20 世纪上、中叶美英教科书中的锐角三角函数引入方式

卢成娴　汪晓勤　(华东师范大学教师教育学院　200062)

1　引言

近年来，将数学史融入初中数学教学受到一线教师的广泛关注，相关的教学案例也日渐增多.鉴于数学史“高评价、低应用”的现实，我们建立 HPM 专业学习共同体来开发 HPM 课例.由高校研究人员与中学一线教师组成的共同体的建立，使一线教师摆脱了教学资源匮乏的困境.高校研究人员通过文献研究，勾勒相关主题的历史发展脉络，并获得有关素材；中学教师利用这些素材进行初步的教学设计，经过交流、研讨、修正、试教，最终形成较为完善的设计.无疑，理想的 HPM 教学设计是建立在深入的历史研究和丰富的历史资料基础上的.

锐角三角函数是初中数学的重要内容之一，它既是直角三角形边角关系的进一步拓展，又为后面学习解三角形以及高中三角函数内容奠定基础.目前，大部分教科书都通过创设情境来引入锐角三角函数概念，但不同版本教科书所创设的情境互有不同.人教版教科书将正弦作为三角函数的切入点，通过“水管问题”，引导学生探索直角三角形中角的对边与斜边的关系；而北师大版、苏科版和沪教版则以正切为切入点，分别利用梯子的倾斜程度、台阶的陡缓程度以及测量金字塔高度的测量引入概念.从现有文献来看，大部分教学设计都采用与教科书相似的情境来引入新课[1]-[8]；而一线教师希望能够看到 HPM 视角下的锐角三角函数教学设计.

为此，我们需要对锐角三角函数的历史进行深入研究.文[9]已经对三角函数概念的发展历史进行过探析，但并未揭示三角函数概念发展过程中的历史动因.我们希望了解：历史上的三角学教科书是如何引入锐角三角函数概念的？是如何揭示锐角三角函数的价值的？对我们今日的教学有何启示？

2　三角教科书的选取

我们选取 1900－1959 年间出版的 49 种西方三角学教科书，对其中的锐角三角函数引入方式进行考察.在 49 种教科书中，46 种教科书出版于美国，3 种出版于英国；10 种是中学教科书，39 种是大学教科书.图 1 给出了各种教科书的年代分布情况.

3　锐角三角函数的引入

在 48 种教科书中，对于锐角三角函数的引入，

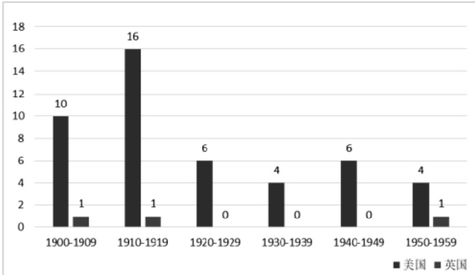

图 1　49 种三角学教科书的时间分布

大致可分为以下六种方式.

3.1　直接定义法

第一种，直接在一个直角三角形中定义锐角三角函数[10].

如图 2 所示，$\sin\theta=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\dfrac{y}{x}$.

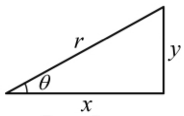

图 2

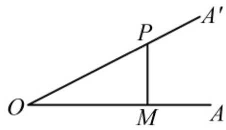

图 3

第二种，先构造直角三角形，再直接定义[11].

如图 3 所示，在 $\angle O$ 的一边上任取一点 P，过 P 点作对边的垂线段 PM，在直角三角形 POM 中，$\sin\theta=\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}$，$\cos\theta=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$，$\tan\theta=\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}$.

3.2　终边定义法

20 世纪的大多数教科书已经将角推广为任意角，因此，定义三角函数时针对的也是任意角.先在四个象限中利用终边定义法定义任意角的三角函数[12]，如图 4 所示.

