明中三角形底角为钝角的情形[5],如图 5 所示.



4 对纳绥尔丁证明的补充

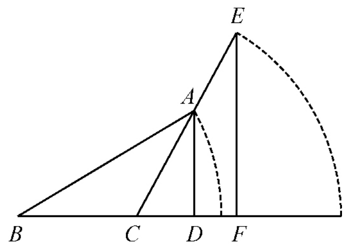


图 5 对雷格蒙塔努斯证明的补充

梅文鼎在《平三角举要》[6]中、辛普森在《平面与球面三角学》[7]中各自对雷格蒙塔努斯的方法做了进一步简化. 如图 6,在 AC 上取点 E,使得 $CE=AB$,以 $AB=CE$ 为圆的半径,则有 $AD=\sin B$,$EF=\sin C$,故有 $EC:AC=EF:AD$,即 $AB:AC=\sin C:\sin B$.《平三角举要》是梅文鼎的早期数学著作,在时间上远早于辛普森的《平面与球面三角学》.

苏格兰数学家麦克格雷戈(J. Mcgregor)在其《实用数学大全》中对雷格蒙塔努斯的方法作了另一种简化.[8] 如图 7,麦克格雷戈作 AB 和 AC 上的高线 CE 和 BD,将 BC 作为圆的半径,则有 $CE=\sin\angle ABC$,$BD=\sin\angle ACB$;又由 $\triangle BAD\backsim\triangle CAE$ 得

$$AB:AC=BD:CE=\sin\angle ACB:\sin\angle ABC.$$

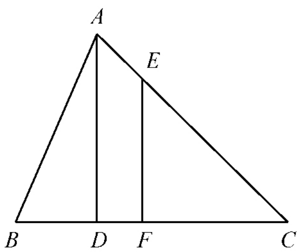


图 6 辛普森的证明

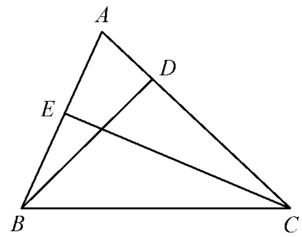


图 7 麦克格雷戈的证明

英国数学家赖特(J. Wright)在其《平面与球面三角学基础》中给出了新的方法.[9] 如图 8 所示,过 A 作 BC 的平行线 AF,以 A 为圆心,AB 为半径作圆弧,交 AF 与点 F,过 B 和 F 分别作 AC 的垂线,垂足为 D 和 E. 于是,$BD=\sin\angle BAC$,$FE=\sin\angle FAE=\sin C$. 因 $\triangle FEA\backsim\triangle BDC$,故有 $AF:BC=FE:BD$,此即 $AB:BC=\sin C:\sin\angle BAC$.

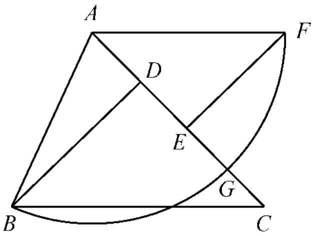


图 8 赖特的新证明

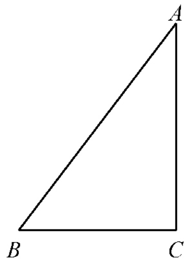


图 9 直角三角形的边角关系

2.2 韦达的方法

17 世纪荷兰数学家弗拉克(A. Vlacq，1600－1667)[10]、斯内尔(W. Snell，1591－1626)[11]、法国数学家奥泽南(J. Ozanam，1640－1717)[12]等都沿用了韦达的方法. 韦达并没有讨论钝角三角形的情形，英国数学家凯尔(J. Keil，1671－1721)对此做了补充.[13]如图 10 所示，在优弧$\overset{\frown}{BC}$上任取一点 L，连接 BL 和 CL. 则 $a=2BD=2\sin\angle BOD=2\sin L=2\sin(180°-\angle BAC)=2\sin\angle BAC$，故正弦定理仍然成立.

