·人物评传·

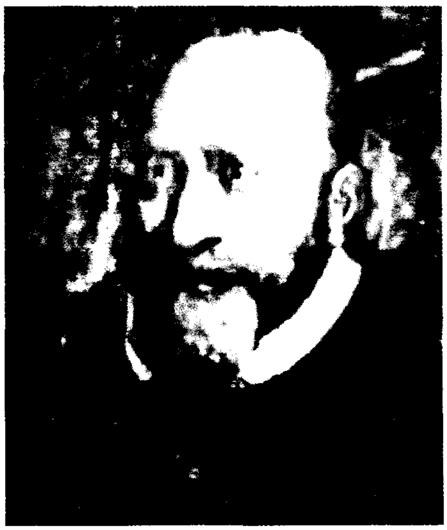
雷科德:英国第一个数学教育家*

汪晓勤

(华东师范大学数学系,上海,200062)

摘 要:16世纪英国数学家雷科德,是一位百科全书式的学者,生逢乱世、命运多舛,且仕途中还沾上了难以洗刷的污点。他用英文撰写了算术、几何、天文学和代数学著作,后三者均为英语世界中的第一部;而第一部则对英国的数学教育产生了深远的影响。他是最早将哥白尼日心说传入英国的天文学家之一;他持有科学进步观,他的数学观在文艺复兴期间起着承前启后的作用;他发明的等号,今天全世界人人都在使用。他创用对话形式撰写教材,创用英语数学术语;他认识到死记硬背学习方式的局限,他认为理解可以发生在掌握技能之后;他强调说理而不迷信权威。他筚路蓝缕,传播学术,成为英国历史上第一位数学教育家。

关键词:雷科德 算盘算术 等号 数学观 数学教育
〔中图分类号〕*N09* 〔文献标识码〕*A* 〔文章编号〕*1000-0763(2008)05-0092-10*



在威尔士西南海岸线上,有一个风景如画的旅游胜地——腾比(Tenby)镇,美丽的沙滩,湛蓝的海水,对于热爱大自然的人们,有着极大的吸引力。但对于热爱科学史的人们来说,该镇教区教堂的一座墓碑,也同样吸引眼球。墓碑上刻着以下文字:"纪念罗伯特·雷科德,杰出的数学家。1510年出生于腾比,是代数、算术、天文、几何最早的英文著作的作者。他还发明了今日文明世界普遍采用的等号'='。罗伯特·雷科德是爱德华六世和玛丽女王的宫廷医生。1558年卒于伦敦。"[1]

作为16世纪英国最有影响的数学家和第一个数学教育家,雷科德(Robert Recorde, 1510~1558)的生平深受后世数学史家的关注。继19世纪英国数学家德摩根(A. De Morgan, 1806~1871)和科学史家、莎士比亚研究专家哈里韦尔(J. O. Halliwell, 1820~1889)之后,20世纪学术界对他的兴趣有增无减[1-9],直到90年代,还有西方学者在研究雷科德。国内数学史和数学教育界对这位在英国数学教育史上取得许多项"第一"的学者知之甚少。

* 本文得到上海市重点学科建设项目(编号B407)资助。
〔收稿日期〕2008年1月8日
〔作者简介〕汪晓勤(1966-)男,浙江开化人,博士,华东师范大学数学系教授,主要从事数学史与数学教育研究。

一、乱世里的悲剧人生

雷科德于1510年出生于威尔士彭布鲁克郡的腾比(Tenby),1531年毕业于牛津大学,很可能获得医学的学士学位。他在牛津求学之日,正是宗教改革开始之时。同年,雷科德当选为万灵学院研究员,开始教书、学医,并对古董、古文献产生爱好。1533年在牛津获准行医。后来,雷科德离开牛津大学去了剑桥大学,于1545年获得医学博士学位。很可能在剑桥期间,他做了政客理查德·沃雷(Richard Whalley, 1499? ~1583)的其中一个孩子的家庭教师,《艺术基础》也是这个时候完成的,其初版即题献给沃雷。离开剑桥大学后,他先是回到了牛津,之后去伦敦行医。

1547年1月28日,亨利八世死,年仅十岁的爱德华六世即位,其舅父萨默塞特(Edward Seymour Somerset, 1506? ~1552)成为摄政王。翌年7月,伦敦谣传爱德华六世夭亡。原来,一位名叫艾伦的江湖术士在伦敦行骗,此人自称能测算寿命,预知未来,伦敦人都管他叫"先知",若在中国,该叫"半仙"了。一些天主教徒怂恿艾伦测算狂热信奉新教的爱德华六世的寿命。这位"先知"测算的结果是,爱德华已经死亡,消息不胫而走,不久即传到宫廷中。于是,宫廷下令逮捕散布谣言者。国王卫士、新教徒恩德希尔(Edward Underhill)抓到了艾伦,将其带到摄政王处。于是,江湖术士被投入伦敦塔囚禁。摄政王致函枢密院的约翰·马克哈姆(John Markham)爵士,让他物色一位博学之士来审查艾伦。于是,马克哈姆派人请来了在伦敦行医的雷科德。艾伦曾夸下海口:他所知道的天文学知识比牛津和剑桥大学的任何一个人都要多。经过审问,雷科德发现艾伦并不懂什么天文学,也没有其他学问,不过是个江湖术士而已[3]。从这件事可以看出,此时的雷科德已很博学,在伦敦已很有名气了。可能就在这一年,他成了宫廷医生。同年,他出版了一部医学专著《尿液》。

