# 上海 HPM 通讯

## SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2018 年第 7 卷第 4 期

# 《上海HPM通讯》编委会名单

# 刊首语

“互联网+数学教育”是一种现代教育信息技术与数学教育有机融合的新型教育形态。在“互联网+数学教育”背景下，内容精炼、应用灵活的微课不断丰富着教师的教学方式和学生的学习方式，越来越受到师生们的欢迎。

《普通高中数学课程标准（2017 年版）》指出：数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点以及他们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动。作为数学文化不可或缺的一部分，数学史既展现了数学知识的来龙去脉，又承载着培育数学学科核心素养的重要使命，孕育着“立德树人”的教育指向。实践证明，数学史融入数学教学可以揭示知识之谐，呈现方法之美，营造探究之乐，达成能力之助，展示文化之魅，实现德育之效。然而，实际 HPM 教学中却依旧存在数学史“高评价、低应用”的困遇。究其缘由，主要是教师手中的数学史资源缺乏，且对数学史在教学中的运用方式不甚了了，真正的 HPM 教学实践者并不多。如果把数学史“高评价、低应用”看作 HPM 教学实践的一种桎梏，那么 HPM 微课则为数学史插上翅膀，让数学史内容与学生更近、更亲，让 HPM 教学更灵活、更精彩。

所谓 HPM 微课，是指围绕某一知识点（如重点、难点等）或教学环节所制作的以数学史为主题的信息资源，包括 HPM 微视频（时长一般为 6-10 分钟）、HPM 微课教案、HPM 微课脚本、HPM 微课学习单等。HPM 微课不仅继承微课的内容精炼、目的明确、时间简短、应用灵活、适合学生自主学习等特点，而且以“图、文、声、动画”相结合的微视频来展现数学史，促使数学史焕发新鲜活力。

实践表明，HPM 微课是教师开展 HPM 教学活动的有效载体，能够帮助教师在有限的课堂教学时间里灵活地呈现数学史内容，较好地规避因数学史内容不熟悉而引发的科学性错误，或为了阐述数学史内容而导致课堂教学时间延长等情况，提高 HPM 教学效率。其次，HPM 微课是学生开展数学学习的好帮手，其以生动有趣的微视频来展现数学知识的发生、发展过程，提升学生对数学本质的理解，提高学生数学学习的兴趣，在一定程度上促进数学学科核心素养的综合培育。同时，HPM 微课能够及时暂停、反复观看，不仅能在课中辅助 HPM 教学，而且能课前导学、课后巩固与拓展，促进优质 HPM 微课的积累，提高 HPM 教学内容的应用性、可重复性。

HPM 微课为数学史插上翅膀，在“互联网+数学教育”的蓝天中展翅翱翔！

# 目　录

# CONTENT

## 理论探讨

# 基于数学史的数学文化内涵课例分析

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

## 1 引 言

《普通高中数学课程标准》（2017 年版，以下简称《标准》）将“四基”、“四能”、“核心素养”和“情感信念”列为数学课程的目标。其中，关于“情感信念”目标的表述是：“通过高中数学课程的学习，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值；进一步促进学生全面、可持续发展。”[1]这里，学习兴趣、自信心、习惯、科学精神都属于数学学科德育的内涵，而数学的价值则与数学文化密切相关。

《标准》在“课程结构”中指出，“把数学文化融入课程内容中”。在“教学建议”中要求：“在整个数学教学中，教师应当有意识地结合相应的教学内容，引导学生了解数学的发展，认识数学在科学技术、社会发展中的作用，体会数学的科学价值、应用价值和文化价值，提升学生的科学精神、应用意识和文化素养。”[1]

可见，提升数学文化修养，将数学文化融入数学教学，是数学课程对每一位数学教师的要求。普通高考考试大纲中对于数学文化内容的要求，又引发了中学教师对于数学文化的特别关注。然而，高考题中的数学文化只充当了“标签”的角色；数学文化在中学的境遇依然是“高评价低应用”，数学文化融入数学教学的理想案例并不多见，数学文化应有的教育价值在实践中并没有得到充分体现。究其原因，人们对数学文化的内涵还没有清晰的认识，所掌握的适合于教学的数学文化素材少之又少，对于数学文化素材的运用方式也不甚了了。

数学史是数学文化的重要组成部分。实践表明，在数学教学中，数学史可以揭示知识之谐，呈现方法之美，营造探究之乐，达成能力之助，展示文化之魅，实现德育之效[2]。但在 HPM 领域，迄今尚未有人对“文化之魅”的价值展开深入的分析和讨论。

本文试图根据西方学者关于数学史教育价值的讨论，结合课程标准，对课堂上基于数学史的数学文化元素进行分类，并通过 HPM 课例的分析，说明分类框架的适用性，为数学文化融入数学教学提供一定的参考。

## 2 基于数学史的数学文化内涵

根据西方学者所总结的数学史的教育价值以及课程标准所提出的数学的四类价值，我们将课堂上的数学文化内涵分成知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化五个维度，见表 1。

表 1 基于数学史的数学文化内涵分类框架

| 类别 | 代表性观点 | 作者 |
|---|---|---|
| 知识源流 | 数学史有助于学生从内容（问题与解答、猜想与证明等）和形式（数学符号、术语、表征、语言等）两个方面认识数学的演进过程。 | Tzanakis & Arcavi[3] |
| 学科联系 | （1）数学史给予数学以人文的一面。 | 福韦尔[4] |
| | （2）数学史是数学与其他学科之间的一座桥梁。 | Tzanakis & Arcavi[3] |
| 社会角色 | （1）数学史有助于解释数学在社会中的作用。 | 福韦尔[4]; Gulikers & Blom[5] |
| | （2）数学史提供了社会与和文化因素决定数学发展的例子。 | Tzanakis & Arcavi[3] |
| 审美娱乐 | 数学史告诉学生，促进数学发展的不仅有实用性因素，还有美学标准、智力好奇、趣味娱乐等因素。 | Tzanakis & Arcavi[3] |
| 多元文化 | （1）有助于发展多元文化进路。 | 福韦尔[4] |
| | （2）数学史让学生认识数学文化的多元性。 | Tzanakis & Arcavi[3] |
| | （3）历史上数学通过许多不同文化演进。 | Jankvist[6] |
| | （4）不同文化都对数学的形成产生过影响。 | |

早在 19 世纪以前，很多文化名人都已对数学的教育价值有过探讨[7]。图 1 给出了一些主要的观点。其中，学科基础、现实应用、消遣娱乐分别对应于数学文化五维度中的学科联系、社会角色和审美娱乐。

五个维度在《标准》中都有涉及。“知识源流”指的是某个知识点的历史发展过程以及相关的人物、事件、思想等。《标准》在必修课的函数主题上，要求“收集函数概念的形成与发展的历史资料，撰写论文，论述函数发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献”；关于对数函数，要求“收集对数概念的形成和发展的历史资料，撰写论文，论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用”[1]。在必修课的代数与几何主题上，要求“收集几何发展的历史资料，撰写论文，论述几何发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献”[1]；关于数列，要求“收集我国关于数列方面的研究成果，撰写论文，论述发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡

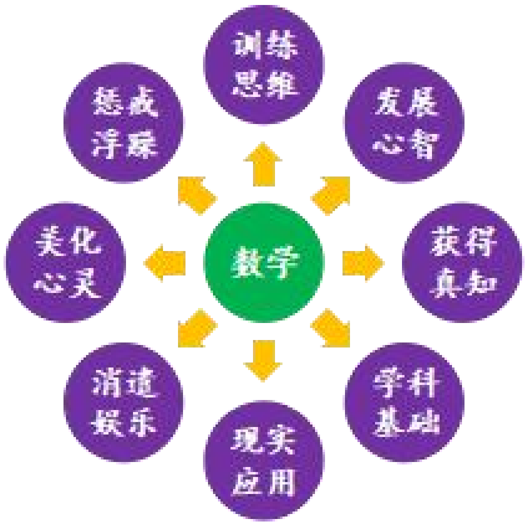



图 1 数学的教育价值

献，例如，以“杨辉三角”、《四元玉鉴》等重要成果为例”[1]。在选修课的对应主题上，也有类似要求。

“学科联系”指的是数学与其他学科之间的关联。M • 克莱因曾将“文化原理”列为数学课程四大原理之一，认为数学教学中应该将数学与其他学科知识联系起来[8]。《标准》在“课程性质”中指出：“数学是自然科学的重要基础，并且在社会科学中发挥越来越大的作用。”[1]在“课程理念”中要求“注重数学文化的渗透，强调数学与生活以及其他学科的联系”[1]；在“教学建议”中要求教师“了解数学与生活、数学与其他学科的联系，创造出符合学生认知规律、有助于提升学生数学核心素养的优秀案例”[1]。

“社会角色”指的是数学对人类文明进步、社会发展所起的重要作用。《标准》在“课程性质”中称：“数学与人类生活和社会发展紧密关联……数学的应用已渗透到现代社会及人们日常生活的各个方面。……数学直接为社会创造价值，推动社会生产力的发展”[1]。

“审美娱乐”指的是数学美与趣味数学。《标准》在 D 课程中设置了“美与数学”，包括“美与数学的简洁”、“美与数学的对称”、“美与数学的周期”、“美与数学的和谐”等。但《标准》几乎没有涉及趣味数学。

“多元文化”指的是不同文明、不同地域在同一数学课题上的成就和贡献。《标准》在“教科书编写建议”中强调：“要把数学文化融入到数学学习内容中，充分体现数学的文化价值，体现数学对于人类文明发展的贡献。在内容中，既要结合数学史适时吸收一些体现中华民族优秀传统文化的素材；也要借鉴异域文化的优秀成分，展现高中数学教科书应有的国际视野”[1]。

数学文化内涵与课程标准所说的数学的四类价值之间的联系如图 2 所示。

## 3 HPM 课例中的数学文化

### 3.1 知识源流

在 HPM 视角下的数学教学中，教师以不同方式运用了有关的数学史料（人物、事件、概念、术语、命题、思想、方法、工具、符号等），这些课例都让学生或多或少地了解、感悟数学知识的源与流。歌德（J. W. von Goethe, 1749-1832）云：“一门科学的历史就是这门

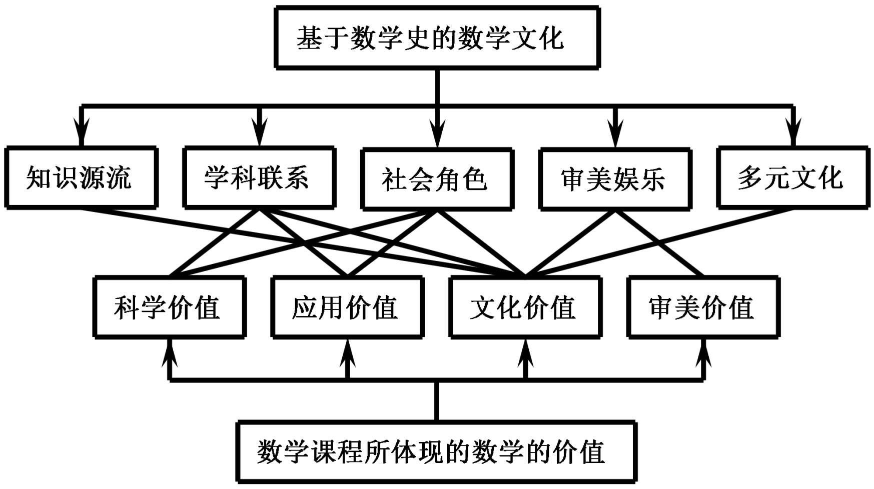



图 2 数学文化各维度与数学价值的对应关系

科学本身[9]”。按照 Jankvist 的“工具-目标”二元论[6]，数学史本身就是数学学习的目标之一；在课堂上追溯知识之源，是揭示数学的文化价值的重要途径之一。

课例“平方差公式”[10]展示了赵爽的几何方法和他的治学精神；课例“同底数幂的运算”[11]再现了古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 前 297-前 212）数沙的方法和他与叙拉古王子的故事；课例“全等三角形的应用”[21]融入了古希腊数学家泰勒斯（Thales, 公元前 6 世纪）的测量方法并讲述了他的故事；课例“可化为一元一次方程的分式方程”[13]以 13 世纪斐波那契（L. Fibonacci, 1175?-1250?）的雇工付酬问题来引入新课题；课例“一元二次方程的配方法”[14]采用了阿拉伯数学家花拉子米（al-Khwarizmi, 780?-850?）的几何解法；课例“函数的概念”[15]追溯了“函数”概念从解析式定义到变量依赖关系定义的历程以及“函数”一词的来历，等等，这些课例往往都涉及一个人物、一个问题、一种方法、一个主题，使课堂洋溢着文化的芬芳。

### 3.2 学科联系

数学史告诉我们，数学与人类其他知识领域（自然科学、人文与社会科学、艺术等）息息相关，数学史正是沟通数学与其他学科的一座桥梁。因此，数学与其他学科之间联系乃是

课堂上数学文化的重要内涵之一。

在课例“有理数的乘法”的引入环节，教师采用了司汤达（Stendhal, 1783-1842）自传中所记载的作者学习“负负得正”法则的故事。故事中，司汤达的两个老师夏贝尔和迪皮伊都未能为他解释为什么负负得正，当老师将负数解释为欠债时，司汤达追问：500 法郎的债务乘以 10000 法郎的债务，何以能得到五百万的收入？直接导致老师“精神崩溃”。教师由此提出：如何帮司汤达解决这一困惑？

