

“旋转体的概念”:基于相似性,重构数学史^{*}

张益明¹,李卓忱²

(1.上海市奉贤中学,201499;2.华东师范大学数学科学学院,200241)

摘 要:在梳理《几何原本》《九章算术》中的旋转体概念、问题以及西方早期几何教科书中的圆柱概念的基础上,采用 HPM 视角来设计“旋转体的概念”的教学:首先,欣赏历史上著名的圆柱形建筑或物体,思考圆柱形的好处,感悟学习旋转体的必要性;接着,利用一个圆形纸片、一张长方形的纸片、两支笔等工具,通过图形的旋转和平移形成圆柱,并利用数学语言逐步完善圆柱的概念;最后,利用类比思想形成圆锥、球的概念,并概括出一般旋转体的概念,进一步思考旋转体的集合定义。

关键词:HPM 旋转体概念 圆柱定义

立体几何研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系。《普通高中数学课程标准(2017年版)》要求“利用实物、计算机软件等观察空间图形,认识柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征,能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构”。沪教版高中数学三年级第15章《简单几何体》第3节的内容是“旋转体的概念”。教材在本节开头部分开门见山地给出了旋转体的概念,接下来依次给出了圆柱、圆锥以及球的概念。学生经过《空

间直线与平面》一章的学习,需要在这一章的学习中进一步发展空间想象能力。教师需要用动态的观点进行教学,突出概念的本质特征,强调概念的精确性和简练性。

在实际教学中,教师往往觉得本章内容枯燥无趣,因而重视不够,相关教学研究也比较少。经过多年教学,笔者发现,按照直接引入的方式,学生也能掌握圆柱、圆锥以及球的概念,而且能够节省时间来进行练习。但是,这种引入方式存在以下几点缺陷:学生不理

解学习旋转体的必要性;没有获得通过图形的运动形成几何体的观念;对定义的严密性理解不够深刻。

HPM 视角下的教学实践表明,数学史有助于构建知识之谐、彰显方法之美、营造探究之乐、实现能力之助、展示文化之魅、达成德育之效。历史上,人们对旋转体的概念经历了逐渐完善的过程。基于历史重构旋转体概念的教学,有助于激发学生学习旋转体概念的动机,让学生经历旋转体概念的形成过程,了解知识的源流,加深对概念的理解,同时培养学生的空间想象能力和动态发展的数学观。

有鉴于此,我们采用 HPM 视角来设计本节课的教学,拟定了如下教学目标:(1)知道旋转体的有关概念;(2)经历圆柱、圆锥、球概念的形成,理解三个旋转体的基本性质;(3)进一步培养类比思想、空间想象能力。

一、历史材料梳理

(一)《几何原本》中的旋转体概念

古希腊数学家欧几里得(Euclid,公元前3世纪)在《几何原本》第11卷中分别给出了球、圆锥、圆柱的动态定义:“固定半圆的直径,旋转半圆到开始的位置所形成的图形称为球。”“固定直角三角形的一条直角边,旋转直角三角形到开始的位置所形成的图形称为圆锥。”“固定矩形的一边,绕此边旋转矩形到开始的位置所成的图形称为圆柱。”

之后,古希腊数学家海伦(Heron,1世纪)给出了球的静态定义:“一个被表面包围的立体图形,所有从里面一点出发的直线都与另一条相等。”

可以看出,此时关于旋转体的概念已经有动态和静态的雏形。

(二)《九章算术》中的旋转体问题

中国古代数学典籍《九章算术》(1世纪)记载了有关圆柱(古人称之为圆堡墙)、圆锥和球(古人称之为立圆)的实际应用问题。比

如关于圆柱的一题:“今有圆堡墙,周四丈八尺,高一丈一尺,问积几何。答曰:两千一百一十二尺。术曰:周自相乘,以高乘之,十二而一。”此时,中国古代数学家关注的是旋转体的度量与实际应用。

