HPM 视角下的“邻补角、对顶角”教学*

顾海萍　（上海师范大学附属经纬实验学校　200444）
孙丹丹　（华东师范大学数学系　200241）

1　引言

“邻补角、对顶角”是沪教版七年级第二学期“相交线、平行线”一章的第一节课.关于平面几何,学生在六年级学习了圆与扇形的相关概念、线段与角的画法,在七年级第一学期学习了图形的运动.从本课内容开始,学生需要感知演绎推理的方法,锻炼逻辑思维,并能够用数学语言进行简单的说理,为八年级学习论证几何做铺垫.已有文献关于“邻补角、对顶角”这节课的教学设计比较单一,大多是沿用教材,由两根小木棍相交,抽象出两直线相交,进而对顶角、邻补角进行概念和说理教学.这样的设计固然开门见山,但没有很好地揭示“对顶角相等”这一命题的必要性,对于为什么要学习“说理”、为什么要学习“对顶角相等”这一命题,学生心里可能是有困惑的.

张奠宙先生在为汪晓勤教授《HPM 数学史与数学教育》一书所写的序言中,提出用数学史讲述“对顶角相等”这一设想[1],我们尝试从 HPM 的视角进行“邻补角、对顶角”教学设计,以期更好地解释“说理”的必要性,让学生更自然地接受说理的表达方式,感受几何学与现实生活之间的联系.具体地,本节课的教学目标如下:

（1）理解邻补角与对顶角的有关概念,能说出邻补角与对顶角以及互为补角与互为邻补角的区别与联系;掌握“对顶角相等”这一性质,并能运用邻补角和对顶角相关知识进行简单说理.

（2）通过“如何测量墙角线夹角”这一具体问题的研究,感受数学在现实生活中的应用,感受几何学在实际生活中的价值,通过对“对顶角相等”的直观确认和推理,感知数学严谨性,体会理性思维精神.

（3）通过泰勒斯的微视频,了解数学家发现数学知识的过程和数学家的生活故事,感受数学家的智慧,理解说理的必要性,感悟“讲道理”不仅应用于数学,也可以是做人做事的准则.

2　史料选择与设计思路

现在所知最早提出演绎证明的数学家是古希腊的泰勒斯（Thales,公元前 6 世纪）.泰勒斯出生于小亚细亚（今土耳其）的米利都城.在泰勒斯以前,不论是古巴比伦人还是古埃及人,都已经获得了不少的几何知识,但都是建立在直觉和经验之上的.泰勒斯创立的爱奥尼亚学派开创了演绎证明的先河,这标志着人们对客观事物的认识从经验上升到理论,是数学史上的一次不寻常的飞跃.不过,泰勒斯本人并没有传记和资料流传下来.关于他在数学上的贡献,最可靠的证据来自于公元 5 世纪哲学家普罗克鲁斯（Proclus，410－485）所著的《欧几里得〈原本〉第一卷评注》一书[2].书中介绍,泰勒斯曾证明以下四条定理:

（1）圆的直径将圆分为两个相等的部分;

（2）等腰三角形两底角相等;

（3）两相交直线形成的对顶角相等;

（4）如果一个三角形有两角、一边分别与另一三角形的对应角、边相等,那么这两个三角形全等.

尽管没有第一手的文献可以证实泰勒斯的成就,但间接的记载却流传至今,使泰勒斯获得“论证几何学鼻祖”的美名.

关于泰勒斯,流传着许多有趣的小故事[3].比如相传有商人挖苦泰勒斯,说:“你知识渊博,不能赚钱又有什么用?”于是泰勒斯用所掌握的知识,经过周密的测算,断定第二年将是橄榄的丰收年,用低廉的租金租下了附近所有的橄榄油作坊.第二年,橄榄果真大丰收,泰勒斯高价转租橄榄油作坊,一夜暴富.又比如,相传在巴比伦,泰勒斯预报了公元前 585 年的一次日食;在埃及,泰勒斯测量过金字塔的高度.沪教版九年级第一学期的相似三角形一章就讲到了泰勒斯测量金字塔高度的故事.

泰勒斯能沿着论证数学的方向迈出第一步,与古代希腊城邦社会特有的唯理主义气氛也有关系.希腊处于山脉和岛屿的地理环境中,这限制了大规模农业生产的发展,因此导致的可能结果是

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一.

