

六十干支周纪时系统及公式的构建

陈亮^{1,2,3} 陈美琪² 蒋洪力⁴

(1.华东师范大学地理信息科学教育部重点实验室,上海200241; 2.华东师范大学地理科学学院,上海200241;
3.自然资源部超大城市自然资源时空大数据分析应用重点实验室,上海200063; 4.唐山市开滦第一中学,
河北唐山063000)

摘要: 本文基于国家标准《农历的编算和颁行》,深入解读干支纪时系统的编算规则并构建了干支纪年、纪月、纪日公式。本文通过对公式的构建和对证明过程的解析,全面阐释干支纪时系统的编历原理,建立了完整的干支纪年、纪月、纪日的计算系统,加快计算速度,简化推算方法,使干支纪时系统能更好地服务于民众的生产和生活。

关键词: 六十干支周; 干支公式; 编算规则; 二十四节气; 农历

中图分类号: G633.55

一、前言

农历是我国正式行使的传统历法。六十干支周是农历的组成部分,它在生产、生活、科研等领域具有广泛的实用价值和不可替代的重要作用。然而,当前一些日历产品对于干支纪时的历法属性表述各异,农历月与干支月、农历年与干支年编排不一致,干支月推算方法繁琐,给出的一些公式互不相同且缺少对公式意义的解析,引起了公众的困惑和质疑。因此,为了保证干支纪时编算的科学性和准确性,有必要以国家标准《农历的编算和颁行》为基准,深入解读干支纪时的原理和编排规则,并构建完善的纪年、纪月、纪日计算系统,从而使干支纪时系统更好地服务于民众的生产和生活。^[1]

二、六十干支周及其纪时系统

六十干支周是把甲、乙……癸等十个天干和子、丑……亥等十二个地支各循序取一字相配成一对干支,形成由甲子、乙丑……癸亥共六十对干支组成的计序号系统,循环使用,通常用于纪年、纪月和纪日。如表1所示,如果今年是甲子年,明年就是乙丑年,60年以后又是甲子年。纪月(或纪日)也是如此,以60月(或60日)为周期,循环使用。六十干支周长度稳定,且沿用几千年也未中断和改变,因此在计序、纪时、修订历史文献纪日误差、整理古代天文纪录等方面都有着不可替代的作用。下面就依次讨论干支纪年、纪日和纪月三种纪时系统。

表1 六十干支周

序号	干支	序号	干支	序号	干支	序号	干支	序号	干支	序号	干支
1	甲子	11	甲戌	21	甲申	31	甲午	41	甲辰	51	甲寅
2	乙丑	12	乙亥	22	乙酉	32	乙未	42	乙巳	52	乙卯
3	丙寅	13	丙子	23	丙戌	33	丙申	43	丙午	53	丙辰
4	丁卯	14	丁丑	24	丁亥	34	丁酉	44	丁未	54	丁巳
5	戊辰	15	戊寅	25	戊子	35	戊戌	45	戊申	55	戊午
6	己巳	16	己卯	26	己丑	36	己亥	46	己酉	56	己未
7	庚午	17	庚辰	27	庚寅	37	庚子	47	庚戌	57	庚申
8	辛未	18	辛巳	28	辛卯	38	辛丑	48	辛亥	58	辛酉
9	壬申	19	壬午	29	壬辰	39	壬寅	49	壬子	59	壬戌
10	癸酉	20	癸未	30	癸巳	40	癸卯	50	癸丑	60	癸亥

1. 干支纪年系统

纪年是干支纪时系统最常见的一种应用。研究我国历史需要解读史书，并将史书中的干支纪年换算为公历年，这就需要构建公式进行计算。《农历的编算和颁行》中规定了干支纪年的循环参考时间：对应于公历1984年2月2日（春节）0时起到1985年2月19日（除夕）24时截止的农历年为甲子年。本文以此甲子年为计算起点，构建干支纪年与公历年之间的转换关系。