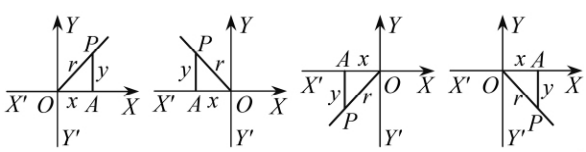

图 4

设 $\angle\theta$ 为任意角,在其终边上任意取一点 P,过点 P 作 $X'X$ 轴的垂线段,垂足为 A,设点 P 的坐标为$(x,\ y)$,线段 OP 的长度为 r,则 $\sin\theta=\frac{y}{r}$,$\cos\theta=\frac{x}{r}$,$\tan\theta=\frac{y}{x}$.而锐角三角函数则为其中一种特殊情形.当 $\angle\theta$ 为锐角时,其终边落在第一象限,此时终边上点 P 的横坐标与纵坐标分别为直角三角形 POA 中该角邻边和对边的长度.故 $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$,$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$,$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$.

3.3　相似三角形引入

第一种:直接给出2个或3个相似直角三角形,探究这几个三角形边与角的关系[13].

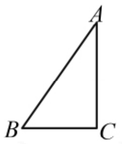

图5

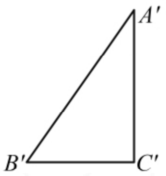

图6

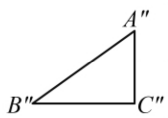

图7

如图5和图6所示,$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C$ 是2个相似的直角三角形.根据相似三角形对应边成比例知$\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$,$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}$,$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$,确定了三角形中 $\angle B$ 的值,这三组比值也就唯一确定.如果保持 $AB=A''B''$,改变 $\angle B$ 的大小,比较图5与图7,此时三组比值也相应发生变化.也就是说,这三组比值是关于 $\angle B$ 的函数,因此,将这三组比值分别定义为 $\angle B$ 的正弦、余弦和正切函数,即 $\sin B=\frac{AC}{AB}$,$\cos B=\frac{BC}{AB}$,$\tan B=\frac{AC}{BC}$.

将 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 以及 $\triangle A''B''C''$ 进行对比,从函数的观点说明三组边的比值与 $\angle B$ 的关系,有助于学生理解锐角三角比的函数本质.将斜边 AB 的长度固定,当 $\angle B$ 变化时,三组边的比值也随之变化.也有教科书将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A''B''C''$ 置于同一圆中,学生可以更清楚地看出比值的变化情况.

第二种:在角的一边上取多个点分别作对边的垂线段,构造多个相似的直角三角形,探究边的比值关系[14].

如图8所示,若 $\angle O$ 是任意一个锐角,在一条边上任意取点 A,C,过点 A,C 分别作另一条边的垂线段 AB,CD,利用相似三角形的性质可知,$\frac{AB}{OB}=\frac{CD}{OD}$,$\frac{AB}{OA}=\frac{CD}{OC}$,$\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}$,即$\frac{\angle O\text{的对边}}{\angle O\text{的邻边}}$,$\frac{\angle O\text{的对边}}{\angle O\text{的斜边}}$,$\frac{\angle O\text{的邻边}}{\angle O\text{的斜边}}$为定值,从而引出正切、正弦、余弦函数的定义.

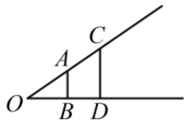

图8

3.4　探究式引入

(1)如图9,先作出一个59°的 $\angle O$,在 $\angle O$ 的一条边上任意取一个点 A,过点 A 作另一条边的垂线,垂足为 B,量出 AB,OB 的值,并计算$\frac{AB}{OB}$的值;改变点 A 的位置(设为 C 处),重复上述的过程,你有什么发现?

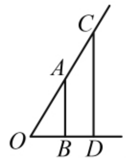

图9

(2)再作出一个32°的角,重复(1)中的过程,(1)中发现的结论是否依旧成立?

(3)如果将一个角的度数固定,上述的比值是否也随之确定?

由上述探究过程可见,在直角三角形中,确定一个锐角,就确定了对边与邻边的比值.于是,将该比值定义为锐角的正切函数.类似可得正、余弦函数的定义[15].