希腊人没有建立中央集权政府，希腊的主要行政机构是大小不同的城邦政府.我们无法断定他们的政府是民主制还是君主制，但一定是按法律统治的，这样就激发了其臣民学习辩论的技巧，很可能是这种气氛促进了证明数学的产生[4].

关于“对顶角相等”的切实可考证的证明应该就出于欧几里得《几何原本》，其中的命题 15 提到：“如果两直线相交，则它们交成的对顶角相等.”证明方法如下[5]：

如图 1，因为 AE 位于直线 CD 上侧，而构成 $\angle CEA$，$\angle AED$；$\angle CEA$，$\angle AED$ 的和等于二直角.又因为 CE 位于直线 AB 的上侧，构成 $\angle AED$，$\angle DEB$；$\angle AED$，$\angle DEB$ 的和等于二直角.[命题 13]

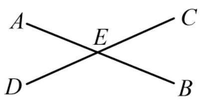

图 1

但是，已经证明了 $\angle CEA$，$\angle AED$ 的和等于二直角.

故 $\angle CEA$，$\angle AED$ 的和等于 $\angle AED$，$\angle DEB$ 的和.[公设 4 和公理 1]

由它们中各减去 $\angle AED$，则其余的 $\angle CEA$ 等于其余的 $\angle BED$.[公理 3]

这是有史料可考的最早的“对顶角相等”的证明方法，据说是欧几里得收录了泰勒斯的证明.

学生在本节课中首次接触数学说理.我们通过微视频来说明演绎推理的产生背景，解释说理的必要性，并通过介绍泰勒斯的相关贡献，讲述泰勒斯的故事，展现数学背后的人文精神及古代数学家的人格魅力.我们还围绕对顶角设计了观察、测量活动，让学生切实感受到观察和测量的局限性，不足以让人完全信服，从而让学生感受说理的必要性.

3 教学过程

3.1 创设情境，引入新知

本节课中，我们希望凸显几何学的两大价值，即逻辑思维训练上的价值和实际应用价值.所以在引入部分，我们设计了一个生活中的问题“如何测量墙角线的夹角”，通过实际问题引导学生从现实应用中抽象出数学模型，把问题转化为求对顶角或邻补角，初步体会转化思想，感受几何学源自于生活实际，使邻补角和对顶角概念的引入更加自然.

师：春暖花开的季节，我们的校园看起来非常美丽.徘徊在走廊的时候，老师有一个疑问——美丽的校园是由一砖一瓦建造的，那么建筑师要如何验证建筑的精确性呢？比如我们走廊的墙角线如图 2，它到底是多少度呢？

生：90°.

师：你是怎么知道的呢？有没有可能是 89°？91°？

生：有可能.


图 2

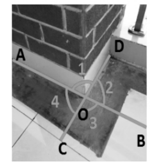

图 3

师：那我们能不能想办法测量一下呢？

生：把两条线延长，测对面那个角.

师：非常好！为了理解方便，我们把字母和角标上去，如图 3 所示.请你继续说.

生：测量 $\angle 3$，因为对顶角相等，所以 $\angle 1$ 就等于 $\angle 3$.

师：很好，已经用到了对顶角相等，这是我们以前可能就知道的.那么你能不能说一说为什么对顶角相等？

生：因为对顶角就是相等的呀.

师：这是我们今天要学习的内容！可能现在还一时说不清为什么，但是通过今天的学习，我们就能够说明白了.

3.2 辨析概念，加深理解

教师提出问题：直线 AB 和 CD 相交如图 4，形成了四个小于平角的角：$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$.任取其中两个角，它们之间存在怎样的位置关系和数量关系？

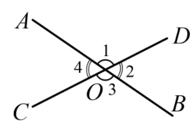

图 4

师生共同研究以下内容：

(1) $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的数量关系与位置关系.找出图中其他邻补角，辨析互为邻补角与互为补角的区别，并说明邻补角的符号语言：$\angle 1+\angle 2=180°$（邻补角的意义）.

(2) $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 数量关系与位置关系.找出图中其他互为对顶角的角，并通过辨析 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是不是对顶角（图 5）来巩固知识.

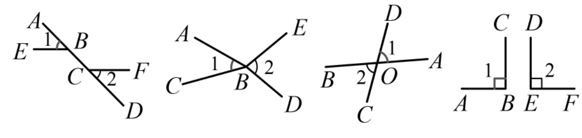

图 5

3.3 超越经验，完成说理

让学生思考，通过观察得到的“对顶角相等”这一结果是否具备说服力.随后，通过几何画板呈现的视错觉图，让学生感受“眼见不一定为实”的道理.在视错觉图中，我们通过几何画板的测量工具进行验证说明，进而引导学生进行测量.