1984年为甲子年，定其年干支序号A=1；1985年为乙丑年，则A=2；余类推。年干支序号和公元年都是以“1”为公差的等差数列。为了更清楚地展示公元年与干支序号之间的关系，以公元年Y为横坐标，年干支序号A为纵坐标，画出A与Y函数关系的图像，如图1所示。该图像由许多排列均匀而孤立的点组成，这些点均在斜率为1的相互平行的直线段（图中细点虚线段）上；直线段上满足整数对(Y,A)点的坐标就是某公元年份及其对应的农历年干支序号。

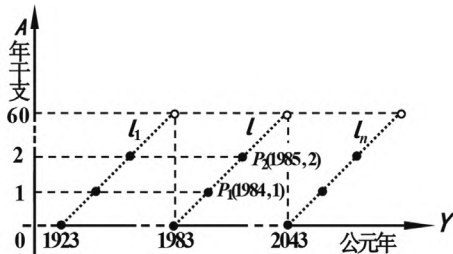


图1 公元年份与其对应农历年干支序号的关系

在图1中，点P₁(1984,1)、P₂(1985,2)在直线段L上，易得直线段L的方程为A=Y-1983。因为年干支以60年为周期循环纪年，将上式用同余式表示，^[2]两边对模60同余，即A≡(Y-1983)(mod 60)≡(Y-3)(mod 60)，得某一公元年Y_{A.D.}的农历干支纪年序号A(Y_{A.D.})公式：

$$A(Y_{A.D.})=(Y_{A.D.}-3)(\text{mod } 60) \quad (2-1)$$

即某一公元年的干支序号为其年份减去3的差对60的余数。根据公式(2-1)，可以快速准确地求算任意公元年的干支序号。例如，公元2023年的干支序号A(2023)=(2023-3)(mod 60)=40，该年为癸卯年；公元1911年的干支序号A(1911)=(1911-3)(mod 60)=48，该年为辛亥年；公元1894年的干支序号A(1894)=(1894-3)(mod 60)=31，该年为甲午年。

需要注意的是，公元纪年没有“0”年。为了使正负运算统一，公元前某年Y_{B.C.}的干支公式可表示为（Y_{B.C.}用负数来表示，即公元前一年记为“-1”，前二年记为“-2”，余类推）：

$$A(Y_{B.C.})=(Y_{B.C.}-2)(\text{mod } 60) \quad (2-2)$$

即公元前某年的干支序号为其年份（用负数表

示）减去2的差对60的余数。例如，孔子生于公元前551年，其年干支序号A(-551)=(-551-2)(mod 60)=47，即孔子出生于庚戌年。根据上述公式计算：Y=2，A=59；Y=1，A=58；Y=-1，A=57；Y=-2，A=56；余类推。公元前和公元的干支年连续衔接。根据《农历的编算和颁行》规定，干支纪年从每年的农历正月初一北京时间0时开始。

2. 干支纪日系统

干支纪日是按顺序用六十干支命名，从甲子日、乙丑日……到癸亥日，六十日一个循环，周而复始。即公元日期每增加1日，农历日干支也增加1日。干支纪日不仅是迄今世界上已知历史最长的一种纪日和计序系统，还是不同历法之间相互转换的重要工具。

(1)公式的构建

为了方便计算，下面构建干支纪日与公历日换算的关系式。如图2所示，图中展示了时间轴（横轴）上某一日期干支日序号的推算过程。对于需要进行换算的某一日期，Y为其所在年（用四位数表示），m为其所在月，d为其在此月中的日期，O为计算起点，即公元前1年（根据上文公元前年份的规定，其年份记为“-0001”）的岁末，A为所求年Y的前一年岁末，B为所求月m的前一月月末，E为所求年Y的岁末，[x]为下取整函数。