在课例“勾股定理”[16]中，教师尝试从海涅 (H. Heine, 1797-1856)的一首诗开始：

真理，她的标志是永恒
暗昧世界始见她的光明
毕氏定理今犹在
恰似初授时的情形

缪斯女神把这光芒馈赠
毕达哥拉斯要把祭礼行
百牛烤熟又切片
难表心中感激之情

从那天起，当它们臆测
又一个真理揭开了面容
在地狱般的圈栏
暴发出一阵阵哀鸣

难阻真理发现者的暴行
毕氏让它们永不得安宁
它们瑟瑟颤抖着
绝望地闭上了眼睛

这首诗表达了诗人对弱者的同情之心，诗中的施暴者正是发现勾股定理（后人称之为“百牛定理”）的毕达哥拉斯学派。教师由此提出问题：究竟是怎样的一个几何定理，能让数学家和牛结下“千古仇怨”呢？

利用文学作品来教数学，是数学教学中体现学科联系的途径之一。体现学科联系的 HPM

课例富有吸引力，令人耳目一新。

### 3.3 社会角色

数学在人类文明史上扮演者举足轻重的作用，应用的广泛性正是数学的基本特点之一。比利时-美国科学史萨顿（G. Sarton, 1884-1956）甚至认为，数学史是文明史的核心。数学的“社会角色”，主要指的是数学的应用价值。

荷兰 HPM 学者 van Maanen 曾将 14 世纪意大利的一个法律案例用于课堂教学[17]：如图 3，甲、乙两块土地的主人都想获得洪水过后所产生的肥沃的淤积地，问：二人如何分配这块淤积地？意大利法律教授巴托鲁斯（Bartolus, 1313-1357）给出了分配方案：淤积地离谁家原有土地的边界更近，就归属谁家。学生经过探究，得出图中两条边界线所构成角的平分线就是两家各得的淤积地的分界线。接着，将边界线换成圆弧以及更一般的曲线，让学生进一步探究淤积地的分配方法。这是用数学解决法律问题的例子。

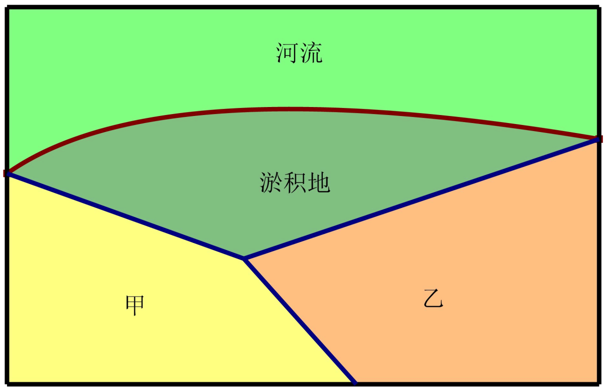



图 3　淤积地分配问题

在课例“相似三角形的应用”[18]中，教师将古希腊萨默斯隧道的设计问题用于课堂教学，深受学生的喜爱。

图 4  萨默斯隧道

萨默斯隧道（图 4）全长 1036 米，横断面宽和高均为 1.8 米，被誉为古代水利工程的奇迹。教师在介绍该隧道的基本信息之后，提出问题：公元前六世纪的古希腊人究竟是如何设

计隧道的？他们何以能将隧道开凿得如此精准？在学生热烈讨论之后，教师揭开了隧道背后的秘密。如图 5 所示，隧道的北、南入口分别为 $A$ 和 B。从南入口 $B$ 出发，在山外筑一条水平的道路 $BCDEFGHIJ$，接近北入口，这条路由若干直线段首尾连接而成，相邻两段互相垂直。再从北入口 $A$ 筑一条路 $AK$ 垂直于 $IJ$，垂足为 $K$。过 $A$ 作 $CB$ 反向延长线的垂线，垂足为 $L$，连结 $AB$，于是得 Rt$\Delta ALB$，利用山外路段的长度，易于算出直角边 $AL$ 和 $BL$ 的长度。分别在 $AK$ 和 $BC$ 上取点 $M$ 和 $N$，过点 $M$ 作 $AK$ 的垂线段 $MP$，过点 $N$ 作 $BC$ 的垂线段 $NQ$，使得 $PM : AM = QN : BN = AL : BL$，于是 Rt$\Delta AMP$、$BLA$、$BNQ$ 两两相似，因此，$P$、$A$、$B$、$Q$ 四点共线。因此，只要在 $P$、$Q$ 两处放置标志物，南北两个工程队在开凿过程中始终能看到标志物，即能确保方向正确了。

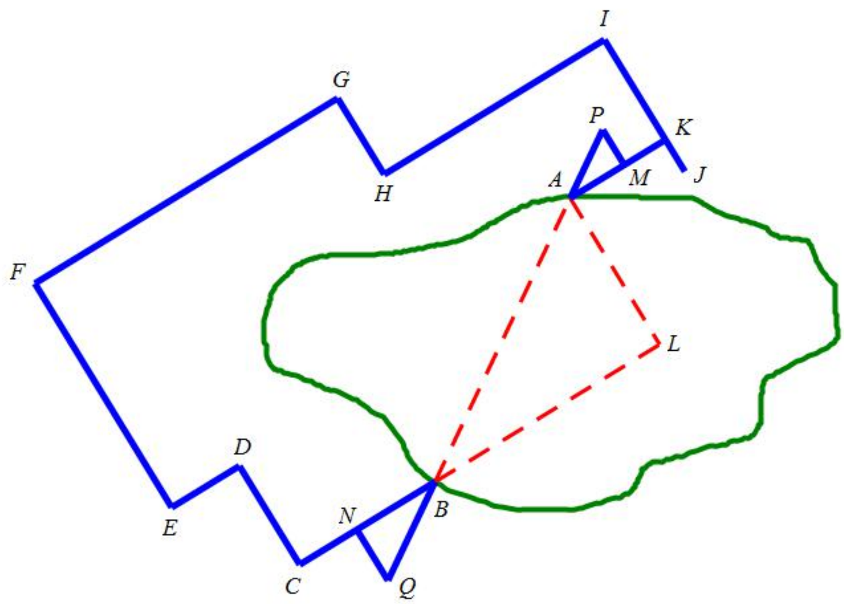



图 5 古希腊数学家海伦所记载的隧道设计方法

海伦所记载的上述隧道设计方法让学生惊叹几何学的应用价值和神奇力量，真切感受到了数学与现实生活之间的密切联系，深刻体会到了数学的社会角色。

### 3.4 审美娱乐

世界因数学而美丽，数学因教育而精彩。虽然数学美无处不在，但这种美是针对具备一定鉴赏力的学生而言的。而学生对于数学美的鉴赏，需要教师在课堂上创造机会、并给予引领。在课例“字母表示数”[19]中，教师用英国幽默作家杰罗姆（J. K. Jerome, 1859～1927）《懒人懒办法》中的一段文字来说明字母表示数的意义：

“十二世纪的青年堕入情网，你可别指望他会后退三步，凝视情人的眼睛，然后告诉他：你太美了，美得简直不像活人。他会说他要到外边去看看。倘若正好碰上那么一位仁兄，并

打破他的脑袋——我指的是另外那个家伙的脑袋，这就说明他——前一个人的情人是个漂亮姑娘。但要是另一个家伙打破他的头——不是他自己的，这你知道，而是另一个家伙的——另一个家伙是对第二个家伙而言的，这就是说，因为事实上另一个家伙仅仅对于他来说是另一个家伙，而不是第一个家伙——好了，如果他的头被打破，那么他的女孩——不是另一个家伙的，而这个家伙——你瞧，如果 A 打破了 B 的头，那么 A 的情人就是一个漂亮女孩；反之，如果 B 打破了 A 的头，那么 A 的情人就不是个漂亮女孩，而 B 的情人才是。”

尽管这段文字无关数学，但从侧面展示了数学的简洁之美。而在课例“完全平方公式”中，教师介绍了古希腊数学家欧几里得在《几何原本》卷二中给出的命题：“任意分一线段成两段，则整段上的正方形等于两分段上的正方形与两分段所构成矩形的二倍之和。”让学生感受今日符号语言的简洁之美和对称之美。

历史上的趣味数学问题是 HPM 课例的重要素材。在课例“一元一次方程”中，教师运用了《希腊选集》中的丢番图的墓志铭；在课例“二元一次方程组的概念”中，教师采用了古希腊数学家欧几里得的著名趣味问题：“骡子和驴驮着酒囊行走在路上，为酒囊重量所压迫，驴痛苦地抱怨着，听到驴的怨言，骡子给她出了这样一道题：“妈妈，你为何眼泪汪汪，满腹牢骚，抱怨的应该是我才对呀！因为，如果你给我一袋酒，我负的重量就是你的 2 倍；若你从我这儿拿去一袋，则你我所负重量刚好相等。”好心的先生，数学大师，请你告诉我，他们所负酒囊各几袋？”

历史上的趣味问题仿佛陈年佳酿，历久弥香；学生仿佛穿越时空，与古人一起感受数学带来的愉悦。

### 3.5 多元文化

历史上不同时空的数学家对于同一个数学主题往往都做出了各自的贡献，数学史揭示了数学文化的多元性。因此，“多元文化”构成了数学文化的重要内涵。

在课例“一次方程组的应用”[20]中，教师运用了古代中国、古巴比伦、中世纪欧洲的数学问题。学生认为，古代数学问题让他们体会到古代不同文明的数学文化，开阔了他们的视野。在课例“分数指数幂”[21]中，教师展示了 14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）、16 世纪荷兰数学家斯蒂文（S. Stevin, 1548-1620）、17 世纪荷兰数学家吉拉德（A. Girard, 1595-1632）、英国数学家牛顿（I. Newton, 1642-1727）等对分数指数幂概念和符号表达的贡献（图 6），呈现了多元文化。

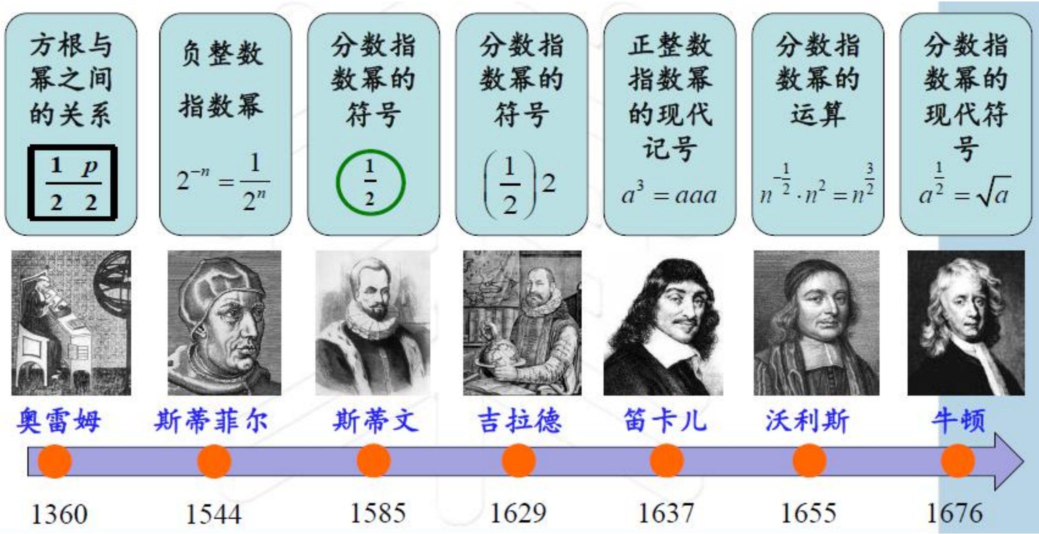



图 6 分数指数幂概念和符号的历史演进

## 4 结语

以上我们看到，数学文化内涵的五个维度——知识之源、学科联系、社会角色、审美娱乐、多元文化在 HPM 课例中都有体现。但在实践中，不同维度的利用并不均衡。HPM 视角下的数学教学，是指以解决某个教学问题为主旨，借鉴、运用数学史的课堂教学，因此，所有的 HPM 课例都会涉及知识之源。HPM 课例力求凸显知识的必要性，因而往往会体现数学的社会角色。但在学科联系、审美娱乐、多元文化三个维度上，已有的课例做得并不理想。无疑，要在教学中深刻、全面体现数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值，优化数学史的教育价值，我们还需要在已有课例研究的基础上开展更深入、系统的数学史文献研究和实践研究。

## 参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京：人民教育出版社, 2017.

[2] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study [J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.

[3] Tzanakis, C., Arcavi, A. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey [C]. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, 201-240.

[4] Fauvel, J. Using history in mathematics education [J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.

[5] Gulikers I., Blom K. A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of

history in geometrical education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, 47: 223-258.
[6] Jankvist U.T. A categorization of the ‘whys’ and ‘hows’ of using history in mathematics education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71: 235-261.
[7] Cajori, F. *Mathematics in Liberal Education* [M]. Boston: The Christopher Publishing House, 1928.
[8] Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books [J]. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418-427.
[9] Von Goethe, J. W., Xiv. *Theory of Colours* [M]. London: John Murray, 1840.
[10] 李玲, 顾海萍.“平方差公式”：以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014, (11): 43-47.
[11] 齐春燕, 顾海萍.“同底数幂的运算”：以重构和顺应的方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (3): 39-42.
[12] 陈嘉尧. HPM 微课在全等三角形教学中的应用[J]. 数学教学, 2016, (6): 41-45.
[13] 洪燕君，顾海萍.“可化为一元一次方程的分式方程”：按五项原则融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (1): 42-46.
[14] 沈志兴, 洪燕君.“一元二次方程的配方法”：用历史体现联系[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (10): 38-42.
[15] 方倩, 杨泓. HPM 视角下的初中函数概念教学[J]. 中学数学月刊, 2016, (11): 40-43.
[16] 李秀娟. 数学史融入勾股定理教学的行动研究[D]. 华东师范大学, 2016.
[17] Van Maanen, J. Teaching geometry to 11 year old "medieval lawyers" [J]. *The Mathematical Gazette*, 1992, 76(475): 37-45.
[18] 王进敬, 汪晓勤. 运用数学史的“相似三角形应用”教学[J]. 数学教学, 2011, (8): 22-25, 32.
[19] 王进敬. 数学史融入七年级数学教学的行动研究[D]. 华东师范大学, 2011.
[20] 顾海萍, 汪晓勤. 一次方程组的应用：从历史到课堂[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014, (6): 30-34.
[21] 汪晓勤, 叶晓娟, 顾海萍.“分数指数幂”：从历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (4): 59-63.