1549年1月,雷科德被任命为布里斯托尔造币厂的审计员。不久,萨默塞特倒台,雷科德站在这位摄政王一方,拒绝将供爱德华六世专用的资金用于约翰·拉塞尔(John Russel, 1486~1555)和威廉·赫伯特(William Herbert, 1501~1570)在西部平叛的军队,理由是那并非国王本人的命令。而威廉·赫伯特则是萨默塞特的对手诺森伯兰公爵(John Dudley, 1502~1553)的支持者。于是,雷科德被赫伯特指控犯有叛国罪,被囚禁于宫中两个月,铸币厂因此于1550年春关闭。从此,雷科德与赫伯特(1551年10月成为彭布鲁克伯爵)结怨。随着萨默塞特的倒台,雷科德的赞助人沃雷也失势了,1551~1552年间两次被投入伦敦塔,直到1553年玛丽即位后才被释放。顺便指出,曾先后任伦敦和达勒姆大主教的另一位数学家唐士陶(C. Tonstall, 1474~1559)也于1522年因莫须有的谋反罪而被投入伦敦塔。

1551年4月,雷科德任爱尔兰矿藏与货币总检查官,负责韦克斯福德的银矿,兼任都柏林造币厂的技术总监。爱德华六世在位时,英格兰重新开始使用银币,5先令的银币(克朗)就是这个时期发行的(有趣的是,其上的年份首次采用了阿拉伯数码),因此,银矿对于爱德华六世的重要性是显而易见的。由此可见,雷科德是被委以重任的。然而,银矿的工作一开始就很不顺利。雷科德上任不久,不称职、玩忽职守的指控不断传到伦敦:他从法国人那里拿走大量鲸油却不付钱;银矿因"雷科德的渎职"而正在败落;他在开掘新矿井、为矿工提供必需的住房方面拖拖拉拉;他将供应给矿工的肉据为已有,留下最好的,而把余下的卖给他们;他通过贩卖谷物、鲱鱼和海鳕来牟取暴利;他劝手下人不要在英格兰买每双12或13便士的鞋子,以使自己的鞋匠垄断市场,以每双3先令4便士(即40便士)的高价出售;他向银矿的德国工头乔金·冈戴尔芬格①(Joachim Gundelfinger)借钱,事后却不肯还,等等。这些恶劣行径让我们联想到了南宋词人周密笔下的数学家秦九韶。雷科德与德国矿工还在技术上产生了分歧,雷科德抱怨那些德国人缺乏英格兰人和爱尔兰人所拥有的技术。银矿费用巨大,收获甚微。1551年11月22日,枢密院致函雷科德,要求他通报银矿的收支情况。直到1552年的2月底,雷科德才给枢密院递交报告,称银矿每月开支为260镑,而收入则不足40镑,亏损220镑[3]。当时英格兰的财政根本不能承受这样的亏损,加上爱德华六世同时患上了麻疹和天花,到了1553年初又染上肺结核,生命垂危。因此银矿被迫于1553年停工,雷科德被召回英格兰。

① 为了促进英格兰采矿技术的进步,亨利八世曾于1544年和冈戴尔芬格通过信。

1553 年 7 月 6 日，年仅 16 岁的爱德华六世夭亡，摄政王诺森伯兰公爵伪造遗嘱，让其儿媳简·格雷(Jane Grey, 1527～1554，史称“九日女王”)于 7 月 10 日即位，9 日后被玛丽(Mary, 1516～1558)废黜，信奉天主教的玛丽即位。到了 8 月，狂热的新教徒、曾经将江湖术士艾伦捉拿归案的恩德希尔由于与众多天主教徒为敌，如今成了阶下囚，被枢密院投入伦敦的纽盖特监狱，狱中患上了疟疾。雷科德冒着生命的危险，多次来到监狱探视，并免费给他治病，直至康复[3]。雷科德对朋友的忠诚、其舍己救人的品德与他的渎职形成了鲜明的对照。

1556 年，雷科德试图在宫廷里再谋个职位，并以铸币厂官员的名义对赫伯特提出渎职的指控。看来，雷科德只适合教书做学问，根本不懂宫廷斗争那一套。那赫伯特是何等样人？他历经亨利八世、爱德华六世、简·格雷和玛丽一世，权倾一时。在残酷的宫廷斗争中见风使舵、老奸巨猾、游刃有余，始终立于不败之地。尽管他也曾参与诺森伯兰公爵的阴谋，但玛丽即位后，他最终竟能深得这位“血腥女王”及其丈夫菲利普(1556 年继承西班牙王位)的信任。雷科德此时无官无爵，其在爱尔兰矿藏与货币总检查官的任职偏偏又以彻底失败而告终，更何况他对自己所受到的各种指控也没有提出合理的辩解。他和女王身边的红人斗，岂不是以鸡蛋碰石头？雷科德的指控当然有理有据，但那是一个人人都可能朝不保夕的乱世！彭布鲁克伯爵当然不会放过他。1556 年 10 月 16 日，他以诽谤罪起诉雷科德。1557 年 1 月，雷科德被判向伯爵支付 1000 镑的损害赔偿金。雷科德哪里支付得起这笔巨额赔偿金？在他的数学名著《砺智石》末尾，“师”(master)对“生”(scholar)说自己“经济状况不佳，没有平静的时间来从事教学”，“如果允许我有更长的时间，我会讲完所有这些内容才结束”[10]，这是作者当时窘境的真实写照。不久，他因支付不起赔偿金而被投入监狱。1558 年 6 月，他立下遗嘱，把少量的钱留给自己的四儿五女。不久，雷科德死于狱中。

雷科德是那个时代英国百科全书式的学者，除了数学、物理学、医学和矿物学，他还精通修辞、哲学、风雅文学、历史、宇宙演化、天文学、星占术和音乐。伊丽莎白时代著名医生和学者布兰(William Bullein, 1515? ～1576)这样写道：

> “从他的语言中，我们可以多么清楚地看出他在艺术和科学(自然的和精神的)上的博学。作为医学之父，通过《砺智石》和《知识城堡》，他的学问给无知者带来了自由；最终，他自己却身陷囹圄而魂兮归去。他得到了解脱，回到了极乐世界，来到了博学的桂冠诗人中间。他就是雷科德博士。”[5]