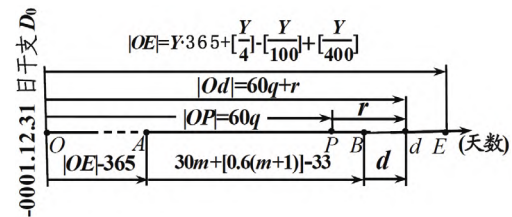


图2 年月日各时段天数及其相互关系

对起算点O，按扁平公历推算其日干支序号D₀=15，即日干支序号计算的起点。自O起计量到点d截止的间隔天数为|Od|。因为干支纪日以60日为循环周期，所以用60除|Od|，得整数商q和余数r，即r=|Od|-60q。令|OP|=60q，即|OP|能被60整除，则点P的日干支序号也是D₀。因为公历日每增加1日，干支日也相应增加1日，所以余数r就是点d离开点P的日数，则点d的日干支序号D(d)=D₀+r=D₀+|Od|-60q=D₀+|Od|(mod 60)。由图2可以看出，|Od|=|OA|+|AB|+|Bd|=(|OE|-365)+(AB)+d，其中|OE|=365Y+[Y/4]-[Y/100]+[Y/400]，|AB|=30m+[0.6(m+1)]-33。代入上式得D(d)=D₀+(365Y+[Y/4]-[Y/100]+[Y/400]+30m+[0.6(m+1)]-398+d)(mod 60)。设年份Y的前两位数为c，后两位数为y，则c=[Y/100]，y=Y-100c，则

$Y=100c+y$ 。代入上式并化简,得公历日期的农历日干支序号公式(适用于公元1582年格里历开始应用之后):

$$D_G(d)=[c/4]-16c+5y+[y/4]+30m+[0.6(m+1)]+d-23 \pmod{60} \quad (2-3)$$

儒略历是公历的前身,根据其置闰规定和日期编排规则,仿照公式(2-3)的推导思路,可推导出儒略历的干支纪日序号公式:

$$D_J(d)=[-15c+5y+[y/4]+30m+[0.6(m+1)]+d-25] \pmod{60} \quad (2-4)$$

上述公式中,1、2月要分别看作上一年的13、14月来计算。用(2-4)式减去(2-3)式,就得出上述两种历法的日期差公式:

$$\Delta d=c-[c/4]-2 \quad (2-5)$$

(2)公式的应用

利用公式(2-3)和(2-4)可以准确且方便地将公历或儒略历中的日期换算为干支纪日。例如,开国大典日(公历1949年10月1日)的干支序号 $D_G(d)=[19/4]-16 \times 19+5 \times 49+[49/4]+30 \times 10+[0.6(10+1)]+1-23-60 \times 4=1$,即干支序号为1,该日为农历甲子日,与《农历的编算和颁行》中规定的干支纪日的循环参考时间吻合。^[3]又如,牛顿的出生日期为公历1643年1月4日,根据公式(2-3)可算得该日为农历庚戌日;其儒略历日期为1642年12月25日,根据公式(2-4)亦可算得该日为农历庚戌日。根据公式(2-5)算得 $\Delta d=10$,即由于公历和儒略历的不同,同一天在这两种历法中相差10日。^[4]类似地,俄国十月革命发生在公历1917年11月7日,儒略历1917年10月25日,根据公式(2-3)和(2-4)都可算得该日为癸丑日,根据公式(2-5)算得 $\Delta d=13$,即将儒略历日期转换为公历日期时,需要将其加上13日得到公历日期。

由此可见,干支纪日系统可以将儒略历和公历联系起来。以日干支作为参考,可以计算两种历法之间的日期差,更方便地进行二者之间的转换。

3. 干支纪月系统

干支系统也可以用于纪月。学术界对于干支纪月系统的历法属性有两种不同的解读,分别是阳历版本和阴阳历版本。下面以《农历的编算和颁行》为参照标准,解释两种版本的制历原理,拟定制历规则,并构建通项公式简化干支纪月的计算。

(1)阳历版本的干支纪月系统

①原理及编算规则

阳历版干支纪月系统的原理相对简单。其以二十四节气即回归年长度定年长和年中的月数,用

二十四节气划分出12个干支月,以干支定月序,每月包含2个节气,不设闰月。拟制定的干支月编算规则如下。

(A) 立春日为干支年首日。

(B) 包含节气立春在内的干支月为干支年首月。

(C) 12个节气日(非中气,下同)分别是12个干支月首日。

(D) 干支月长度是从某个公历月的节气日(含)起计量到次月的节气日(不含)截止的时间间隔。

(E) 十二地支与12个公历月一一对应,其中子、丑……戌、亥分别对应于12、1……10、11月,子月分别对应农历十一月和公历12月,因为三者均包含中气冬至在内,余类推。

