上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 2 期

亨利·庞加莱

(Poincaré, Jules-Henri, 1854–1912)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

江南三月，草长莺飞。

在各位作者和编委会的共同努力下，《上海HPM通讯》第2期终于与大家见面了。

与第1期一样，本期继续努力为HPM爱好者打造一个思想交流的平台，在这里大家可以畅所欲言，谈古论今：论理论方法，谈感想体会，共同驰骋在HPM“希望的田野上”。

今年是2012年，既是《上海HPM通讯》创刊之际，也恰逢法国著名数学家亨利·庞加莱逝世100周年。在出版于1908年的《科学与方法》(Science et Méthode)一书中，庞加莱的名言“预见数学之未来的正确方法是研究它的历史和现状”常常为我们所引用，来说明古为今用之举足轻重。

因此，谨以此刊纪念这位伟大的数学家，他那深刻的思想将永远激励我们前行。

目　录

CONTENT

文献研究

古代数学文献中的勾股问题

胡晓娟　汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海 200241）

设直角三角形三边分别为 a、b、c，已知 a、b、c、$a+b$、$a+c$、$b+c$、$b-a$、$c-a$、$c-b$ 中任何两项，求其他项的算法共有 $C_9^2=36$ 种，除去平凡类（如已知 a、$a+b$，求 b），值得研究的共有八类[1]。表 1 给出了各个类型的已知件以及第 1-3 类问题再四种版本初中数学教材中的分布情况，其中打“*”者表示数学史问题。

表 1　各版教材中的勾股问题统计

类别	已知件	人教版	华师大版	北师大版	苏教版	上教版
1	$[a,b]/[a,c]/[b,c]$	23	24	24	27	17
2	$[a, c+b]/[b,c+a]$	1*	1*	0	1*	0
3	$[a, c-b]/[b,c-a]$	1*	0	1*	1*	1*
4	$[c, a+b]$	0	0	0	0	0
5	$[c, b-a]$	0	0	0	0	0
6	$[c+a, c+b]$	0	0	0	0	0
7	$[c+a, c-b]$	0	0	0	0	0
8	$[c-a, c-b]$	0	0	0	0	0
合计		25	25	25	29	18

由表 1 可知，人教版、华师大版、北师大版的题量相同，都是 25 题，苏教版的题量最多，共有 29 题，上教版的题最少，仅有 18 题。人教版与苏教版涉及三类问题，其中仅有两题属于数学史问题；华师大版、北师大版、上教版都只涉及两类问题，只有一题是数学史问题。因此，教材上的勾股问题比较单一，也很少运用数学史。全日制义务教育《数学课程标准》明确提出：“在教学活动中，教师……要创造性地使用教材，积极开发、利用各种教学资源，为学生提供丰富多彩的学习素材。”[2]虽然数学史是重要的教学资源之一，但教材对这类资源的运用却相当有限。本文考察诸文明古国数学文献中与勾股定理有关的一些问题，供教材编写者和教师参考。

1 美索不达米亚

两河流域的先民们很早就发现勾股定理了。在古巴比伦时期（公元前 2000-1600 年）的数学泥版 BM 96957 上，载有这类问题：已知一扇门的宽、高、对角线中的两项，求第三项[3]，祭司或直接利用勾股定理，或基于该定理做近似计算。古巴比伦时期数学泥版 BM 85194 上则载有下列问题："已知圆周长为 60 NINDAN（古巴比伦长度单位），直径为 20 NINDAN，弦所在弓形的高为 2 NINDAN。求弦长。"[4]这是第 1 类问题（图 1）。古巴比伦时期的泥板 BM 85196 载有著名的"竿子靠墙"问题："长 30 尺的竿子靠墙直立，当上端沿墙下移 6 尺时，下端离墙移动多远？"[4]也是第 1 类问题。

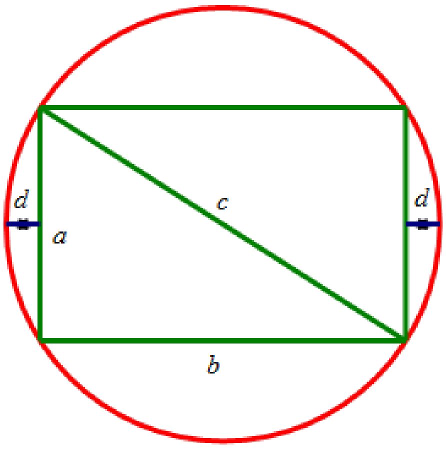

图 1

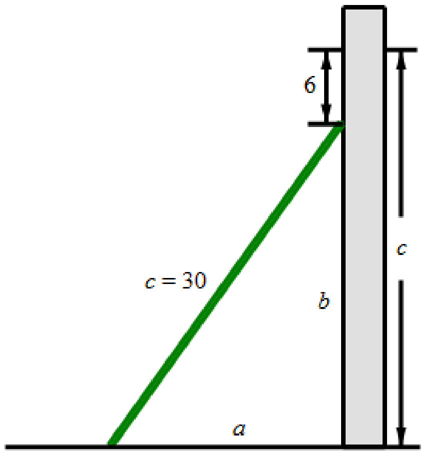

图 2

古巴比伦时期数学泥版 TMS 1 载有："已知三角形三边分别为 50、50 和 60， 求外接圆半径。"[4][5][6]如图 3，易知该题为第 2 类问题，泥版上给出的公式是

$$c=\frac{1}{2}\frac{(c+a)^2+b^2}{c+a} \tag{1}$$

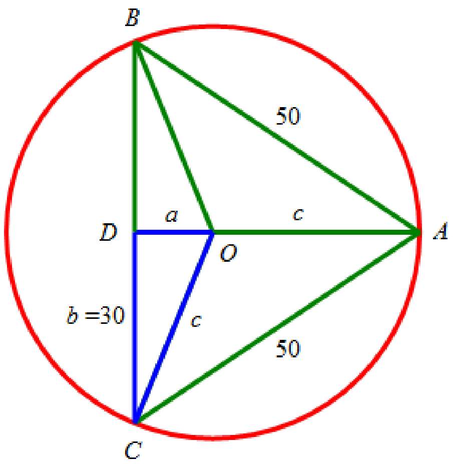

图 3

图 4

塞琉古时期（约公元前 300 年）的数学泥版 BM 34568（图 4）上载有一系列勾股问题[7]，涉及类型 1-4 和 6。以下我们列举有关问题及其解法。

BM 34568-1 长方形长与对角线之和为 9（或 50），宽为 3（或 20），问：长为多少？（第 2 类）

$$b=\frac{1}{2}\frac{(c+b)^2-a^2}{c+b} \tag{2}$$

BM 34568-2 长方形宽与对角线之和为 8，长为 4，问：宽为多少？ （第 2 类）

$$a=\frac{1}{2}\frac{(c+a)^2-b^2}{c+a} \tag{3}$$

BM 34568-3 一根芦苇靠墙直立，当顶端下移 3 尺（至墙顶）时，底端离墙移动 9 尺。问：芦苇有多长？墙有多高？（第 3 类）

$$c=\frac{1}{2}\frac{(c-b)^2+a^2}{c-b} \tag{4}$$

BM 34568-4 长方形长宽之和为 23，对角线为 17，长、宽各多少？（第 4 类）

$$b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2} \tag{5}$$

公式（5）易从图 5 中直接得出。

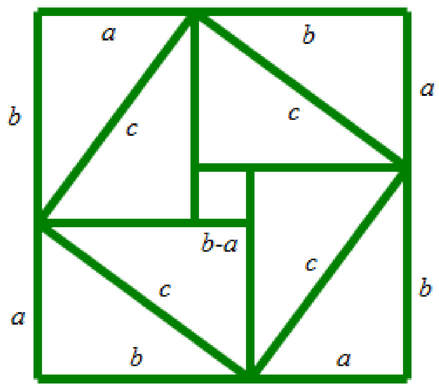

图 5

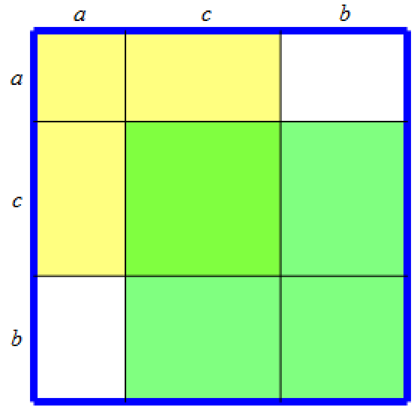

图 6

BM 34568-5 长方形长与对角线之和为 9（或 45），宽与对角线之和为 8（或 40），长、宽各为多少？（第 6 类）

$$a+b+c=\sqrt{(c+a)^2+(c+b)^2-[(c+b)-(c+a)]^2} \quad (6)$$

事实上，由图 6 可知：$(c+a)^2+(c+b)^2-c^2=(a+b+c)^2-2ab$，故得 $(a+b+c)^2=(c+a)^2+(c+b)^2-(b-a)^2$。由（6）即得 a 和 b。

2 古埃及

虽然古埃及绳师已利用 3、4、5 的绳长比例来获得直角（华师版教材中有介绍），但令人失望的是，在已知的僧侣文纸草书上，除了加罕纸草书上有零星的直角三角形记录外，我们并没有发现勾股问题。不过，在年代较僧侣文纸草书更晚的俗体文纸草书中，我们却有所发现。开罗纸草书 J.E. 89127-30（公元前 3 世纪）载有如下问题[8]：

JE 89127-30-1 长 10（或 14 ½；或 10）尺的竿子靠墙直立，若下端离墙移动 6（或 10；或 8）尺，则上端下移几尺？（第 1 类）

JE 89127-30-2 长 10 （或$14\frac{1}{2}$；或 10）尺的竿子靠墙直立，若上端下移 2 （或 4；或 4）尺，则下端离墙移动几尺？（第 1 类）

JE 89127-30-3 竿子靠墙直立，若下端离墙移动 6（或 10）尺时，上端下移 2（或 4）尺，则竿子高几尺？（第 3 类）

类似于 BM 34568-3，本题按公式（4）来求解。俗体文纸草书 J.E. 89127-30 与泥版书 BM 34568 属于同一时期，两种文明之间很可能存在数学交流。

3 中国

勾股定理在中国亦有悠久的历史。早在《九章算术》成书时代，中国的数学家们就已经熟练掌握第 1-5、8 诸类问题的解法了。我们列举典型问题如下[9]。

JZSS 1 今有木长二丈，围之三尺。葛生其下，缠木七周，上与木齐。问：葛长几何？（第 1 类）

JZSS 2 今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问：折者高几何？（第 2 类）

本题因出现于高考语文卷中而广为人知，为第 2 类问题。解法如公式（2）。

JZSS 3 今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问：水深、葭长各几何？（第 3 类）

该题在人教版、北师大版、苏教版、上教版教材中都有列出。《九章算术》给出的水深公式是

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)} \tag{7}$$

JZSS 4 今有垣高一丈，倚木于垣，上与垣齐。引木却行一尺，其木至地。问：木长几何？（第 3 类）

此系《九章算术》中唯一的“竿子靠墙”问题，解法如公式（4）。南宋数学家杨辉在《详解九章算法》中又补充了一题：“垣高一丈，欹木齐垣，木脚去本，以画记之。卧而较之，过画一尺。问去本几何。”解法如公式（7）。

JZSS 5 今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问：户高、广各几何？（第 5 类）

先由等式 $(a+b)^2=2c^2-(b-a)^2$ 得出 $a+b$，再得出 a 和 b。

JZSS 6 今有户不知高广，竿不知长短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问：户高、广、袤各几何？（第 8 类）

如图 7，在 c 为边长的正方形中分别作以 a 和 b 为边长的正方形，易见，中黄方 III 的面积等于矩形 I 和 II 的面积之和，即 $(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b)$。由此可得下列公式：

$$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b),$$

$$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a),$$

$$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)$$

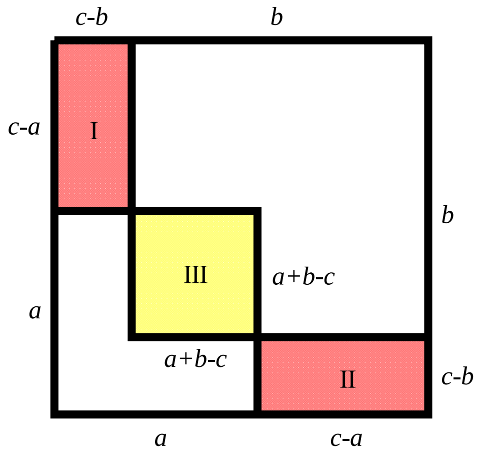

图 7

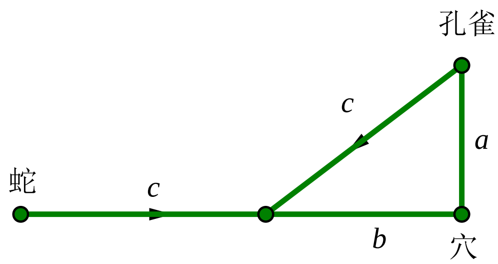

图 8

第 6、7 两类问题为后来的中算家所解决。

4 印度

印度古代的《绳法经》(公元前 3000-800 年)中已载有勾股定理。公元 7 世纪印度数学家婆什迦罗一世(Bhaskara I)、婆罗摩笈多(Brahmagupta)、公元 9 世纪 Prithudakaswami、10 世纪的阿耶波多二世(Aryabhata II)等数学著作中都载有勾股问题。到了 12 世纪,印度数学家婆什迦罗二世(Bhaskara II)在其《莉拉沃蒂》中系统讨论了各种勾股问题的解法[10],涉及第 1-5 类问题。