二、荒漠中的科学绿洲

从前面对雷科德零星事迹的叙述中，我们几乎看不到他参与学术研究的迹象。的确，在一个充满宗教斗争和宫廷斗争、人人自危、朝不保夕的乱世里，雷科德不可能过上平静的书斋生活。他的学术活动大多在任职之余完成，他的著作大多题献给国王，打上了政治的烙印。他先后出版了多部数学教材，其中流传下来的有《艺术基础》、《知识之途》、《知识城堡》和《砺智石》，分别为算术、几何、天文和代数教材。

《艺术基础》最初出版于 1543 年。在雷科德以前，约克郡的唐士陶已经于 1522 年出版过一部算术教材，但它是以拉丁文写成的，且并非为商人而写；1537 年，出现过用英语写成的算术课本(作者不祥)，但其学术价值和影响远不及《艺术基础》。《艺术基础》是一部商业算术书，在前言里，雷科德相信“较之迄今所写的英国算术书，一些读者会更喜欢我写的这本。”全书共分三部分，第一部分为笔算，包括正整数的四则运算、重量和钱币的换算、算术与几何级数、黄金法则(正比例、反比例、复比例、配分比例)，1552 年版还增加了分数运算、假设法和混合法。尽管雷科德给出了九九表，但他介绍了一种不需用九九表的大于 5 的一位数相乘的简便方法：从 10 中分别减去相乘的两数，将所得的两个差数相乘，取乘积的个位数，即得所求乘积的个位数。从一个数中减去另一个数相应的差数，即得所求乘积的十位数。在 16 世纪的欧洲，这种算法经常出现于各种算术教材中。

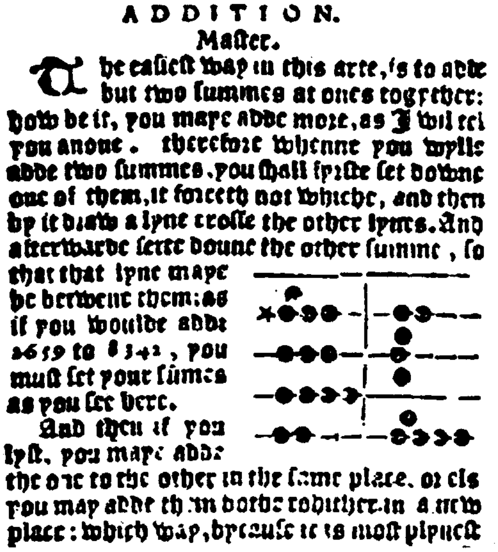
第二部分为算盘算术(abacal arithmetic)，供那些不识字的人或手头没有笔和身边没有桌子的人学习。《艺术基础》扉页上的插图即是四个人围着一张放有算盘的桌子，在讨论计算。在 15 和 16 世纪的欧洲，算盘作为商业计算的主要工具而相当普及；笔算和算盘算术在学校里往往是并存的。在莎士比亚悲剧《奥塞罗》第一幕第一景中，依阿高这样说到奥赛罗的副官：

“那是谁？老实说罢，是一位大算学家，一个名叫迈克尔卡希欧的，……这打算盘的，他，反倒要做他的副官，……”

当时，欧洲人所用的算盘叫“线算盘”(line abacus)，算盘上标有表示数位的平行线，自下往上依次为个位、十位、百位、千位、……，每条线上至多放四个筹码(counter)；在相邻两条数位线之间至多放一个筹码，表示5、50、500、5000等①。雷科德介绍了算盘上的整数四则运算以及分数的四则运算(不用算盘)[4]。图1是《艺术基础》(1558年版)中的一页，其中算盘上左栏的筹码表示8342，右栏的筹码表示2659。雷科德在这里介绍两数在算盘上的加法。

《艺术基础》的第三部分介绍“手指算”(finger - reckoning)。早在公元前5世纪，希腊人即知道手指记数法[11]。在印度－阿拉伯数码传入之前，手指算在欧洲相当盛行，中世纪的教会学校里即教这种算术。意大利数学家帕西沃利(L. Pacioli, 1445～1517)在其《算术、几何、比和比例概论》(1494)中，德国数学家阿文蒂努斯(J. Aventinus, 1477～1534)在其《算盘》(1522)中都曾详细给出手指记数法。“手指算”中的一种重要方法是乘法。如，求 7×8 时，一手伸出 $2(7-5=2)$ 指，一手伸出 $3(8-5=3)$ 指；将两手各伸出的手指数相加得 $2+3=5$；又将两手各剩下的手指数相乘得 $3\times2=6$，于是得乘积56②。

《艺术基础》是雷科德最流行的教材，在1543初版后的一个半世纪里，在英国至少有45个不同版本(包括不同编辑者的增补版)相继出版，最后一版的时间为1699年，其在英国数学教育史上的深远影响由此可见一斑。这部著作中的许多数学名题在英语世界里都是首次出现，如：水池注水问题③、遗产问题④、希罗皇冠问题⑤等。



ADDITION.
Master.
The easiest way in this arte, is to adde but two summes at ones together: how be it, you maye adde more, as I wil tel you anone. therefore whenne you wyll adde two summes, you shall fyrste set downe one of them, it forceth not whiche, and then by it drawe a lyne crosse the other lynes. And afterwarde sette downe the other summe, so that that lyne maye be betwene them: as if you woulde adde 2659 to 8342, you must set your summes as you se here. And then if you lyst, you maye adde the one to the other in the same place, or els you may adde them both togither in a new place: which way, bycause it is most playnest

图1 《艺术基础》中的一页——线算盘上的加法运算

值得注意的是，《艺术基础》对英国的圈地运动有所反映。16世纪初，印度新航线的开通、美洲大陆的发现以及环球航行的成功，使英国的对外贸易迅速增长，极大地刺激了英国国内羊毛纺织业的发展。羊毛价格不断上涨，养羊业获利丰厚。与此同时，美洲金银的流入引起物价上涨，造成所谓的“价格革命”。为了获取养羊业的巨大赢利，也为了避免因“价格革命”造成的损失，英国领主们掀起大规模的圈地运动。于是，大批农民被迫出卖土地，或远走他乡，或到处流浪，陷于悲惨境地。著名思想家莫尔(T. More, 1478～