# 教学实践

# HPM 视角下的“二元一次方程组概念”教学*

蔡颖慧[1]，栗小妮[2]
（1.宝山教育学院，上海，201999；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

## 1 引 言

方程是描述现实世界中等量关系的一种数学模型，方程的学习可以培养学生的符号意识、模型思想以及应用意识等。在学习二元一次方程前，学生已经学习了一元一次方程，对方程的认识和求解已有一定的基础。

在已有的教学设计中，教师大多从学生已有的认知“方程”、“一元一次方程”出发进行设计，突出二元一次方程与一元一次方程的区别和联系，但是，教学中常有学生在学习了二元一次方程（组）后依然存在困惑，很多题目只要设一个未知数建立一元一次方程就能很快解决，为什么要设两个未知数，列一元二次方程来解？这说明教师在教学中并没有打破学生原有的思维定式，其认知结构没有发生本质转变[1]-[6]。李继选（2014）通过用不同的方法解决同一个实际问题，并对解决问题的方法逐渐简化，抽象出二元一次方程的概念，让学生体会学习二元一次方程的必要性[7]。王红权（2016）认为这节课内容丰富，承上启下，从数学文化的角度看，它可以体现数学的多元文化，从数学的发展历史看，方程的发展是历史上数学发展的主线之一，教学设计应该重视内容的丰富性、关联性和思想性，既要体现数学的工具价值，更要注重该内容在提升学生数学核心素养层面上的育人价值[8]。

如何在本节课中让学生体会到学习二元一次方程的必要性，让学生感受到二元一次方程悠久的历史、数学的多元文化，是我们从 HPM 视角设计本节课的初衷。

## 2 历史素材

荷兰著名数学家和数学史家范德瓦登（van der Waerden，1903~1996）将传统数学划分为两种，一种是以逻辑证明为特征的演绎数学传统，一种是以计算为特征的大众数学传统，有关方程的计算问题均属于后一种传统。历史上的二元一次方程组问题具有两个特征，一是

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

源于实际，二是富有趣味性，可以分为四类[9]。

第一类问题具有如下形式：已知两个量的和为$c_1$，第一个量的 $a$ 倍与第二个量的 $b$ 倍为$c_2$，求这两个量，即如$\begin{cases} x+y=c_1 \\ ax+by=c_2 \end{cases}$。我们已熟知的“鸡兔同笼”、“僧分馒头”、“二果问价”等问题均属于这类。

第二类问题为“盈不足”问题，源于《九章算术》，后通过阿拉伯传入欧洲，其一般形式是：若干人共同出钱购物，若每人出$a_1$，则多了$c_1$；若每人出$a_2$，则少了$c_2$，求人数和物价，即$\begin{cases} a_1x=y+c_1 \\ a_2x=y-c_2 \end{cases}$。例如《算法统宗》中问题“我问开店李三公，众客都来到店中；一房七客多七客，一房九客一房空。”

前面两类问题在《九章算术》中位于“盈不足”一章，他们认为这类问题不需要以线性方程组的方法求解，真正需要方程组解决的问题是比“盈不足”更复杂的问题，乃是“群物总杂，各列有数，总言其实”的问题，这类问题的一般形式是：两种商品各有$a_1$和$b_1$件时总价为$c_1$，各有有$a_2$和$b_2$件时总价为$c_2$，求这两种商品的单价，即如$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$。

例如《九章算术》中的问题“5 头牛、2 只羊共值 10 两，2 头牛、5 只羊共值 8 两。问：牛和羊的单价各为多少？”

历史上第四类二元问题的一般形式是：甲、乙二人各有钱若干，甲从乙处得$c_1$，则甲的钱数为乙的 $b$ 倍；乙从甲处得$c_2$，则乙的钱数为甲的 $a$ 倍，求二人各有多少钱，即$\begin{cases} x+c_1=b(y-c_1) \\ y+c_2=a(x-c_2) \end{cases}$。这类问题似乎源于古希腊，如数学史上著名的“骡子和驴问题”，希腊学者米特洛多鲁斯（Metrodorus）所编的《希腊选集》，斐波那契的《计算之书》中都含有这类问题，典型例子如下：骡子和驴驮着酒囊行走在路上，为酒囊重量所压迫，驴痛苦地抱怨着，听到驴的怨言，骡子给她出了这样一道题：“妈妈，你为何眼泪汪汪，满腹牢骚，抱怨的应该是我才对呀！因为，如果你给我一袋酒，我负的重量就是你的 2 倍；若你从我这儿拿去一袋，则你我所负重量刚好相等。”好心的先生，数学大师，请你告诉我，他们所负酒囊各几袋？

## 3 教学设计与实施

在了解了相关历史之后，结合教科书与学生实际情况，我们将本节课的教学目标设定如下：

（1）理解二元一次方程及其解的概念；理解二元一次方程组及其解的概念；会判断一对数是否是二元一次方程（组）的解；

（2）在经历分析问题、解决问题的过程中，认识到方程思想是解决实际问题的有力工具，体会“二元一次方程（组）”作为一种数学模型的必要性和重要性，体会数学建模思想；

（3）在历史名题的背景下，感受中外古代数学辉煌的成就，领略多元文化以及数学与实际生活的联系，在师生互动与生生互动的学习活动中，获得成功的体验，激发学习数学的兴趣。

### 3.1 历史问题求解

在历史上的四类二元问题中，第一类与第二类问题在很多情况下，设一元方程更为简便，而第三类和第四类问题设一元方程解决思维难度较高，设二元方程相对较为容易，所以我们基于五项原则，从四类方程中各选出一个，分别为“鸡兔同笼”、“住客分房”、“牛羊价值”、“骡子和驴”问题，让学生探究解决这些问题，从中体会学习二元一次方程的必要性，用二元一次方程解决实际问题与用一元一次方程解决实际问题的区别和联系。

阅读下列问题，引入未知数，列方程。

中国古代（大约公元四、五世纪）的数学名著《孙子算经》中记载了一个有趣的鸡兔同笼问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？”

**选用理由：**“鸡兔同笼”是一个经典有趣且来自中国古代数学名著的例子，学生小学已熟知，沪教版六年级下册教科书封皮图就是此问题，且本节内容也是用“鸡兔同笼”问题引入，但此问题学生更倾向构建一元方程，无法凸显二元一次方程的必要性。我们采用此问题引入，快速把学生吸引到本节课要研究的主题上来，同时让学生采用自己自己的方法列方程，并不强迫学生一定要用二元方程。同时为了避免学生对问题过于熟悉，陷入到算术解法争论的泥潭，因此特意设置题目为：引入未知数，列方程。单刀直入，目标明确，感知方程思想，解决问题。

（1）我问开店李三公，众客都来到店中，一房七客多七客，一房九客一房空，多少房来多少客？（明代数学家程大位《算法统宗》）

**选用理由：**本题以诗歌的形式呈现，琅琅上口，学生读来饶有兴趣，与《九章算术》中

的"盈不足"问题相似，解决起来轻松快捷，与问题 1 类似，可设一元方程，也可设二元方程，相对而言，设一元更为直接方便。

（2）今有牛二、羊五直金九两，牛五、羊二直金十二两，问牛羊各直金几何？注：直通"值（《九章算术》）

**选用理由：**本题选自《九章算术》中"方程"一章，为了方便计算，数据有所修改。这道题目也是经典的所谓"两次购物型"问题，以历史名题为背景呈现典型的二元一次方程问题。用一元一次方程来解决比较麻烦，思维难度较高，所以需要引入二元一次方程，可以有力说明二元一次方程的必要性。

（4）骡子和驴驮着酒囊行走在路上。为酒囊重量所压迫，驴痛苦地抱怨着。听到驴的怨言，骡子给它出了这样一道题"妈妈，你为何眼泪汪汪，满腹牢骚，抱怨的应该是我才对呀！因为，如果你给我一袋酒，我负的重量就是你的 2 倍；若你从我这儿拿去一袋，则你我所负重量正好相等。"好心的大师，数学大师，请告诉我，他们所负酒酿各有几袋？（欧几里得，公元前 3 世纪）

**选用理由：**用外国古代著名数学家欧几里得的题目为情境，在感受不同文化中方程思想的同时，进一步体会二元一次方程作为一种新的数学模型的优越性。

在教学中，大多数学生都可以迅速采用引入一个未知数，合理表示出另一个未知数，并找到合适的等量关系列出一元一次方程解决问题（1）和问题（2）。在问题（1）、（2）解决后，教师还向学生简要介绍了这两个问题的出处《九章算术》和《算法统宗》。

问题（3）相对比问题（1）和（2）较难，学生无法直接看出如何设未知数构建方程，所以教师让学生以四人为一小组进行讨论探究，然后再进行分享交流。在学生讨论中，大部分同学依旧采用设一个未知数的方式进行尝试，如设牛的单价为 $x$,然后陷入了用牛的单价 $x$ 表示羊的单价的沉思中。

**师：**第 3 个问题中有几个未知量？

**生：**两个，牛的单价和羊的单价。

**生 1：**设一只牛的价格是 $x$ 两，则一只羊的价格就是 $(9-2x)$ 两。

**生 1 补充（教师板书）：**一只羊的价格就是 $\frac{9-2x}{5}$ 两。

**师：**你是怎么得到一只羊的价格的？

**生 1：**用 9 减去牛的价格。

**师：**这样得到的是什么？

**生（全体）**：5 只羊的价格，所以还要除以 5。

**师**：我们设好了未知数，接下来怎样列方程呢？

**生 2**：$(2x+9-2x)+5x+\frac{9-2x}{5}\times 2=12+9$。

**师**：你列这个方程的依据是什么？

**生 2**：牛二、羊五直金九两，牛五、羊二直金十二两，合在一起就是七只牛、七只羊一共值金二十一两。

众生幡然醒悟，但都感觉这个方程好长啊！于是又有了下面的过程。

**师**：有没有改进措施？

**生 3**：$2x+5\times\frac{9-2x}{5}=9$

**生（全体）**：其实就是 $2x+9-2x=9$ 即 $9=9$。

**师**：这样就出现了一个恒等式，不能求出未知数的值，为什么会这样呢？

**生 4**：这个算式没有用到其他条件，她利用第一个条件设另一个未知数，又用这个条件列方程，重复了。

**师**：那我们能不能改进呢？可以根据哪个条件列方程？

**生（全体）**：根据“五牛、二羊值金十二”可列方程。

**师**：再来观察生 2 所列的方程，可以继续化简吗？

**生 5**：$(2x+9-2x)$ 其实就是 9，然后在方程的两边同时减去 9，就可得到方程：$5x+2\times\frac{9-2x}{5}=12$。

**师**：还有其他方法解决这道题呢？

**生 6**：可以设两个未知数，再设牛的单价是 $y$。

**生（全体）**：可列方程 $2x+5y=9$，$5x+2y=12$。

**师**：与设一个未知数相比，设两个未知数感觉如何？

**生**：相对简单，更容易列出方程。

第三个问题的解决是充分暴露学生认知障碍以及突破学生现有认知障碍的重要载体，所以第三个问题的解决花费了较长的时间，也暴露了学生在用一元一次方程解决此问题时的诸多问题，①在未知数之间的关系较复杂时，学生不容易用含一个未知数的式子表示另一个未知数；②不能在有限时间内找到合适的等量关系列出准确又简单的方程；③重复利用题目中的条件得到恒等式导致解题过程被迫中止。同时，这个问题的解决也体现了用二元一次方程解决问题的必要性和便利性。

与第三题的解决费时费力截然不同，第 4 个问题出示后，学生发现设一个未知数不易找到等量关系列出方程，马上想到引入两个未知数。虽然在列方程时由于本题中关系略显复杂，容易出错，但学生理解起来毫不费劲，很快就根据题中的等量关系获得了正确的两个二元一次方程。

### 3.2 相关概念学习

结合问题（3）和问题（4）所列出的二元一次方程，教师和学生一起类比一元一次方程归纳二元一次方程、二元一次方程组的定义，以及二元一次方程的解、二元一次方程组的解的定义，并给出两组练习巩固概念。

**练习 1:**下列方程组中,哪些是二元一次方程?

（1） $x^2-3y=5$ （2） $x-\frac{5}{6}y=1.2$ （3） $xy=-2$

**练习 2:**下列方程组中,哪些是二元一次方程组?

（1） $\begin{cases}5x+6y=21\\xy=-2\end{cases}$ （2） $\begin{cases}x^2-4y=\frac{44}{3}\\3y-9x=-5\end{cases}$ （3） $\begin{cases}\frac{3}{4}x-5y=1.2\\22x-11y=-5.5\end{cases}$

（4） $\begin{cases}14x=-9y+76\\y=-8\end{cases}$ （5） $\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$