(F) 十天干与十二地支相配,60月(即5年)一周,循环使用。

②公式的构建和计算

仿照公式(2-3)的推导方法,得所求m月的干支序号公式为: $M(m)=(M_0+((Y-1800) \times 12+(m-1))) \pmod{60}$ 。上式中,计算起点O是公元1800年1月干支丁丑月($M_0=14$),即所求月干支序号等于自计算起点到所求m月截止的间隔月数加上计算起点的月干支序号的和除以60的余数。将上式化简得 $M(m)=(12Y+m+13) \pmod{60}=(12(100c+y)+m+13) \pmod{60}$,即:

$$M(m)=(12y+m+13) \pmod{60} \quad (2-6)$$

例如,2023年立秋日8月8日的月干支序号 $M=(12 \times 23+8+13) \pmod{60}=57$,即该月为庚申月。8月8日立秋日(即当月上半月的节气日)是庚申月首日,庚申月从8月8日起到9月7日截止,9月8日白露日(即次月上半月的节气日)则是辛酉月首日。当月上半月8月8日立秋日(不含)之前的公历日,属于庚申月的前一个干支月范围,因此月干支序号应减去“1”,即 $M=57-1=56$,为己未月。

进一步还可分解求得月天干和月地支的序号。天干以10为循环周期,则年份Y(以四位数表示)、Y的前两位数c、后两位数y、个位数u之间的函数关系用同余式可表示为 $Y \equiv 100c+y \equiv y \equiv u \pmod{10}$ 。10和12都是60的因数,由公式(2-6)得月天干序号 $M_C(m)$ 和月地支序号 $M_T(m)$ 分别为:

$$M_C(m)=(12y+m+13) \pmod{10}=(2u+m+3) \pmod{10} \quad (2-7)$$

$$M_T(m)=(m+1) \pmod{12} \quad (2-8)$$

需要指出的是,干支纪月系统是名副其实的阳历,其编历核心以二十四节气为基准,它标记和度量视太阳在黄道上的位置和时刻以及周年视回归运动,能够

反映季节、气候、农时和物候特征，因而具有较高的科学性和实用价值。公历虽然也是阳历，但是它的公历月却是人为主观划分，且大月与小月日数相差1~3日，大小月排列也较紊乱，从这方面来比较，干支月优于公历月。由于干支纪月系统的上述优越性，学术界对于阳历版干支纪月的支持率比较高。近期比较盛行的《日梭万年历》和《寿星万年历》等日历就是根据上述编算规则制作的。

然而，干支纪月最终并没有被纳入国家标准，其原因是多方面的。首先，我国至迟从殷商时代起的传统历法就是阴阳历，而农历属于阴阳历。干支纪月虽然与公历同属于阳历范畴，但公历是世界通用历法，而干支月的普及率和影响范围比公历小，因此我国的法定历法是公历和农历。其次，和农历数序纪月相比，干支纪月的纪月方式并不具备优越性。数序纪月属于阴阳历，根据朔望月定月长，并设置闰月，拥有阴历和阳历的双重优点，科学性、实用性强。数序纪月具有深厚的华夏历史文化渊源，它所承载的传统文化及重要的传统节日如春节、元宵节、端午节、中秋节、除夕等与亿万民众的生活息息相关，具有广泛的群众基础。再次，干支纪月系统是纯粹的阳历，干支纪月与农历数序纪月、干支月首日（公历月上半月的节气日）与农历月首日（朔日）、干支年首日（立春日）与农历年首日（正月初一）均不一致。最后，如果干支纪月和农历数序纪月并用，则每一农历月必将跨两个干支月，两者不能兼顾。这也是干支纪月没有被纳入国家标准的重要原因之一。虽然阳历版本的干支纪月系统未被纳入国家标准，但它仍属于我国众多传统历法中一种较典型的阳历，在古代天文学史和历法研究、历史、民俗领域中占有重要位置。