① 显然，这种算盘与中国算盘完全不一样。

② 其原理是 $(10-a)(10-b)=10(5-a+5-b)+ab$。

③ 注水问题：“水池含有72桶水，有四个排水孔。开最大的孔，6小时排完；开第二个孔，8小时排完；开第三个孔，12小时排完；开第四个孔，18小时排完。问：若四孔同开，则几小时排完池水？”

④遗产问题：“一个垂死的老人立下遗嘱：如果妻子生下儿子，则妻子继承1/3财产，儿子继承2/3；如果妻子生下女儿，则妻子继承2/3，女儿1/3。问：如果妻子生下龙凤胎，如何分配财产？”雷科德评论说，一个聪明的法官会判定该遗嘱无效。

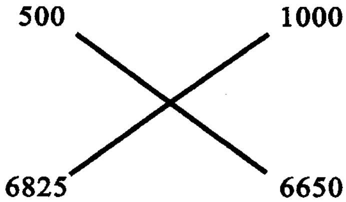
⑤叙拉古国王希罗让金匠打制金冠，但金匠私自取金若干，而以银补足分量。后来国王让阿基米德研究金冠是否掺假。雷科德叙述了阿基米德在浴池中突然想出解决方法、赤身裸体跑回家、一边高喊“找到了！找到了”的故事。

1535)在其名著《乌托邦》(1516)中指责圈地运动是“羊吃人”。以下是《艺术基础》中的一段对话[10]：

生：假设法律规定，每位养羊的人，每养10只羊必须耕种1亩地，每4只羊需要1亩牧草地。一位富裕的羊主有7000亩地，他愿意根据法律规定养尽可能多的羊。问他可以养多少羊？

师：你自己来回答这个问题吧。

生：首先假设他养500只羊，根据4只羊1亩的比率，他需要125亩牧草地，又必须有50亩耕地，共为175亩，不足6825亩。再假设他养1000只羊，则需要牧草地250亩，又必须有100亩耕地，共计325亩，不足6650亩。记下两个不足数和两个假设数如图所示：



将6825和1000相乘，得6825000；将6650和500相乘，得3325000，从第一个数中减去，得3500000，作为被除数。又将两个不足数相减，得175，被除数除以175，得20000。因此他可以养20000只羊。由此我猜想许多人会养这么多羊，因为许多人有这么多的土地。

师：不可能的，因为这么多的土地方圆超过$48\frac{3}{4}$英里。不过请言归正传。

生：我记得古代埃及人是如此怨恨牧羊人，最终食其恶果，但这些埃及牧羊人与今天的一些人相比，简直是小巫见大巫。羊增加得如此之猛，除了狮子外，没有谁能阻止它们。……

显然，作者通过养羊问题对圈地运动进行了抨击。实际上，通过数学问题，阐明自己的政治主张，这在雷科德的数学著作中并不少见。此外，从“生”的解法中，我们看到了中国汉代“盈不足术”的影子。

雷科德的第二部数学著作是《知识之途》，出版于1551年，这是历史上第一部用英文写成的几何学著作①，主要取材于《几何原本》前四卷。《知识之途》书名的全文如下：

“知识之途，包含几何学的第一原理，它们适用于实践，不仅适用于几何与天文仪器的使用，而且也适用于各种平面投影，因此对各行各业的人都十分必要。”[12]

在前言里，雷科德写道：

“亲爱的读者，如果(本书)有什么错误，请您原谅。在未曾涉足的道路上，一开始难免会走错：方法必然很笨拙……倘若我的光能照亮他人看出并记下我的错误，我希望它也能启发他们，使他们避免犯错……但我可以这么认为：是我点燃了这支蜡烛，是我点燃了这束光，有识之士可以在光下著书立说，留名史册。我只是画出了草图，而他们可以在其上建筑……。我会在这条道路上继续跋涉，智者循着这微光，可以随意写出更完善的、有着合适的发明以及得体的修辞的著作。”[12]

这段文字因其所含的科学进步观而受到现代学者的关注。《知识之途》分两个部分(雷科德共写了四部分，但只出版了两部分)。第一部分包括定义和各种作图法，第二部分包括公设和公理，以及《几何原本》前三卷中的77个定理，每个定理后都附有图形和解释，但雷科德并没有像欧几里得原著那样给出严格的证明。

《知识之途》再版于1574和1602年，较之《艺术基础》，它具有更强的学术性，因而其影响不如后者广泛。但它加深了人们对几何学价值的认识，同时，也提高了英语数学著作的地位，并支持了本国语运动[4]。

在《知识城堡》的开篇，雷科德曾提到他出版过第三部著作，名为《知识之门》，主要内容为测量以及象限仪的用法，可惜此书失传。《知识城堡》为雷科德的第四部著作，出版于1556年，再版于1596年，是第一部英语天文学著作。该书主要介绍托勒密托天文学体系，同时还介绍了各种天文仪器，并给出了许多天文和航海表，可供航海家直接参考。英国著名探险家马丁·弗罗比雪(Martin Frobisher，1535～1594)于1576年

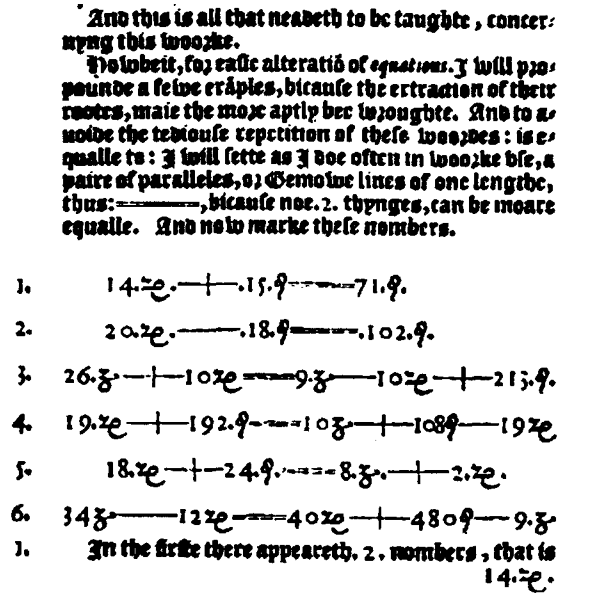
① 比林斯利(Billingsley)的《几何原本》英译本出版于1570年。

探寻通往东方的西北航道时，即随身携带了这本书。尽管《知识城堡》第一部分介绍了托勒密的地心说，但值得注意的是，雷科德本人实际上接受的是哥白尼的日心说。在同书第四部分，有这样一段师生对话[5]：