师：我们凭观察，可知对顶角相等.那么观察

的结果是否可以直接作为结论使用了呢？

生：不可以.

师：有同学已经认识到了不可以，但也有同学可能还有疑惑，我们通过一个例子来验证一下，看看眼见是不是为实呢？

教师打开几何画板.

师：观察一下图片（图 6），看看这两条横的线段哪一条长？

生：一样长.

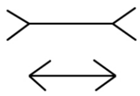

图 6

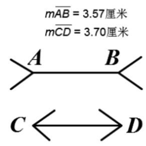

图 7

师：哦，你们怎么知道一样长？

生：我们凭借经验！虽然知道看上去是第一个长，但是实际上是一样长的.

师：好，也就是说你们的观察得到第一个长，你们凭经验觉得是一样长. 下面我们通过测量来验证一下.

教师通过几何画板测量线段长度，如图 7 所示.

生：意外啊！

生：观察和经验都不靠谱啊！

生：我们又被套路了！

师：下面我们把其他线段隐藏起来，再看一看（图 8）.

图 8

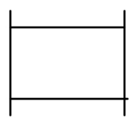

图 9

生：好像确实是下面长.

师：进一步，我们做两条辅助线，再看一看（图 9）.

生：果然是下面长出来一点.

师：通过这个视错觉图，我们知道眼见不一定为实，所以我们不能光通过观察就得到“对顶角相等”这一结论. 那么我们来测一测，打开书本第 38 页，看图 13-2，并且测量 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的大小.

学生测量.

师：多少度？

生：24°.

生：25°！

师：24° 和 25° 都有. 我们通过测量是不是得到对顶角相等？

生：是的.

师：那么测量的结果是否可以直接作为结论使用了呢？为什么？

生：不可以. 测出来不一样，有误差.

师：非常好，所以我们需要讲道理. 你能否用“因为”、“所以”这样的“说理”，来确认“对顶角相等”的正确性呢？

生（说理）：因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$、$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 分别是邻补角（已知），所以 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$，$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$（邻补角的意义），故 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$（等量代换），所以 $\angle 1 = \angle 3$（等式性质）.

师（板书）：符号语言：$\angle 1 = \angle 3$（对顶角相等）.

师：非常好，你们用的方法和两千三百年前的古希腊数学家欧几里得一模一样，真了不起！据说欧几里得这一方法可能最早源于泰勒斯. 下面我们来看一个微视频，了解一下泰勒斯和“说理”的相关背景.

教师微视频展示泰勒斯的故事及“几何说理”的相关背景.

3.4　运用新知，解决问题

例　如图 10，直线 AB 和 CD 交于点 O，$\angle AOC = 50^\circ$.

（1）求 $\angle BOC$ 的度数；

（2）求 $\angle BOD$ 的度数；

（3）求 $\angle AOD$ 的度数.

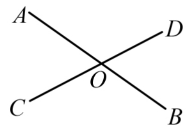

图 10

教师示范讲解（1）（2），学生独立解（3），通过例题进一步体会几何的说理方式. 接着，利用本节课所学知识，解决“墙角线”测量问题. 教师还找来了一个石膏模型，让学生设计工具，测量石膏模型中的有关角度，并将网上销售的类似工具介绍给学生，让学生感受知识在实际生活中的应用.

师：如何测量“墙角线”的夹角？

生：只需要测量邻补角或对顶角就可以了.

师：是的，运用今天所学的对顶角相等或者邻补角的意义，只要测量出对顶角或者邻补角的大小，仿照例题，运用几何说理，就可以解决问题.

师：实际上，类似墙角这样不能直接测量的角，生活中有很多. 比如，老师手里的石膏模型中的这个角度（图 11）. 你们能不能利用今天所学设计一个工具，直接测量这个角的大小呢？

学生讨论设计并分享展示工具实践测量.

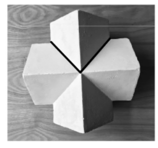

图 11

图 12

师：你们的设计很棒，我们生活中也确实有这样的工具，并且已经投入生产，跟你们的设计思路是完全一致的（图 12）.