LILA 1 平地上竹高 32 尺,为风所折,竹梢触地,距根 16 尺,问:折处高几何?(第 2 类)

本题与 JZSS 2 如出一辙,解法亦同。折竹问题已经出现于婆什迦罗一世、Prithudakaswami、阿耶波多二世等数学家的著作中。

LILA 2 桩高 9 尺,顶有孔雀,根有洞穴。离穴三倍于桩高之处有蛇,正爬向洞穴;孔雀见蛇,斜扑之。若二者行程相等,则距穴何处相遇?(第 2 类)

如图 8,解法同上题。在印度古代数学史上,“相同行程”屡见不鲜。婆什迦罗一世用鹰与老鼠来设题;而 Prithudakaswami 则用猫代替了鹰。婆什迦罗一世还设有“苍鹭捕鱼”问题:“长方形水池的长和宽分别为 12 和 6,东北角有鱼,西北角有苍鹭。鱼惧怕苍鹭,沿对角线逃到南侧,为沿池边疾行的苍鹭所捕。已知苍鹭和鱼的行程相等,问:两者行程几何?”如图 9,这实际上还是第 2 类问题:已知 $b+c=18$, $a=6$,求 c。

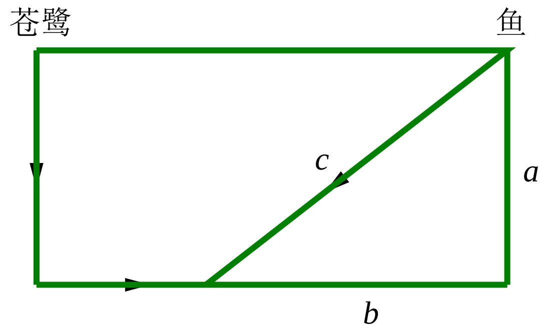

图 9

LILA 3 荷花出水$\frac{1}{2}$尺，风吹倾斜，于 2 尺处没于水，求水深几何。（第 3 类）

本题与 JZSS 3 相似，解法同上题。该问题已出现于婆什迦罗一世和 Prithudakaswami 的著作中。11 世纪阿拉伯数学家阿尔·卡克希（al-Karkhi, 953-1029）和 15 世纪中亚数学家阿尔·卡西（al-Kashi, 1353?-1429）的著作中都载有类似问题。

LILA 4 弦为 17，勾股和为 23，求勾和股。（第 4 类）

解法如公式（5）。

LILA 5 勾股差为 7，弦为 13，求勾和股。（第 5 类）

本题与 JZSS 5 相似，解法亦同。

5 结 语

以上我们看到，古代两河流域、埃及、中国、印度的数学文献中都有勾股问题，具体分布如表 2 所示。

许多问题，如“竿子靠墙”或“倚木于垣”问题、“引葭赴岸”或“风吹莲倾”问题、

表 2 各类勾股问题的分布

类别	已知件	美索不达米亚	埃及	中国	印度
1	[a,b]/[a,c]/[b,c]	√	√	√	√
2	[a, c+b]/[b,c+a]	√		√	√
3	[a, c-b]/[b,c-a]	√	√	√	√
4	[c, a+b]	√		√	√
5	[c, b-a]			√	√
6	[c+a, c+b]	√		√	

7	[$c+a$, $c-b$]	√
8	[$c-a$, $c-b$]	√

“相等行程”问题、“大风折竹”问题等流传后世，成为数学名题。13 世纪初，意大利数学家斐波纳契（L. Fibonacci, 1170?-1250?）在《计算之书》中设题：“长 20 英尺的矛，靠塔直立。若将底端离墙外移 12 英尺，则尖端抵塔多高？”[11] 此系“竿子靠墙”问题在中世纪欧洲广为人知的明证。15 世纪末，意大利数学家卡兰奇（F. Calandri, 1467-1512）出版的《算术》中设题：“树高 50 尺，为风所折，树梢着地，距根 30 尺，问：折处高几尺？”[12] 此系“大风折竹”问题的翻版。今天，“竿子靠墙”问题和“大风折竹”问题依然出现在法国中学数学教材中[13]。可见，一个好的数学问题，往往经得起时间的考验，犹如陈年佳酿，历久弥香。

历史是一座宝藏，从中可以获取取之不尽、用之不竭的教学资源。数学教师若想创造性地使用教材，为学生提供丰富多彩的素材，数学史乃是一条必由之路。

参考文献

[1] 沈康身, 1986. 中算导论. 上海: 上海教育出版社. 132

[2] 中华人民共和国教育部, 2003. 全日制义务教育数学课程标准. 北京: 北京师范大学出版社

[3] Robson, E., 1997. Three old Babylonian methods for dealing with ‘Pythagorean triangles’. *Journal of Cuneiform Studies*, 49: 51-72

[4] Høyrup, J., 1998. Pythagorean ‘Rule’ and ‘Theorem’ – Mirror of the relation between Babylonian and Greek mathematics. *In* J. Renger (ed.), *Babylon: Focus Mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne*. Saarbrücken: SDV Saarbrücker Druckerei und Verlag, 393-407

[5] Friberg, J., 2005. *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

[6] Friberg, J., 2007. *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. 1-71

[7] Høyrup, J., 2000. Seleucid innovations in the Babylonian ‘algebraic’ tradition and their kin abroad. In: Dold-Samplonius, Y. et al. (Eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag. 9-29

[8] Melville, D. J., 2004. Poles and walls in Mesopotamia and Egypt. *Historia Mathematica*, 31: 148-162

[9] 郭书春, 2004. 汇校九章算术. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社

[10] 婆什伽罗, 2008. 莉拉沃蒂（林隆夫，徐泽林等译）. 北京: 科学出版社. 98-114

[11] Siegler, L. E. 2002. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag.

[12] 沈康身, 2001. 历史数学名题赏析. 上海: 上海教育出版社

[13] 汪晓勤, 王苗, 2011. 法国初中数学教材中的勾股定理: 文化视角. 中学数学教学参考（初中版）, (1-2): 128-130

中、新、美、法四国高中数学教材中的“简单几何体”：文化视角*

沈春辉[1] 柳 笛[2]

(1. 华东师大数学系，上海, 200241; 2. 华东师大特殊教育学系，上海, 200062)

2003 年颁布的《普通高中数学课程标准》（实验稿）将“体现数学的文化价值”作为课程标准的基本理念之一，指出“数学文化应尽可能地结合高中数学课程的内容”，设立“数学史选讲”等专题。特别是在“教材编写建议”中指出，教材编写“应将数学的文化价值渗透在各部分内容中”[1]。那么，高中数学教材的文化价值表现在哪些方面？文化材料的运用水平如何？因此，本文以高中“简单几何体”为例，比较中、新、美、法四国高中数学教材中的数学文化内容及运用水平，藉此了解各国教材中数学文化内容的共性和差异，为我国数学教材的编写提供借鉴。

1 研究样本

根据教材的代表性与影响力，本文所研究的教材包括：我国的人民教育出版社、新加坡的 Panpac 出版社、美国的 Prentice Hall 出版社和法国 Belin 出版社的数学课本，详细内容见表 1。为了便于做比较研究，本文所讨论的“简单几何体”界定为棱柱、棱锥、圆柱、圆锥、球等几何体。各国对“简单几何体”内容的编排处理有所不同，有的将此内容编排在若干章节中，如法国教材将“简单几何体”分别安排在初中的三本教材中，但其内容要求与我国高中对“简单几何体”的要求一样，故不影响教材的比较研究。

2 数学文化内容

“数学文化”一词至今没有统一的界定，其解释也多种多样。本文采用顾沛教授对数学

* 国家社会科学基金“十一五”规划 2010 年度教育学重点课题“主要国家高中数学教材比较研究”（ADA100009）子课题九部分研究成果。

文化内涵的解释，“简单说，是指数学的思想、精神、方法、观点，以及它们的形成和发展；广泛些说，除上述内涵之外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人

表 1 教材基本信息

国家	出版社	课本名称	章 名	页数	出版日期
中国	人教社	数学必修 2[2]	空间几何体	37	2007 年
新加坡	Panpac	Mathematics 1[3]	立体的表面积和体积	30	2007 年
		Mathematics 2[4]	棱锥、圆锥和球	30	2008 年
美国	Prentice Hall	Geometry[5]	表面积和体积	62	2003 年
法国	Belin	Math 5^{e}（七年级）[6]	棱柱与圆柱	23	2010 年
		Math 4^{e}（八年级）[7]	棱锥与圆锥	22	2007 年
		Math 3^{e}（九年级）[8]	球体与球	16	2008 年

文成分、数学与社会的联系、数学与各种文化的联系，等等。” [9]本文所研究的数学文化是广义的，具体包括数学史、数学与生活、数学与科技、数学与人文艺术等，不涉及数学思想、数学哲学、数学方法等。

2.1 数学史

教材中数学史的呈现方式包括显性和隐性两大类。显性方式如数学家肖像、数学家的简介、数学知识与概念的历史发展介绍、历史名题、数学史事件等，而隐性方式是基于数学史上的问题和概念进行改编，或重构历史发展顺序，以适应现代课堂的环境。

2.2 数学与生活

PISA 研究中，根据学生与现实背景的接近程度，对数学问题背景进行分类，见表 2。

表 2 PISA 研究中数学问题背景的分类

PISA	类 别
PISA2000[10]	（1）个人生活（2）学校生活（3）工作与运动（4）当地社区与社会（5）科学的
PISA2003 [11]	（1）个人的（2）教育的和职业的（3）当地和国外的社区（4）科学背景
PISA2006[12]/2009 [13]	（1）个人的（2）教育的和职业的（3）公共的（4）科学的

另外，鲍建生也借鉴 PISA 的分类[14]，将问题背景分为个人的、公共的和科学的三部分。

虽然 PISA 是对数学问题背景的分类，但本文借鉴 PISA 的分类依据，即根据学生与现实生活中的数学文化内容的接近程度，将数学与生活内容分为个人的和公共的两类，见表 3。

表 3 数学与生活的分类

类别	描述	PISA	鲍建生
个人的	每个学生都能接触到的，如个人、家庭和学校生活	个人生活、学校生活、教育的	个人的
公共的	不是所有学生都能接触的，如运动、公共的、社区的、社会的	运动、当地社区、社会、公共的、职业的	公共的

2.3 数学与科技

同样，对于数学与科技内容也借鉴 PISA 研究的分类。在 PISA 研究中，将科学内容分为如表 4 所示。

表 4　PISA 研究中科学问题背景的分类

PISA	类　别
PISA2000/2003	（1）生活与健康（2）地球与环境（3）技术
PISA2006/2009	（1）健康（2）自然资源（3）环境（4）灾害（5）前沿科学与技术

本文在借鉴 PISA 对科学分类的基础上，根据科学内容研究的对象不同，分为生命科学、地球科学、物质科学，如下表所示：

表 5 数学与科学技术的分类

类别	描述	PISA
生命科学	生物学、医学、药学、生命健康等	生活、健康
地球科学	地理、地球、天文、自然资源、环境、灾害等	地球、环境、自然资源、灾害
物质科学	物理、化学等	—

2.4 数学与人文艺术

一般来说，根据表现手段和方式的不同，艺术可分为：绘画、雕塑、舞蹈、音乐、建筑艺术、文学、戏剧和影视艺术等[15]。本文根据教材中所呈现的艺术内容，将数学与人文艺术内容分为 4 个子类，见表 6。