> 师：……然而，博学的哥白尼，以其丰富的经验，通过极其勤奋的观察，更新了亚里斯塔丘(Aristarchus)的观点，指出：地球不仅绕着它自己的中心作圆周运动，而且总是离精确的世界中心 3，800，000 英里。但由于理解他的论据需要更深的知识，超出了这里的入门知识范围，因此，我把它放到以后去讲。
>
> 生：我可不想听这样空洞的如此有悖常理的奇谈怪论，我对所有这些博学的作者都不敢苟同，因此，就永远也别再提它了。
>
> 师：你太年轻，对于这样一件重要的事情还不能作出很好的判断。它远远超出你的学识范围，他们远远比你更有学问，能用好的论据来改进或反驳他们的假设，因此，对于你还没有很好理解的事情，你最好不要谴责什么。我说过，下次我会讲解他的假设，你听了不仅会感到惊奇，而且会对其深信不疑，一如你现在谴责它的态度……

德摩根据此于 1837 年指出，雷科德是历史上第一个将日心说传入英国的人。不过，在德摩根之前的 1833 年，英国学者约瑟夫·亨特(Joseph Hunter，1783 ~ 1861)发现，和雷科德同时代的英国数学家约翰·迪(John Dee，1527 ~ 1609)和天文学家约翰·菲尔德(John Feild，1525 ~ 1587)也接受了哥白尼的理论[5][13]。

雷科德的第五部数学著作《砺智石》(*The Whetstone of Witte*)是英国历史上第一部代数学教材，出版于 1557，未曾再版。在 16 世纪的意大利和德国，代数学被称为"未知数之术"，而未知数是以"物"(意大利人称之为 cosa，德国人称之为 cos)来表示的，雷科德沿用了 cos 这个词，并将代数学称为 cossike practice，而这个词翻译成拉丁文即为 cos ingenii，即有"砺智石"之意，因此，书名是个双关语。在扉页，雷科德写道："尽管许多石头价值连城，这块磨刀石却只供练习使用！"[6]


And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus:=======, bicause noe.2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.

图 2　《砺智石》中的一页——等号"＝"的创用

《砺智石》主要取材于德国数学家舒贝尔(J. Scheubel，1494 ~ 1570)的《简易代数汇编》(1551)。第一部分先讨论各种类型的正整数以及开方法。其中一类正整数值得一提：若正整数 a、b、c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$，则称 ab 为直径数(diametral number)。雷科德证明①：(1)直径数的个位数必为 0、2 或 8；(2)直径数必能为 12 整除；(3)直径数本身不可能为平方数。之后，雷科德用了五十几页的篇幅介绍开方法。

第二部分介绍代数式与方程。雷科德采用了舒贝尔的符号："ꝛ"表示未知数(相当于今天的 x)，"ʒ"表示未知数的平方(相当于今天的 x^2)，"ꝗ"表示已知数，"＋"、"—"分别表示"加"和"减"，这些符号在英语数学著作都是首次出现。这一部分中最引人注目的是等号"＝"的创用(如图 2)。在《砺智石》以前出版的数学著作中，"相等"往往用文字来表达，雷科德说："为了避免枯燥乏味地重复使用'等于'这个词，我在本书中采用了一对等长的平行线，即＝，因为没有哪两样东西能比它们更相等了。"[14]

---

① 设 a、b、c 为一组勾股数，a 和 b 互素，则古希腊数学家欧几里得已给出公式：$a = mn, b = \frac{m^2 - n^2}{2}, c = \frac{m^2 + n^2}{2}$，其中 m、n 同为奇数或偶数，$m > n$。于是，直径数为 $ab = \frac{1}{2}mn(m - n)(m + n)$。13 世纪初，意大利数学家斐波纳契(L. Fibonacci，1170? ~ 1250?)在其《平方数书》中已经证明：当 $m + n$ 为偶数时，$mn(m - n)(m + n)$ 能被 24 整除，并且它不可能为平方数。17 世纪法国数学家费马(Pierre de Fermat，1601 ~ 1665)也有类似命题："整数边直角三角形的面积不可能是平方数。"