3.5　现实情境引入

部分三角学教科书通过创设现实情境来引入锐角三角函数概念,具体的情境大致可以分为三类.

情境1—— 坡度刻画

设直角三角形 ABC 为一山坡截面,如图10所示.可以用两种方式来刻画山坡的倾斜程度:一是倾斜角 $\angle CAB$ 的度数,二是坡面的垂直高度与水平宽度的比$\frac{BC}{AB}$.这两种方法实际上把角度与边长联系起来,若 $\angle CAB$ 变化,则坡比$\frac{BC}{AB}$也随之发生变化,因此,坡比是角的函数.由此引出正切函数以及正、余弦函数[16].类似的情境还有铁轨的斜面、屋顶的斜面等.

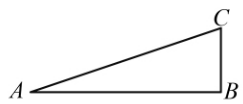

图10

情境2—— 以影推高

古人通常利用日影来测量高度.如图11,要测塔高 h,先测得其影长122英尺(ft),并在塔的旁边垂直竖立一根长为10英尺的木竿,测得竿影为20英尺.因光线可视为平行,故利用相似三角形性质得 $h:122=10:20$,得 $h=61$[17].

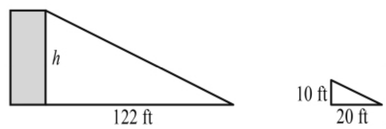

图11

公元前6世纪,古希腊哲学家泰勒斯(Thales)

正是利用上述方法测得金字塔的高度.值得注意的是,塔的高度与竿的长度无关.只要太阳光照射角度不变,竿高和它的影长之比是一个定值.随着照射角度的变化,比值也随之变化.由此可知,这个比值是与太阳光照射角度有关的一个函数,由此得到锐角三角函数的定义.

多数教科书均含有利用日影测高的实例,如测云杉的高度、梯子的高度等,本质都是利用相似三角形性质来探究边长与角度之间的关系.

情境 3—— 水管求长[18]

假设 A 地为水源,B 为房屋,A,B 之间因为一片沼泽地分隔开来,现要用一根水管将 A 处的水流引到 B 处,请问需要多长的水管?(即计算 AB 的长度)

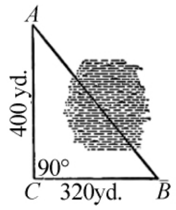

图 12

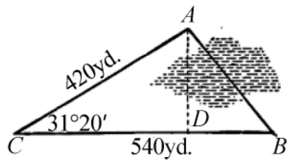

图 13

若沼泽位置如图 12 所示,则能够另外找到一点 C,使得 $\angle ACB=90°$,且 AC,BC 的长度均易于测量.测得 AC,BC 的长度,即可利用勾股定理计算 AB.但若沼泽地位置如图 13 所示,此时,我们无法直接找到点 C,使得 $\angle ACB=90°$.另一方面,我们可以测出 AC 和 BC 的长度以及 $\angle ACB$ 的度数,若能求得图中 AD 和 CD 的长度,即可求出 AB 的长度.于是,我们需要解决如下问题:已知直角三角形的斜边和一个锐角,如何求得直角边? 我们需要引入新知—— 三角函数.有了三角函数,我们就可以根据直角三角形的一个锐角,求得其各条边的比值.

从学生熟悉的生活情境引入三角函数概念,可以让学生体会到学习三角函数的意义,从而激发他们的学习动机和兴趣.

3.6　三角学意义概述

部分教科书为了引入锐角三角函数概念,先对三角学的意义进行概述.

(1) 三角学的应用价值

三角学源于天文学,是天文学家实施天文推算的工具.利用三角函数,不仅能够计算天体的质量与运行速度,还能根据已有的运行轨迹预测未来的运动[19].三角学在其他应用领域也是不可或缺的.在现实生活中,利用三角学可以测量山高或河宽,解决不易直接测量的问题;在地理上,利用三角学可以测出某地的经度和纬度;在航海上,利用三角学可以确定舰船的航行路线;在军事上,飞机轰炸理论、海陆炮火的定向等都离不开三角学,海战中的测距仪正是利用了三角学原理[20].可以说,三角学是数学中最为实用的分支之一.