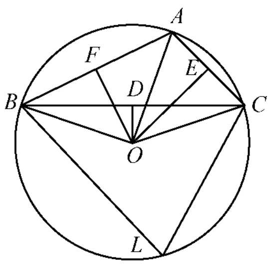


图 10 韦达证法中的钝角三角形情形

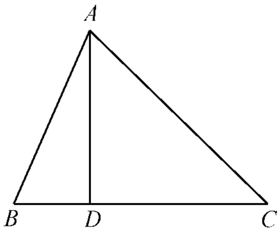


图 11 哈里斯的证明

值得一提的是，在《平三角举要》中，梅文鼎在运用同径法的同时，也采用了韦达的方法.

2.3 直角三角形法

英国数学家哈里斯(J. Harris，1667－1719)最早采用了直角三角形法.[14]他首先建立 Rt $\triangle ABC$ (C 为直角顶点)的边角关系：

$$R:\sin A=AB:BC \quad (1)$$

$$R:\sin B=AB:AC \quad (2)$$

其中 R 为圆的半径. 这里，正弦仍只是线段而非比值. 有了上述关系，哈里斯并不需要像纳绥尔丁、雷格蒙塔努斯以及后来的追随者那样，具体地去选择并作出圆的半径，然后再利用相似三角形性质. 如图 11，在$\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，利用直角三角形边角关系有：

$$AB:AD=R:\sin B,AD:AC=\sin C:R,$$

相乘即得 $AB:AC=\sin C:\sin B$.

18 世纪的许多教科书都采用了同样的证法[15][16][17]，其中一些教科书由上面两个比例式得到 $AB\sin B=AC\sin C$. 后世数学家大多采用了这个等式. 若取 $R=1$，直角三角形法就是今日教科书普遍采用的方法了.

直角三角形法其实就是纳绥尔丁方法的演化，只不过我们直接利用直角三角形边角关系，而不再需要选择并作出具体的半径.

3 19 世纪

在我们所考察的 19 世纪 67 种三角学著作中，有 4 种采用了纳绥尔丁的等径法，9 种采用了韦达的外接圆法，55 种采用了直角三角形法，1 种采用了余弦定理，2 种未给出证明.

3.1 纳绥尔丁与雷格蒙塔努斯的方法

在采用等径法的 4 种教科书中，三角函数仍被视为线段而非比值. 尼克尔斯[18]和刘易斯[19]运用了辛普森的简化方法，而格雷戈里[20]和罗宾逊[21]则选取同时小于 AB 和 AC 的半径.

如图 12 所示，格雷戈里以 B 为圆心，BD 为半径(大小等于教科书所使用的正弦表的半径)作圆，过 D 和 B 作 AC 的平行线，分别交 BC 和圆于 F、G；过 D 和 G 作 BC 和 CB 延长线的垂线，垂足分别为 E、H. 则 $DE=\sin B$，$GH=\sin C$. 于是

$$\begin{aligned}AB:AC&=DB:DF=GB:DF\\&=GH:DE=\sin C:\sin B\end{aligned}$$

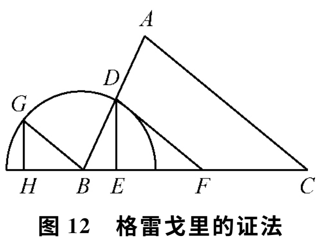


图 12 格雷戈里的证法

罗宾逊则以小于 AB 和 AC 的任意长度为半径作圆弧，如图 13 所示，推导方法与纳绥尔丁一致.

3.2 韦达的方法

虽然 17－18 世纪的数学家常用韦达的外接圆法，但由于他们将正弦函数看作线段而非比值，

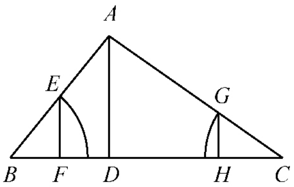


图 13 罗宾逊的证法

故并不去关注三角形的边与对角正弦之比究竟是多少.到了 19 世纪,人们逐渐将正弦看作比值,于是这个比值就应运而生了.事实上,由图 3 可知,

$$\sin A=\frac{\frac{1}{2}a}{R}=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{\frac{1}{2}b}{R}=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{\frac{1}{2}c}{R}=\frac{c}{2R}$$

故得出命题:三角形任一内角的正弦等于对边与外接圆直径($2R$)之比[22],故知

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3.3 直角三角形法

至迟在 1819 年,英国数学家伍德豪斯(R. Woodhouse, 1773—1827)开始抛弃(1)、(2)这样的等式,而统一取 $R=1$,相当于用比值来表示三角函数.这样,直角三角形方法得到简化.[23]如图 11,$\sin B=\frac{AD}{c}$,$\sin C=\frac{AD}{b}$,故有 $AD=c\sin B=b\sin C$,同理可得其他等式.这是 19 世纪三角学教科书用得最多的一种方法.