### 3.3 反思小结提升

根据四个问题中所列出的方程，教师和学生一起对比分析选择一元一次方程和二元一次方程解决问题的不同之处。

**师**：回顾问题 1，除了列一元方程外，可以列两元方程吗?

**生**：可以设鸡有 $x$ 只，兔有 $y$ 只，则 $x+y=35$，$2x+4y=94$。

**师**：第 2 个问题呢？

**生**：设有 $x$ 间房，共有 $y$ 个客人，则有 $y=7x+7$，$y=9(x-1)$。

**师**：那你能说说用一元一次方程解决问题和用二元一次方程解决问题的区别吗？

**生 1**：用一元计算起来简单。

**生 2**：用二元设未知数，列方程时比较简洁。

**师**：其实，我们用二元一次方程解决的问题均可以用一元一次方程解决，只是有些问题用一元构建方程较为困难，思维难度较高，列二元方程更容易，这也是为什么我们要学习二元一次方程和二元一次方程组。

## 4 学生问卷分析

**问题 1：本节课数学史中的数学问题，你是否都理解了？还有哪些不明白？**

全班有 30 人，73% 的同学回答明白，27% 的同学回答不全明白，其中 2 人对第 3 题不明白，5 人对第 4 题不明白，1 人对第 3 题和第 4 题都不明白。

**问题 2：你喜欢本节课老师所讲的古代数学问题吗？最喜欢哪个问题？**

全班都回答喜欢这些问题，最喜欢第 1、2、3、4 题的同学分别占全班人数的 37%，7%，22% 和 27%，另外还有 7% 的同学回答都喜欢。

**问题 3：为什么要学习方程？**

有以下几种回答：

①解题过程简单明了，容易理解；占全班人数的 63%；

②可以求出未知数，能解决生活中的问题；占全班人数的 20%；

③可以让我们的知识更丰富，训练思维，开阔视野；占全班人数的 14%；

④中考必考。占全班人数的 3%。

**问题 4：为什么要学习二元一次方程？二元一次方程在解决问题时与一元一次方程的区别是什么？**

93% 的学生认为它可以更加简便地解决问题，容易列出正确的方程，但计算复杂；一元一次方程计算简单，但在较复杂问题的处理时对思维的要求较高，不容易列出正确的方程。

从问卷的统计情况来看，全班同学都很喜欢这样的古代数学问题，其中最喜欢第 1 题的同学最多，由此看来“鸡兔同笼”这一经典问题还是很受孩子们青睐的。相比这题和后面的“牛羊问题”、“骡子和驴”，“住宿问题”的受欢迎程度就略显不足了。

从问卷的后两个问题来看，学生通过前期的学习，已经意识到了一元一次方程相比算术方法的优势，这节课中“牛羊问题”这一关卡又打破了他们有限的一元一次方程思维空间。此时“二元一次方程”的出现功不可没，新知识的架构顺理成章。因此，绝大多数学生都可以顺利地接受了这一新的概念，并理解其出现的必要性。

## 5 小结

本节课所选用数学史料主要为四个历史上的名题，第三个问题为了方便列方程和计算，将数据进行了改编，属于“顺应式”运用数学史，其余三个均是原汁原味的历史名题，属于“复制式”运用数学史。而四个问题出现顺序的排列展示了历史上人类对方程的认识过程，符合学生已有的认知基础。问题 1 和问题 2 较为简单，学生可以很快用一元一次方程进行求

解，第三个问题来源于《九章算术》的“方程”章，用算术解决已属不易，而在教学中，学生展示的探究结果也证实了这一点，所以这四个问题的解决过程，充分展现了从“一元”到“二元”过渡的必要性，这正与历史上人类对方程的认识有相似相通之处，所以，整节课情境引入的设计属于“重构式”运用数学史，重构了历史上人类对方程的认识过程，向学生展示了学习二元一次方程的必要性，用一元一次方程与用二元一次方程解决问题的区别和联系。同时，它让学生体会到了用方程思想解决问题的科学性，感受到了在现实问题的解决中数学知识的重要性。

本节课的重点在于展示二元一次方程学习的必要性，解决学生在学完二元一次方程（组）后，虽会用其解决问题，但依然不知为何要学习这一内容的困惑。从课上学生小结以及课后反馈中可知，四个历史名题的运用，基本解决了学生这一困惑。另外，学生在比较“一元”和“二元”的区别时，存在二元一次方程组如何求解的疑问，这也为学生后续学习二元一次方程组的求解埋下了伏笔，但由于这节课不涉及解方程组，所以教师并未过多花费时间展开，这也为让学生在进行比较时稍大折扣，无法真实体会“一元”和“二元”在进行计算时的区别，所以教师可以考虑借鉴单元教学设计的思路，从整体角度进行设计，花费的时间不长，但可以及时解决学生的疑惑，还能为下节课设置悬念，一举两得。

## 参考文献

[1] 沈顺良. 基于学生认知的自然引导——“二元一次方程”教学案例[J]. 中小学数学, 2016(7-8), 106-107.

[2] 钱池娟. 二元一次方程组（第 1 课时）[J]. 中学数学教学参考（中旬）, 2017(6), 13-15.

[3] 芦争气. 二元一次方程组（第 1 课时）[J]. 中学数学教学参考（中旬）, 2017(6),11-13.

[4] 王双. 还原数学本质 践行“三有课堂”——二元一次方程的教学实践与思考[J]. 初中数学教与学, 2013(3), 21-23.

[5] 慧波, 赵春雪. 渗透数学思想方法，提升学生的数学素养——以“二元一次方程”一课为例[J]. 中国数学教育, 2014(11), 28-36.

[6] 王伟, 邬云德. 寓“过程教育”于“二元一次方程”教学探索及点评[J]. 中学数学（初中版）, 2014(2), 68-70.

[7] 李继选. 我教“二元一次方程概念的形成过程”[J]. 中小学数学, 2014(9),39-40.

[8] 王红权, 应佳成. 二元一次方程教学设计的几点建议[J]. 中学数学杂志, 2016(12), 24-27.

[9] 汪晓勤. HPM 视角下二元一次方程组概念的教学设计[J]. 中学数学教学参考(初中版), 2007(5), 48-51.

# HPM 视角下的“周期函数概念”教学*

向荣 [1]，陈莎莎 [2]，沈中宇 [3]

（1.华东师范大学附属东昌中学，上海，200120；2.上海大学附属中学，上海，201900；

3. 华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

## 1 引言

“周期函数”是上海教育出版社高一（下）第 6 章“三角函数”中的一节内容。教材从三角诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in Z)$ 出发，让学生体会 $\sin x$ 值的重复出现；为了定量地描述周期性变化规律，直接引入周期函数概念。教学实践表明，关于周期函数概念，学生有以下困惑：周期函数较为成熟的形式化定义是如何形成的？周期函数一定存在最小正周期吗？周期函数的定义域是无界的吗？按照教材，直接引入周期函数的定义，无法解决上述困惑。另一方面，《普通高中数学课程标准》（2017 年版）在“课程结构”中指出，“把数学文化融入课程内容中”，在“教学建议”中要求：“在整个数学教学中，教师应当有意识地结合相应的教学内容，引导学生了解数学的发展，认识数学在科学技术、社会发展中的作用，体会数学的科学价值、应用价值和文化价值，提升学生的科学精神、应用意识和文化素养。”[1]那么，在周期函数概念的教学中如何渗透数学文化，让学生体会数学的文化价值？这个问题需要通过实践来解决。

周期函数概念有着曲折的发展历史，反映了历史上人们对该概念的认识经历了从不完善到完善的过程。我们希望在课堂上再现这一过程，解决学生心中的困惑，促进他们对概念的深刻理解；另一方面，通过数学史的融入，揭示周期函数背后的文化价值，让学生树立正确的数学观，感悟数学背后的理性精神。

基于上述思考，我们采用 HPM 的视角来设计本节课的教学。具体的教学目标如下：

（1）了解周期函数与周期现象的联系，经历周期函数概念抽象概括的过程，培养数学抽象的数学素养；

（2）理解并掌握周期函数的定义，加深对周期函数本质属性的理解，理解最小正周期的意义；

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

（3）经历正、余弦函数周期性的证明过程，体会特殊到一般再到特殊的研究方法；

（4）能够总结概括形如 $y = A\sin(\omega x+\phi)$ 、 $y = A\cos(\omega x+\phi)$ 此类函数的最小正周期的求法，体会数学推广的意义。

（5）理解数学活动的本质，体会数学的文化价值，树立动态的数学观，感悟数学背后的理性精神。

## 2 历史材料及其运用

1748 年，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中，将函数确立为分析学的最基本的研究对象。在“来自圆的超越量”一章中，欧拉重新审视了前人的定理、公式、方程和计算，研究了周期性。虽然欧拉没有明确提出三角函数的周期性，但他利用曲线的性态表征了正弦函数的周期性[2]。

历史上，人们对三角函数周期性的认识过程可以分成萌芽时期、描述性定义时期、形式化定义时期三个阶段。

### 2.1 周期函数概念的萌芽

在历史上，周期函数的出现与周期现象有关。在我们所考察的美英三角学教科书中，最开始描述的周期现象都与时间有关，例如 Keith（1810）对一天给出了明确的描述：由任何一天离开子午线，直至第二天返回同一子午线的时间间隔被称为太阳日。太阳日因受到黄赤交角以及地球的变速运动而连续变化[3]。Bonnycastle（1818）给出了一月的定义：月份是月亮重新回到刚开始升起时那一点所需经历的周期，由 27 天组成[4]。在此时期，周期与时间的变化有着密不可分的联系，物体重复经过一个位置的时间间隔称之为周期。

在萌芽时期，三角学教科书大多从天体的运动出发来研究三角函数的周期性，但均未明确提出周期函数概念。

### 2.2 三角函数周期性的描述性定义

Lardner（1828）给出了三角函数的终边定义，进而给出了三角函数周期的概念[5]。在直角坐标系中，角的终边绕原点旋转 360°后回到原来的位置，因而终边相同的角的同一三角函数值相等，作者以此来刻画三角函数的周期性。

这里，周期的定义仅仅是描述性的，并未采用符号语言。

### 2.3 周期函数的形式化定义

Brenke（1917）给出了较为成熟的形式定义：当角度 $x$ 增加或减少 360 度的整数倍时，

$x$ 终边的位置不变，即对任意的 $x$ 有：$f\left(x\right)=f\left(x\pm n\cdot 360^\circ\right)$，其中 $f$ 为任一三角函数[6]。

之后，数学家逐步将以三角函数为背景的形式化定义一般化，最终发展成一般周期函数的形式化定义。分别有：

1899 年，加拿大数学家穆雷（D. A. Murray, 1862-1934）在"终边相同角的三角函数值相等"以及诱导公式的基础上，给出如下周期函数的形式化定义：一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在常数 $k$，对任意 $x$ 都有 $f(x)=f(x+k)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数，而满足该等式的最小的数 $k$ 称为该函数的周期[7]。

1904 年，美国数学家博汉南（R. D. Bohannan, 1855-1926）给出如下定义：若 $y=F(x)$，且满足 $F(x_1)=F(x_1+h)$，则有：

$$
\begin{aligned}
&F(x_1)=F(x_1+h)=F(x_1+2h)=F(x_1+3h)=F(x_1+4h)\\
&=F(x_1-h)=F(x_1-2h)=F(x_1-3h)
\end{aligned}
$$

即对于函数 $f(x)$，如果存在非零整数 $n$，对任意一个 $x$，都有 $F(x)=F(x+nh)$，这样的函数称为周期函数，其中 $h$ 为周期[8]。

1940 年，美国数学家德累斯顿（A. Dresden, 1882-1954）在定义周期函数时，关注到了函数的定义域：对于定义域为 R（并非特指实数集）的函数 $f(x)$，如果对任意一个 $x$，均有 $x$ 和 $x+P$ 属于 R，且满足 $f(x+P)\equiv f(x)$，则称 $f(x)$为周期为 $P$ 的周期函数。[9]

实际上，以上三个定义代表着形式化定义从不完善到完善的过程，穆雷的定义没有强调周期 $k$ 是非零的，博汉南对周期函数的定义域有了一定要求，而德累斯顿则明确提出了周期函数的定义域。

教学实践表明，学生对周期函数的认知呈现一定的历史相似性，因此，本节课以周期函数概念的形成为脉络，利用重构、复制、附加的方式将相关的历史素材融入到教学之中。

## 3 教学设计与实施

### 3.1 引出主题，以学定教

师生共同阅读教材中的引言："三角函数也称为圆函数，它来自圆周运动，而圆周运动是一种周而复始的周期运动。三角函数是重要的周期函数模型。"进而提出问题：三角函数会具有什么样的周期性呢？从而引出本节课的研究主题：正弦、余弦函数的周期性。