表 6 数学与人文艺术的分类

类别	描　述
人文	语言学、文学、历史等
美术	绘画、雕塑、手工艺等
音乐	乐器、乐理、舞蹈等
建筑	世界知名建筑（不包括普通建筑）

3 数学文化的运用水平

为了进行有效地比较，除了对于数学文化内容分布进行统计外，还需要对文化材料的运用水平进行划分。

3.1 数学史的运用水平

Tzanakis 和 Arcavi 总结了数学史在数学教学中的三种运用方式：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识[16]。而 Jankvist 则提出另三种方式：启发法、模块法和基于历史法[17]。这些分类法针对的是数学课堂教学，而对数学教材的历史分析不尽合适，且过于粗略。汪晓勤[18]借鉴已有分类方法，按数学史与数学知识的关联程度，将数学教材运用数学史的方式分成五类，见表 7。

表 7　数学教材运用数学史的五种方式

类 别	描　述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
点缀式	孤立的图片，如数学家画像、数学图案、反映数学主题的绘画或摄影作品等	直接运用法	启发法
附加式	文字阅读材料，包括数学家生平、数学概念、符号、思想的起源、历史上的数学问题、思想方法等	直接运用法	启发法
复制式	正文各栏目中直接采用历史上的数学问题、问题解法、定理证法等	直接运用法	启发法
顺应式	正文各栏目中对历史上数学问题进行改编，使之具有适合于今日课堂教学的情境或属性	间接运用法	—

重构式	正文各栏目中借鉴或重构知识的发生、发展历史，以发生法来呈现知识	间接运用法	基于历史法

3.2 其他数学文化的运用水平

de Lange 根据背景与数学知识的关联程度将背景分为 3 个层次：（1）无背景；（2）用于掩饰数学问题；（3）背景成为数学问题的一个有机组成部分[19]。本文在 de Lange 的基础上，根据数学文化内容与数学知识之间的关联度，将数学文化（包括数学与生活、数学与科技、数学与人文艺术）的运用水平进行划分，见表 8。

表 8 数学教材数学文化的运用水平

类 别		描 述	de Lange
外在型		文化内容的介绍,不涉及数学内容	—
内在型	可分离型	文化用以掩饰数学问题，仅仅运用数学知识解决数学问题，文化与数学可以分离	掩饰数学问题
	不可分离型	文化内容成为数学问题的一个有机的组成部分，运用数学知识解决具体的文化问题，两者不可分离	成为数学问题有机组成部分

4 结 果

本文按照上述文化内容的分类，对四版教材在数学史、数学与生活（简称生活）、数学与科技（简称科技）、数学与人文艺术（简称文艺）方面出现的次数与百分比进行统计，分别用折线图和面积图表示如下。为了确保效度，在统计过程中由两名数学教育研究者单独进行统计，对统计结果进行一致性检验，均达到 92%以上。由图 1 可知，四版教材在数学史、生活、科技、人艺四个方面具有大体相同的趋势，呈“N”型，即在数学史、科技方面内容略少，在生活方面内容充实。这一点在图 2 表现更为直观，即生活方面的内容所占比例均大于 50%。这说明，在四版教材中数学文化集中体现在现实生活方面。为了更加清楚阐述各国教材在每个内容上的具体差异，故根据各个维度逐项说明。

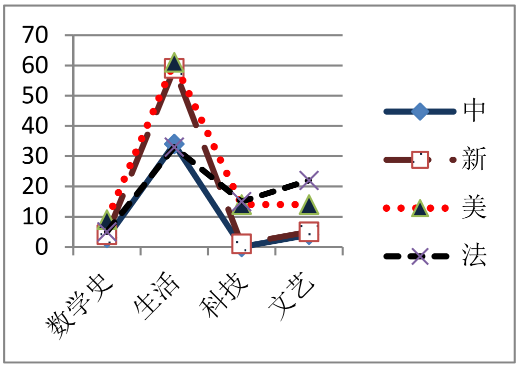

图 1 四版教材的折线图

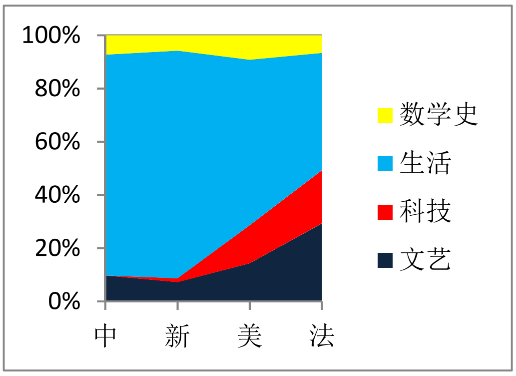

图 2 四版教材的面积图

4.1 在数学史方面的特点

四版教材中的数学史内容都较少，美版教材用得相对多一些，共 9 处。四国教材均含阿基米德圆柱容球问题、祖暅公理（西方称为卡瓦列里原理）；美国和法国教材同时关注了欧拉公式，人教版在阅读材料中介绍了画法几何与蒙日。对数学史内容的运用方式进行分析，发现四国教材大多处于复制式水平，顺应式次之，而以发生法来呈现知识的重构式水平均未达到（见表 9）。值得注意的是，四国教材很少采用数学家图像、数学图案等点缀方式体现数学的文化价值。中、美、法国教材采用附加式介绍数学史知识，如人教版通过文字阅读材料的形式来介绍祖暅原理和画法几何的思想、法国教材亦采用阅读材料介绍柏拉图立体。新、美、法三国教材采用复制式，即在教材正文直接采用历史上的数学问题，如法国教材直接采用历史上欧拉公式探索过程。将历史上数学问题进行改编的顺应式也是教材处理数学史内容常用的方式，如美国版教材让学生探索三维空间的欧拉公式，之后对历史问题进行改编让学生研究二维空间的欧拉公式。

表 9 四版教材数学教材数学史的运用水平

国 别	点缀式	附加式	复制式	顺应式	重构式	总计
中	0	2	0	1	0	3
新	0	0	3	1	0	4
美	1	1	3	4	0	9
法	0	2	3	0	0	5

4.2 在数学与生活方面的特点

按照子类和水平统计，四版教材在生活方面的表现如表 10 所示。四版教材中与生活有

关的内容出现的次数由高到低分别为：美、新、中、法。其中，美版和新版的次数比较接近，大约是中版或法版次数的一倍。现将与生活有关的内容进一步细分为：与个人有关，与公共有关。中、新、美版教材中，逾半数内容是每个学生都能接触到的（所占比例分别为 65%、55%、66%），而法国教材与学生个体有关的内容比例仅为 30%。这说明，中、新、美版教材更加贴近学生个人的日常生活实际，而且内容丰富。以美国教材为例，内容涉及到日常生活中的食物（如面包的截面）、工具（如吸管、铅笔）、家具（如课桌）、球类（如足球、排球）。

由表 10 可知，在"数学与生活"方面，四国教材大多处于可分离型，即生活背景与数学分离，仅运用数学知识解决数学问题。值得注意的是，中国人教版教材中有 18%的内容是属于第三水平不可分离型，即运用数学知识解决实际的文化问题。

表 10 四版教材数学与生活的水平分类

	按水平划分				按子类划分		
	外在型	可分离型	不可分离型	总计	个人的	公共的	总计
中	1（3%）	27（79%）	6（18%）	34	22（65%）	12（35%）	34
新	1（2%）	55（93%）	3（5%）	59	32（54%）	27（46%）	59
美	2（3%）	54（89%）	5（8%）	61	40（66%）	21（34%）	61
法	4（12%）	27（82%）	2（6%）	33	10（30%）	23（70%）	33

4.3 在数学与科技方面的特点

通过分析，发现四版教材在该部分非常薄弱。美版和法版教材中分别仅 14 处和 15 处内容与科技有关，并且绝大多数内容处于第二水平可分离型。我们还发现，中版和新版教材在数学与科技内容上严重缺失。此外，通过将数学与科技方面细分为生命科学、地球科学、物质科学有关三个子类，发现美国大部分内容与地球科学、物质科学有关，而法国则集中在地球科学，即与环境、地理、天文、自然资源有关。我们还发现，中、新、法教材在与其他学科的交叉联系上显得较为薄弱。

4.4 在数学与人文艺术方面的特点

由图 3 可知，中、新、美、法教材中有超过 60%的内容处于第二水平（可分离型）。值得注意的是，美、法教材有 10%的内容属于第三水平（不可分离型）的运用。此外，通过

将数学与人文艺术方面细分为人文、美术、音乐、建筑四个子类，发现四版教材中绝大部分内容是与建筑有关，这可能与数学内容是研究立体几何密不可分。此外，法国教材还关注了人文、美术、音乐相关内容，而非仅局限于建筑物的形体表现。

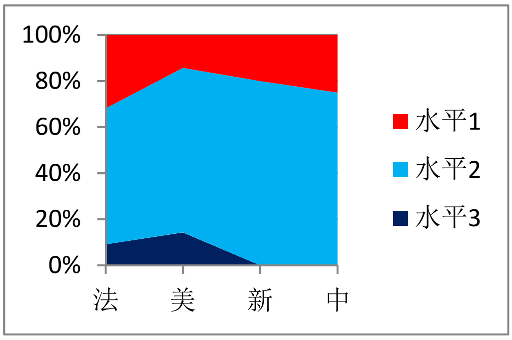

图 3 四版教材文艺水平分类面积图

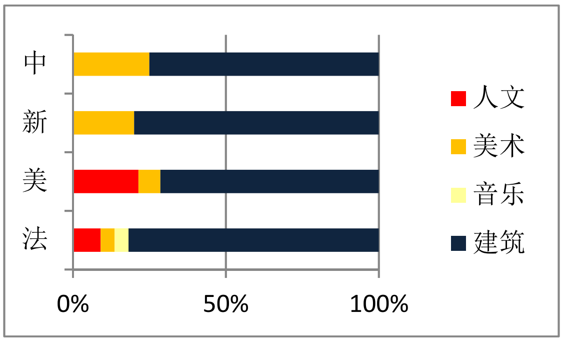

图 4 四版教材文艺子类分布图

5 反思与建议

从数学文化内容在各国教材中的出现范围及次数来看，教材编写者都非常重视数学文化的渗透。但通过分析文化材料的运用水平，发现它与将数学文化和课程内容有机结合的目标存在一定差距。为使教材中数学文化内容更好地促进学生学习，笔者认为对数学文化内容的编写还有待改进。

（一）融入数学史内容

数学史内容的介绍是数学文化的主要表现之一，但我国教材对数学史料的运用水平比较粗浅，大多采用附加式对数学家生平、数学概念、符号、思想的起源、历史上的数学问题、思想方法等进行介绍。例如，人教版在“探究与发现”版块中《祖暅原理与柱体、椎体、球体的体积》，照搬了数学史上祖暅提出的“幂势既同，则积不容异”原理，并未作任何加工。这种原汁原味的数学史料显然难以引发学生的兴趣，教师在教学中不易把握，容易出现“课后阅读”或者“跳过不读”的现象。教材中融入数学史，是深厚的数学文化底蕴的直接反映。因此，需要数学史料不仅局限于以阅读材料呈现的附加式，而应采用更高水平的运用方式，即教材正文中直接采用历史数学问题或将数学问题进行改编，使之成为符合学生认知发展规律的例题或练习题。

（二）注重数学与其他学科的交融

数学已渗透到社会的方方面面，并且通过在社会各领域的应用与传播，促进人类社会的发展，改进和完善人们的思维方式和行为观念。《纲要》也明确提出加强“数学与其他学科的联系”。通过对各国数学教材的定量与定性比较，发现人教版教材在数学与科技方面有待

进一步加强。而美国和法国教材大部分内容集中在地球科学，即与环境、地理、天文、自然资源等学科领域，除此之外美国教材比较关注与物理、化学等学科的交叉联系上。“简单几何体”部分是最能体现数学的美，人教版教材只在章头图中三次提及金字塔和一个有关中心投影的绘画方法，此外教材鲜有涉及文学、美术、音乐等人文内容。

（三）数学文化内容的运用水平有待进一步提高

从整体上看，各国数学教材中相应的数学文化内容绝大部分处于第二水平可分离型，也就是脱离相应的文化问题情境，该数学问题仍是一道完整的问题，仅需要数学知识就能解决。需要教材中提供更高运用水平的文化内容，使之成为数学问题的一个有机的组成部分，反映数学的应用价值。应力求使学生体验数学与其他学科的联系、数学的人文价值，通过对具体的文化背景进行推理、判断，促进学生逐步形成数学意识，提高实践能力，解决具体的实际问题。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部, 2003. 普通高中数学课程标准. 北京: 人民教育出版社

[2] 编写组, 2007. 数学必修 2. 北京: 人民教育出版社. 1-37

[3] P.Y. Lee & L.H.Fan., 2007. *Mathematics* 1. Singapore: Panpac Education. 284-313

[4] P.Y. Lee & L.H.Fan., 2008. *Mathematics* 2. Singapore: Panpac Education. 184-213

[5] L.E. Bass et al., 2003. *Geometry.* Upper Saddle River: Prentice Hall, 596-659

