“两角和与差的余弦公式”：从历史中找价值、看证明*

张益明[1]，丁倩文[2]

（1. 上海市奉贤中学，201499；2. 华东师范大学教师教育学院，200062）

摘　要：采用 HPM 视角来设计“两角和与差的余弦公式”的教学：利用阿里斯塔克斯解决天文测量问题和托勒密制作弦表的史实来引入，让学生感受两角和与差的正、余弦公式产生的必要性；利用帕普斯模型引导学生证明公式，并对帕普斯模型做适当改进；通过微视频介绍麦克肖恩方法的历史背景，再让学生阅读教材学习这一证明方法并谈谈感悟，体会麦克肖恩当时的想法。课后反馈表明，这样的教学沟通了历史和现实、数学和人文，体现了“知识之谐”“探究之乐”“方法之美”“能力之助”“文化之魅”“德育之效”。

关键词：HPM　价值　证明　两角和与差的余弦公式

“两角和与差的余弦公式”是沪教版高中数学一年级第二学期第 5 章《三角比》中重要的三角恒等式之一。教材在引入部分指出，在三角比的计算和化简中常用角 α 和角 β 的三角比来表示角 $\alpha+\beta$ 或角 $\alpha-\beta$ 的三角比，由此引入两角和与差的正、余弦公式。这里，教材并未清晰地揭示知识产生的必要性，难以激发学生的学习动机。此外，教材在建立部分利用单位圆，通过旋转，再根据两点间的距离公式推导出两角差的余弦公式（苏教版教材也给出了这一方法）。这一方法虽然简洁明了，学生容易掌握，但是不够自然，学生很难想到。因此许多教师都尝试对“两角和与差的余弦公式”的教学进行改进，然而很少有人从数学史的视角来设计教学。

美国数学史和数学教育家史密斯（D. E. Smith，1860～1944）认为，数学史展现了不同方法的成败得失，因而今人可以从中汲取思

想养料，少走弯路，获取最佳教学方法。因此少数教师也尝试从数学史的视角来设计两角和与差的余弦公式的教学，然而在这些教学设计中，数学史的价值没有得到充分的体现。

有鉴于此，我们采用HPM视角来设计本节课的教学，拟定如下学习目标：(1)正确运用两角和与差的余弦公式进行简单的化简和求值；(2)经历两角和与差的余弦公式的产生和推导过程，理解两角和与差的余弦公式的产生背景和两种推导方法；(3)进一步体会数形结合、代换转化等数学思想方法，培养直观想象和逻辑推理等数学核心素养；(4)激发学习兴趣，感悟数学文化，体会数学中的人文精神。

一、历史过程梳理与材料选用

两角和与差的正、余弦公式被称为平面三角学的基本公式，伴随着三角学的诞生而诞生，有关的历史素材丰富多彩。我们梳理了两角和与差的正、余弦公式的产生与发展历史过程，从学生的认知基础出发，选取有关其价值和证明的素材，运用多种方式将这些素材融入教学中。

（一）从天文测量到弦表制作

三角学起源于天文学中的测量问题。公元前3世纪，古希腊著名天文学家阿里斯塔克斯（Aristarchus，前315～前230）观测得到：在月亮半圆时，日、地、月的中心S、E、M恰好为一个直角三角形的三个顶点，且$\angle SEM=87^\circ$，如图1所示。阿里斯塔克斯想知道的是，地日距离（ES）是地月距离（EM）的几倍。当时，人们还不知道87°角的余弦或正弦值，阿里斯塔克斯通过冗长的几何推理，才得出这个倍数在18和20之间的结果。

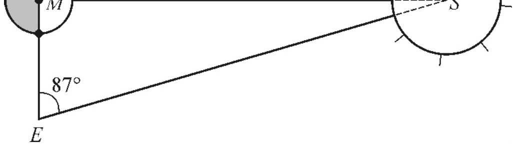

图1

解决天文学中的测量问题，需要计算任意角的三角函数值。2世纪，古希腊天文学家、数学家托勒密（C. Ptolemy，约100～170）利用基于托勒密定理（圆内接四边形两组对边乘积的和等于两条对角线的乘积）得到的相当于两角和与差的正、余弦公式的结果，制作了现存最早的弦表（从0°到90°每隔半度比较精确的正弦函数值）。