(三)西方早期几何教科书中的圆柱概念

通过对西方早期教科书的考察,可以得到圆柱的五种定义方式,分别是矩形旋转定义、直线旋转定义、圆的平移定义、基于圆柱面的定义、基于圆柱空间的定义。

1829年,英国数学家海华德(J. Hayward,1786—1866)在《几何学基础》中将圆柱定义为“矩形绕其一边旋转所形成的立体”。这与《几何原本》中的定义一致。他在书中还给出了圆柱另外两种动态定义:一是“过圆上一点的直线沿着圆平移所形成的立体”,二是“圆沿着一条直线平移所形成的立体”。

1884年,美国数学家纽康姆(S. Newcomb,1835—1909)在《几何学基础》中首先定义了圆柱面:“圆柱面是由直线的运动产生的,该直线始终与给定的曲线相交,并且与其原始位置保持平行(如图1)。”然后定义了圆柱:“由一个圆柱面和两个平行平面构成的几何体为圆柱。”由于曲线的任意性,这里定义的是广义的圆柱。1893年,美国数学家巴托尔(W. C. Bartol)在这个定义的基础上,特别强调了“底为圆、母线与底面垂直的几何体是直圆柱”。这与圆柱的现代定义是一致的。他还指出,直圆柱也称为旋转圆柱:“矩形绕其一边旋转,产生一个直圆柱。”该旋转定义

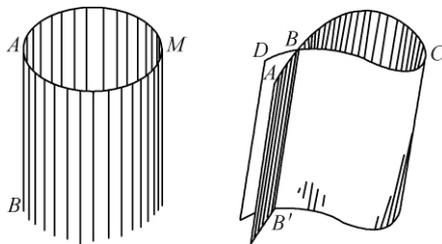


图 1

图 2

与圆柱的现代动态定义是一致的。

1900年, Beman等人首先定义了柱面空间:“如果准线是一条闭合曲线,柱面就包围了一个无限长空间,称为柱面空间(如上页图2)。”据此给出了柱体的定义:“柱面空间中,含于两个平行横截面之间的部分称为柱体。”由此,若准线垂直于底面,则柱体是直柱体;如果一个柱体的底是一个圆,那么这个柱体就是圆柱。

二、教学设计与实施

考虑到学生的认知基础以及本节课的教学目标,我们对圆柱概念的历史进行了重构:首先,穿越时空,欣赏历史上著名的圆柱形建筑或物体,思考圆柱形的好处,感悟学习旋转体的必要性;接着,重演历史,利用一个圆形纸片、一张长方形的纸片、两支笔等工具,通过图形的旋转和平移形成圆柱,并利用数学语言逐步完善圆柱的概念;最后,反思历史,利用类比思想形成圆锥、球的概念,并概括出一般旋转体的概念,进一步思考旋转体的集合定义。

(一)情境引入,再识圆柱

教师指出:“国庆期间,各大旅游网站,都会推荐相应的景点。1916年,韦伯在其教科书《立体几何》中也介绍了一个景点,即梅特拉墓。”同时,出示梅特拉墓图,并介绍:“这个墓地是古罗马贵妇人的墓地,是世界十大女性遗迹之一,意大利著名景点。”然后,出示欧洲古代水塔图,并介绍:“这是欧洲古代的水塔。”接着,提问:“这两个建筑都是什么形状的几何体?”

学生回答之后,教师出示中国古代的圆柱形物体,如故宫的柱子、西汉的擗面杖、古代的水井等,并让学生讨论圆柱形有哪些优点。学生从美观、安全、存储量等角度给出了优点,体会到学习圆柱的必要性。

(二)再现历史,定义圆柱

(教师引导学生回忆圆的轨迹定义和集

合定义,并比较。)

师 我更喜欢轨迹说。轨迹说的核心是点在运动,更加动感、活泼,也更有探索和创新精神。这个时候,点不再是冷冰冰的概念,而是富有活力的生命体,因为生命在于运动。(稍停)现在,请同学们利用老师提供的材料——圆纸片、A4纸、笔等,通过图形的运动形成圆柱。