[6] N. Jacob et al.,2010. *Maths* 5^{e}. Paris: Belin. 262-284

[7] C. Ancel-Lepesqueur et al.,2007. *Maths* 4^{e}. Paris: Belin, 269-290

[8] L. Cuaz et al., 2008. *Maths* 3^{e}. Paris: Belin. 235-250

[9] 顾沛, 2008. 数学文化. 北京: 高等教育出版社. 2

[10] OECD, 2000. *Knowledge and Skills for Life: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[11] OECD, 2003. *Learning for Tomorrow's World: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[12] OECD, 2006. *Science Competencies for Tomorrow's World: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[13] OECD, 2009. *What Students Know and Can Do: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[14] 鲍建生, 2002.. 中英初中数学课程综合难度的比较研究. 华东师范大学博士论文. 24-27

[15] 张同道, 2009. 艺术理论教程. 北京: 北京师范大学出版社. 38-53

[16] Tzanakis, C., Arcavi, A.,2000. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 201-240

[17] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[18] 汪晓勤, 2011. 主要国家高中数学教材中的数学文化. 中学数学月刊, 4

[19] de Lange J., 1995. Assessment: No change without problems. In T.A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment*, New York: SUNY Press, 87-172

教学实践

HPM 视角下的高中数学教学：实践与思考

张 小 明

(浙江省诸暨中学，诸暨，311800)

自 2005 年我国召开第一届数学史与数学教育会议至今，我国的 HPM 研究方兴未艾，以历史相似性研究为代表的实证研究为基于历史的发生教学法提供了更多的论据支撑(如[1][2])，特别是将数学史融入数学课堂教学的实践研究日益丰富(如[3][4])，数学史在数学教学中“高评价、低应用”的尴尬状况正在逐步得到改善。作为一名对 HPM 研究有着浓厚兴趣的高中数学教师，笔者自 2004 年开始，立足于自己的课堂教学实践，围绕“如何将数学史融入高中数学课堂教学？当数学史融入课堂后的情形为何？”这两个重要问题，开展了长期的行动研究，通过反复实施“计划、行动、观察、反思、再计划”的教学循环，对融数学史于中学数学教学的方法和途径进行了探索，获得了一些实践经验，也遇到了不少的障碍和挑战，本文结合笔者的实践研究，对如何将数学史融入高中数学教学谈几点认识，并提出思考和建议。

1 如何将数学史融入普通高中数学教学：基于行动研究的经验和看法

在当前的升学压力之下，如何在不影响教学进度的情况下，让数学史成为提升教学效率的工具，是广大教师面临的主要困难，正如 Barbin 所说：“教师们往往不知如何选择合适的数学史材料，以及如何在教学中适当地置入数学史”[5]，以下笔者结合自己的教学实践，谈几点经验和看法。

1.1 数学史融入数学教学的具体方法

在具体的教学过程中，将数学史融入数学教学有很多种做法[6]，这取决于教师的信念、教学观、课程内容、历史资料等诸多因素，已有的文献提供了很多成功的经验和做法(如文[7]-[12])，那么，从教学反馈的情况来看，情况如何呢？

1.1.1 学生的看法

从学生的视角来看，他们最认可的方法是什么呢？他们最希望数学史在自己的学习中发

挥什么样的作用呢？笔者就这两个问题做了问卷调查。

问题一 对于数学史融入数学教学的以下功能，那些对你来说是最重要的，请你按照你的需要进行排序(从高到低)：

A 激发学习兴趣;

B 改变对数学的观念和态度;

C 促进学生对概念的理解;

D 了解历史上数学家们的创造历程，培养学生的思维能力;

E 了解数学与社会发展的关系以其和其他学科之间的联系。

本题给出的五个功能中，A 和 B 主要指数学史在情感领域的功能，而 C、D 指数学史在认知领域的功能，E 是指数学史在文化领域的功能，调查结果显示，上述功能的排序是 C-D-A-B-E，这一结果说明，在情感、认知和文化三个领域中，学生最为看重的是数学史对数学认知的帮助。

问题二 对于以下融入数学史的方式，请您按照喜欢的程度进行排序(从高到低)：

A 在教学中穿插数学家的故事和言行;

B 在讲授某个数学概念时，先介绍它的历史发展;

C 提供历史上数学家们对定理各种证明方法或历史名题的解答;

D 在教材上提供相应的历史材料供学生阅读;

E 指导学生制作富有数学史趣味的壁报、专题探讨、戏剧、录像等;

F 应用数学历史文献设计课堂教学学习单;

G 开设数学史选修课。

调查结果显示的顺序为：F-C-B-A-E-D-G,在各种融入方式中，制作学习单和介绍历史名题的解法以及历史上对定理的各种证明方法排在最前列，令人多少有些意外地是在教材中提供补充阅读材料和开设数学史选修课被排到了最后。

将数学史融入数学教学的价值取向决定了我们采取何种具体的方法，根据 Jankvist 对大量 HPM 文献的研究[12]，大部分学者都支持“History is a tool”这一定位，也就是说，在数学史融入数学教学的过程中，数学史是为教学目标服务的，从学生的反应来看，这一定位是恰当的，同时，学生希望数学史除了能激发学习兴趣之外，能对认知活动有所帮助。

1.1.2 两种基本形式

在实际教学过程中，将数学史融入数学教学的方式是多样的，但总体来说可以分为附加式

应用和融入式应用两类。

所谓附加式应用，就是将历史材料外加于教学内容的方式，例如：在讲授集合单元时，介绍集合论的创始人康托尔的传记、在函数概念教学中补充函数概念发展的历史、在引入对数时介绍对数发明的历史和意义等。在附加式应用的过程中，如果剔除数学史部分，并不直接影响认知目标的达成。毋庸置疑，对教师来说，附加式应用的操作更加简单，而且也是目前应用最广泛的一种方式。笔者经过一个阶段的附加式教学之后，根据教学反馈的情况发现，在附加式应用的过程中，数学史材料能够有效地激发学生的学习兴趣，从而间接地促进了教学的效果，但这一方法给教师带来的最大挑战是教学时间不足，从学生的反馈意见来看，也呈现出“高评价、低接受”的特点，大多数学生对历史材料本身是很感兴趣的，但对于教学过程中附加历史材料的做法却持保留态度，持反对意见的主要原因与升学压力有关，诸如时间的花费、课堂演练的不足等问题使得学生担心应用历史会影响教学效果(特别是考试的成绩)。

附加式只是在过去教学的基础上，附加一些历史材料，没有注意历史与学生认知过程的融合，从学生的意愿来看，如果数学史的应用只停留在说故事的层次，给学生带来的仅仅是兴趣的话，他们宁愿花这些时间多做几道题目，所以，将历史材料、教材内容和学生的学习需要综合考虑，再来斟酌具体的课堂教学计划，使数学史融入到学习过程特别是学生对数学概念、方法的认知过程中，这种方法我们称之为融入式应用。融入式的 HPM 教学设计中，数学史成为学生学习课本知识的必要组成部分，数学史的功效除了增进学习兴趣、为数学课堂赋予文化意涵之外，也对学生的认知过程有了直接的帮助。通过笔者的调查问卷和访谈，大部分学生对融入式表示了肯定，在具体操作上，他们大都赞成教师以学习工作单(worksheets)的形式统整历史和教学内容，形成可供教学直接使用的教学资料。

1.2 学习工作单的设计

学习工作单(worksheets)是在数学课堂教学普遍使用的一种方式，学习工作单一般有以下两类[13]：

(1)由一组作业构成的工作单，目的是帮助学生练习在教室中所习得的某一解法或强化某一单元的知识。使用场所可以是教室，也可以是家庭。

(2)由一组有结构、有引导性的问题串构成，目的是引进一个新单元、一组问题或一些议题以供学生讨论。这种设计通常会考虑学生的先备知识，并且以循序渐进设问的方式，引导学生先前未学习的基本知识的发展过程。这些工作单通常于新知识的学习过程中，学生在教师

的组织引导下，通过对学习单设置的问题串的思考和解决，学习新概念、掌握新方法。

根据前文所述的调查结果，以学习单的形式将数学史融入课堂教学，是最受学生欢迎的方式，考虑到教学时间的限制，教师通常也会制作第一类学习单，将数学史作为延伸学习材料，供学生课后自学，但是笔者以为，第二类学习单对课堂教学而言最为有益。

1.2.1 历史、教材和学生认知的三维度分析

学习单设计的首要工作是综合分析数学知识、学生认知、历史材料以及三者的关系，在数学知识方面，首先应该考虑教材的安排，必须分析课程单元的教学目标，此单元在教科书中的编排方式，教师用书中相关的说明。对于学生认知的方面，则是从数学教育研究的论文中，搜寻有关学生的认知发展方面的成果，以及此单元学习障碍的具体案例，或从本身的教学经验去发掘学生的问题，也参考国内外HPM研究的成果。至于历史的维度，则是泛指与此教学单元相关的所有历史文献，包括原始文献、二手文献和经过加工的可直接应用于数学教学的历史材料。笔者曾以复数概念的教学为例，展现了学习单设计的全过程，有兴趣的读者可以参阅文[4]。

1.2.2 历史材料的剪裁、加工和融入

在考量了历史、教材和学生认知三方面的联系之后，接下来，教师要根据学生的认知困难、教学要求，对历史材料进行了必要的选择、剪裁和加工，使之能适应教学进度的要求，同时能够帮助学生解决认知上的困惑。虽然我们不免担心这是否有悖于严格的历史过程，但严格的遵循历史，是数学史家进行专业数学史研究的基本要求，在数学史辅助教学的过程中，由于教材安排和学生接受能力的限制，我们不得不对历史材料进行加工和剪裁，笔者以为荷兰数学教育家弗莱登塔尔的“再创造”[14]的观点正好可以帮助我们排解忧虑。所谓“再创造”意即在数学教学过程中,学生应当有机会经历与数学事件的历史发展相类似的探究过程，但此时学生并不是真正的去创造，而是在教师的引导下获得自己的知识。学生沿着历史发展的路径，了解某部分的数学知识发明的来龙去脉，在此过程中他们的学习也包含了再创造的意义。

2 将数学史融入数学教学的障碍和对策：在探索中前行

虽然数学史融入数学教学得到了广大教育工作者的首肯，但是在实际应用过程中，还是会遇到诸多障碍和困难，特别是在高中学段，升学至上的观点在很大程度上影响着数学教学，

所以，要在这样的背景下将数学史融于数学教学一定会面临更多的障碍，除了缺乏必要的教育去向的历史资料这一困难之外，以下几个困难也是需要克服的。

2.1 融入数学史和教学进度之间的矛盾

在数学教学中融入数学史势必要花费一定的时间，这就给教学进度带来了一定的压力，对学生来讲，如果数学史的融入使得教学进度受到了影响，这是他们不能接受的，从教师的角度来看，由于学校在教学进度方面有统一的要求，所以，如何在保证正常教学进度的情况下融入数学史是教师面临的第一个问题。根据笔者的研究结果，应对的策略首先在课堂上对数学史的应用以融入式为主，以学习单的形式引导学生沿着历史的足迹研究数学，让学生体验再创造的乐趣，其次是引导学生通过课外阅读进行必要的延伸学习，最后，要对历史材料精心选择，必要时还要对历史材料进行适当的剪裁和加工。

2.2 部分学生和同事对融入数学史的教学方法表示怀疑

在升学至上和教材内容份量沉重的压力下，部分学生对融入数学史的教法不予认同，周围同事甚至学校管理者也可能对这一做法持怀疑态度，教师在教学设计时，必须要考虑学生的这一顾虑，就笔者的经验来看，要使学生认可融入数学史的教学方式，必须要提高应用数学史的层次，尤其是要重视挖掘数学史在学生认知方面的功能，这就需要教师了解学生在学习这一概念时存在的可能障碍和困难，分析哪些困难可以通过数学史的途径加以克服，然后在根据学生的需要设计教学过程，这样做，使数学史的应用深入到了认知的层面，对学生学习的帮助将会更大。

2.3 教材内容的顺序与数学概念的历史发展过程之间的矛盾

正如弗莱登塔尔批评的那样，现行的教材并不是按照历史的发展来安排的(当然笔者并不认为每一个教学单元都必须遵循历史)，这种情况给融入数学史带来了一定的困难。比如说对数的发明，在对数的发明之前，很多数学家都利用三角的积化和差公式将乘法转化为加法，所以有人认为将乘法转化为加法的思想来自于三角公式，但是在教材中，三角的相关内容却在对数之后，所以，在介绍对数发明的历史时，就难以对学生说明三角学对对数发明的启示。为了解决这些矛盾，就需要我们对历史材料进行必要的剪裁和加工，例如在介绍对数发明的历史时，我们只能先介绍“将乘法转化为加法”这一重要思想，等到积化和差公式单元，再来介绍三角公式对这一思想的启示作用。