这一过程体现了两角和与差的正、余弦公式的起源和作用。因此，本节课利用阿里斯塔克斯解决天文测量问题和托勒密制作弦表的史实来引入，让学生感受两角和与差的正、余弦公式产生的必要性。这是顺应式使用数学史。

（二）帕普斯模型成为主流

3世纪末，古希腊数学家帕普斯（Pappus）在《数学汇编》中提出一个几何命题，其中蕴含了丰富的三角学知识，为三角公式的证明提供了几何模型。如图2所示，设$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$（$0<\beta<\alpha<\pi$，$0<\alpha+\beta<\pi$），$OA=OB=OC=1$；过C作$CD\perp OA$于D，作$CH\perp OB$于H，交半圆于E；过H作$HG\perp OA$于G，作$HM\perp CD$于M；过E作$EF\perp OA$于F，作$EN\perp HG$于N。于是有$OD=\cos(\alpha+\beta)$，$OF=\cos(\alpha-\beta)$，$OH=\cos\beta$，$CH=HE=\sin\beta$，$OG=\cos\alpha\cos\beta$，$DG=MH=\sin\alpha\sin\beta$，$GF=NE=\sin\alpha\sin\beta$。由$OD=OG-DG$，$OF=OG+GF$，得$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。该模型的核心思想是用线段的长度去表示两角和与差的正、余弦公式中的三角比的值，进

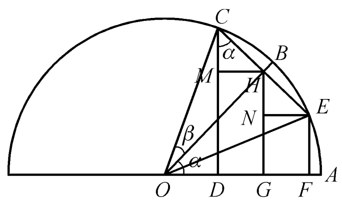

图2

而得到锐角情形下的两角和与差的正、余弦公式。

20 世纪中叶以前，绝大多数西方教材都采用帕普斯的几何模型来推导锐角情形下的两角和与差的正、余弦公式，再利用诱导公式得出任意角情形下的两角和与差的正、余弦公式。

这一模型符合三角学的历史发展，也符合学生的认知过程：三角公式脱胎于几何命题，学生学习三角函数是从直角三角形中的边长比（初中）和单位圆中的三角函数线（高中）开始的。因此，本节课利用帕普斯模型引导学生证明公式。当然，帕普斯模型中角的始边并不都在 x 轴的正半轴上，这一点与学生的认知基础有冲突。于是，我们对帕普斯模型做了三点改进：第一，让学生在猜测公式的基础上自然地利用三角函数线表达三角比的值，避免刻意地给出帕普斯模型；第二，将两个角的始边同时与 x 轴的正半轴重合，从两角差的余弦公式入手降低认知难度；第三，利用该模型得到两角差的余弦公式后再利用三角代换得到其他公式，突出三角代换的重要性。这是重构式使用数学史。

（三）从多种方法到麦克肖恩方法

18～19 世纪，意大利数学家卡诺里（A. Cagnoil，1743～1816）、美国数学家伍德豪斯（R. Woodhouse，1773～1827）、瑞士数学家哈斯勒（F. R. Hassler，1770～1843）、英国数学家克雷斯维尔（D. Cresswell，1776～1844）、法国数学家萨吕斯（P. F. Sarrus，1798～1866）相继给出了各自的证明。

和基于托勒密定理的证明方法一样，这些证明方法对于平面几何的变换技巧要求比较高，而且有些用到了学生还没学到的正、余弦定理。考虑到学生的实际情况，本节课通过微视频简单介绍这些证明方法。这是附加式使用数学史。

1941 年，美国数学家麦克肖恩（E. J. Mcshane，1904～1989）又对萨吕斯的证明做了改进。他在《美国数学月刊》上发表论文，避开弦长公式，重新推导了两角差的余弦公式。如图 3 所示，在单位圆 O 中（限于篇幅，只画半圆）构造 $\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，将 $\triangle BOC$ 顺时针旋转，使得 OC 与 OA 重合，OB 与 OD 重合，由 $AD=CB$，利用两点间的距离公式即得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