生 圆向上平移,笔绕着圆旋转一周,旋转A4纸。

生 将A4纸卷成圆柱。

师 卷的过程中纸的边可以看成直线,因此,它与笔旋转的方案等价。这里的笔在数学家眼中不再是笔,而是直线。请同学们用数学语言将刚才的方案描述出来,得到圆柱的定义。

生 将一条直线绕着圆周旋转一周得到的几何图形。

师 很好,这种定义已经和历史上数学家的定义相近了。1829年,英国数学家海华德在《几何学基础》中给出了圆柱的三种定义。其中,直线旋转定义为,空间中经过圆上一点的一条直线沿着圆平移,形成圆柱的表面。同学们觉得这种定义准确吗?

生 直线是无限延伸的,没有界限,因此,得到的不是封闭的几何体。

师 那么,如何修正这个定义?

生 上下加两个盖子。

师 意思差不多,圆柱其实就是被圆柱面和两个平行平面包围的立体。1884年,美国数学家纽康姆在《几何学基础》中基于直线旋转定义给出了一种新的圆柱定义——基于圆柱面的定义:首先定义圆柱面为空间中一条直线沿着一条曲线平移形成的面,接着定义圆柱为被一个圆柱面和两个平行平面包围的立体。解决了封闭性的问题之后,由现在这个定义得到的

圆柱和我们黑板上的圆柱一样吗?

生 不一定一样,可以是斜的。

师 请举出一个著名旅游景点的例子。

生 比萨斜塔。

师 很好! 1893年,美国数学家巴托尔在基于圆柱面的定义的基础上,给出了更完善的圆柱定义:“如果底是圆形,生成柱面的直线垂直于圆所在平面,这个柱体就被称为直圆柱。”这里的“直圆柱”就是现在的圆柱。(稍停)刚才,我们一起利用直线旋转形成了圆柱。在圆柱定义不断完善的过程中,数学家们在追求真知的道路上不断探索的精神以及严谨求实的态度非常值得学习。同学们也能和数学家一样提出相似的定义,说明大家在数学学习上是非常有潜力的。现在,请同学们类似地利用圆的平移给出圆柱的定义。

生 一个圆沿着一条直线平移,形成圆柱面,而且这条直线与圆面垂直,上下要加盖子。

师 不错,意思基本对了。海华德在《几何基础》中还给出了一种矩形旋转定义:矩形绕其一边旋转所形成的立体。而《几何原本》第11卷也给出了类似的定义。请同学们点评上述三种定义:直线旋转定义(包括其改进版)、圆的平移定义以及矩形旋转定义,你更喜欢哪一种?为什么?

生 圆的平移定义,因为它最简洁。

生 直线旋转定义,因为有一种动态。

生 矩形旋转定义,因为旋转的矩形中外面那条边也可以看作直线,从而把直线旋转包含进去,也把封闭性和垂直性包含进去。

师 因此,课本上还是用了矩形旋转定义:将矩形 $ABCD$ (及其内部)绕其一条边 AB 所在直线旋转一周,所形成的几何体叫作圆柱。这个定义非常严谨,比如强调

了矩形及其内部;非常动感,利用了图形运动形成圆柱;也很简洁,旋转一周就行了。

(教师带领学生学习圆柱中轴、母线、高、底面等定义。)

(三)类比研究,深入理解

师 我们经历过一个图形、两种运动、三种定义。请同学们基于圆柱的旋转定义类比给出圆锥和球的旋转定义。

生 圆锥的定义为将 $Rt\triangle ABC$ (及其内部)绕其一条直角边 AB 所在直线旋转一周所形成的几何体。

生 球的定义为将圆心为 O 的半圆(及其内部)绕其直径 AB 所在直线旋转一周所形成的几何体。

师 我们利用不同的图形,比如矩形及其内部、直角三角形及其内部、半圆及其内部,绕着直线旋转一周得到相应的几何体。那么,我们拿出其他几何图形,是不是也能够得到相应的旋转体呢?(稍停)平面上一条封闭曲线所围成的区域绕着它所在平面上的一条定直线旋转而形成的几何体。(利用几何画板动画展示圆柱、圆锥、球、圆台的形成过程,如图3)现在,请同学们举出生活中的旋转体例子。