3 建议和思考：中学教师的视角

近几年，关于将数学史融入数学教学的研究日益增多，特别是在实践方面的工作得到了很大的发展，但是，“将数学史融于数学教学并非一件容易的事情”[10]。

3.1 有必要有组织地对中学数学核心概念的历史发展进行专题研究

有关中学数学相关概念的历史因为散见于浩瀚的数学史文献，给教师的使用带来了很大的困难，笔者以为，有组织地，相对系统地对中学数学中的重要概念的历史进行专题研究是很有必要的，当然，在这个研究过程中，研究者一方面要着眼于概念的历史发展，另一方面也要关注数学概念的历史发展对数学教学的启示和意义，具体说来，就是要思考诸如以下几个方面的问题：

(1)历史上数学家遇到的困难对当今学生学习的启示为何？

(2)历史上数学家们采用的方法和课本中的方法有何异同？能否为学生所用？

(3)在历史的脉络中重新思考课本内容的编排，有何看法？

(4)哪些历史材料可以融入数学教学之中？具体形式为何？

3.2 有必要在教学实践中丰富数学史融入数学教学的形式和内容

从国内的情况看，利用历史材料进行教学设计、在课本中附加历史阅读材料甚至开设数学史的选修课等具体做法有了很大的进步，但是，笔者感到，除了让数学史进入数学课堂之外，如何让数学史在学生的课外活动中扮演更为重要的作用也是需要进行探索的，比如，我们是否可以借鉴国外的经验，通过制作以数学史为题材的动画片、创作历史情景剧，组织有关数学史的研究性学习活动等做法，让数学史成为学生课外活动的一个重要选项，从而丰富数学的文化意涵。

3.3 有必要在实践研究的基础上，进行适当的理论探索

Barbin 提醒未来的 HPM 研究者必须收集和研究两种资料[5]，第一是教师们使用历史的经验。目的是为了研究教师们的目标、步骤以及教学时遇到的问题，了解在他们眼中运用历史于数学教学的利弊得失。其二是收集教师和学生对于 HPM 教学感受的访谈资料和问卷。就目前的现状来看，在 HPM 的实践研究中，使用历史的课堂经验、师生的反馈意见等得到了更多的关注，为数学史融入数学教学提供了非常有益的借鉴，但是我们也应该看到，关于 HPM 研究的较为完善的理论框架还没有形成，为了使 HPM 研究更加深入，在实践研究的基

础上，进行相关的理论探索也是我们必须要关注的问题。

参考文献

[1] 任明俊, 2006. 中学生对函数概念的理解：历史相似性研究.华东师范大学硕士论文

[2] 沈金兴, 2008. 概率论前史中“投掷问题”的历史相似性研究.数学教学,(5):4-5

[3] 张小明, 汪晓勤, 2009. 中学数学中融入数学史的行动研究.数学教育学报, (4): 5

[4] 张小明, 汪晓勤, 2008. 复数概念的 HPM 教学设计.中学数学教学参考(高中), (6):4-7

[5] Barbin, E., 2000. Integrating history: Research perspectives. In: J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 63-90

[6] Man-Keung, Siu.,2000. The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate classroom). In: V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective*, Washington, DC :The Mathematical Association of America,3-9

[7] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education: An ICMI book*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201-240

[8] Katz, V., 1986. Using history in teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3): 13-19

[9] Bidwell, J. K.,1993. Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 86(6)

[10] Fauvel, J., 1991. Using history in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

[11] 萧文强,1992.数学史与数学教育:个人的经验和看法.数学传播, 16(3): 23-29

[12] Jankvist, U. T., 2009. A characterization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3): 235-261

[13] Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), 2000. *History in mathematics education: An ICMI study*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 216

[14] Freudenthal, H.,1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel Publishing Company

运用数学史的“全等三角形应用”教学*

王进敬

（上海市市西中学，上海，200000）

“全等三角形”是初中几何的重要内容，新课程标准要求“探索并掌握两个三角形全等的条件”，但前后并未涉及历史背景和实际应用，这种处理方法与“相似三角形”并不一致。从历史上看，和相似三角形一样，古人对全等三角形的认识也源于测量。为了与“相似三角形的应用”[1][2]相呼应，又考虑到知识本身的价值，笔者于 2011 年 5 月在讲完全等三角形知识后，从实际问题出发，结合数学史开设了一堂全等三角形应用课。

教学目标：（1）使学生能灵活运用全等三角形的判定方法；（2）让学生在讨论中互相启发、形成自己的方法；（3）应用全等三角形思想解决现实生活中的问题，感受全等三角形知识的价值，体会数学源于生活并服务于生活的道理；（4）结合数学史的故事，了解古希腊数学家泰勒斯对数学的贡献，揭示数学知识的发生过程。教学重点和难点：将现实问题转化为数学问题。

1 教学过程

1.1 情境引入

我们知道数学是源于生活并为生活服务的。那么怎样应用全等三角形的知识解决现实生活中的问题呢？这节课，我们就从实际问题出发，体会全等三角形在现实中的作用。

大家一定听说过拿破仑的名字，这位法国著名的军事家曾在战场上指挥千军万马，可谓风云一时。在向埃及的远征中，拿破仑下达过这样的一个命令：“让学者走在队伍中间。”这句话就成了拿破仑爱护学者的一句明言。他这么爱护学者是有原因的：原来，拿破仑军队在行军途中为一湍急的河流所阻，“逢山开路，遇河架桥”。但架桥需要材料，这些材料不可能随身带着，要去找，找多少，需要知道河的大致宽度，这位首领急得团团转，怎样测河宽？他自己不知道，你能帮他想想办法吗？

教师作了以下预设：只提出问题，但不束缚学生的思维；若学生实在想不出来，再提示

* 本文为“数学史融入初中数学教学的行动研究”系列案例之一。

能否运用全等三角形的知识解决问题。可能由于教学中所谓的“学以致用”仅仅限于解题，因此，正如一位学生课后在接受访谈时所说，“当老师提出问题时，有点束手无策”。

看到这种尴尬局面，教师提示：“能否运用全等三角形的知识进行解决？”学生的思维似乎找到了方向，而且一发不可收拾，提出了各种各样的方法。其中一位学生提出如下方法：A 为河对岸的参照物，BD 为垂直于地面的竹竿，利用视线使$\angle ABD=\angle CBD$，则$\triangle ABD \cong \triangle CBD$，于是河宽 $AD=CD$。这正是古希腊数学家泰勒斯的方法！但由于这位学生刻画得不够清晰，一些学生对该方法不甚了了。这时，教师所准备的教具就派上了用途。

接着，教师告诉学生：一名随军工程师用运用泰勒斯的方法迅速测得河流的宽度，因而受到拿破仑的嘉奖和重视。[3]

介绍泰勒斯及其测量方法：泰勒斯（Thales, 公元前 6 世纪），古希腊几何学鼻祖，是古希腊第一个数学家和哲学家，年轻时曾游历埃及，利用相似三角形的知识测得金字塔的高度；因预测出日食而阻止过一场战争；利用全等三角形和相似三角形两种不同方法测量出轮船与海岸的距离。

如图 1，泰勒斯在高丘（或悬崖、灯塔）上利用一种简单的工具进行测量。直竿 EF 垂直于地面，在其上有一固定钉子 A，另一横杆可以绕 A 转动，但可以固定在任一位置上。将该细竿调准到河对岸的某一位置，然后转动 EF（保持与底面垂直），将细竿对准岸上的某一点 C。则根据角边角（SAS）定理，$DC=DB$。

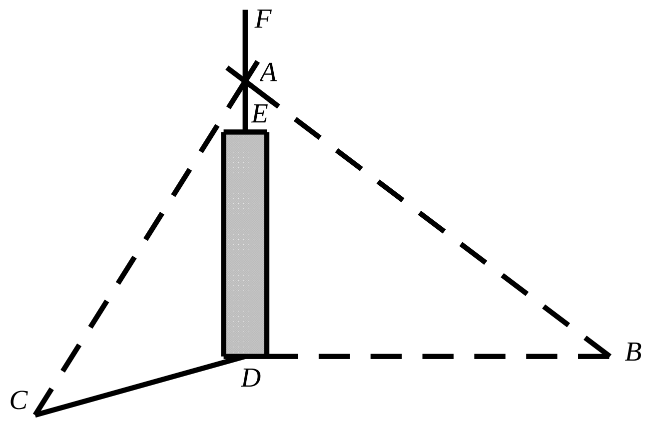

图 1　泰勒斯的方法

1.2 情境再现

现在，我们一起将泰勒斯的方法在教室中演示一遍（图 2）：运用全等三角形的思想测量讲台到后黑板的距离，教师事先准备好两根竿子，让学生完全理解泰勒斯的方法。进而提出问题：你还能想出其他的方案吗？

基于前面的引领，学生不断提出新方法：其他全等三角形方法（如图 3-5）、直角三角形方法、甚至还有相似三角形的方法（包括射影定理）。学生的知识面很广，思维很灵活，大大超出了笔者的预设。由于时间关系，笔者只能让学生课后将他们所想出的方法进行整理和交流。值得注意的是，图 4 所示的方案二正是数学史家所推测的泰勒斯的另一种方法。

1.3 定理应用

问题 1. 抗美援朝战争期间，中国志愿军在行军途中发现美国军营，于是想炮轰敌军，苦于无法确定敌我两军的大致距离，一位志愿军战士想出了如下方法：如图 6，他站在 A 处调整自己的帽子，使其视线恰好擦着帽檐看到敌军军营的 B 处，然后，他一步步小心翼翼

图 2　学生在课上演示泰勒斯的方法

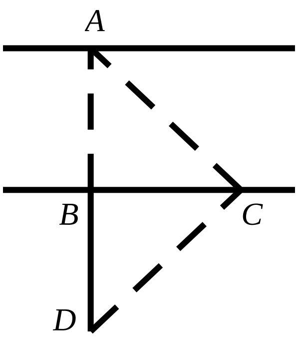

图 3　全等方案一

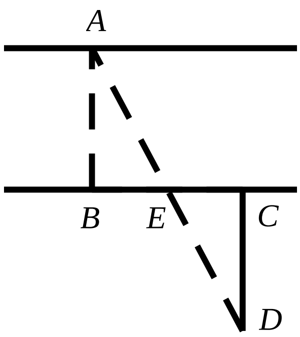

图 4　全等方案二

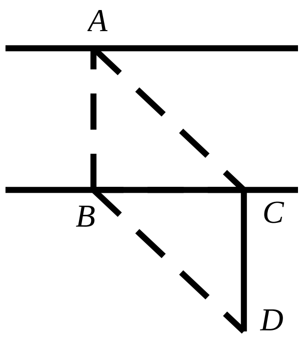

图 5　全等方案三

地后退，一直退到自己视线恰好落在刚才站立的 A 处，于是，他们就按照这个距离炮轰敌军军营，你觉得能击中目标吗？为什么？

问题 2. 如图 7，公园里有一条 Z 字型道路 $ABCD$，其中 $AB /\!/ CD$，在 AB 和 BC 段的路边各有小石凳 E 和 M，M 恰为 BC 的中点，在 AB 道路上停放着一排小汽车，从而无法直接测量 B、E 之间的距离，你能想出解决的方法吗？请说明其中的道理。

问题 3. 一个初中课外活动小组，想运用自己所学的知识搞一次有意义的活动，他们发现学校附近的公园有一个池塘，他们想测量该池塘两端 A、B 之间的距离，你能帮他们设计一个可行的测量方案吗？

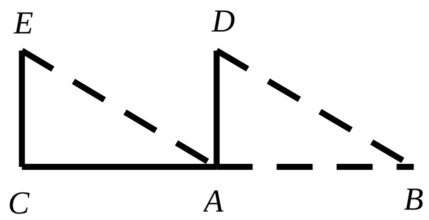

图 6　战场上的 ASA 定理

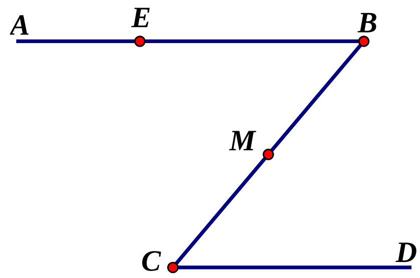

图 7　公园测距

1.4 教学小结

1. 通过本节课的学习你对全等三角形有什么新的认识?
2. 你觉得本节课最大的收获是什么?