在本节课之前让学生预习，根据预习情况，汇总学生的问题疑惑如下：

（1）周期函数与诱导公式是否有关系？

（2）是否三角型函数都是周期函数？

（3）周期性存在于哪种类型的函数？

（4）为什么规定周期函数的周期$T \neq 0$？

（5）周期函数的定义域有什么特性？

（6）求三角函数的周期有一定规律吗？

（7）周期性如何结合其它性质？

（8）能否用函数周期性去推导函数其它性质？

**3.2 问题探究，概念初探**

基于以上学生的疑惑，教师启发学生进入对函数周期性的探索。

**师**：同学们通过阅读教材内容都有了一定的思考，非常好！那么接下来就让我们共同进入到新知识的学习过程中，看看我们是否都能够圆满地解决这些问题？

通过 PPT 呈现两个问题，学生分组讨论，交流互动。

问题 1：你是否能够举出自然界以及现实生活中的周期性现象？请对其特征进行概述？

问题 2：你能否举出数学知识中的周期性现象？请对其特征进行概述？

学生对问题 1 的回答：

**生 1**：哈雷慧星周期 76 年。

**生 2**：自动扶梯上去下去的时间间隔。

**生 3**：地球的公转和自传。

教师进一步要求概括这些现象的特征。

**师**：能概括一下它们的特征？

**生**：所有的都是每隔一定的时间会重复出现。

学生对问题 2 的回答：

**生 1**：无限循环小数，例如 1/3。

**生 2**：还有终边相同的角，角的周而复始的变化。

教师进一步归纳出周期现象的特征，并将其与函数的周期性相联系。

**师**：非常好，存在一个固定的间隔，大家发现了周而复始的规律，这就是周期现象。又如能被 3 整除余 1 的正整数，分别为 1、4、7 等等。那么函数会有周期性吗？

**生**：随着角的终边周而复始地变化，三角函数值也周而复始地变化，因此，三角函数有

周期性。

**师**：在历史上，三角学最早只是天文学的工具，后来脱离天文学，而成为几何学的一部分；再后来发展成为一门独立的学科，用于解平面三角形以及实际测量问题；最终，三角学的功能进一步拓广，被用于研究自然界的周期现象。我们今天学习三角学，重点研究的就是周期性。1748 年，欧拉在《无穷分析引论》中提出了三角函数的周期性。此后，数学家在探索各种周期现象的过程中，逐渐将其与三角函数联系起来。我们今天从认识自然界的周期现象到揭示数学中的周期现象就是这样一个认知过程。

### 3.3 深入探索，概念生成

接着教师提出第三个问题，对函数的周期性进行探索。

第三个问题：判断该函数图像是否具有周期性现象，你能否运用数学语言进行描述？

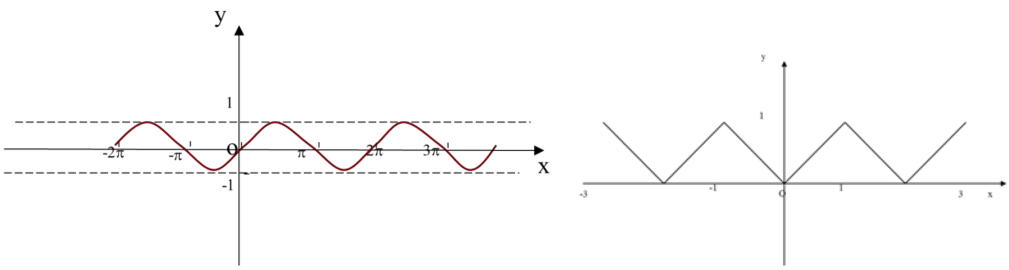



图 1 函数图像中的周期性现象

**师**：先看第一张图（见图 1 左），你们能否用语言来刻画描述其中的周期性现象呢？

**生**：每隔 $2\pi$ 个单位图像会重复一次。

**师**：很好！第一张图我们已经很熟悉，物理课上老师已经告诉我们正弦函数图像是具有周期性的。那么除了正弦函数外是否还有其它的函数也具有周期性，这是一个非常值得研究的问题。请看第二张图（见图 1 右）。

**师**：同学们你们认为它是否存在周期现象？

**生**：具有周期现象，也是存在规律周而复始、重复出现。每经过 2 个单位图像会周而复始。

**师**：回到我们的第三个问题，能否进一步用数学符号语言来刻画这种规律性呢？相较前两个问题，这个问题是有难度的。我们可以找到问题解决的办法，我们知道函数的基本构成元素是点，那么能否从点的变化来刻画这种周而复始的规律？让我们来看看点的变化？

**生**：设图像上任意点的坐标为 $(x, y)$，则点 $(x+2, y)$ 也在该函数图像上。

**师**：那也就意味着若点的横坐标的差值是固定值 2 时，其点的纵坐标值不变，则此时 $f(x+2)=f(x)$ 成立，那我们就称该函数是周期函数，2 是它的周期。这个过程就是一个

数学抽象的过程。是不是可以推广给出周期函数的定义了？

**生**：给定函数 $y=f(x),x\in D$，如果成立 $f(x+T)=f(x)(T\neq 0)$，那么称 $f(x)$ 是周期函数，T 是它的周期。

通过问题辨析，讲解明确周期函数定义中的关键字词。

**师**：请同学们注意周期函数定义中的两性：存在性（存在非零常数 T）；任意性（定义域 D 中的任意 $x$ 都满足定义式）。在以上的讨论过程中我们同学提出的一些问题是否已得到了解决？（如 T 非零的问题、与诱导公式的关系），还有哪些问题我们需要再继续？（如对周期函数定义域 D 的要求）

**3.4 古今对话，难点突破**

基于学生探究得到的周期函数定义，教师利用与数学家对话的形式进一步对定义中的难点进行突破。

**师**：最早提及周期概念的是欧拉，欧拉在 1748 年在《无穷分析引论》中涉及了一个周期性行为（见图 2）。

之后从 1748 年至 1940 年，无数的数学家和数学爱好者们前后花了 200 年的时间逐步开展并完善对周期函数的研究，而今天在课上我们只用了 22 分钟就研究了周期函数的定义。对于历史我们应该是敬重的。

接下来就让我们与三位数学家对话（呈现三个数学家的资料）。


图 2 欧拉《无穷分析引论》ppt 展示

**史料 1**：加拿大数学家穆雷于 1899 年给出如下定义：一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在常数 $k$，对任意一个 $x$ 值，都有 $f(x)=f(x+k)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数，而满足该等式成立的最小的数 $k$ 称为该函数的周期[10]。

**师**：你觉得这个定义与我们刚才所学的定义有什么不同吗？或者有什么不完善之处？

**生 1**：没有对定义域作出要求。

**生 2**：没有强调$k$是非零的常数。

**生 3**：这里谈到是最小的数 $k$，我认为没有最小的数，只有最小的正整数。

**师**：生 3 的关注非常细致，实际上提出了一个非常好的问题，如果一个函数有周期，就一定有最小正周期吗？我给大家举一个例子：常值函数，常值函数是不是周期函数？但是常值函数的周期为任意常数。

**师**：此外，请同学们继续思考另一个问题：函数的周期可以是负数吗？最小的数 k，那是不是意味着这个函数肯定能找到那个最小的 $k$？

**史料 2**：美国数学家博汉南于 1904 年给出了以下定义：若函数 $y=F(x)$ 满足 $F(x_1)=F(x_1+h)$，则有 $F(x_1)=F(x_1+h)=F(x_1+2h)=F(x_1+3h)$ $=F(x_1-h)$ $=F(x_1-2h)$ $=F(x_1-3h)$，即对于函数 $f(x)$，若存在非零整数 $n$，对任意一个 $x$ 值，都有 $F(x)=F(x+nh)$，则这样的函数称为周期函数，其中 $h$ 为周期。

**生**：仍然未强调 $h$ 是非零的，但对定义域好像有了说明，是不是可以往两侧无限延伸？

**师**：这个发现非常有价值，老师举一例：$y=\sin x, x\in\left[-4\pi,4\pi\right]$，请问该函数是周期函数吗？

**生**：疑惑，当找到$T=2\pi$不满足$x$的任意性，所以该函数不是周期函数。

**师**：现在大家发现周期函数定义域的限定条件了吧。如果一个函数的定义域有界，它一定不是周期函数。

**师**：请同学们回去研读第三份历史资料——美国数学家德累斯顿于 1940 给出的周期函数定义，体会在周期函数定义中的四个关键要素：定义域单边无界或双边无界、存在性、任意性、定义式。

**师**：为什么要研究周期性，它是一种科学的态度和方法，有了最小正周期就可以把整段全局上的问题缩小到一个有限的区间上进行研究，其它单位区间上的性质也可以进行刻画。

通过这些互动交流，在周期函数概念学习过程中的难点问题也迎刃而解，周期函数的定义域 D 是有限定的，至少要一端无界。对于常数 T 的要求一定要是非零的。

### 3.5 练习巩固，概念强化

首先，要求学生会运用周期函数的概念证明正弦函数和余弦函数的周期性，并知晓其最小正周期。

其次通过以下练习，解决形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$、$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 一类的函数最小

正周期的方法。

【练习 1】求下列函数的周期：$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$。

【练习 2】求下列函数的周期：$f(x)=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)$。

通过以上练习让学生总结出此类三角函数求最小正周期的一般方法。

### 3.6 总结提升，知识升华

最后对本节课所学习的内容进行总结提升，对应学生在课前提出的问题，本节课基本解决了学生的疑惑。

在概念生成的过程中，我们发现了周期函数与诱导公式之间有着紧密的联系，诱导公式初步刻画了三角函数的周期性（对应问题 1），因此我们所学的三角函数其实都是周期函数（对应问题 2），但是周期函数的范围比三角函数的范围更广，还有更一般的周期函数（对应问题 3），同时通过概念的辨析，我们知道了周期函数的定义中规定周期$T\neq 0$的必要性（对应问题 4），定义域必须要一端无界（对应问题 5），此外，通过巩固练习，知道了如何求三角函数的周期（对应问题 6），至于周期性与其他性质的关系（对应问题 7、8），同学们可以课后进一步探究。

在本节课的最后，教师呈现了三角函数周期性的思维导图（如图 3 所示），此思维导图将 200 年的周期函数发展史浓缩于此，同时与本节课所学的内容相呼应，让学生精神一震，我们的学习其实在不断的经历历史、感悟历史。

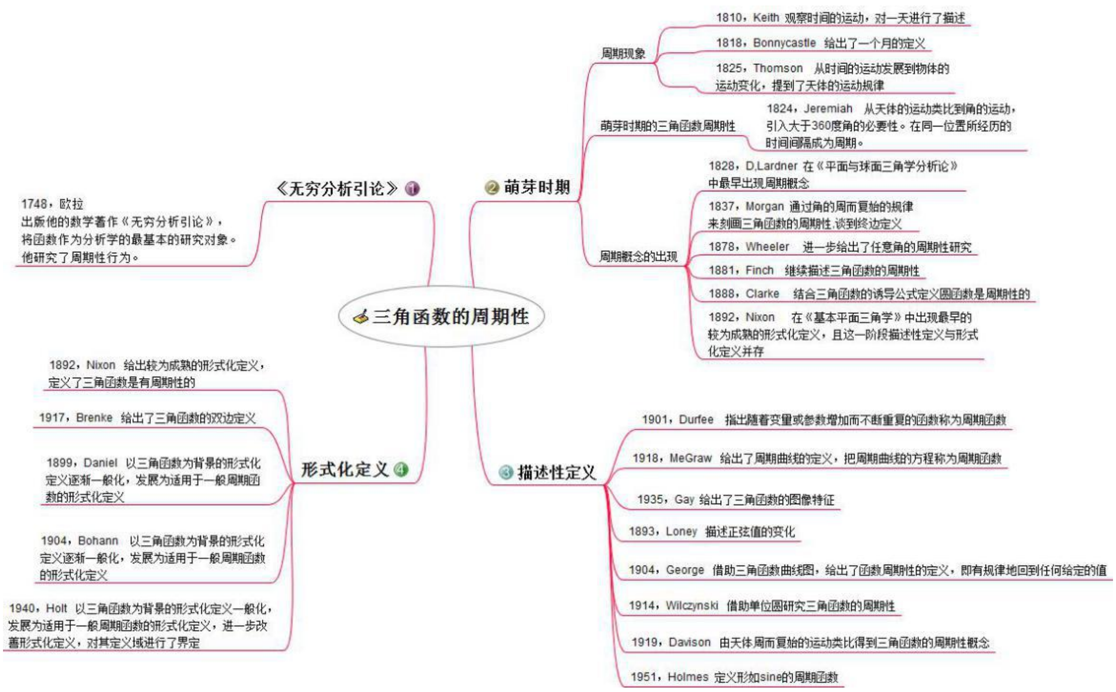



图 3 三角函数周期性的思维导图

## 4 学生反馈

课后，我们收集了班级 36 名学生对本节课的课后反馈，以下为课后反馈的统计结果。

问题 1：已知函数的定义域为 R，下列图像（如图 4）是周期函数的是（　）

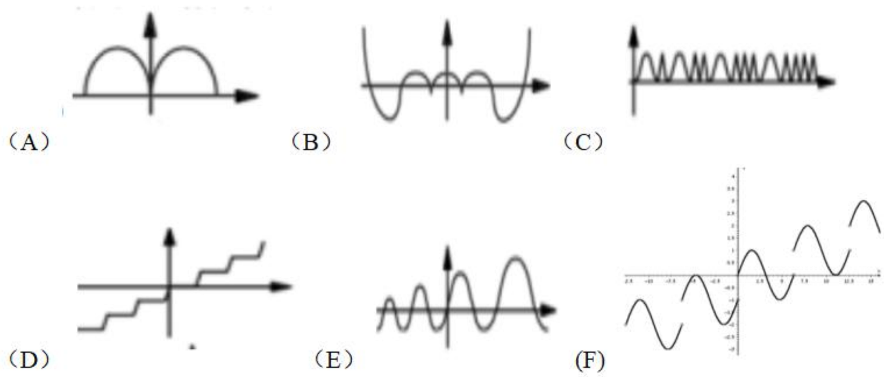



图 4 课后反馈问题（1）

大部分学生（83.3%）选择了正确答案 A，但也有个别学生选择了 C、D、F 等错误选项。说明学生对一般周期函数的概念有一定的理解。

问题 2：周期函数的周期有多少个？周期函数一定存在最小正周期吗？所有学生都回答有无数个周期，同时 77.8%的学生回答不一定有最小正周期。说明学生基本理解了周期 T 以及最小正周期的含义。

问题 3：因为 $\sin(x+0)=\sin x$，所以 0 是 $y=\sin x(x\in R)$ 的周期。所有学生都认为这一说法是错误的，说明了数学史融入周期函数的教学解决了周期 T 的非零性这一认知障碍。