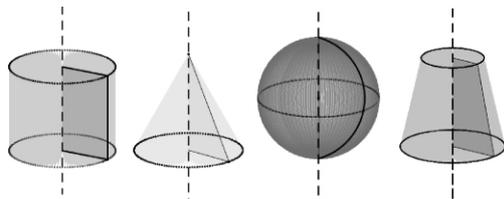


图3

生 冰激凌、车的方向盘、轮胎。

(一位学生展示旋转舞蹈。)

师 不同的造型旋转起来非常优美。请同学们思考一下:为什么今天所学的旋转体的名称中都有一个“圆”字。

生 动点绕定点旋转会形成圆。

(四)练习巩固,深化认识

教师给出一些例子,让学生辨析,从而强化之前学习的概念。

例题 下列说法正确的是_____。

(1)以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周形成的曲面所围成的几何体是圆柱;

(2)以直角三角形的一边所在直线为旋转轴,其余两边旋转一周形成的曲面所围成的几何体是圆锥;

(3)在圆柱上、下底面的圆周上各取一点,这两点的连线是圆柱的母线;

(4)圆锥的顶点和底面的圆周上一点的连线是圆锥的母线;

(5)将半圆绕其直径所在直线旋转一周所形成的几何体是球;

(6)空间中到定点的距离等于定长(大于0)的点构成的集合是球。

(五)探索创新,回顾总结

师 下面也请同学们用严谨的态度,创新性地探索圆柱的集合定义。

生 到定直线 l 距离等于定值且与 l 平行的直线构成的集合记为 Ω ,垂直于定直线 l 的两个平行平面与 Ω 包围的几何体称为圆柱。

生 过定直线上一点且与定直线所成角相等的直线构成的集合记为 Ω ;垂直于定直线且不过该定点的平面与 Ω 包围的几何体称为圆锥。

生 空间中,到定点的距离小于等于定长的点构成的集合称为球。

最后,师生共同总结本节课的数学知识,即圆柱、圆锥、球以及旋转体的概念,总结本节课的数学思想方法,即类比思想和运动的观点;引导学生学会用数学的眼光观察世界,用数学思维思考世界,用数学语言表达世界,即善于观察生活问题,进行数学抽象,并形成数学问题,再加以解决。

三、学生反馈

课后,我们收集了全班 40 名学生对于本节课的反馈信息。

96%的学生“非常同意”听懂了这节课的教学内容。98%的学生“很喜欢”这样将历史上的旋转体概念融入课堂中。

当看到“旋转体”这个词时,38%的学生会想到旋转体与其中的元素;12%的学生会想到运动及其他数学相关词汇;8%的学生会想到图形性质与审美;6%的学生会想到跨学科内容;30%的学生会想到旋转体与生活。

对于为什么要学习旋转体,在数学知识与技能方面,有 27 人分别从数学史、低维到高维、图形的对称、学习知识、定义、理解立体几何、空间想象力等知识取向的角度进行了阐述;5 人从数学定义的方法、数学语言的角度进行了解释;10 人从数学思维的角度进行了诠释。在数学与生活方面,有 16 人从研究数学、生活、世界的角度进行了解释。在数学情感方面,有 4 人从情感取向解释了学习旋转体时追寻真理、深入本质的研究态度以及反复研究和改进结论带来的数学之美、好玩的情感。由此可以看出,学生对学习旋转体概念的必要性有了一定的认识。

对于如何定义圆台,35 人利用直角梯形及其内部的旋转;1 人利用线段绕轴的旋转;1 人利用锥体截取上方小的圆柱;1 人利用两个大小不等、圆心连线与圆所在平面垂直的平行圆,联结圆上对应点所形成的几何体及其内部;1 人利用集合论,即圆柱侧面与上下圆心连线夹角相同的直线。由此可以看出,学生初步形成了几何运动观念,并且对定义的严密性有了一定的理解。