1.5 作业布置

整理同学们所设计的方案，体会全等三角形在生活中的应用。

2 教学设计说明

2.1 全等三角形应用课的意义

全等三角形的应用让学生体会到数学源于生活并为生活服务的道理，这一点从笔者对学生的访谈中显而易见。然而，本节课的意义并不仅仅在于理论与实践的结合、素质与分数的分离等方面，还在于提供了一种理念，一种在以往学习过程中本应重视，但实际教学中却常常忽略的多元文化理解。另外，还为学生提供了一种交流思想方法的平台，尤其是不同时空数学思想的对比有利于拓宽学生的视野。

2.2 理论与实践之关系

全等三角形的应用绝不是彰显实践，轻视理论。它好比万绿丛中一点红，为我们带来不一样的视觉体验。用学生的一句话说：像这样的课绝不是可有可无的，而是有多有少的问题。这样或许在追求考试分数之余，更能体会学数学的目的了吧?

2.3 教学环节的设计意图

（1）“拿破仑遇河”的情景主要让学生明白：现实生活中只要善于观察、思考，你总会遇到一些无法直接测量的距离。如何利用手边仅有的工具，运用你所学到的知识，解决问题是学习的根本。在这个情景中，笔者无意将学生直接带入全等三角形的知识范畴，而是让学生“天马行空”自己想办法解决。

让想出测量方法的同学上台来演示，难点自然迎刃而解，进而介绍泰勒斯，这位 ASA 的创始人，又为以后“相似三角形的应用”埋下了伏笔。

（2）让学生思考其他解决方案，目的是让学生解放思想，举一反三，同时通过讨论，学生之间互相启发，取长补短，形成合作意识。

（3）定理应用中问题 2 和 3 的设计意图：本想以前面历史故事为背景，让学生明白如何解决无法直接测量的距离问题，但教学中由于对问题 2 的处理不是很妥当，导致时间比较紧张，问题 3 的作用没有完全发挥出来。问题 3 主要也是解放学生的思想，提醒他们，不要将所有距离测量问题都诉诸全等三角形来求解。

3 师生访谈

针对“全等三角形的应用”一课，笔者主要从以下 5 个问题对部分学生及教师进行了访谈。

3.1 对学生的访谈

（1）上了“全等三角形应用”一课后，你有什么感受？

● 课很有趣，老师的语调也很吸引人。实际问题很生动，很实用，与做题完全不同，大家的讨论还可以互相启发。很新颖，学数学的同时还可以学到很多别的知识。在联系到生活中时就实际问题进行讨论，不拘泥于理论。

● 所有的话题都让学生感兴趣，提高了上课的效率，多年之后故事会永远留在头脑中。在校外上辅导班时，用类似的问题去问别的学校的同学，他们都对“全等三角形如何用”没概念，感觉很骄傲，有种博士生的感觉，在向其他同学讲授时，很津津乐道。

● 课的内容很丰富，若全等三角形的应用从测距问题推广到其他问题，则学生会更期待。

（2）你认为这种类型的课有用吗？用处何在？

● 把课本上的理论与实际生活完全结合起来，以前从未想过长度与角度可以转化，连不可测的问题都可以解决，本节课让我对数学有不一样的认识。

● 它让我们对现实生活中的事物更加好奇，以后会更加关注身边的事物，拓展视野。感觉现实生活中的问题原来没有那么难解决，只要有了一个例子，我们就可以举一反三。

● 增加对数学史的了解，而以前了解很少，这样的知识一定要讲的。从考试的角度来看好像用处不大，但从现实的角度很有用，增加更多的知识，记忆也深刻，创造性思维会突然增加，还会增加求知欲，当老师提出问题时，就特别想知道答案。

（3）课上其他同学的方法对你有帮助吗？主要的帮助在哪里？

● 有帮助。掌握多种方法当然更好，若只有一种方法，一下子可能会忘记。若一个人的方法行不通还可以借鉴别人的方法。如果自己的方法被别人讲出来，就恨不得再去想出更好的方法，比比哪个更好，形成良性竞争。

（4）你希望上这样的课吗？这样的课以什么方式呈现给你，你会更愿意接受？你认为上这样的课会影响你的学习成绩和学习时间吗？

● 不会影响学习成绩，更不会影响学习时间。这样的课在我们理论的基础上多一种知识的了解，而且这个了解不是可有可无的而是有多有少的。在正课当中，无论从哪个角度讲解都会让我们对知识印象更深，增加对知识的理解，当然一定要以正课为主。

（5）对这种类型的课有怎样的建议？

● 希望学校专门开设这样一种课程，每周上一次。或者成立这样一个学习兴趣小组，让我们来参加。特别希望多一些机会上类似的课。

3.2 对部分教师的访谈

（1）上了“全等三角形的应用”一课后，你有什么感受？

● 气氛活跃，有助于学生开拓思路。对学生的影响还是比较大的，当然对考试的帮助不大，因为知识点还是比较简单的，重要的是着重学生的态度和学习热情。

● 本节课是我第一次接触到数学历史中的人物以及历史中数学对于经济文化的重要地位。我非常喜欢并尝试去实践。

● 这样的课教师和学生都很感兴趣，很生动，学生的积极性完全调动起来，是数学与实际结合最好的范例。但教师准备起来难度很大。

（2）你认为这种类型的课有用吗？用处何在？

● 应该说是很有用的。现在缺乏理论联系实际，这样的课对提高学生的“学以致用”思想有很大的帮助。

● 对学生非常有用，有着实际操作的可能性，使学生对数学有重新的认识并热爱这门学科。

● 正是由于与实际相结合，所以价值更高，把全等的方法进行灵活的运用。

（3）你认为把这样的课放在什么位置更合适，为什么？

● 这样的课放在拓展课或探究课更合适。因为要更多地操作实践，局限于教室里的话效果不甚好，若有类似的场景效果会更好。

● 放在课外拓展的位置比较好，也可以在课间穿插一个小故事给学生一些思考空间。

● 正课和拓展课效果都会很好。兴趣是最好的老师嘛！

（4）对这种类型的课有怎样的建议？

● 更切合学生的生活实践更好，讨论出的结果会更多。

● 既然是这种类型的课，在座位安排上可以更加灵活，也可以事先在教室里布置一下场景，让学生活动起来。

● 最好能资源共享，多展示几节这样的课，让学生更好地体会数学与生活紧密相关，让学生发现生活中的数学问题，并用学过的知识解决它。如果所有的课都能以这种形式来上，那么学生一定都会喜欢数学课。

4 结论与反思

4.1 结论

本节课中，数学史的价值主要体现在：（1）让学生了解泰勒斯，了解几何学的价值，体会数学的悠久历史及其与人类文明的密切关系；（2）让学生掌握 ASA 定理在现实生活中的应用；（3）为培养学生创造性思维和发散性思维创造契机；（4）激发学生对数学的兴趣；（5）体现“主题之必要性”，创造学生的学习动机。对师生的访谈和对学生的问卷调查都表明，本节课完成了教学目标，达到了理想的效果，取得了较大的成功，受到了一致的认可。

对教师而言，本节课促进了教师对教育目标的理解，对多元文化理念的落实，加深了对教学内容的研究。依据数学史，笔者在教授全等三角形知识时，在定理的呈现顺序和证明方法上做了适当的调整，也取得了良好的效果。还有如笔者在本文开头提出的，全等与相似并

驾齐驱，全等的应用同相似一样重要，建议在教材编排上考虑这一点，设置一节全等三角形应用课。

4.2 教学反思

（1）预设与生成的矛盾

在问题 2 的讲解过程中，教师完全可以根据学生前面的表现，将该题作为口答题解决。在处理过程中教师还是根据预设进行了安排，导致时间紧张，问题 3 的作用未能得到全部发挥。

（2）若干细节上的不足

本节课在若干细节上处理得并不很到位，导致学生直接用竹竿来测量的错误解法。“情景再现”中的图形，部分线段应该用虚线，让学生体会“目光如炬”；学生上台用实物演示泰勒斯的方法时，个别学生仍然心存疑问，此时教师应该强调目测与直接连接的区别，在转动竹竿时保持不变的是什么，有什么要求，最终让每位同学明白 ASA 的测量原理。

（3）数学史与考试成绩

笔者多堂课的教学实践结果都表明：数学史融入数学教学，无论从哪个角度融入，都不会影响学生的学习成绩，相反，会促进他们的数学学习，最终提高他们的学习成绩。对学生的问卷调查、访谈以及学生所写的感想都能说明这一点，而笔者所任教两个班级的期末考试成绩更能证明这一点。

（4）笔者本人的感受

笔者的亲身体验到，同时受访师生也都普遍认为，像本节课这样的数学课，其价值是无穷的。正如一位受访教师所说：“如果所有的课都能以这种形式来上，那么学生一定都会喜欢数学课。”当然，这几乎是不可能的。实际上，这样的课上起来很难，数学史功底的薄弱是一线教师充分发挥数学史教育功能的最大障碍。

参考文献

[1] 汪晓勤, 2007. 相似三角形: 从历史到课堂. 中学数学教学参考(初中版), (9): 54-55

[2] 王进敬, 汪晓勤, 2011. 运用数学史的“相似三角形应用”教学. 数学教学, (8): 22-25; 32

[3] 汪晓勤, 王甲, 2008. 全等三角形的应用: 从历史到课堂. 中学数学教学参考(初中版), (10): 55-57

和差术：从历史到课堂

王 芳[1,2] 汪晓勤[1]

(1. 华东师范大学数学系，上海，200241； 2. 浙江省萧山中学，杭州，311201)

古代文明给我们留下了无数的智慧结晶，这些丰富的遗产对我们今天的数学教学具有怎样的意义？带着这样的思考，笔者揭开了古巴比伦和差术的神秘面纱，将其与高中数学教学知识相融合，让今天的课堂融入古人的智慧！

1 古巴比伦的和差术

1.1 和差术概述

在已发现的古巴比伦的泥版中含有大量用和差术解二元方程组的问题，尤其是利用和差术求解二元二次方程组，引起了笔者的关注与思考。

例 1 数学泥版 YBC 4663(图 1)涉及方程组$\begin{cases} x+y=6\frac{1}{2} \\ xy=7\frac{1}{2} \end{cases}$的求解(Neugebauer & Sachs, 1945)，祭司给出的解法(用今天的符号表示)是：

$$\frac{x+y}{2}=3\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=10\frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=3\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=1\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x-y}{2}=1\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=5,\ y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=1\frac{1}{2}$$

例 2 数学泥版 BM 13901(图 2)上载有如下问题：“两正方形面积之和为[21,40]，边长之和为[50]，求边长。”相当于解方程组$\begin{cases} x+y=50 \\ x^2+y^2=1300 \end{cases}$,泥版上给出的解法(用今天的符号表示)是：

图 1　数学泥版 YBC 4663

图 2　数学泥版 BM 13901

$$\frac{x+y}{2}=25\Rightarrow\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=625\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=25$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=5\Rightarrow\frac{x-y}{2}=5$$

$$\Rightarrow x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=30,y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=20$$

例 3 数学泥版 BM 13901 上又有："两正方形面积之和为[21,40], 边长之差为[10], 求边长。"相当于解方程组$\begin{cases}x-y=10\\x^2+y^2=1300\end{cases}$,泥版上给出的解法(用今天的符号表示)是：

$$\frac{x-y}{2}=5\Rightarrow\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=25\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=625$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}=25\Rightarrow\frac{x+y}{2}=25$$

$$\Rightarrow x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=30,y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=20$$

1.2 和差术中的数学思想方法：换元与化归

和差术的实质是换元, 将未知量x、y表示成$\frac{x+y}{2}$、$\frac{x-y}{2}$的和与差, 其背后蕴含着化归的思想, 结合例 1、例 2、例 3 三个利用和差术求解二元二次方程组的问题, 我们不难发现它们使用的是同一个数学模型：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{2}\\ \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2=xy\end{cases}$$

$\dfrac{x+y}{2}$、$\dfrac{x-y}{2}$、$\dfrac{x^2+y^2}{2}$、xy 是相互关联的四个代数式，已知其中任意两者就可以很方便地求另两者，和差术实现将不同的数学问题转化为同一数学模型进行求解，这就是化归的魅力——任它千变万化，我自岿然不动。

巧妙的方法，深刻的思想，曾经让古巴比伦数学熠熠生辉，如今同样也能点燃我们的高中数学课堂，让我们的课堂闪耀独特的光彩。

2 古巴比伦和差术在高中数学课堂中的运用

2.1 和差术的换元法在高中数学课堂中的运用

换元法是高中数学课堂中常用的方法，和差术中用 $\dfrac{x+y}{2}$、$\dfrac{x-y}{2}$ 表示 x、y 的换元在高中课堂中也并不鲜见。

例 4 (2011 安徽高考卷理 14)已知 ΔABC 的一个内角为 $120°$，并且三边长构成公差为 4 的等差数列，则 ΔABC 的面积为________________。