师:根据卖家说明,只需要调节螺母就可以确定角度,沿着尺边画出角度.同样地,也可以确定角度后测量出角度值.所以你们能设计出这样的工具,确实 ——

生:太聪明了!

师:是的,这个工具用到的原理就是 ——

生:对顶角相等!

3.5 小结反思,倾听学生

师:本节课我们学习的内容是什么?具体从知识上、情感态度上分别说一说.

生 1:我们学到了对顶角和邻补角的知识,知道了对顶角相等,还知道了一个神奇的量角器.

生 2:我们还知道了泰勒斯,知道了眼见不一定为实,经验不一定可靠,还有要讲道理.

生 3:我们要感谢泰勒斯发现了"对顶角相等",这是很有用的,还有要讲道理才能有说服力.

师:大家总结得很好,希望大家能把所学知识用在生活中,运用逻辑思维解决问题.

4 学生反馈

本节课后对全班 33 名学生进行了问卷调查.客观题部分,全部学生都表示理解泰勒斯为什么要说明对顶角相等,并认可泰勒斯的说理是有必要的.

主观题部分,在问到"你觉得为什么要对对顶角相等进行说理"时,学生提到的答案有:增加准确性,防止误差(13 人);要讲道理,显得有说服力(11 人);为了证明对顶角相等这个定理(5 人);直觉不可靠,要说理确认正确性(5 人);设计出测量工具,应用于生活实际(3 人);训练数学逻辑思维(3 人).

对于"谈谈对小视频中所介绍的泰勒斯故事的感想",学生回答提到:泰勒斯很伟大(20 人);泰勒斯很聪明(12 人);泰勒斯很讲道理,说理很让人信服(10 人);科学知识对生活很有用(9 人);泰勒斯为人类做出了很大贡献(5 人);我们要向泰勒斯学习(4 人).

对于"你觉得本节课学习的知识在生活中是否有用?试举例说明",全部学生都觉得有用,25 位学生写到"可以用来测量角度",5 位学生写到"可以用来讲道理".

对于"你是否对老师在上课中讲的数学史内容感兴趣,为什么?还想知道哪些有趣的数学史内容?",所有学生都表示感兴趣,理由主要有:有趣(14 人);丰富知识(12 人);拓展视野(7 人);比书本知识更有人文情怀,更让人信服(人);(4)知道了学习内容的来源(3 人);知道了科学知识是有用处的(6 人);可以从数学家的角度来思考(1 人).

此外,问卷还从知识方面考察了一道习题:"直线 AB 和 CD 交于点 O,$\angle AOC=60°$,求 $\angle BOD$,$\angle AOD$ 的度数."全部学生都能够用说理的方式书写,有 23 位学生的解答正确,其余 10 位学生在因果关系或理由方面有所遗漏,整体的达成度较好.

5 结语

本节课的基本理念是体现几何命题的双重价值 —— 实用价值和理性思维训练价值.从建筑上的墙角线出发引入对顶角和邻补角概念以及命题"对顶角相等",最后回归问题解决,体现的是命题在现实生活中的应用价值;观察与测量的局限性以及说理的必要性,反映的是命题在训练逻辑思维、培养求真务实品质上的价值.

追溯"对顶角相等"这一命题的历史,让我们开始深入思考命题本身的必要性以及对其进行说理的必要性,于是才有了本节课的教学设计.为了揭示命题本身的必要性,再现命题的自然发生过程,我们构建了从现实情境出发回到现实情境的教学路径;为了揭示说理的必要性,我们通过历史上著名的视错觉图形来揭示观察的局限性.因此,数学史的重要价值就在于"对顶角相等"这一命题双重价值的构建.

此外,教师让学生对"对顶角相等"进行说理,并将他们的说理方法与微视频中所呈现的泰勒斯的方法进行对照,学生发现自己的方法和数学家的方法是一样的,因而获得了成功的体验.而泰勒斯的故事则让学生感受到知识的力量和价值,从而让他们树立正确的数学观.

参考文献

[1] 汪晓勤.HPM 数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017:1-10.

[2] 吴文俊.世界著名科学家传记[M].北京:科学出版社,1992:1-10.

[3] 李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社,2002:32-51.

[4] 卡茨.数学史通论[M].北京:高等教育出版社,2004:39-40.

[5] 欧几里得.几何原本[M].兰纪正,朱恩宽,译.西安:陕西科学技术出版社,2003:14-15.