对于学完本节课后印象深刻的有哪些,学生的典型回答有:“历史上的概念。因为感觉数学家提出这个概念时间很近,而且他们思考得并不全面,让我惊奇。”“了解发现的历

史演变过程。因为了解到揭示规律、真理是在不断改进之后产生的。”“同一圆柱的不同定义。因为数学有时也没有唯一的规定。”“由古至今,分析定义。因为数学定义并非一下子得出的,而是经过不断地修改与加工,才得以完善。”由此可以看出,学生初步形成了动态发展的数学观。

四、教学反思

本节课 HPM 的使用方式有顺应式、重构式和附加式。在情境引入中用顺应式,介绍韦伯在《立体几何》中呈现的梅特拉墓以及欧洲古代水塔,旨在帮助学生提升数学学习兴趣,感悟数学来源于生活。在圆柱概念的形成中用重构式,让学生利用所给材料,通过图形运动形成圆柱,并根据设计的方案,利用数学语言表达圆柱定义;在学生不断完善定义和辨析定义优缺点的过程中,自然地引入相应的数学史上的定义。课后应用附加式,让学生自主阅读圆锥概念的历史发展过程。

本节课中,学生自己设计构成圆柱的方案,并抽象成数学概念,对比数学史上出现的类似定义,体现了“知识之谐”;教师点评了圆的两种定义,也让学生点评了数学史上圆柱的各种定义,找到了最简洁、完善的定义,体现了“方法之美”;学生用不同的学具,以小组合作的方式,逐步探究出圆柱的定义,参与到知识生成的过程中,体现了“探究之乐”;学生从生活问题中抽象出几何体,用类比的推理方式得到圆锥、球的概念,归纳出一般旋转体的概念,提升了数学抽象、直观想象和逻辑推理等能力,体现了“能力之助”;教师展现了东、西方的圆柱形建筑、物体以及不同时空的数学家对圆柱定义的不断完善过程,揭示了数学背后的多元文化和人文精神,体现了“文化之魅”;通过旅游景点的推荐提升了学生的数学学习兴趣,在圆柱概念的不断完善过程中培养了学生动态发展的数学观,同时,通过

数学家对真善美的追求,让学生受到了鼓舞,也学会了尊重和包容,体现了“德育之效”。

当然,在本节课中,教师并未引导学生将圆柱与棱柱概念进行对照,是一个遗憾。在未来的教学中,教师可以在学生的课后作业中设置这一部分内容,让学生对几何体的概念和形成有更系统的理解。

* 本文系本刊连载的汪晓勤教授团队开发的 HPM 案例之一,也系华东师范大学 HPM 工作室开发的系列课例之一。

参考文献:

- [1] 张颀. 多面体和旋转体的教学[J]. 数学教学, 1983(6).
- [2] 王志明. 谈立体几何第三章“旋转体”的教学[J]. 数学教学, 1959(8).
- [3] 张颀. 谈谈立体几何《多面体与旋转体》的教学体会[J]. 数学通报, 1984(11).
- [4] 乔敏. 《多面体和旋转体》的数学思想方法与教学实践[J]. 数学通报, 2001(7).
- [5] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A Categorization model for educational values of the history of mathematics[J]. Science & Education, 2017(7-9).
- [6] [古希腊] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽, 译. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003.
- [7] Heath, T. L. The Thirteen Books of Euclid's Elements[M]. Cambridge: The University Press, 1968.
- [8] 郭书春. 九章算术译注[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2009.
- [9] Hayward, J. Elements of Geometry[M]. Cambridge: Hilliard and Brown, 1829.
- [10] Newcomb, S. Elements of Geometry[M]. New York: H. Holt, 1884.
- [11] Bartol, W. C. The elements of Solid Geometry[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1893.
- [12] Beman, W., Smith, D. E. New Plane and Solid Geometry[M]. Boston: Ginn & Company, 1900.