解：设三边长为 $x-4,x,x+4$，则 $(x+4)^2=x^2+(x-4)^2-2x(x-4)\cos120°$，故得 $x=10$，$S_{\Delta ABC}=15\sqrt{3}$。

数学中常将等差数列中连续三项设为 $x-d,x,x+d$，其背后的实质正是和差术的换元法：设 a,x,b 为等差数列中的连续三项，则 $x=\dfrac{a+b}{2}$，$d=\dfrac{b-a}{2}$。

例 5 (2010 浙江高考卷文 18)在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，设 S 为 ΔABC 的面积，满足 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2-c^2\right)$。(1)求角 C 的大小；(2)求 $\sin A+\sin B$ 的最大值。

解：(1)结合正余弦定理得 $C=\dfrac{\pi}{3}$。

(2) $\sin A+\sin B=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$。因为 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$，所

以$\sin A+\sin B$的最大值为$\sqrt{3}$。

将A、B表示为$\dfrac{\pi}{3}-\alpha$与$\dfrac{\pi}{3}+\alpha$同样属于和差术，三角化解中的和差化积与积化和差公式其本质就是将α,β表示为$\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2},\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，虽然现在高中数学教学对和差化积与积化和差不作要求，但实际上许多三角函数问题(例 6、例 7、例 8、例 9)都拥有和差化积与积化和差的背景。

例 6(2011 上海高考理 8) 函数$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$的最大值为________。

例 7(2011 北京高考理 15) 已知函数$f(x)=4\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$。(1)求$f(x)$的最小正周期；(2)求$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值。

例 8 (2010 湖北高考理 16)已知函数

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right),g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4},$$

(1)求函数$f(x)$的最小正周期；(2)求函数$h(x)=f(x)-g(x)$的最大值，并求使$h(x)$取得最大值的x的集合。

例 9 (2010 江苏高考 23)已知ΔABC的三边长都是有理数。(1)求证$\cos A$是有理数；(2)求证：对任意正整数n，$\cos nA$是有理数。

人教版教材中对于椭圆与双曲线方程的推导，因其运算的繁琐而为学生所排斥，法国数学家洛必达(M. de L'Hospital, 1661-1704)就曾用和差术进行椭圆方程的推导，用和差术推导椭圆方程与双曲线方程的意义不仅在于简化了运算，更有价值的是融合了椭圆与双曲线方程的推导过程并获得了椭圆与双曲线的焦半径公式。

椭圆方程的推导：点P为椭圆上的任意一点，设P的坐标为(x,y)，$|PF_1|=a+z$，$|PF_2|=a-z$，则$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+z$，$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-z$。

于是

$$(x+c)^2+y^2=(a+z)^2 \tag{1}$$

$$(x-c)^2+y^2=(a-z)^2 \tag{2}$$

(1)-(2) 得

$$z = \frac{c}{a}x \tag{3}$$

(1)+(2) 得

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + z^2 \tag{4}$$

把(3)代入(4)得：$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2$，整理得：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$。令$b^2 = a^2 - c^2$，得到椭圆标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$。

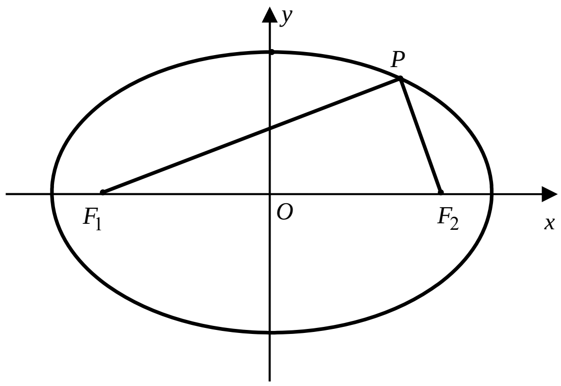

图 3　椭圆方程的推导

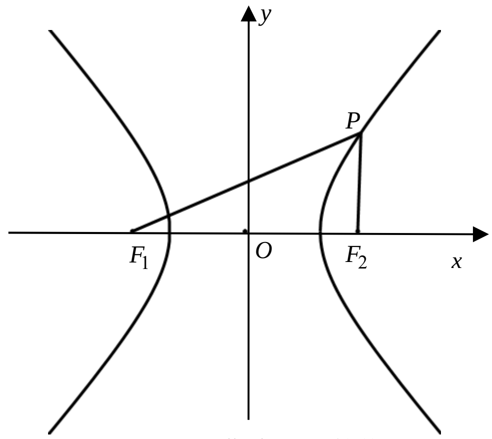

图 4 双曲线方程的推导

双曲线方程的推导：点P为双曲线右支上的任意一点，设P的坐标为$(x, y)(x > 0)$，$|PF_1| = a + z$，$|PF_2| = a - z$，则$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = z + a$，$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = z - a$，从而有

$$\left(x + c\right)^2 + y^2 = (z + a)^2 \tag{1}$$

$$\left(x - c\right)^2 + y^2 = (z - a)^2 \tag{2}$$

(1)-(2) 得

$$z = \frac{c}{a}x \tag{3}$$

(1)+(2) 得

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + z^2 \tag{4}$$

把(3)代入(4)得：$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2$，整理得：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$，令$b^2 = c^2 - a^2$，则

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(x>0\right)$。

点 P 为双曲线左支上的任意一点，设 P 的坐标为 $\left(x,y\right)\left(x<0\right)$，$\left|PF_1\right|=z-a$，$\left|PF_2\right|=z+a$，则 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=z-a$，$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=z+a$。

同理可得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(x<0\right)$。故双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

2.2 和差术的化归思想在高中数学课堂中的运用

万变不离其宗，依托化归思想、借助和差术模型，将不同领域的数学知识、数学问题串联起来是和差术留给我们的另一笔财富。

和差术的模型涉及 $\dfrac{x+y}{2}$、$\dfrac{x-y}{2}$、$\dfrac{x^2+y^2}{2}$、xy 间的相互转化，而高中数学知识体系中相应地存在和为定值——椭圆上的点到两焦点的距离和为定值，差为定值——双曲线上的点到两焦点的距离差为定值，平方和为定值——$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，积为定值——$a^x\cdot a^{-x}=1$，它们成为和差术化归思想的天然载体。

例 10 (2010 全国高考 1 文 8)已知 F_1、F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|=(\quad)$

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

解：由 $\begin{cases}\left\|PF_1\right|-\left|PF_2\right\|=2a=2\\ \left(2c\right)^2=\left|F_1F_2\right|^2=\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\cos\angle F_1PF_2=8\end{cases}$

得 $2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|=\left(\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2\right)-\left(\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|\right)^2=\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|+4$ 即 $\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|=4$。

例 10 是双曲线焦点三角形的应用，椭圆与双曲线的焦点三角形的性质，在已知两数和或差的前提下，沟通了两数的平方和与积，是典型的和差术模型。

椭圆焦点三角形：$\begin{cases}\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a\\ \left(2c\right)^2=\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\cos\angle F_1PF_2\end{cases}$

双曲线焦点三角形：$\begin{cases}\left\|PF_1\right|-\left|PF_2\right\|=2a\\ \left(2c\right)^2=\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\cos\angle F_1PF_2\end{cases}$

例 11 (2010 山东文数 15)在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 $a=\sqrt{2}$，

$b=2$，$\sin B+\cos B=\sqrt{2}$，则角 A 的大小为________。

解：由和差术得 $\left(\dfrac{\sin B-\cos B}{2}\right)^2=\dfrac{\sin^2 B+\cos^2 B}{2}-\left(\dfrac{\sin B+\cos B}{2}\right)^2=0$，从而有 $\sin B=\cos B$。

例 12 求函数 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的值域。

解：令 $t=\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，则 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$，

于是有 $y=\dfrac{1}{2}t^2+t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2-1\in\left[-1,\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\right]$。

例 13 已知 $a^x+a^{-x}=3$，求 $a^{2x}-a^{-2x}$。

解：$\begin{cases}a^x+a^{-x}=3\\ a^x\cdot a^{-x}=1\end{cases}\Rightarrow\left(a^x-a^{-x}\right)^2=\left(a^x+a^{-x}\right)^2-4a^x\cdot a^{-x}=5$。

例 14 (2011 上海六校联考)我们把形如 $y=\dfrac{b}{|x|-a}\left(a>0,b>0\right)$ 的函数因其图象类似于汉字“囧”字，故生动地称为“囧函数”，并把其与 y 轴的交点关于原点的对称点称为“囧点”，以“囧点”为圆心，凡是与“囧函数”有公共点的圆，皆称之为“囧圆”，则当 $a=1$，$b=1$ 时，所有的“囧圆”中，面积的最小值为________。

解：$y=\dfrac{1}{|x|-1}$ 的囧点为 $(0,1)$，$r^2=x^2+(y-1)^2=x^2+\left(\dfrac{1}{x-1}-1\right)^2\ (x>1)$，令 $t=x-1>0$，

则 $r^2=(t+1)^2+\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2=t^2+2t+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}+2$，

$$r^2=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2\left(t-\frac{1}{t}\right)+4=\left(t-\frac{1}{t}+1\right)^2+3$$

所以 $r_{\min}^2=3$，“囧圆”面积的最小值为 3π。

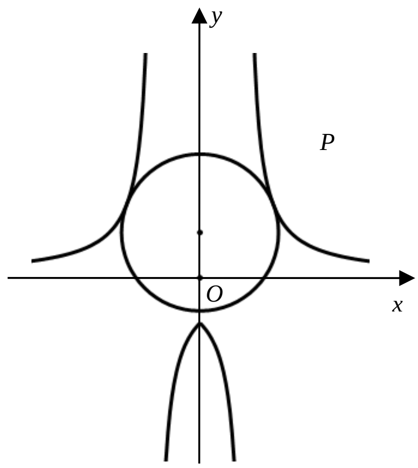

图 5 囧函数

例 11、例 12 中两数平方和为定值，例 13、例 14 中两数积为定值，这些问题在解决过程中都运用化归，将问题转化为和差术模型得以解决。

不仅上文提及的四类典型问题，高中数学教学中一

些重要的知识点、常见的问题模型都是以和差术模型为背景。

例 15 (2011 浙江理 18) 在ΔABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，已知$\sin A+\sin C=p\sin B\left(p\in R\right)$，且$ac=\frac{1}{4}b^2$。(1)当$p=\frac{5}{4}$，$b=1$时，求$a$，$c$的值；(2)若角$B$为锐角，求$p$的取值范围。

解：$\sin A+\sin C=p\sin B\Rightarrow a+c=pb$。

(1) $\begin{cases}a+c=\frac{5}{4}\\ ac=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-ac=\frac{9}{64}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ c=\frac{1}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ c=1\end{cases}$；

(2) $a^2+c^2=(a+c)^2-2ac=p^2b^2-\frac{1}{2}b^2>b^2$。

例 16 (2011 陕西高考理 17) 如图 6，设P是圆$x^2+y^2=25$上的动点，点D是P在x轴上的射影，M为PD上一点，且$|MD|=\frac{4}{5}|PD|$。(1)当P在圆上运动时，求点M的轨迹C的方程；(2)求过点$\left(3,0\right)$且斜率为$\frac{4}{5}$的直线被C所截线段的长度。

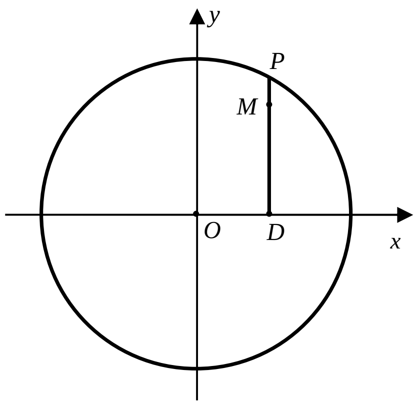

图 6

解：(1)$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$。

(2)设过点$\left(3,0\right)$且斜率为$\frac{4}{5}$的直线l交C于点$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，将$l:y=\frac{4}{5}\left(x-3\right)$代入$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$得$x^2-3x-8=0$，于是

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\frac{41}{5}。$$

这是一类在解析几何中常见的问题，涉及弦长，需要用到弦长公式，就是这么常用的一个公式，其中就渗透着和差术的模型——$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$。

2.3 和差术模型的拓展

2.3.1 从相等到不等

和差术模型联结的是关于$\frac{x+y}{2}$、$\frac{x^2+y^2}{2}$、xy的方程，将之扩展到不等式领域就是我们所熟知的均值不等式。

当$x,y\in R^+$时

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy\Rightarrow\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ge xy\Rightarrow\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$$

所以$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$，等号成立的条件为$x=y$。

2.3.2 从数量到向量

我们还可以将和差术模型推广到平面向量：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2=\dfrac{\vec{a}^2+\vec{b}^2}{2}\\ \left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2=\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