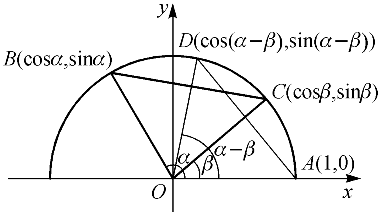

图 3

这一证明方法就是教材给出的方法，它适用于任意角的情形。因此，本节课通过微视频介绍麦克肖恩方法的历史背景，再让学生阅读教材学习这一证明方法并谈谈感悟，体会麦克肖恩当时的想法。这是复制式使用数学史。

二、教学设计与实施

（一）问题引入，猜想公式

教师利用阿里斯塔克斯解决天文测量问题和托勒密制作弦表的史实来引入，然后指出："显然，如果能算出 $\cos 87^\circ$ 的值，就能知道准确的倍数了。可见，仅知道初中里学过的特殊角（30°、45°、60°、90°）的三角比是不够的，还需要计算任意角的三角比。古希腊天文学家、数学家在制作弦表（计算任意角的三角比）时，采用了一个新的方法，用今天的话来说，就是根据已知角的正、余弦值来求未知角的正、余弦值。这便是我们今天要研究的课题。"

接着，教师让学生利用同角三角比的关系，由 $\cos 30^\circ$ 求 $\sin 30^\circ$ 和 $\tan 30^\circ$，再利用诱导公式，由 $\cos 30^\circ$ 求 $\cos 150^\circ$ 和 $\cos 390^\circ$，进而提问："能否用 45° 和 30° 的正、余弦来求 $\cos 15^\circ$？"

根据计算器上读出的结果，学生猜测 $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$**或** $\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$。**由此，教师进一步提问："对于任意角** α **和** β，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$**或** $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ **是否成立？究竟哪一个等式成立？'**

（二）模型建立，证明公式

师　假设 α、β **为锐角。（出示图** 4**）如图所示，两个角的终边与单位圆分别交于点** A **和** B，**请你在图上找出与** $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\sin\alpha$、$\sin\beta$ **相等的线段。**

生　（出示图 5**）分别过点** A **和** B **作** x **轴的垂线，交点分别为** M **和** P，**则** $AM=\sin\alpha$，$OM=\cos\alpha$，$BP=\sin\beta$，$OP=\cos\beta$。

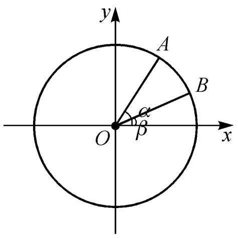

图 4

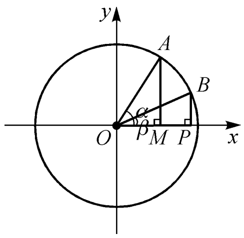

图 5

师　严格来说，正弦线是 MA **而不是** AM，**但是我们有个前提，即** α **是锐角，所以问题不大。三角函数线的作用就是利用有向线段的长度来表示三角比。我们今天也利用这种方法来证明两角差的余弦公式。请同学们在图中找到一条线段，使其长度等于** $\cos(\alpha-\beta)$。

生　（出示图 6**）过点** A **作**$AN\perp OB$，**垂足为** N，**因为** $OA=1$，**所以** $ON=\cos(\alpha-\beta)$。

师　请同学们通过他的方法用一条线段表示 $\cos\alpha\cos\beta$、$\sin\alpha\sin\beta$。

生　把 $\cos\alpha$ **看成斜边，以** β **为一个内角构造直角三角形；把** $\sin\alpha$ **看成斜边，以** β **为一个内角构造直角三角形。（出示图** 7**）过点** M **作** OB **的垂线，垂足为** H，**则在**$\mathrm{Rt}\triangle OMH$**中，**$OH=\cos\alpha\cos\beta$；**不难发现**$\angle MAN=\beta$，**所以过点** M **作** AN **的垂线，垂足为** Q，**则在** $\mathrm{Rt}\triangle AMQ$ **中，**$MQ=\sin\alpha\sin\beta$。

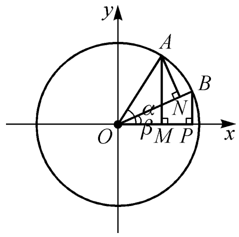

图 6

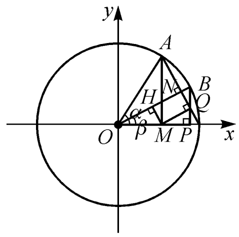

图 7

师　由此，你能证明两角差的余弦公式吗？

生　通过 $ON=OH+HN$，$HN=MQ$ **可以得到** $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