问题 4：$y=x-[x](x\in[-3,3])$ 的图像（如图 5）如下，请判别其是否为周期函数，并说明理由。

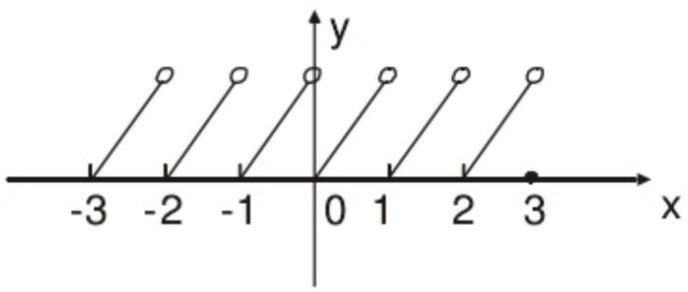



图 5 课后反馈问题（2）

72.2%的学生回答这不是周期函数，说明对周期函数的定义域是至少单边无界的这一性质掌握得还是不错的，大部分同学指出了该函数定义域是有界的问题。

问题 5：你认为这节课中，数学史给了你什么帮助与启示？对课上所呈现的历史上不同

的定义、思维导图中周期函数的历史，你有何看法？

学生给出的部分回答如下：

- 感觉三角函数中的周期性很奇妙，发现了生活中原来存在这么多关于周期性的现象，增加了我对数学的好奇心。

- 数学上一开始出现的周期函数概念，帮助我清晰地看出周期中的一些知识性错误，比如没有写 $T \neq 0$，没有写 $D \in R$，让我以后不会犯这些错误了。

- 本节课印象最深的地方是数学老师让我们“与数学家们”对话。从 18 世纪开始，数学家始终在探索周期函数，从许多不足到逐步完善，包括定义域的有无界性，它使得我们有了验证一个函数是否为周期函数的可能。数学史上，周期函数概念开创至比较完善，用了 200 年时间，经历几代数学家的斗争。而我们在课上不仅会用几堂课时间来完成学习。

- 在学习数学的过程中，我们总不能一步成功，数学史让我们明白数学应当坚持不懈。数学史的定义让我们从各个角度分析了数学学习。思维导图更直观准确地展现了本节课知识点，很喜欢老师。

## 5 结语

本节课从学生对周期函数的困惑出发，利用学生对周期函数概念认识的历史相似性，以周期函数的历史发展为脉络，利用重构的方式将相关的历史素材融入到教学之中。在问题探究，概念初探环节让学生经历三角函数周期性的萌芽阶段，在深入探索，概念生成环节中让学生从描述性定义时期过渡到形式化定义时期，最后在古今对话，难点突破环节中采用历史上数学家给出的定义，利用概念辨析的形式加深学生对形式化定义的理解。

从生活中的周期现象出发，经历对周期函数图像的观察，让学生自然归纳出周期函数的形式化定义，然后通过历史上三个数学家不完善的定义的呈现，让学生主动发现周期函数概念中应注意到的关键点，让周期函数的概念在学生心中顺其自然的发生与深化，揭示了“知识之谐”。学生经历了周期函数定义的探究过程，同时通过历史上错误定义的呈现，让学生对定义中的不完善之处自主探究，发现数学家们的千虑一失，让他们成为课堂的主人和小小数学家，从而营造了“探究之乐”。让学生体会生活中的周期现象，从而了解到周期函数与现实生活以及其他知识领域之间的联系，感悟数学文化的多元性，用演进的思想看待数学，展示了“文化之魅”。通过思维导图呈现整个周期函数概念的历史发展脉络，让他们认识数学概念的演进历程，树立学生动态的数学观；让学生穿越时空与历史上数学家对话，探究数

学家给出的定义中的不严谨之处，培养他们的质疑精神；同时，让学生感悟数学背后的理性精神，培养学生勇于战胜困难的积极态度，从而实现“德育之效”。

## 参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017.

[2] 欧拉. 无穷分析引论[M]. 太原: 山西教育出版社 1997.

[3] Keith, T. *An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: T. Davison, 1810. 244.

[4] Bonnycastle, J. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: Cadell & Davies, et al., 1818. 205.

[5] Lardner, D. *An Analytic Treatise on Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: John Taylor, 1828, 292.

[6] Brenke, W. C. *Elements of Trigonometry* [M]. New York: The Century Company, 1917. 13-14.

[7] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges and Secondary Schools* [M]. New York: Longmans, Green & Company, 1899. 134-135.

[8] Bohannan, R. D. *Plane Trigonometry* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904. 114-115.

[9] Dresden, A. *Introduction to the Calculus* [M]. New York: H. Holt & Company,1940. 44.

# HPM 视角下的“和差术应用”教学*

袁芳[1]，马艳荣[2]
（1.致远高级中学，上海，201499；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

## 1 引言

复习课是数学课堂教学的重要课型之一。好的复习课不仅可以帮助学生梳理知识，形成系统，更重要的是要引导学生提取、归纳数学思想方法，让学生站在思想与方法的高度来认识数学问题、培养思维能力[1]。然而，因教师对复习课的价值理解与把握不到位，不少教师依然遵循传统的教学模式来讲授复习课：罗列基础知识，讲解“典型”例题，布置课后作业。常常会把复习课上成了练习课，把学过的知识重复讲一遍，没有新内容、新增长，复习课的教学质量普遍不高[2-3]。目前，对复习课的研究较多，但主要集中于复习课教学策略的阐述，有关复习课的教学案例较少。

Jankvist 将数学史对于数学教学的作用分成“工具”和“目标”两类，作为工具的数学史不仅可以加深学生对数学的理解，帮助学生梳理知识的发展脉络，而且古今数学思想方法的对比，可以拓宽学生的思维，因而数学史是教学的指南[4]。以数学史上的数学思想方法为纽带，将数学课程中散落的知识连接起来，让学生系统地分析与把握所学的数学知识，进一步体会数学知识背后所蕴涵的数学思想[5]。两千多年前的古巴比伦和差术正是这样一种思想方法。为了检验和差术的教育价值，我们设计了一节高三复习课的专题教学，拟定的教学目标如下：

（1）理解和差术，掌握和差术在不同知识领域的应用；

（2）经历从分析和解决函数、三角、向量运算等问题时抽象出和差术模型的过程，理解换元和化归思想，拓宽学生问题解决的思维方式；

（3）感受数学思想方法的魅力，感悟数学文化，激发学习兴趣 。

## 2 历史上的和差术

古巴比伦的代数已经达到了相当高的水准。在已发现的古巴比伦泥版中含有大量的二元

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

方程问题，形如$\begin{cases}x\pm y=a\\ f(x,y)=b\end{cases}$，其中$f(x,y)$具有$px+qy$（$p^2\neq q^2$），$xy$，$x^2+y^2$等形式。[5]例如，泥版 VAT 8389 涉及二元二次方程组

$$\begin{cases}x+y=1800\\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}y=500\end{cases},$$

用今天的符号表示，祭司的解法是：设$x=900+t, y=900-t$，则

$$\frac{2}{3}(900+t)-\frac{1}{2}(900-t)=500$$

解得$t=300$，从而得$x=1200$，$y=600$。

泥版 BM 13901 涉及二元二次方程组

$$\begin{cases}x+y=50\\ x^2+y^2=1300\end{cases},$$

祭司的解法是：由$x=25+t$和$y=25-t$，代入第二个方程得$1250+2t^2=1300$，于是$t=5$，从而得$x=30$，$y=20$。这里，古巴比伦祭司利用以下基本公式：

$$\begin{cases}x=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}\\ y=\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}\end{cases}\tag{1}$$

对方程组进行换元（若$\frac{x+y}{2}$已知，则取$\frac{x-y}{2}$为未知数；若$\frac{x-y}{2}$已知，则取$\frac{x+y}{2}$为未知数），将二元转换为一元，从而求得未知数。

已知两个数的和或差，将这两个数分别表示为半和与半差的和或差，从而实现换元的方法，就是所谓的“和差术”。利用和差术，可以在$\frac{x+y}{2}$，$\frac{x-y}{2}$，$\frac{x^2+y^2}{2}$和$xy$四个代数式之间建立基本关系。

和差术在后世被人们广泛使用。例如，公元 3 世纪，古希腊数学家丢番图利用和差术来解二元二次方程组问题；17 世纪，法国数学家洛必达（M. de L’Hospital, 1661-1704）利用和差术来推导椭圆的方程[6]，等等。

图 2 给出了和差术在高中数学不同知识领域中的应用[5]。

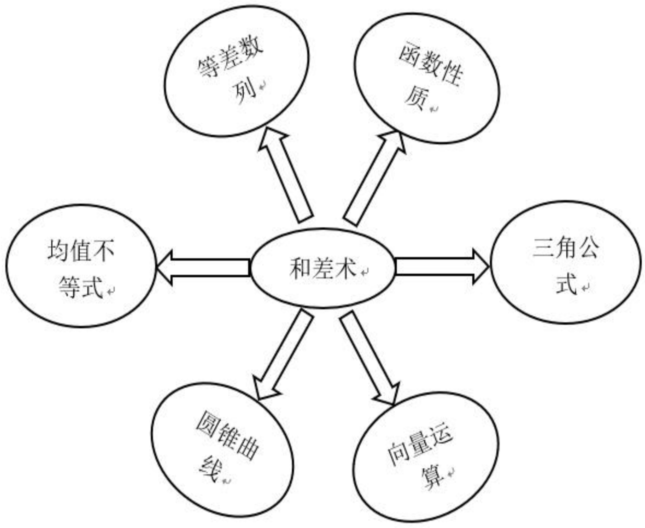



图 1　和差术在不同知识领域中的应用

## 3 教学设计与实施

### 3.1 方法引入，给出定义

课前十分钟休息时间，教师播放了周杰伦《爱在西元前》的 MV，并提醒学生留意歌词。

我给你的爱写在西元前/深埋在美索不达米亚平原/几十个世纪后出土发现/泥版上的字迹依然清晰可见/……/用楔形文字刻下了永远/……/祭司神殿征战弓箭是谁的从前/……

上课伊始，请学生说出 MV 中提到的地点、人物、物品。教师介绍这首 MV 是周杰伦逛完博物馆以后特别有感而发创作的。它的故事原型是古巴比伦王和他的妻子。古巴比伦王给他的妻子建造了一个非常宏伟的建筑，古代七大奇迹之一空中花园。当一个国家的建筑登峰造极的时候，这个国家的数学一定高度发展，所以今天我们就学习古巴比伦的一个重要的数学方法——和差术。引出本节课课题。

先介绍数学泥版 VAT 8389，其上所载二元问题相当于求解二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=1800 \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}y=500 \end{cases}$，请学生观察祭司的原始解法。

**师：**请问这个方法和你们初中学的方法一样吗？初中是用什么方法解的？

**生：**消元法。

**师：**那古巴比伦祭司用了什么方法呢？

**生：**参数方程。

**师**：结合题干，你能告诉我参数 $t$ 前面的 1800 代表什么？

**生**：$x$ 和 $y$ 的和。

**师**：看第一个式子，$x=\dfrac{1800}{2}+t$，若将 1800 这一具体数字用一般的量来代替，如何转化？

**生**：$x=\dfrac{x+y}{2}+t$。

**师**：也就是说我们设的参数 $t$ 就是 $\dfrac{x-y}{2}$，实际上我们利用了以下两个等式：

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}，y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$$

像这样，已知两数之和，令两数分别等于半和与一个参数的和与差，在数学上称为“和差术”。以上我们看到，早在古巴比伦时期，人们就开始运用这种方法了。

**3.2 找恒等式，建立模型**

教师进一步展示 BM 13901 和 YBC 4663 上的二元二次方程组的解法。

数学泥版 BM 13901 涉及方程组$\begin{cases}x+y=50\\x^2+y^2=1300\end{cases}$。祭司的解法是：

$[1]\dfrac{x^2+y^2}{2}=650$；$[2]\dfrac{x+y}{2}=25$；$[3]\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=625$；

$[4]\dfrac{x^2+y^2}{2}-\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=25$；$[5]\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}-\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2}=5$；

$[6]\dfrac{x-y}{2}=5$；$[7]\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}=30$；$[8]\,x=30$；

$[9]\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}=20$；$[10]\,y=20$。

数学泥版 YBC 4663 涉及方程组$\begin{cases}x+y=6\dfrac{1}{2}\\xy=7\dfrac{1}{2}\end{cases}$。祭司的解法是：

$[1]\dfrac{x+y}{2}=3\dfrac{1}{4}$；$[2]\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=10\dfrac{9}{16}$；$[3]\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-xy=3\dfrac{1}{16}$；

$[4]\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-xy}=1\dfrac{3}{4}$；$[5]\dfrac{x-y}{2}=1\dfrac{3}{4}$；$[6]\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}=5$；

[7] $x=5$；[8] $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=1\frac{1}{2}$；[9] $y=1\frac{1}{2}$ 。

教师让学生分两组讨论上述解法，思考古巴比伦祭司所运用的关键思想。学生发现，两个问题的解法中，祭司从等式

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},\ y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$$

出发，利用了两个关键的等式：

（1）$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{2}$；

（2）$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$ 。

将二元二次方程组转化为简单的一元二次方程，从而求得 $x$ 和 $y$。

教师进一步引导学生将上面两个恒等式相加减，得到另两个恒等式

（3）$\frac{x^2+y^2}{2}+xy=2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$；

（4）$\frac{x^2+y^2}{2}-xy=2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ 。