例 17 证明平行四边形的对角线的平行和等于四条边的平行和的两倍。

运用和差术的向量模型我们可以轻松地证明这一结论：

证明：四边形 ABCD 为平行四边形，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$。

因为 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=4\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)$，

所以$AC^2+BD^2=4\left(AB^2+AD^2\right)=2\left(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\right)$。

利用上面的结论可以解决下面这个稍微复杂的问题。

例 18 (2010 浙江文数 10) 设O为坐标原点，F_1、F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点，若在双曲线上存在点$P$，满足$\angle F_1PF_2=60^\circ$，$|OP|=\sqrt{7}a$，则该双曲线的渐近线方程为(　　)

A. $x\pm\sqrt{3}y=0$　　B. $\sqrt{3}x\pm y=0$　　C. $x\pm\sqrt{2}y=0$　　D. $\sqrt{2}x\pm y=0$

解：设$\left|PF_1\right|=m,\left|PF_2\right|=n$，则$\left|m-n\right|=2a$即

$$m^2+n^2-2mn=4a^2, \tag{1}$$

又由 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 可得

$$m^2 + n^2 - mn = 4c^2, \tag{2}$$

由于 OP 是 ΔF_1PF_2 的中线，所以 $(2\sqrt{7}a)^2 + (2c)^2 = 2(m^2 + n^2)$ 即

$$14a^2 + 2c^2 = m^2 + n^2, \tag{3}$$

由(1), (2), (3)消去 $m^2 + n^2$ 与 mn 即可得到 $b^2 = 2a^2$。

3 关于数学史融入数学课堂的思考

和差术，两千多年前古巴比伦的数学成就，在今天的高中课堂中依然活跃，椭圆、双曲线焦点三角形的性质，三角函数中正余弦中和积转化、指数运算中倒数和与倒数平方和间的转化，以向量为工具处理解三角形中的中线问题，我们其实都不陌生，然而在教学中这些知识都是零碎的，教学中所缺乏的正是联结这些知识点之间的线——和差术的换元法与化归思想。发掘数学史留给我们数学方法数学思想，以此为纽带，将数学中散落的知识连缀起来，既有助于学生系统地分析与把握所学的数学知识方法，使数学体系更加完整，又有利于学生体会其背后所蕴含的数学思想，从方法层面上升至思维层面，这应该也是数学史融入数学课堂一个方向，数学史融入数学教学不该仅限于教学设计，在建构数学体系，整合数学各分支方面同样大有可为。

HPM 领域的研究工作可以概括为四个方面：关于“为何”与“如何”的探讨、教育取向的数学史研究、历史相似性研究、教学设计与实践探索。现有教育取向的数学史研究还是限于数学史本身，而缺乏数学史与数学教学内容的一种真正的融合，本文在这一方面进行了一些探索，使数学史成为了数学教学内容的核心、纽带，这样的数学史研究不同于以往教育取向的数学史研究，应该会更贴近教学实际，对教学本身有更大的指导价值。

参考文献

[1] Fauvel, J. & Gray, J., 1987. *The History of Mathematics*: *A Reader*. Hampshire: Macmillan Education

[2] Heath, T. L., 1921. *A History of Greek Mathematics*. London: Oxford University Press

[3] Neugebauer, O. & Sachs, A., 1945. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: American Oriental Society

[4] van der Waerden, B. L., 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag, 62-63

[5] 汪晓勤等, 2010. 平方差公式的历史. 中学数学教学参考(初中版), (11): 64-66

走进 HPM 研究希望的田野

——义乌教育纪行

蒲 淑 萍

(华东师范大学数学系，上海，200241)

自 1972 年国际数学教育委员会(ICMI)下属的 HPM 组织成立以来，如今已走过整整 40 个年头。40 年来，HPM 研究在各国呈现方兴未艾之势。然而，实践中对数学史的“高评价、低利用”一直是数学史难以真正走进常规课堂的真实写照。如何突破数学史在常规课堂“用得少、使用水平低”的“低利用”现象，教师应是课程与教学中最为关键的因素。以 HPM 课例研究为依托，促进教师的专业成长成为理论和实践共同关注的课题。

三月的江南，微寒已暖，各种草木经历了一个冬天的沉寂和积累已满储生机，蓄势待放。和风中传来了义乌市高中数学工作室 HPM 课例设计研讨会的讯息。作为以数学史与数学教育为研究方向的研究人员，我们希望了解：活动开展过程中会出现哪些值得关注并亟需解决的问题？工作室以怎样的形式和流程进行案例设计研讨？这样的活动能在多大程度上促进数学教师的专业成长？带着对工作室研讨活动的问题和探寻，我们走进了 HPM 研究的田野。

两次的行程相隔 10 天，活动安排紧张而有序，课例设计、执教、研讨几个环节紧锣密鼓地开展，足以看出工作室负责人 W 老师高效率的工作能力以及工作室成员认真敬业的做事态度。工作室以起始课为课例设计的研究主题，期望通过融入数学史的教学设计，从史学视角促进学生的探究能力和数学思维发展、更加热爱数学等知、情、意、行多个方面的协调发展，以此为基础促进参与教师的专业成长。

义乌之行收获多多，笔者将以叙事的方式将这次教育之行的所见、所闻、所思、所感呈现给诸位同行：

1 所见——HPM 在中学的现状

1.1 进行 HPM 教学设计的困惑与希冀

本轮设计、主讲课例的两位教师分别是义乌 A 中学的 LZ 老师和 SW 老师。设计、执教的课题分别是：不等关系与不等式；数列的概念与简单表示法，两节课分别是人教 A 版必修 5“不等式”和“数列”两章的起始课。

到达 A 中学后，利用两位老师晚自习辅导之前仅有的半个小时进行了简短交流。获知的真实情况是：平时为赶教学进度，为了快一点讲完概念、定理、公式，抓紧训练学生的解题能力，往往不会使用数学史，而是按照教材呈现的逻辑顺序，教给学生，至于学生理解的程度与效果，没有太多的时间关注。即使教材中呈现了相关的数学史料内容也是将其忽略不计。我们且不评论这样的认识与做法是否狭隘、短视，难道老师们不懂得激发学生对数学的热爱和对知识的透彻理解等能提高他们的学习热情和应用能力的浅显道理吗？其实不然，老师们说：“我们当然知道，但是大环境就是这样，这是学校要求的，也是家长希望的”。这应是我国目前为数不少的高中数学教学基本的政策环境和教学环境的真实写照。

实际情况也并非完全这么糟糕，如同工作室主持人 W 老师所说的那样，“我们的孩子(学生)太可怜了，他们认为自己学习的数学完全就是一堆定义、公式、定理的集合体，很少能够体会到数学学习过程的发现和创造等乐趣。”老师们也有相同的体会，他们希望通过开展 HPM 教学案例的设计研究，既能培养学生对数学的热爱、提高课堂教学效率，又能让学生更好理解数学知识，从而提高升学率。就像工作室主持人 W 老师所说的“我们在夹缝中仰望星空！”好在老师们有着这样清醒的思想和强烈的使命感，这让我们看到了希望！

1.2 数学史料的来源与使用

工作室开展 HPM 教学设计研究以来，工作室全体成员以极大的热情，在繁忙的教学工作之余熬夜挤时间寻找素材、阅读文本、设计教学、研讨改进。在前往义乌的列车上，按照工作室负责人 W 老师的安排，与 A 中的 LZ 老师和 SW 老师取得联系。设计数列起始课的 SW 老师因手头史料内容较为丰富，加之之前已与工作室专门聘请的数学史与数学教育专家建立联系，已获得相关的数学史料和相应的设计思想，对本人的到来，他在短信中轻松地回复到：“非常欢迎！”而设计“不等关系与不等式”的 LZ 老师，因史料内容的严重不足，加之因教学进度的原因由原来计划上的向量一章的起始课改为现在的不等式起始课，时间仓促又加史料内容的缺乏，收到信息后，马上回复到：“我正头疼自己的课缺乏 HPM，我没有找到相关的数学史料”。再发信询问她主要查找了哪些资源？她回答说：“上网搜了一下，几乎没有发现可用的素材”。言语中对于课的设计很焦急，没有信心。我答应和她一起交流探讨。对于 HPM 教学设计的史料来源，老师们大多从教材中已有或者网络中的相关资料。晚饭后对

两位老师的访谈再次验证了这样的信息：网络是他们史料素材的主要来源，“现成可用”是他们使用史料素材的基本做法。

2 所闻——为何选择 HPM 研究

谈到为何选择 HPM 教学设计作为工作室的课题研究，主持人 W 老师深有感触地说：“一是为了学生着想，我想让学生深深地爱上数学”；其次，W 老师本人作为一名教学名师在自己的教学过程中曾经实践过 HPM 的教学设计，她所带的学生，三年一个循环下来，成绩在全校、全市名列前茅，学生高兴，学校支持，家长放心，让她看到了进行 HPM 教学设计的潜在价值。在响应义乌市教育政策申请成立工作室之初，她自己也曾带领工作室学员进行定期的研修，读书、汇报、听课、研讨等，但感觉“没有形成系列的、深入的研究，总有一种‘随心所欲，东一榔头西一棒子’”的感觉，在迅速找准以起始课的 HPM 课例设计作为研究课题、并与相关的数学史与数学教育专家建立合作关系后，感觉工作室工作有序地开展起来了，三轮课例研讨进行的过程，让她感到工作室从最初的目标不够明确到今天的“围绕固定项目做研究”的过程，她打了一个比喻说开展 HPM 课例设计研究后，工作室经历了从最早的“流动摊位的随便经营”到“摆地摊”再到“搭起棚子的固定店铺、固定生意”的成长过程。

3 所思——如何改变现状

对于工作室成员来讲，都已具备了将数学史融入数学课堂教学的强烈愿望，然而史料的缺乏和对如何设计融入的困惑，成为目前工作室成员开展 HPM 教学设计亟需解决的问题。

事实上，现今教材中的任一数学主题都有深厚的历史发展背景，只是有待挖掘与发现。网络资源等虽有着“直接可用”的特点，然而，其科学性等都有待考证。如何让集教学、升学压力于一身的中学数学教师能够获得可靠的数学史来源和教学设计思想，成为研究亟需解决的首要问题。工作室专门聘请数学史与数学教育专家，为工作室成员提供史料来源和设计思路，从多个方面对工作室成员进行指导，逐步提高他们进行 HPM 教学设计的能力。

为促进工作室成员自身专业素养的提升，工作室以“起始课”教学为抓手，以 HPM 课例的设计、实施、完善为主题开展教研活动，研讨活动经过“设计—实施—研讨—改进”的三个循环，在专家提供史料的基础上，执教教师自行设计并与数学史、数学教育专家交流、沟通，执教后工作室包括主持人在内的所有成员及数学史与数学教育专家的共同点评，执教教师个人对课例进行改进、再设计，整个过程，教师经历了对教学内容和相关史料解读从分离到融合的过程，提高了自身对史料的解读能力、运用能力及教学设计能力。

4 所感——HPM 视角的教师专业成长

事实上, HPM 研究不仅促成工作室的有序、高效运转, 参与课例设计、研讨教师的专业成长亦是显而易见的。

已参与两轮实验的 CF 老师, 在工作的 B 中学, 参加工作室后教学能力和工作成绩的提高是有目共睹的：从最初没有明确的发展目标, 到今天成为义乌市教坛新秀的 8 名候选人之一, 再到意识到自身教学知识和理论如数学史知识、心理学知识的缺乏, 成为华东师范大学的一名教育硕士, 他对自身的要求越来越高, 用同行对他的评价来说, 他"正在通往专家教师、特级教师的路上！"他和工作室其它成员一样, 自开展研究以来, 科研能力也得到显著的提高, 他高兴地告诉笔者, 他根据 HPM 课例研发过程撰写的文章马上见诸国内知名数学教学期刊。

另外参与课例研究设计实验的 FG 和 LZ、SW 三位老师经历了三轮设计改进后, 已尝到了 HPM 教学设计给他们带来的甜头, 他们惊喜地发现：学生更喜欢上数学课了, 学习数学的热情提高了。三位教师对自己的教学能力和水平也变得更有信心, 他们认为 HPM 设计研究为他们开启了高效教学的一条路径, HPM 视角的教学设计充满了魅力！

同时, 因工作室成员都是义乌市几个重点中学的骨干教师, 我们相信他们必能带动更多教师参与其中, 以点带面, 带动整个义乌市高中数学教师参与到 HPM 教学设计研究中来, 促进他们的教学能力、科研能力的提高。以 HPM 课例研讨为契机, 以促成教师的专业成长为目标, 我们走入的是一片充满希望的广阔田野！我们在春天撒播希望, 定能迎来 HPM 研究绚烂的盛夏和满载收获的金秋！