师　没错，关键就是 $ON=OH+HN$。**我们回头看证明过程，证明的思想是用线段的长度表示三角比。当然，我们的证明有个前提：**α、β **为锐角。那么，如果角的范围变化了，结论还成立吗？比如，设** $\alpha\in\left(2\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$，$\beta$ **为锐角，请问：如何计算** $\cos(\alpha-\beta)$**？**

生　由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-2\pi-\beta)$，**再展开，即可得到公式。我们发现，公式也成立。因此，当** α、β **在其他范围内时，可以利用诱导公式证明公式成立。**

师　这里，我们用到了一种思想，即用 $\alpha-2\pi$ **去代换** α。**代换思想在三角学研究中非常重要。请同学们利用这种思想计算** $\cos(\alpha+\beta)$。

生　$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

师　这样，我们就得到了两角和的余弦公式。今天，我们也学会了一种解决问题的方法：先猜想，再证明。

（播放时长 4 **分钟的微视频：由两角和与差的余弦公式引入，指出公式本身呈现出对称之美，而历代数学家不遗余力地去证明它，更是体现了他们对方法之美的追求；接着追溯两角和与差的余弦公**

式推导的历史。)

师　(视频播放到介绍完帕普斯模型时,暂停)同学们的思想和数学家们的思想差不多。可见,只要在数学中付出更多的努力,就能在数学上取得更大的成就。

(学生兴奋。)

师　(视频播放到介绍完麦克肖恩方法时,结束)他的方法就是课本给出的方法。现在请大家看一下课本上的证明。

(学生阅读。)

师　麦克肖恩为什么会想到将图形进行旋转?

生　将角 $\alpha-\beta$ 的始边旋转到 x 轴的正半轴上。

师　非常好!这个也是我们将角推广到任意角的常见方法。那么,他又是怎样想到用线段长度来计算的呢?旋转过程中,图形位置发生变化,也有一些不变的量,是什么?

生　角与线段长度不变。

生　利用 $|AB|=|A'B'|$,再利用两点间的距离公式展开,即可得到公式。

(三)练习巩固,深化认识

首先,利用例1所示的具体求值问题,引导学生简单应用公式。其次,通过例2所示的一般证明问题,引导学生熟练运用公式,并体会三角的代换思想。

例1　利用两角和与差的余弦公式求值:(1) $\cos 75°$;(2) $\cos\frac{\pi}{12}$。

例2　证明下列恒等式:(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$;(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$。

(四)回顾总结,盘点收获

首先,引导学生总结本节课主要运用的两种推导两角和与差的正、余弦公式的方法:帕普斯模型方法的核心思想是利用三角函数线去表示三角比的值,而麦克肖恩的方法是利用图形的旋转以及两点间的距离公式。

其次,引导学生总结本节课主要学到的重要的数学思想:数形结合、代换转化等。

最后,引导学生感悟:历史上数学家们孜孜不倦地改进两角和与差的正、余弦公式的证明方法,反映了他们对于真善美的不懈追求,体现了他们的创新精神;只要我们深入思考,努力探究,我们也能想数学家之所想,在不知不觉中成为课堂上的"小小数学家"。

三、学生反馈

课后,我们收集了全班40名学生对于本节课的反馈信息。

对于这节课的教学内容,全部学生都表示听懂了,其中70%的学生表示完全听懂了。

对于数学史融入课堂的教学方式,95%以上的学生表示喜欢。

对于两角和与差的余弦公式的推导,喜欢帕普斯模型的学生给出的理由如下:直观、清晰;由锐角的情形推广到任意角的情形,可以对公式理解得更深刻一些;与初中知识结合,更容易想到;有引导性,能带动大家的思考,可以培养思维。喜欢麦克肖恩方法的学生给出的理由如下:巧妙运用图形的旋转、两点间的距离公式等常见数学方法和知识,通俗易懂且适用于任意角;建立在众多前人的证明方法的基础上,达到了完美的地步。