3.4 辅助直径法

这个时期,有人开始不再拘泥于韦达的方法而采用了辅助直径法,如尼克逊[24].如图 14 所示,AD 为 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高,过 B 作直径 BE,连 AE 和 CE,易证 $\mathrm{Rt}\triangle BAE\sim\mathrm{Rt}\triangle ADC$,于是有 $c:AD=2R:b$.但 $AD=c\sin B=b\sin C$,故得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

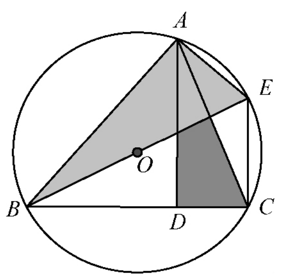


图 14 辅助直径法

3.5 利用余弦定理

伍德豪斯还用余弦定理来推导正弦定理:由余弦定理得

$$\sin^2 A=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 B=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2c^2},$$

$$\sin^2 C=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2},$$

故有

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}$$

从而得到正弦定理.

4 20 世纪上半叶

在我们所考察的 1900—1955 年间出版的 50 种教科书中,45 种采用了直角三角形法,18 种采用了外接圆法(其中有 12 种采用韦达的方法,另 6 种采用辅助直径法).此外,2 种教科书采用解析几何方法,1 种利用三角形面积公式.

4.1 辅助直径法

采用辅助直径法的 6 种教科书都简化了尼克逊的方法,如[25]、[26]和[27].仍如图 14,在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BAE$ 中,直接利用边角关系得 $a=2R\sin A$,$c=2R\sin C$.

4.2 解析几何法

解析几何方法直到 50 年代才开始出现[28][29].如图 15 所示,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,则点 C 的坐标为 $(b\cos A, b\sin A)$;若 x 轴不变,而以 B 为原点,则点 C 的坐标为 $(a\cos(\pi-B), a\sin(\pi-B))$,或即 $(-a\cos B, a\sin B)$,因在两种坐标系中,点 C 的纵坐标相同,故有 $b\sin A=a\sin B$.

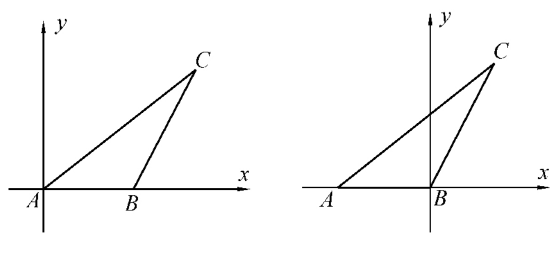


图 15 正弦定理的解析几何证法

5 正弦定理证明方法的演变

图 16 给出了各种方法在三个时期的分布情况.从图中可见,19 世纪之后,随着三角比的普遍采用,纳绥尔丁的等径法逐渐退出历史舞台,最终销声匿迹.17—18 世纪占据优势的韦达外接圆法

到 19 世纪之后虽不绝如缕，但基本上处于被边缘化的状态，事实上，一些教科书只是将其作为第二种证法加以介绍，或在推导边与对角正弦之比为外接圆直径时才用到该方法. 直角三角形法到 19 世纪以后可谓一枝独秀，备受青睐.