(2) 三角学与几何学的优劣比较

三角学可以完善三角形中边角关系理论.在直角三角形中,勾股定理告诉我们各边之间的关系,三角形内角和定理告诉我们各角之间的关系.利用上述两个定理,已知直角三角形的两条边,可求出第三条边,已知直角三角形两个角,可求出第三个角,但我们无法知道其他两个内角.几何学告诉我们,已知直角三角形两边,就能确定该直角三角形,即直角三角形的两个内角是唯一确定的.可见,直角三角形的边和角之间一定还存在某种关系,有待于我们去发现[16].

另一方面,三角学可以提高测量结果的精确性.在实际测量中对于某些测量问题,早期人们是通过几何作图的方法,利用全等或相似三角形性质进行计算.如图 14 所示,要测量河两岸点 A 和 B 之间的距离,过 A 作 $AC\perp AB$,$AC=100$ 英尺,$\angle C=41°$.按照某个比例构造 Rt$\triangle CAB$,使得 $AC=100$ 英尺,$\angle C=41°$,直接量出 AB 的长度[21].这种方法虽然能为求解未知量提供一种有效的途径,但在实际作图时难免存在误差.为了获得任意精度,需要引入三角学.

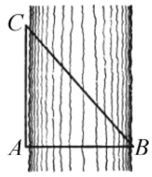

图 14

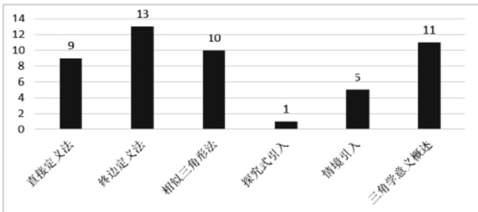

图 15

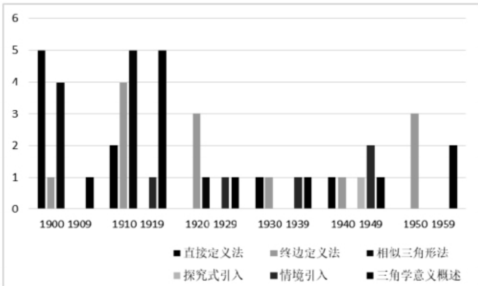

图 16

图 15 给出了 6 种引入方式在 49 种教科书中的分布情况.图 16 则给出了各方式在不同阶段的分布情况.

由图 16 可知,随着时代的发展,“直接定义法”占比较 20 世纪初期有所减小,而“终边定义法” 和 “三角学意义概述” 贯穿各个历史时期,且比重较大.另外,自 1910 年起,西方教科书中开始出现“情境引

入法”.这一变化其实与当时的课程改革背景有密切的关系.受英国“培利运动”、德国数学家F·克莱因(F. Klein, 1849－1925)“数学实用”教育主张的影响,在1908－1909年,美国数学教育界设立“十五人委员会”制订几何课程大纲,旨在寻求“形式主义”和“实用主义”之间的平衡[22][23].美国几何课程的改革对三角学课程产生了重要的影响.1910年,美国数学家杜雷尔(F. Durell, 1859－1946)就在《平面与球面三角学》的前言中指出,他编写此教科书的目的是在现有数学原理的基础上挖掘三角学的应用价值[18].此外,他还在书中专设一章阐述了三角学的实际应用.由此可见,自课程改革后,越来越多的教材编写者开始关注数学的实际应用价值.

4 结语

以上我们看到,本文所考察的20世纪上、中叶美英三角学教科书主要采用六种方式来引入锐角三角函数概念.20世纪初期,多数教科书采用“直接定义法”与“相似三角形法”引入,后来受课程改革影响,“情境引入法”与“三角学意义概述”开始占有一席之地.六种引入方式各有特色,对HPM视角下的教学设计有一定的启示.