对于两角和与差的余弦公式的运用,绝大多数学生都是正确的。

对于本节课所体现的数学思想,大部分学生提到了数形结合、代换、化归等数学思想,另外还有学生提到了"学贵有疑"的一般思想。

对于本节课中印象最深的内容,大部分学生提到了数学文化,例如:让人愉悦的小视频追溯了公式的历程,其中推导方法由繁至简,让我对公式来源有了一定的了解,并从中找到了自己喜欢的证法;比较深入地引入了数学史作为公式理解的辅助,让我比较直观地了解了两角和与差的余弦公式的精神;数学家

们勇于质疑、不断改进的精神，实现了从难以理解的方法到通俗易懂的方法的转变；两角和与差的余弦公式十分整齐且有对称美。

四、教学反思

任何数学公式都不是凭空产生的，其背后都有漫长的历史，都蕴含着精彩的思想方法和丰富的人文元素。如果仅仅让学生机械地记忆公式，那么，公式就是静态的、冰冷的、枯燥的、无生命的。从历史的视角来呈现公式，可赋予公式以鲜活的生命。本节课让学生“穿越时空，与数学家对话”，既沟通了历史和现实，也沟通了数学和人文。

本节课中，借鉴历史，从猜想到证明、从几何到三角、从锐角到任意角的过程，实际上再现了两角和与差的余弦公式自然发生和发展的过程，体现了“知识之谐”；而在知识的发生和发展过程中，教师给予学生探究机会，引导他们解决问题，从而获得成功的体验，体现了“探究之乐”；除了帕普斯模型的证明方法，微视频还展现了数学史上丰富多彩的证明方法，并利用麦克肖恩的证明来衔接教材上的证明，体现了“方法之美”；而帕普斯模型彰显了几何与代数之间的联系，有助于培养学生的直观想象和逻辑推理等数学核心素养以及表征转化能力，体现了“能力之助”；两角和与差的余弦公式的起源揭示了数学与天文学之间的联系，不同时空的数学家对两角和与差的余弦公式给出的不同的证明方法揭示了数学文化的多元性以及数学家追求真善美的人文精神，体现了“文化之魅”；而引导学生穿越时空，走进数学家的心灵之中，亲近数学，建立自信，体现了“德育之效”。

---

* 本文系本刊连载的汪晓勤教授团队开发的 HPM 案例之一，也系华东师范大学 HPM 工作室开发的系列课例之一。

参考文献：

[1] 胡晓莉.“两角差的余弦公式”教学设计[J].中小学数学(高中版)，2009(7～8).

[2] 杨育池.多一点精心预设，融一份动态生成——“两角差的余弦公式”教学设计[J].数学通报，2009(11).

[3] 臧立本.两角和与差的余弦公式教学实录与反思[J].中学数学月刊，2010(4).

[4] 刘次律，张维忠.“两角差的余弦公式”教学设计研究[J].中学数学教学参考(上旬)，2015(12).

[5] 朱胜强.两角和差余弦公式的探究性教学[J].数学通报，2013(9).

[6] 李杰平.让课堂生成变得更高效——以“两角差余弦公式”的教学为例[J].中国数学教育，2013(12).

[7] 高洪武.基于学情、关注学法的数学公式课设计——“两角差的余弦公式”的教学及反思[J].中小学数学(高中版)，2014(5).

[8] 魏韧.追求自然朴实的数学教学——以两角和与差的余弦公式教学为例[J].数学通报，2014(11).

[9] 吕兆勇.追求自然、发展的探究式教学——以“两角和与差的余弦”教学为例[J].中小学数学(高中版)，2015(4).

[10] 戴圩章.“以生为本”从新课导入开始——以两角和与差的余弦公式教学为例[J].数学通报，2015(9).

[11] 汪晓勤.HPM：数学史与数学教育[M].北京：科学出版社，2017.

[12] 张小明.两角和差的三角公式推导——数学史融入数学教学的实例研究[J].数学教学，2007(2).

[13] 张海强.基于数学史的“两角和与差的余弦”的教学设计[J].数学通讯，2014(6).

[14] 陈清华，徐章韬.既基于历史，又与时俱进——高观点下的“两角和与差的正、余弦公式”教学设计[J].中小学数学(高中版)，2013(9).

[15] 汪晓勤.20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式[J].数学通报，2016(6).