可以说,等号"="的创用是雷科德对数学的最大贡献。不过,《砺智石》出版后,这个符号并未马上为人们所沿用;甚至17世纪一些重要数学家,如开普勒(J. Kepler, 1571~1630)、伽利略(G. Galilei, 1564~1642)、托里拆利(E. Torricelli, 1608~1647)、卡瓦列利(B. Cavalieri, 1598~1647)、帕斯卡(B. Pascal, 1623~1662)、纳皮尔(J. Napier, 1550~1617)、布里格斯(H. Briggs, 1561~1630)、圣文森特(St. Vincent, 1584~1667)、泰凯(A. Tacquet, 1612~1660)、费马等都未采用任何符号来表示"相等"(均用文字表达,至多采用缩写文字)。一些数学家用"="来表示不同的含义,如法国数学家韦达(F. Viète, 1540~1603)用它来表示两数之差,笛卡儿(R. Descartes, 1596~1650)用它来表示"加减"(即今天的"±"),杜劳伦斯(F. Dulaurens, 17世纪)和德国数学家雷尔(S. Reyher, 1635~1714)用它来表示平行线;西班牙数学家卡拉缪尔(J. Caramuel, 1606~1682)用它来表示小数点。另一些数学家则用别的符号来表示"相等",如法国数学家布丢(J. Buteo, 1492~1572)用"[",艾里冈(P. Hérigone, 1580~1643)用"2|2"或"⊔",杜劳伦斯用"⊓",笛卡儿用"∝"(这个符号在17世纪下半叶和18世纪初的法国和荷兰被广泛采用),德国古典学者西兰德(G. Xylander, 1532~1576)用"‖",雷尔用"|"。在英国,直到《砺智石》出版61年后,它才在纳皮尔《奇妙的对数说明书》英译本(1618)的附录(作者可能是奥特雷德)中再次出现。1631年,英国数学家哈里奥特(T. Harriot, 1560~1621)在其《实用分析艺术》中、奥特雷德(W. Oughtred, 1574~1660)在其《数学之钥》中、诺伍德(R. Norwood, 1590? ~1675)在其《三角学》中都采用了雷科德的等号,之后,沃利斯、巴罗、牛顿等名家都开始采用该等号,因而它在英国渐渐被广泛接受。在欧洲大陆,莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646~1716)在其《组合艺术》(1666)中采用了雷科德的等号;到了17世纪末,越来越多的欧洲大陆数学家开始采用这个符号。雷科德的发明最终被全世界普遍接受。美国数学史家卡约黎(F. Cajori, 1860~1930)在《数学符号史》中这样评论道:

> "等号=乃是被普遍采用的极少数数学符号之一。雷科德并未提出别的代数符号;但他奇妙地选择了这一个符号,它战胜了所有的竞争对手。不要忘记,当今在微积分学、三角学、矢量分析,事实上也在数学的每一个分支里,符号的使用仍然很不统一,鉴于此,等号的普遍采用尤为引人注目。"[14][15]

关于方程,雷科德指出:"解任何一个问题时,先给未知数想像一个名称",这和中国宋元数学家的"立天元一"颇为相似。尽管雷科德没有向后来的哈里奥特那样将方程写成一边等于零的形式,也没有接受负根,但值得注意的是,他使用了负系数。所有的一元二次方程均写成 $ax^2 = bx + c$, $ax^2 = bx - c$,或 $ax^2 = c - bx$ 的形式。对于具有两个正根的方程 $x^2 = bx - c$,雷科德已经知道根与系数之间的关系(今称韦达定理):$x_1 + x_2 = p$, $x_1 x_2 = q$。

《砺智石》的第三部分讲的是无理数,其内容源于《几何原本》,斐波纳契在《计算之书》中也有详细介绍。雷科德采用了舒贝尔的根号,其中的二次根号"$\sqrt{\quad}$"一直沿用至今。

在苏格兰著名小说家斯科特(W. Scott, 1771~1832)的小说《奈杰尔的财富》(1822)第24章中,高利贷者家中除《圣经》以外唯一的一本藏书便是《砺智石》。哈里韦尔称之为"科学荒漠时代的绿洲"[8]。

三、教育上的一代先驱

在雷科德著述数学教科书的时代,一般的人文主义学者很少对数学这样抽象的非人文学科产生兴趣。事实上,荷兰著名学者伊拉斯谟(D. Erasmus, 1466? ~1536)的观点代表了文艺复兴早期人文主义学者们的普遍看法:数学只是十分先进的人才会喜欢的学科。英国著名学者阿斯克姆(R. Ascham, 1515~1568)甚至这样感叹:"所有全心全意于那些学科(音乐、算术和几何)的数学头脑,他们是多么孤独,与他人多么格格不入,在世上多么不合时宜!"[10]在一般学校(包括牛津和剑桥)的课程表中几乎见不到数学,表1给出半个世纪后英国一所文法学校的课程表[12],从中可见,只有一、二年级有点算术课,而且还放在周六下午的《教理问答》课之后。伊丽莎白时代尚且如此,更不必说半世纪以前了。

表 1　伊丽莎白时代一所文法学校的课程表(1598)

年级	时间	周一	周二	周三	周四	周五	周六
I	上午	皇家语法	皇家语法	皇家语法	皇家语法	每周复习	考试
	下午	圣约书或《诗篇》	圣约书或《诗篇》	圣约书或《诗篇》	—	复习（续） 伊索寓言	教理问答 算术
II	上午	伊拉斯谟《对话集》	伊拉斯谟《对话集》	老加图或小加图	老加图或小加图	每周复习	考试
	下午	英译拉丁	英译拉丁	英译拉丁	—	复习（续） 伊索寓言	教理问答 算术
III	上午	阿斯克姆书信、西塞罗书信、泰伦斯 句子释义	阿斯克姆书信、西塞罗书信、泰伦斯 散文俗语	帕伦格纽斯《诗篇》 句子释义	帕伦格纽斯《诗篇》	散文俗语 每周复习	考试
	下午	拉丁或希腊语法	拉丁或希腊语法	拉丁或希腊语法	—	复习（续） 伊拉斯谟《格言》	教理问答 新约全书
IV	上午	西塞罗《论老年》或《论友谊》	西塞罗《论老年》或《论友谊》	奥维德《哀歌》、塞内加的悲剧	奥维德《哀歌》、塞内加的悲剧	诗歌 每周复习	考试
	下午	散文 拉丁或希腊语法	诗歌 拉丁或希腊语法	散文 拉丁或希腊语法	—	复习（续） 奥维德《纪年表》	教理问答 新约全书
V	上午	散文 恺撒《评注》、西塞罗、萨卢斯特	诗歌 恺撒《评注》、西塞罗、萨卢斯特	散文 奥维德《变形记》、韦吉尔、卢坎	奥维德《变形记》、韦吉尔、卢坎	诗歌 每周复习	考试
	下午	拉丁或希腊语法	拉丁或希腊语法	拉丁或希腊语法	—	复习（续） 塞内加的悲剧、贺拉斯、卢坎	教理问答 新约全书