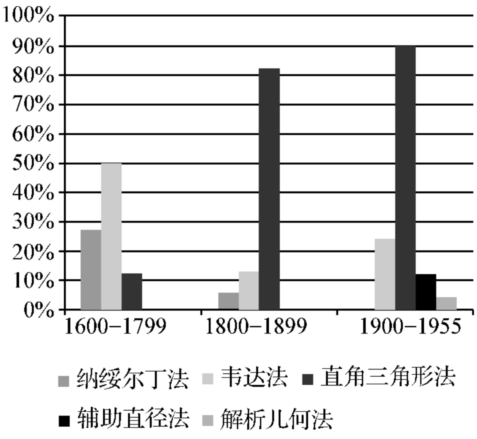


图 16　正弦定理证明方法在不同时期的分布

各种方法都经历了演变过程. 纳绥尔丁等径法经历了以同时大于三角形两腰的线段为半径，到以较长腰为半径，再到较短腰为半径，最后到同时小于两腰的线段为半径的过程. 韦达的外接圆方法经历了从定性（只关注各边与其对角正弦之比相等，而不关注比值的大小）到定量（关注比值的大小）的过程，最后逐渐衍生出辅助直径法. 直角三角形法经历从依赖于任意半径 R（正弦为线段）到统一取 $R=1$（正弦相应成为比值）的过程.

6　余论

随着时代的变迁，正弦定理的证明方法逐渐趋于单一，直角三角形法最终一统天下. 但是，这并不意味着纳绥尔丁和雷格蒙塔努斯方法无用了. 事实上，尽管直角三角形法比较简约，但因三角形两底角的正弦具有不同的分母，因而正弦定理并不直观. 梅文鼎在《平三角举要》卷四中记录了当时学习者的疑惑："或问：各角正弦与各边皆不平行，何以能相为比例？"[6] 显然，直角三角形法未能消除初学者的这一疑惑，而梅文鼎正是通过同径法来解决这一问题. 如果我们采用梅文鼎、辛普森、麦克格雷戈、赖特等人的简化方法（但仍视正弦为比值），那么，由于表达正弦的比具有相同的分母，因而正弦之比等于相应的分子之比；而分子之比又等于三角形两边之比，因而正弦定理变得十分直观、易于为初学者所理解.

正弦定理的历史为我们提供了丰富的教学素材和思想养料，包括不同的几何证明、证明的不断演进过程以及隐含在定理背后不同时空的数学家的创新精神. 如果全然抛弃这些素材，那么，学生在课堂上面对的就只是一个单调的定理而已，他们从中既未能看到几何之美，也未能领略方法之妙；既未能拓宽数学思维，也未能感受多元文化. 割裂历史，我们的课堂将失去了很多很多.

参考文献

1　Smith, D. E. History of Mathematics (Vol. 2). Boston: Ginn & Company, 1925: 631
2　von Braunmühl, A. Vorlesungen über Gischichte der Trigonometrie. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1900: 176—177
3　Smith, D. E. A Source Book in Mathematics (Vol. 2). New York: Dover Publications, 1959: 434—435
4　Cavalieri, B. Trigonometria Plana et Sphaerica. Bononiae: Haercdis Victorij Benatij, 1643: 17—21
5　Heynes, S. A Treatise of Trigonometry, Plane and Spherical, Theoretical & Practical. London: Town Hill, 1716: 20—28
6　梅文鼎. 平三角举要[M]. //郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇（数学卷第 4 册）. 郑州：河南教育出版社，1994:485—387
7　Simpson, T. Trigonometry, Plane & Spherical. London: F. Wingrave, 1799
8　Macgregor, J. A Complete Treatise on Practical Mathematics. Edinburgh: Bell & Bradsute, 1792
9　Wright, J. Elements of Trigonometry, Plane & Spherical. Edinburgh: A. Murray & J. Cochran, 1772
10　Vlacq, A. La Trigonométrie Rectiligne et Sphérique. Paris: Claude Jombert, 1720: 56—57
11　Snell, W. Doctrinae Triangulorum Canonicae. Lugduni Batavorum: Ioannis Maire, 1627: 70—74
12　Ozanam, J. La Geometrie Pratique. Paris: Chez L'Auteur & Estienne Michallet, 1684: 110—129
13　Keil, J. The Elements of Plane & Spherical Trigonometry. Dublin: W. Wilmot, 1726
14　Harris, J. Elements of Plane & Spherical Trigonometry. London: Dan Midwinter. 1706
15　Emerson, W. The Elements of Trigonometry. London: W. Innys, 1749. 96—97
16　Ewing, A. A Synopsis of Practical Mathematics. Edinburgh: William Smellie & Co., 1771
17　Cagnoli, M. Traité de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique. Paris: Didot, 1786: 115—116
18　Nichols, F. A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry. Philadelphia: F. Nichols, 1811

（下转第 27 页）

从而

$$C_x=2\pi y=2\pi R\cos\frac{s}{R},$$

所以

$$dA=C_x\cdot ds=2\pi R\cos\frac{s}{R}ds.$$

根据对称性,则球的表面积

$$A=2\int_0^{\frac{\pi R}{2}}2\pi R\cos\frac{s}{R}ds=4\pi R^2\sin\frac{s}{R}\Big|_0^{\frac{\pi R}{2}}=4\pi R^2.$$

可见我们猜想的积分表达式是正确的.