(2) 阴阳历版本的干支纪月系统

① 原理及编算规则

干支系统是农历的一部分，干支纪年、纪日既已被纳入农历的国家标准，干支纪月系统顺其自然应与国家标准保持一致：地支与农历数序纪月相对应，天干与地支相配，以60月为周期循环纪月；以朔望月定干支月长，以二十四节气即回归年定年长；1年分12个月，并通过设置闰月使平均干支年近似等于回归年。仿照《农历的编算和颁行》中农历月的编排规则，拟制定的干支月编算规则如下。

(A) 以北京时间（即120° E标准时）为标准时间。

(B) 干支日的计量是从北京时间0时起到北京时间24时截止的时间间隔。

(C) 朔日为干支月的第一个干支日。

(D) 从某个朔日起到下一个朔日（不含）截止的时间间隔为一个干支月。

(E) 包含节气冬至在内的干支月为子月（对应农历十一月）。

(F) 寅月为干支年首月（对应农历年正月）；寅月第一个干支日为干支年首日（对应农历正月初一）。

(G) 十二地支纪月与农历的十二数序纪月一一对应，即子月对应十一月，丑月对应十二月。

(H) 如果从某个子月开始到下一个子月（不含）之间有13个干支月，则取其中最先出现的一个不包含中气的干支月为闰月；闰月采用在其前一个干支月的名称前加“闰”字的方法命名。

(I) 十天干与十二地支相配，则各月的干支互不相同，以60月为周期循环纪月。

年天干与月干支固定对应关系如表2所示。

表2 年天干（或公元年份的个位数）与月干支对照表

农历月	月地支	甲或己年（4或9）	乙或庚年（5或0）	丙或辛年（6或1）	丁或壬年（7或2）	戊或癸年（8或3）
正月	寅	丙寅月	戊寅月	庚寅月	壬寅月	甲寅月
二月	卯	丁卯月	己卯月	辛卯月	癸卯月	乙卯月
三月	辰	戊辰月	庚辰月	壬辰月	甲辰月	丙辰月
四月	巳	己巳月	辛巳月	癸巳月	乙巳月	丁巳月
五月	午	庚午月	壬午月	甲午月	丙午月	戊午月
六月	未	辛未月	癸未月	乙未月	丁未月	己未月
七月	申	壬申月	甲申月	丙申月	戊申月	庚申月
八月	酉	癸酉月	乙酉月	丁酉月	己酉月	辛酉月
九月	戌	甲戌月	丙戌月	戊戌月	庚戌月	壬戌月
十月	亥	乙亥月	丁亥月	己亥月	辛亥月	癸亥月
十一月	子	丙子月	戊子月	庚子月	壬子月	甲子月
十二月	丑	丁丑月	己丑月	辛丑月	癸丑月	乙丑月

注：表头括号中数字指农历年首日对应的公历年的个位数。

② 公式的构建和计算

首先，绘制年天干与月干支对照表，再根据年天

干与月干支的对应关系构建计算公式。因为干支月以60个月（5年）为周期循环使用，所以本文仅推算自北京

时间公元1984年2月2日(农历甲子年正月初一)0时起到1989年2月5日(农历戊辰年十二月除夕)24时的共60个干支月,并绘制对照表。根据干支月的循环参考时间——1983年农历癸亥(猪)年十一月为甲子月推算:1984年农历甲子(鼠)年正月为丙寅月,二月为丁卯月……1988年农历戊辰(龙)年十一月为甲子月,十二月为乙丑月。根据表2可以查询某一年干任意数序月的月干支。根据表2第一行由公式(2-1)得出的年干对应的公元年的个位数还可以直接查询任意干支月,更加简便。

10个年天干分为5组:甲和己、乙和庚、丙和辛、丁和壬、戊和癸。每组有2年,组内间隔5年(共60个月,为一周期),因此组内的月干支是相同的。由表2和编算规则可知,各月地支是固定和已知的,因此仅需求出各月天干,然后与地支相配即可得出各月干支序号。将表2第一行的5组年天干与第二行的正月天干之间的关系总结如表3所示。