可以想象,要让普通人学习数学,是多么不易。为此,雷科德在撰写课本时做出了三个决定。其一,放弃了拉丁语而采用了英语;其二,首次选择具体的例题来说明原理(但没有提供练习题);其三,采用了对话的形式。在雷科德所撰写的四部教材中,除了《知识之途》以外,其余三部均采用师生对话的形式。雷科德自认为这是学生最容易接受的教学方式,“学生可以依次就每一个疑难提问,而教师可以清晰地回答他的每一个问题”[12]。在我们今天看来,雷科德的课本是直接以教育形态,而非以学术形态来呈现数学知识的。此外,雷科德还创造了一些英语数学术语。

在数学教学中,不可避免会遇到记忆和理解之间的关系。《艺术基础》中,“师”告诉“生”:“你必须自己动手解一些从没教过的问题,否则你就不能超出所学的内容,只能死记硬背地学习,而不是理解地学习。”[12]另一方面,在理解之前,可以先教技能:“在学习原理之前,先通过简短的法则教会学生运用,然后就可以更快地让他理解这些原理。因为很难让一个年轻的学生(一开始就)同时掌握技能及其背后的原理。”[12]在《知识之途》中,雷科德再次指出:“对于一个涉足陌生艺术的人来说,很难一开始就既理解所学的事物,又理解其背后的原理。”[12]

雷科德数学课本中最令人印象深刻的内容莫过于对数学价值的宣扬了。美国数学家和数学史家 M·克莱因(M. Kline, 1908～1992)曾指出:数学教学的主要问题是动机问题,数学教师必须为所教的数学提供动机(motivation)和目的(purpose)[16]。在一个数学教育远远没有普及的时代,动机和目的创造就显得更加重要了,雷科德将这一点作为其重要目标。在《艺术基础》中,雷科德一开篇竟用了 10 页篇幅向学生介绍算术的价值。以下是师生对话的一部分[17]:

师:一个人如果没有了数,那他将一事无成,而有了数的帮助,则万事可达。

生:是的,先生,这就是为什么在所有知识中,学习数的艺术是顶顶重要的,学了数学,一个人就不必再学其他知识了。

师：不，不是这样：如果一个人先学习数学，然后，他才能够学习、理解、掌握其他的科学；这些科学如果没有数学是决不能掌握的。

生：天文学和几何学要靠数的帮助，这一点我能理解；但是，像音乐、医学、法律、语法等等学科也需要算术的帮助，这一点我不理解。

师：我会根据你的一丁点理解，告诉你算术对于所有这些学科的一般好处，其他更为重要的原因我就不提了。

首先，音乐不仅需要算术的帮助，而且它就是算术造就的，是因为算术而完善的：因为一切音乐都遵循数和比例；而在医学上，除了关键性的时间计算等以外，如果对于数的比例一无所知，谁又能正确地把脉呢？

至于法律，很清楚，不懂算术的人是不适合于当法官的，不管是律师也好，抑或代诉人也好。因为，如果他不懂算术，他又怎能很好地理解涉及货物或其他债务以及钱的分配的案件呢？当一名法官对他所不能理解的事情置若罔闻，或者因缺乏理解而不能正确断案时，正当的权益常常就会受到阻碍：此皆不懂算术所致。

至于语法，如果你知道除了各种数词和副词以外，各种名词、代词、动词和分词都有数的不同，那么我想你就不会怀疑它也需要数的事实。如果你从语法中拿走数，所有数目的音节就没了。数还在其他方面对语法有帮助。

读过亚里士多德、柏拉图、或任何别的哲学家的著作的人很快会明白：算术对于哲学的所有部分是多么地必要。因为他们几乎所有的例子以及检验都依靠算术。亚里士多德有句名言：不懂算术者不适于研究任何科学。他的老师柏拉图在他的学园大门上写有这样的短句：不懂几何者免进。既然他要求所有的学生都精通几何学，那么他当然会要求他们同样也精通算术，因为没有算术几何就没有立足之地。

如此多的神学博士从数中搜集神秘的东西，并大书特书，表明算术对于神学是多么的必要。算术对于和平时期的平民事务，如公共福利的管理，以及战时的军队补给，军队人数的清点、薪水的计算、食品的供应、大炮和其他武器的瞄准、地形的测定、营寨的安扎等等都极有用。算术对于地主、业主、商人和其他的所有者的私人福利，以及更一般地对于人的财产是多么地有用。还有，审计员、司库、出纳、财务管理员、管家等等，他们的职务如果没有算术就一无所有。如果我要具体地罗列算术这门高贵的科学的所有这样的用处，足够写厚厚的一本书呢。

生：不不，先生，没有必要。因为我已不再怀疑，你所说的足以让任何一个人相信：这门艺术的确十分美妙，对人十分必要，谁少了它，谁就少了感觉和智慧。

师：听了少数的这些一般用处，你已经改变了这么多；如果你知道了所有具体的用处，你可能会改变更多哩。

生：先生，请讲述那些具体的用处，现在就打开这个精彩的宝库，丰富我的头脑。请不吝指教。

师：我很高兴接受你的请求，如果你乐于学习，我即刻为你讲述。

生：我洗耳恭听；无论你讲什么，我会把它当作真理。

师：言过其实了。任何人都不应盲目相信一切。尽管我可以要求我弟子信任我，但除非我说理，否则我并不想要这样的信任。

这里，“师”成功地激发了“生”的学习动机。作为对初等算术目的阐述，上述对话对后世数学教育产生了深远的影响。值得注意的是，雷科德在这里还教育学生不要迷信权威。在《知识城堡》的前言里，雷科德也表达了同样的思想。

在《知识之途》中，雷科德不厌其烦地宣扬几何学的价值，大到海上的商船，小到织布机、磨粉机、钟表甚至是裁缝和鞋匠的作品，“决没有哪一门艺术能像几何学那样，如此智慧美妙、对人类如此必要！”[18]