最终得到图 1 所示的和差术的代数模型。

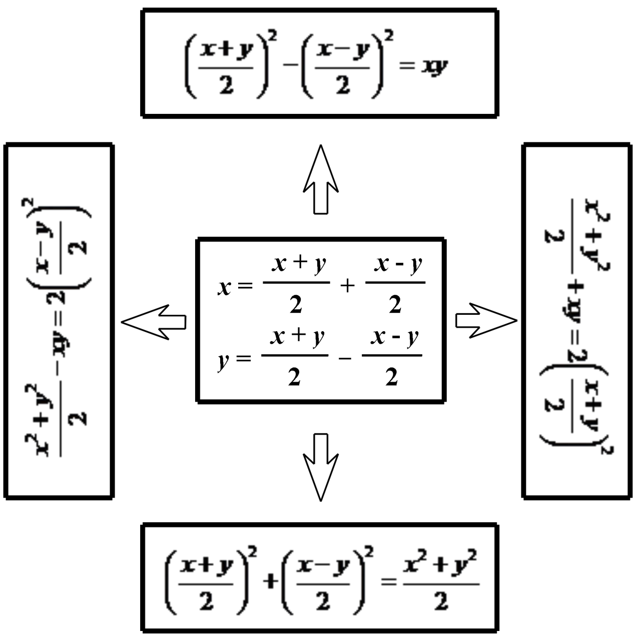



图 2 和差术代数模型

### 3.3 模型应用，方法深化

【例 1】请你编制一道用和差术模型求解的填空题。

【例 2】$a^x+a^{-x}=3$，求$\left(a^x-a^{-x}\right)^2$的值。

【例 3】求函数$y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的值域。

例 2 和例 3 简单介绍了和差术模型的众多应用中的两种情况，要求学生先判断例 2、例 3 是否符合和差术模型，并寻找转化过程中所用到的恒等式。学生发现例 2 隐含了$a^x\cdot a^{-x}=1$这一已知条件，并且该题是运用了完全平方公式进行了转化；例 3 涉及了差术模型 4 个量中的两数和与积，已知条件并未给出和与积的定值，但隐含了$\sin^2 x+\cos^2 x=1$这一条件。看起来可以利用恒等式（3）进行转化，实则不然，需要借助参数，令$t=\sin x+\cos x$，可得$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$，这样就把问题转化为二次函数的值域问题。

【例 4】已知$\left|\vec{a}\right|=13$，$\left|\vec{b}\right|=19$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=24$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=$________。

【例 5】已知$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{10}$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{6}$ 求$\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。

将和差术推广至向量，可得

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right),\ \vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

由此可得所谓的“极化恒等式”：

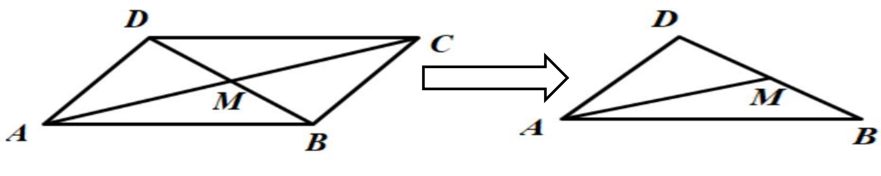
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right),$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}。$$

例 4 和例 5 即为上述等式的应用。

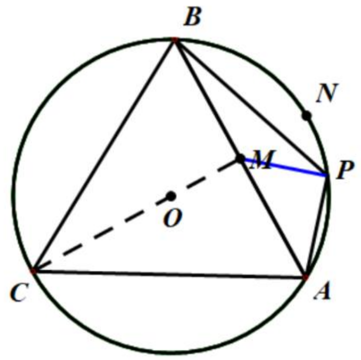
【练习】$\Delta ABD$ 中，$M$ 为 $BD$ 中点，$\left|AM\right|=3$，$\left|BD\right|=4$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$。

在极化恒等式中，往往需要将平行四边形退化为三角形。应用以下转化模型完成练习。




【思考题 1】正三角形 $ABC$ 内接于半径为 2 的圆 $O$，点 $P$ 是圆 $O$ 上的一个动点，则

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是______。（通过几何画板演示完成）




【思考题 2】已知 $a_n>0$，$b_n>0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$（$n\in N^*$），求 $a_{n+1}$ 的范围。

### 3.4 盘点收获，总结回顾

首先，总结和差术、四个恒等式以及和差术在向量上的推广，和差术在高中数学不同知识领域的应用，指出和差术为高中数学中的通性通法。

其次，和差术蕴含了换元与化归的数学思想方法，这些思想方法将高中的知识点有机的结合在了一起，帮助学生把已学过的知识与其原有的知识结构进行对接，形成了新的知识结构。让我们对知识的认识从方法层面上升到思维层面。

最后，小泥版大学问，古代文明给我们留下了无数的智慧结晶，这些丰富的遗产为我们今天的数学教学开辟了新视角。揭开了古巴比伦和差术的神秘面纱，将其与高中数学教学 知识相融合，让古人的智慧在今天的课堂上熠熠生辉！穿越时空与古人对话，古人的许多数学思想给了我们精神的养料。

## 4 学生反馈

课后，我们收集全班 30 名同学对本节课的反馈信息。其中，前三道测试题主要是考察学生对和差术模型的掌握情况，第一道题是“已知 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{11}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$，求 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$”，已知四个量 $a+b$、$a-b$、$ab$、$a^2+b^2$ 中的两个量，求其余两个量，正确率达到 96.7%；第二道题是“在 $\Delta ABD$ 中，$N$ 为 $BD$ 中点，$\left|AN\right|=5$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，求 $\left|BD\right|$”，其中 $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=2\left|\overrightarrow{AN}\right|$（隐含），已知四个量 $a+b$、$a-b$、$ab$、$a^2+b^2$ 中的一个量，以

及其余两个量的关系，可以得到其余的三个量，正确率为 80%。第三题是“求函数 $f(x)=\sin x-\cos x+\sin x\cos x$ 的值域”，已知三个量 $a+b$、$ab$、$a^2+b^2$ 中的一个量，可以得到其余两个量的取值范围，正确率达到 83.3%，少数正确率较低的学生主要是因为代入过程中计算错误、忘记负号，知道设参数，但未找到 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 这一隐含的条件所造成的。

学生对“设计和差术模型的填空题时，主要涉及哪几种题型”回答集中在向量、三角、数列、函数、二元方程这几类，其中向量提及最多，三角次之；学生对“你觉得和差术与哪些高中知识点有联系”回答主要分布在圆锥曲线、函数、数列、三角、向量、均值不等式，其中 26 人认为和差术与向量知识存在联系，24 认为和差术与三角学内容有联系，21 人认为和差术与函数、数列、圆锥曲线联系紧密，只有 6 人认为和差术与均值不等式有联系。

## 5 结 语

传授数学知识、演化数学方法、传承数学文化是数学教育的重要任务，串联数学知识、数学方法与数学文化的“经脉”是数学思想[7]。本节课首先介绍和差术，渗透换元法与化归思想，紧接着从古巴比伦的二元方程组解法中提炼出和差术的四个代数恒等式，最后应用和差术将高中不同领域的知识点串联起来。

本节课借鉴历史，从古巴比伦泥版中的二元方程组问题到函数、向量、三角、数列等知识领域，各个知识点均可转化为和差术模型进行求解；学生掌握了数学思想，如同掌握了数学的精髓，讲解和差术的同时，也加深了对换元与化归思想的理解，体现了“方法之美”。古巴比伦祭司对二元问题的精彩解答，在今天课堂上大放异彩，让学生体会到数学问题背后的人文色彩，因而数学史体现了“文化之魅”。引导学生穿越时空隧道与古人对话，古人简捷的解题策略，让学生心生敬意，激发了学生的学习兴趣与自信心，因而数学史体现了“德育之效”。如果说仰望星空，可以看到深邃美丽，那么观察古人的方法，我们可以对数学产生热衷和敬畏。

通过本次课的教学，教师和学生们都非常认同 HPM 对于高三复习课的价值。在不久之后的高三三模复习过程中，学生遇到可用和差术来解决的问题时，都感到非常兴奋，更进一步感受到了和差术的便捷。遗憾的是，由于笔者对数学史的理解还不够深入，整节课并没有达到融会贯通的境界。

HPM 视角下的高三数学复习课教学迄今还是一块待开发的处女地，是未来 HPM 实践研究的重要方向。学习和研究数学史，从历史宝藏中汲取精彩的思想方法，并将其用于串联不同领域知识、驾驭问题解决的主线，让数学复习课焕发勃勃生机，是执教者未来追求的目标。

## 参考文献

[1] 陶兴模. 数学复习课的基本策略[J]. 数学通报, 2005, 44(4): 29-34.

[2] 曾木英. 重构——数学复习课的核心要义[J]. 教学与管理, 2017, (8): 33-34.

[3] 沈新权. 高中数学复习课教学设计的探索与实践[J]. 中学数学教学参考, 2012, (8): 23-25.

[4] Jankvist, U. T. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71(3): 235-261.

[5] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[6] 汪晓勤. 椭圆方程之旅[J]. 数学通报, 2013, 52(4): 52-56.

[7] 蒲大勇, 史可富. 如何让数学思想落地生根[J]. 数学通报, 2016, 55(3): 19-21.

# HPM 微课在“和角公式”教学中的应用

余庆纯

（华东师范大学数学科学学院，上海，200062）

## 1 引 言

“互联网+数学教育”是一种与时俱进的数学教育形态，是现代教育信息技术与数学教育的有机融合，可以助推传统数学教育的转型升级与发展[1]。微课，作为“互联网+数学教育”的一种教育模式，具有针对性强、应用灵活、反复观看等特点，适合移动学习、在线学习等新时代学习方式，越来越受到师生们的欢迎。

《普通高中数学课程标准（2017 年版）》指出，在学习和应用数学的过程中，学生能发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养[2]。同时，新课标提出：数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点以及他们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动[2]。纵观高中数学课程的新结构，数学文化贯穿始终，成为培育数学学科核心素养的有效载体。作为数学文化不可或缺的一部分，数学史既展现了数学知识的来龙去脉，又承载着培育数学学科核心素养的重要使命，孕育着“立德树人”的教育指向。

目前，HPM 视角下的高中数学教学主要以教师讲授为主，虽具有趣味性、科学性、可学性、有效性、人文性等特点[3]-[4]，但由于数学史资源匮乏，且对数学史在教学中的运用方式不甚了了，真正的 HPM 教学实践者并不多。如果有现成的 HPM 微课可用，上述问题就能得到解决。所谓 HPM 微课，是指围绕某一知识点（如重点、难点等）或教学环节所制作的以数学史为主题的信息资源，包括 HPM 微视频（时长一般为 6-10 分钟）、HPM 微课教案、HPM 微课脚本、HPM 微课学习单等。那么，应用灵活、可反复观看的 HPM 微课能否优化传统数学教学模式？HPM 微课对学生的数学学习是否会产生积极的影响？本文试图通过 HPM 微课融入两角和的正弦公式的教学研究，来回答上述问题。

## 2 研究框架

根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》[2]的内容要求，结合第三届全国中小学优

秀微课征集活动的优秀参赛作品[5]和“全国中小学优秀微课征集活动”评审标准[6]，笔者构建了 HPM 微课的研究框架，包含分析、设计、制作、应用、评价五个环节（如图 1）。这五个环节既相对独立、又环环相扣，形成一个有机的整体。

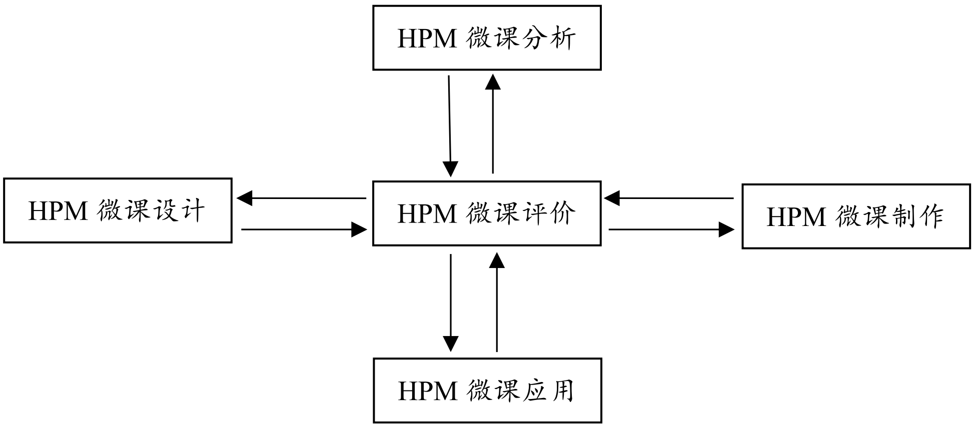



图 1　HPM 微课的研究框架

HPM 微课的分析，是 HPM 微课研究的首要环节，旨在厘清 HPM 微课的各项基本要素，包括课标分析、教材分析、学情分析、数学史料分析等。

HPM 微课的设计，是整个 HPM 微课研究的关键环节，起到承前启后的作用。在此环节上，教师以 HPM 微课的分析结果为依据，结合教学实际需求，确定 HPM 微课融入高中数学教学的教学目标、教学形式等基本要素。HPM 微课的教学目标必须紧扣高中数学课程标准的要求，围绕某个知识点、教学环节、实验活动等展开，能够有效解决高中数学教与学过程中的重点、难点等问题，便于教师教学使用、学生自主学习。HPM 微课的设计主要分为 HPM 微课教案、HPM 微课脚本、HPM 微课学习单等三部分的设计。

HPM 微课的制作，是在 HPM 微课分析、设计的基础上，进行拍摄或录制、剪辑加工、修改完善等过程。从技术角度来看，HPM 微课的制作方式主要分为拍摄类、录屏类、动画类及混合类。其中，拍摄类 HPM 微课制作主要采用实景拍摄的形式，将课堂实录和讲解内容用摄影机、智能手机等工具录制下来，经过后期剪辑加工形成微课。录屏类 HPM 微课制作主要采用 Camtasia Studio 等录屏软件，对教学内容或操作过程进行录制，经过后期剪辑加工形成微课。