表3 年天干与正月天干对照表

年天干	正月天干
甲(1)或己(6)年	丙(3)
乙(2)或庚(7)年	戊(5)
丙(3)或辛(8)年	庚(7)
丁(4)或壬(9)年	壬(9)
戊(5)或癸(10)年	甲(11或1)

注:表中括号内数字为天干序号。

从表3中可以看出,左列年干序号为非0的有限自然数列。将年干序号 Y_c 看做数列的项序号,则右列月干为首项为3、公差为2的等差数列,由公式(2-1)可知,年干序号 Y_c 与年份 Y 之间的同余关系为 $Y_c \equiv Y-3 \equiv u-3 \pmod{10}$,且 $Y \equiv 100c+y \equiv y \equiv u \pmod{10}$ 。则农历正月天干 M_c (等差数列的项)与年天干 Y_c (数列项序号)之间的同余关系为 $M_c \equiv 3+(Y_c-1)2 \equiv 2 \times Y_c+1 \equiv 2(u-3)+1 \equiv 2u-5 \pmod{10}$ 。则 $M_c \equiv (2 \times Y_c+1) \pmod{10} = (2u-5) \pmod{10}$,即正月天干序号 M_c 等于年的个位数 u 的2倍减去5的差除以10的余数。已知某年的个位数 u ,根据上式,可以直接求出正月天干,而不用再求年天干了。例如,2023年农历正月天干 $M_c \equiv (2 \times 3-5) \pmod{10} = 1$,即天干为“甲”,地支固定为“寅”,得2023年正月为甲寅月。

已知正月天干,其他月天干就可以在正月天干基础上按照10天干顺序依次推算。据此导出任意月份天干的同余式(m_0 为某农历月数,正月数为1,二月数为2,余类推) $M_c \equiv 2u+(m_0-1)-5 \equiv 2u+m_0+4 \pmod{10}$,即:

$$M_c \equiv (2u+m_0+4) \pmod{10} \quad (2-9)$$

例如,由公式(2-9)得2023年农历八月的天干 $M_c \equiv (2 \times 3+8+4) \pmod{10} = 8$,天干为“辛”,八月地支固定为“酉”,得2023年农历八月为辛酉月。

干支纪月序号也可以直接用下式计算:

$$M = (12y+m_0+14) \pmod{60} \quad (2-10)$$

例如,2023年农历八月的干支序号 $M \equiv (12 \times 23+8+14) \pmod{60} = 58$,即辛酉月。

阴阳历干支纪月法与农历数序纪月法的编排规则相同,寅月首日和农历正月初一、干支年首日和农历年首日、干支月和农历月一一对应,表述方法符合我国主流传统历法体系的历史传承。可以用公式(2-9)和(2-10)将数序纪月换算为干支纪月,数序纪月和干支纪月两者并用平行纪月序。

三、结语

六十干支周是农历的重要组成部分,是中国传统历法的结晶,具有悠久的华夏文化渊源,目前不仅在我国被广泛应用,也被全球华人普遍使用,因此六十干支周在传承中华文化、联系华人世界等方面具有无可替代的重要意义。六十干支周在纪时和计序以及修订历史记事、实现不同历法之间的换算等方面也有着广泛的实用价值。本文以国家颁布的农历编算标准为根据,通过构建公式,提供了一种快速计算年、月、日干支序号的方法,更有利于六十干支周的应用、传承和发展。

说明:由于农历年和公元年的起始不一致,所以某一干支年实际上跨过了两个公元年。“公元某年是某干支年”的意思是公元某年大部分都属于某干支年,此公元年即为此农历干支年首日所在的那个公元年。例如,“1984年为甲子年”指的是1984年的大部分都是甲子年,即1984年2月2日(春节)起开始的这个农历年是甲子年。本文中的计算和讨论均采用此种公元年和干支年的对应关系。

参考文献:

- [1][3] 全国信息与文献标准化技术委员会. 农历的编算和颁行:GB/T 33661-2017[S]. 北京:中国标准出版社,2017.
- [2] 潘承洞,潘承彪. 初等数论[M]. 北京:北京大学出版社,2013.
- [4] 金祖孟. 地球概论(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社,1997.

(责任编辑:杨洋)