与人文主义学者的观点形成鲜明对照的是，数学家和艺术家的数学观反映了那个时代的精神[19]。如达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452 ~ 1519)称：“任何人类的探究活动都不能称为科学，除非这种活动通过数学表达方式和经过数学证明来开辟自己的道路。”在雷科德之后，16 世纪晚期的英国数学家希尔(T. Hylles)在其《通俗算术》(1592)中甚至称:"如果你想做一名威武的军人/如果你想谋一官半职享受富贵荣华/如果你想在你居住的庭院或乡间/选择物理、哲学或法律作为你的生涯/没有数学这门艺术/你的名声将用永无闻达/我掌握了天文和几何学/宇宙学、地理学和许多别的学科不在话下/还有那悦耳动听的音乐/没有这门艺术,你就成了井底之蛙/……/一言以蔽之,没有数学/人将不再是人而只是木头或石沙"[18]。希尔的课本也采用了对话的形式[20],雷科德的影响可见一斑。同时代另一位学者肯普(W. Kempe)在其所译拉姆斯(P. Ramus, 1515~1572)《整数与分数算术之艺术》的献言(1592)中称:"没有了算术,商人们就失去了眼睛,做买卖时再也看不到方向;铁匠们就失去了辨别力,再也没能恰如其分地混合金属;将领们就失去了机智,再也无法指挥若定地排兵布阵;最终,各行各业的人们就失去了正确地各行其职的能力。算术教给我们神圣的事物,公正地判断世俗的事业,治疗疾病,找出事物的本质,甜美地歌唱,公平地买卖,称量金属,与敌作战,赢得战争,成就几乎每一件好的工作。算术对人类是多么有用!"[10] 17 世纪初,哲学家培根(F. Bacon, 1561~1626)在其《崇学论》(1605)中称:"没有数学的帮助,没有数学的融入,自然的许多部门,如透视学、音乐、天文学、宇宙学、建筑学、机械和许多别的学科,既不能以足够的精微发明出来,也不能以足够的清晰证明出来,也不能以足够的灵巧投入使用。我说不出数学中有什么不足之处,如果有,那就是人们还没能足够理解纯数学的精彩应用。在数学的应用中,人们纠正和克服了智慧和智力中的许多缺陷。因为,如果智慧太愚钝,数学就让它变得敏锐;如果智慧太散漫,数学就让它变得牢固;如果智慧太感性,数学就让它变得抽象。"[10]我们有理由相信,雷科德的数学观在文艺复兴时期起着承前启后的作用。

1896 年,英国学者塞德维克(W. F. Sedgwick)曾说,《尿液》和《知识之途》中的木刻画是雷科德的画像,但此说受到大英博物馆的保拉尔德(A. W. Pollard,1859~1944)否定。20 世纪初,伦敦哈罗中学数学教师、校长布歇尔(W. D. Bushell, 1838~1917)在当地的拍卖会上买下了作于 1556 年的雷科德画像,据美国著名数学史家史密斯(D. E. Smih, 1860~1944)鉴定,这是 16 世纪的真品[1]。也许这是唯一存世的雷科德画像了。由于年代久远,文献稀缺,除了数学和医学著述,雷科德的更多的学术和教学活动仍有待于进一步深入考证;但他的算术、几何、代数、天文学著作,连同他所发明的等号,他的科学进步观和他的数学观都已载入了科学史册。

〔参 考 文 献〕

〔1〕Smith, D. E. New Information Respecting Robert Recorde〔J〕. *American Mathematical Monthly*, 1921, 28: 296-300.
〔2〕Knott, L. Robert Recorde〔J〕. *Nature*, 1916, 98:268.
〔3〕Clarke, F. M. New light on Robert Recorde〔J〕. *Isis*, 1926, 8 (1): 50-70.
〔4〕Sleight, E. R. Early English Arithmetic〔J〕. *National Mathematical Magazine*, 1942, 16(5): 243-251.
〔5〕Patterson, L. D. Recorde's Cosmography, 1556〔J〕. *Isis*, 1951, 42 (3): 208-218.
〔6〕Sanford, V. Robert Recorde's Whetstone of Witte〔J〕. *Mathematics Teacher*, 1957, 50: 258-265.
〔7〕Easton, J. B. A Tudor Euclid〔J〕. *Scripta Mathematica*, 1964, 27 (4): 339-355.
〔8〕Sedgwick, W. F. Recorde, Robert〔C〕. In: *Dictionary of National Biography* (Vol. 16), Oxford University Press, 1973. 810-812.
〔9〕Easton, J. B. Recorde, Robert〔C〕. In: C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography* (Vol. XI), New York: Charles Scribner's Sons, 1975. 338-340.
〔10〕Fauvel, J. & Gray, J. (eds.). *The History of Mathematics: A Reader*〔M〕. Hampshire: Macmillan Education, 1987.
〔11〕Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol.2)〔M〕. Boston: Ginn & Company, 1925.
〔12〕Howson, G. *A History of Mathematical Education in England*〔M〕. Cambridge: Cambridge University Press. 1982. 87-92.
〔13〕Zetterberg, J. P. Hermetic Geocentricity: John Dee's Celestial Egg〔J〕. *Isis*, 1979, 70 (3): 385-393.
〔14〕Cajori, F. *Mathematical Signs of Equality*〔J〕. *Isis*, 1923, 5 (1): 116-125.
〔15〕Cajori, F. *A History of Mathematical Notations* (Vol.1)〔M〕. La Salle: The Open Court Publishing Company, 1928.
〔16〕Kline, M. The Ancients versus the Moderns: a New Battle of the Books〔J〕. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418-427.
〔17〕Smith, D. E. *A Source Book in Mathematics* (Vol.2)〔M〕. New York: Dover Publications, 1959.
〔18〕汪晓勤. 数学与诗歌:历史寻踪〔J〕. 自然辩证法通讯, 2006, 28 (3): 10-17.
〔19〕Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*〔M〕. New York: Oxford University Press, 1972. 中译本《古今数学思想》(第 1 册), 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
〔20〕Smith, D. E. *Rara Arithmetica*〔M〕. Boston: Ginn & Company, 1908.

〔责任编辑　王大明〕