(1)设计探究活动.教学中,可让学生作一个特定的角,引导他们探究比值与角度之间的关系.教师可以借助几何画板对学生的探究结果加以检验.

(2)强调函数本质.在“相似三角形法”中,除了说明“角固定,比值就唯一确定”外,还要让学生看到“角发生变化,比值就发生变化”,让学生感受到比值是角的函数.

(3)展示实际应用.通过生活中的测量问题(如建筑物高度、山高、河宽等),让学生体会“数学来源于生活又服务于生活”的道理;通过揭示“仅有勾股定理等几何命题,不足以有效解决测量问题”,凸显三角学的必要性.另一方面,通过阐述三角学在天文、物理、地理、航海、军事等领域的广泛应用,展现三角学的重要性,进一步激发学生的学习动机.

(4)挖掘学科联系.由三角学与几何学之间的关系入手,展示三角学的优越性:几何学只是定性地说明三角形边角之间存在依赖关系,而三角学则定量地揭示了这种依赖关系;几何学告诉我们已知三角形的三边、两边及其夹角或两角一边,可以确定该三角形,而三角学则帮助我们计算出其余的边和角;几何学上的作图不可避免会产生误差,而三角学能够提高结果的精确性.因此,三角学弥补了几何学的局限性.

参考文献

[1] 周孝辉.课例:锐角三角函数(第1课时)[J].中学数学教学参考(中旬),2018(8).

[2] 沈威.锐角三角函数的数学本质与教学过程设计[J].中学数学教学参考(中旬),2018(1).

[3] 陈可剑.基于“三个理解”的数学概念教学——从锐角三角函数导入谈起[J].上海中学数学,2017(5).

[4] 朱启州,李丽.基于培养学生逻辑思维能力的课例——以锐角三角函数教学为例[J].中学数学(初中),2018(4).

[5] 杨红芬.基于过程教育的“锐角三角函数(第1课时)”课例及说明[J].中学数学(初中),2018(4).

[6] 蒋小飞.基于“陡”的描述——正切的教学设计[J].数学教学通讯,2018(20).

[7] 李兴.“锐角三角函数”教学设计[J].中国数学教育,2018(6).

[8] 李津.“锐角三角函数”教学设计[J].中国数学教育,2018(6).

[9] 沈中宇,汪晓勤.20世纪中叶以前西方三角学教科书中的三角函数概念[J].中学数学月刊,2015(10).

[10] Rothrock D A.Elements of Plane & Spherical Trigonometry[M].New York:The Macmillan Co.,1910.

[11] Conant L L. Plane & Spherical Trigonometry[M]. New York: American Book Company, 1909.

[12] Passano L M. Plane and Spherical Trigonometry [M]. New York: The Macmillan Company, 1918.

[13] Durfee W P. The Elements of Plane Trigonometry [M]. Boston: Ginn & Company, 1901.

[14] Wentworth, G A, Smith D E. Plane Trigonometry [M]. Boston: Ginn & Company, 1915.

[15] Hearley M J G. Modern Trigonometry[M]. New York: The Ronald Press Company, 1942.

[16] Wilczynski, E J.Plane Trigonometry & Applications [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914.

[17] Dickson L E. Plane Trigonometry with Practical Applications[M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Co., 1922.

[18] Durell F Plane and Spherical Trigonometry[M]. New York: Merrill, 1910.

[19] Rider P R, Davis, A. Plane Trigonometry[M]. New York: D. van Nostrand Co.,1923.

[20] Hart W W, Hart W L. Plane Trigonometry, Solid Geometry & Spherical Trigonometry[M]. Boston: D. C. Heath & Co.,1942.

[21] Rosenbach J B, Whitman E A, Moskovitz D. Plane Trigonometry[M].Boston:Ginn & Company,1937.

[22] 汪晓勤,洪燕君.20世纪初美国数学教科书的几何应用——以建筑为例[J].数学教育学报,2016,25(2).

[23] 汪晓勤.20世纪初美国几何教材中的勾股定理[J].中学数学月刊,2014(6).