4　尝试换元

以上计算中,引入了弧长 s 所对应的圆心角 t,那么,能不能直接用圆心角 t 作为积分变量呢?我们很容易就可以进行如下转换:

$ds=Rdt$,$C_x=2\pi R\cos t$,$dA=C_x\cdot ds=2\pi R^2\cos tdt$

当弧长 s 从 0 变到 $\frac{\pi R}{2}$ 时,其所对应的圆心角 t 相应地从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$,故取积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,根据对称性,从而球的表面积

$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dA=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi R^2\cos tdt$$

$$=\left[4\pi R^2\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi R^2.$$

显然,用弧长 s 所对应的圆心角 t 作积分变量,计算更加简单快捷.

5　继续转化

继续考虑能不能用 x 作积分变量呢?那就需要把弧长微分 ds 转化成 dx.经过简单的推导即可得出:$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$,把

$$y'=(\sqrt{R^2-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

代入则有

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx,$$

于是

$$C_xds=2\pi\sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=2\pi Rdx,$$

从而球的表面积

$$A=2\int_0^R 2\pi Rdx=4\pi R^2.$$

6　总结反思

比较上面三种积分表达形式,各有所长.取弧长 s 为积分变量,实际上是沿曲线积分,最接近学生对球的表面积的直观感觉和体验,积分表达式 $dA=C_x\cdot ds$ 从理论上可以推广到所有旋转体的侧面积;取弧长 s 所对应的圆心角 t 作积分变量,计算简单,转化自然;取横坐标 x 作积分变量,积分表达式 $dA=2\pi Rdx$ 比较难以得出,然而其意义最简单明了:微球台的侧面积=大圆周长 $2\pi R\times$ 球台的高度 dx,因此也最能揭示出球的表面积等于大圆周长乘以直径的内在原理.

以上用定积分探究球的表面积公式的过程就严谨性来说有所欠缺,这也是教材上尽量回避拖延这个问题的原因之一.然而,其过程本质上完全符合定积分的原理,其中还包含了积分换元以及沿曲线积分等思想方法和概念,是学生探究学习的好课题.

参考文献

1　中学数学课程教材研究开发中心.全日制普通高级中学教科书(必修)高二(下 A)[M].北京:人民教育出版社,2004
2　中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书·数学必修 2[M].北京:人民教育出版社,2007
3　同济大学数学教研室.高等数学[M].北京:高等教育出版社.,1978

(上接第 5 页)

19　Lewis, E. A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry. Philadelphia: Uriah Hunt & Son, 1860
20　Gregory, O. Elements of Plane & Spherical Trigonometry. London: Baldwin, Cradock & Joy, 1816
21　Robinson, H. N. Elements of Plane & Spherical Trigonometry. New York & Chicago: Ivison, Blakeman, Taylor & Co., 1873: 256—258
22　Serret, J. A. Traité de Trigonométrie. Paris: Bachelier, 1850: 103—106
23　Woodhouse, R. A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1819
24　Nixon, R. C. J. Elementary Plane Trigonometry. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 202—206
25　Rothrock, D. A. Elements of Plane & Spherical Trigonometry. New York: The Macmillan Co., 1910: 69—70
26　Hun, J. G. & MacInnes, C. R. The Elements of Plane & Spherical Trigonometry. New York: The Macmillan Company, 1911: 53—54
27　Moritz, R. E. Elements of Plane Trigonometry. New York: John Wiley & Sons, 1915: 125—126
28　Holmes, C. T. Trigonometry. New York: Mcgraw—Hill Book Company, 1951: 87—88
29　Vance, E. P. Trigononometry. Cambridge: Addison—Wesley Publishing Co., 1954: 65—66