HPM 微课的应用，分为线上、线下的实际应用。首先，将制作好的 HPM 微课上传、发布到相关信息平台（如班级 QQ 群、微课教研平台、校资源平台等），学生下载 HPM 微课资源并进行自主学习；教师、教研员等将 HPM 微课融入高中数学教学中，使其成为实际课堂教学的一个教学环节，丰富教学内容与教学形式；通过 HPM 微课的交互与反馈，有利

于了解学生的自主学习情况以及对 HPM 微课的看法与建议。

关于 HPM 微课的效果，从学生和教师两个方面进行评价。关于 HPM 微课对学生的教育价值，笔者从“数学核心素养”与情感态度七个维度加以分析[7]。

## 3 教学设计与实施

### 3.1 教学目标与重难点

教学目标：在 HPM 微课创设的数学史情境中，经历探究、证明两角和的正弦公式的推理过程，掌握两角和的正弦公式，培育逻辑推理素养；借助矩形模型、菱形模型[8]，通过面积的计算循序渐进地推导出两角和的正弦公式，体会数形结合的思想方法，培育数学运算、直观想象素养；提高学习数学的兴趣，培养善于思考、严谨求实的理性精神。

教学重点：掌握两角和的正弦公式，理解其证明过程；

教学难点：探究、证明两角和的正弦公式。

教学材料：HPM 微课、HPM 微学习单、两对斜边均为 1 的直角三角形（其中一对各含锐角 $\alpha$，一对各含锐角 $\beta$，且 $\alpha \geq \beta$）硬纸片。

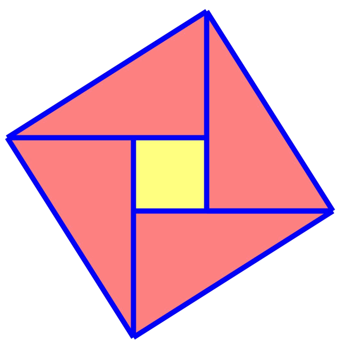
### 3.2 教学过程

（1）创设情境

**师：**（播放 HPM 微课）这是 2002 年国际数学家大会的会徽，其蕴含什么数学定理？同学们还记得它的证明方法吗？

**生：**勾股定理。（教师引导学生回顾证明方法）

**师：**（播放 HPM 微课）中国数学史上最先完成勾股定理证明的是古代数学家赵爽，其运用弦图的“面积出入相补法”进行证明（如图 2）。在古希腊，毕达哥拉斯学派也对勾股定理进行证明（如图 3）。



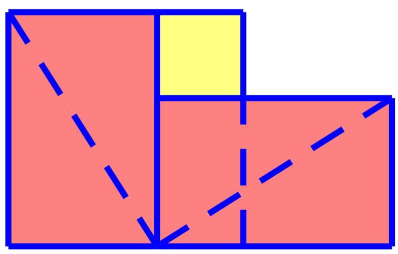


图 2 HPM 微课：赵爽对勾股定理的证明

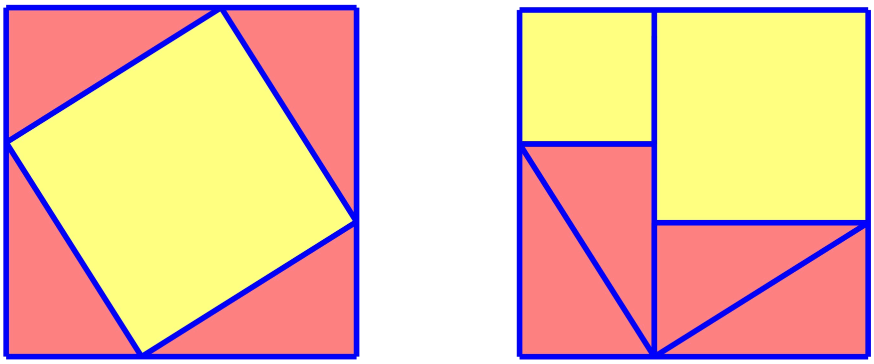


图 3　HPM 微课：毕达哥拉斯学派对勾股定理的证明

（2）公式探究

**师**：（播放 HPM 微课）古希腊数学家运用几何方法来推导和角公式。现在沿着古代数学家的脚步，试着探究两角和的正弦公式及其证明。现有两对斜边均为 1 的直角三角形的硬纸片，其中一对各含锐角 $\alpha$，一对各含锐角 $\beta$（$\alpha \geq \beta$），你能将这两对三角形拼成矩形或菱形吗？（见图 4）试着动手探究。

（教师暂停视频，引导学生进行小组探究。同学们尝试在 HPM 微学习单上用硬纸片拼出模型，并用笔描出模型示意图的具体轮廓，标注已知的角度与长度。他们小组合作，其乐融融，三个小组拼出了矩形模型，两个小组拼出了菱形模型。）

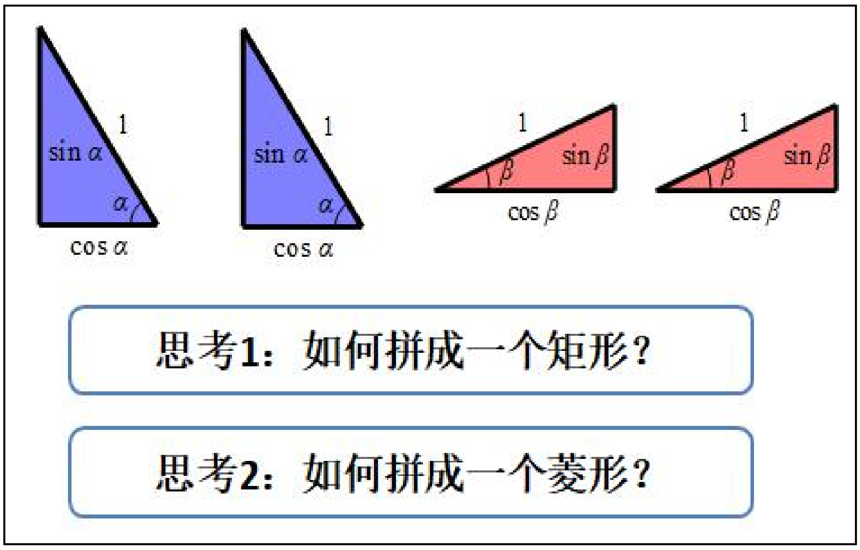
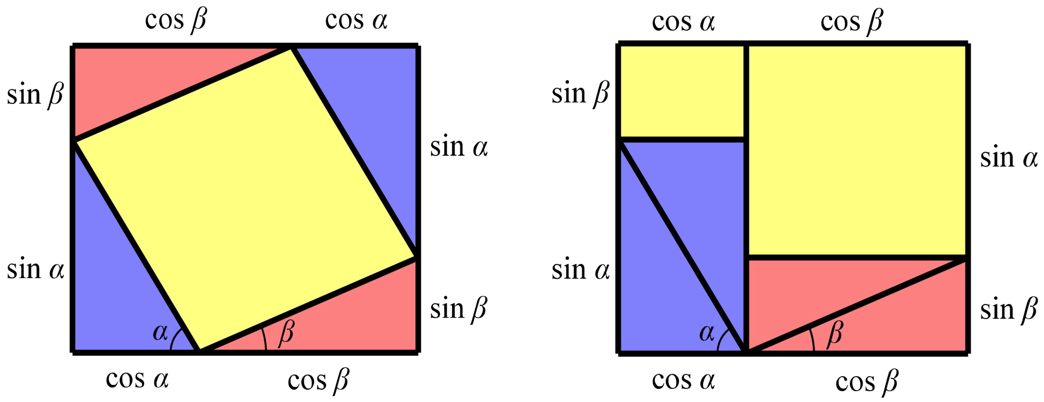



图 4　HPM 微课中活动探究的微视频截图

**师**：同学们非常棒！现在，我们先来探究一下矩形模型。

**师**：同学们所拼成的矩形模型（如图 5（a））类似于赵爽在“勾股圆方图注”中所用的“大方”图，是将这两对三角形拼成长为 $\cos\alpha+\cos\beta$，宽为 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的矩形模型。

矩形模型的中间是边长为 1、一个内角为 $\alpha+\beta$ 的菱形。那么，如何计算中间菱形的面积呢？从弦图的“面积出入相补法”，你能得到启示吗？




（a）　　　　　　　　　　　　(b)

图 5 矩形模型及其重组的示意图

（教师通过层层设疑，铺设问题台阶，引导学生通过出入相补法来推导证明出该矩形模型里蕴含的两角和的正弦公式。学生通过 HPM 微学习单中所描的模型示意图，计算出矩形模型各部分的面积。）

**生**：可以用菱形面积的面积公式计算出来，它的面积为 $\sin(\alpha+\beta)$。

**生**：（小组展示）还可以借鉴弦图的出入相补法，在矩形中，通过移动其中两个直角三角形来拼成新的图形（如图 5(b)），其进一步可以分解成两个长方形，面积分别为 $\sin\alpha\cos\beta$ 和 $\cos\alpha\sin\beta$。

**师**：对！我们可以借鉴弦图的出入相补法来计算菱形的面积。出入相补前后，面积有什么变化吗？我们能进一步推导出什么呢?

**生**：出入相补前后，面积保持不变，推导出 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

**师**：这就是这节课学习的主要内容，两角和的正弦公式。

（教师板书：两角和的正弦公式。）

**师**：（播放 HPM 微课）接下来通过 HPM 微课，我们来小结一下矩形模型里蕴含的两角和的正弦公式。

**师**：接下来，我们一起来探究菱形模型。

**师**：同学们拼的菱形模型类似于赵爽在“勾股圆方图注”中所用的弦图，是由两对直角三角形拼成边长为 1 且一个内角为 $\alpha+\beta$ 的菱形（如图 6（a））如何计算菱形的面积呢？同理，从弦图的出入相补法，你能得到什么启示？

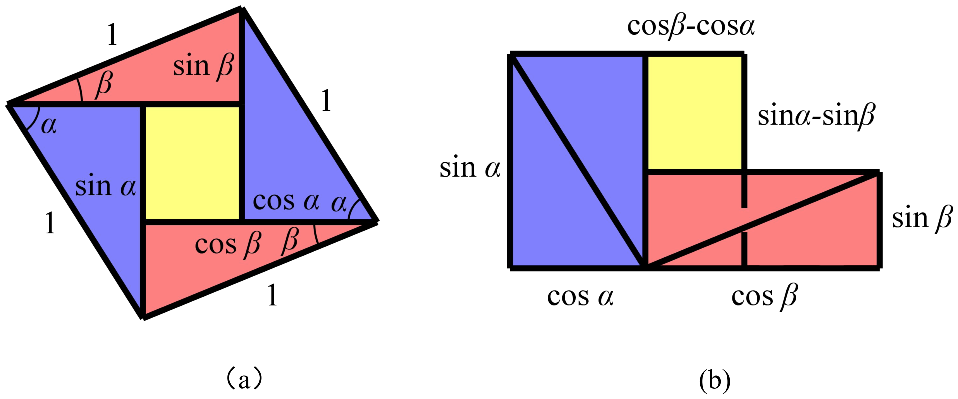



图 6 菱形模型及其重组的示意图

（学生通过 HPM 微学习单中所描的模型示意图，计算出菱形模型各部分的面积。）

**生**：根据菱形面积的面积公式，计算出来它的面积为 $S_{菱形}=\sin(\alpha+\beta)$。

**生**：（小组展示）根据弦图的出入相补法，可以将菱形模型左上方的直角三角形移至右下方，右上方的直角三角形移至左下方，拼成新的图形（如图 6（b））。此时，该图形可以分解为两个长方形，其面积分别为 $\sin\alpha\cos\beta$ 和 $\cos\alpha\sin\beta$。

**师**：很好！运用“面积出入相补法”，我们能进一步推导出什么呢?

**生**：推导出两角和的正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

**师**：（播放 HPM 微课）接下来通过 HPM 微课，我们来小结一下菱形模型里蕴含的两角和的正弦公式。

（3）新知讲解

**师**：通过 HPM 微课与上述探索，我们学习了 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，让我们继续跟着 HPM 微课的讲述，了解一下两角和的正弦公式的历史。

（教师播放 HPM 微课，学生观看）

（4）交互任务

计算：（1）$\sin 25°\cos 65°+\cos 25°\sin 65°$；（2）$\sin 105°$。

（巩固新知，考查学生对两角和的正弦公式的理解与应用。学生在 HPM 微学习单上，运用新知做练习。）

（5）归纳小结

**师**：通过本节课，你学习到哪些数学知识和数学思想方法呢？

**生**：学习了两角和的正弦公式的数学知识，面积出入相补法法和数形结合的数学思想。

## 4 学生反馈

课后，对全班同学进行了问卷调查，结果显示：全班 42 人中，约 95%的学生喜欢 HPM 微课。对于 HPM 微课的看法，学生表示，HPM 微课带来数学家的奇思妙想，激发数学学习的兴趣，拓宽数学思维，帮助他们认识数学知识的来龙去脉，理解公式的推导证明，领略数形结合的思想方法。同时，HPM 微课能够及时暂停、反复观看，不仅能在课堂中辅助数学学习，而且能在课后帮助复习巩固。以下是部分学生的观点。

生 1：HPM 微课是个新奇的事物，把数学史与微课联系在一起。

生 2：HPM 微课能帮助理解数学知识，了解数学的发展。

生 3：HPM 微课帮助理解公式的推导证明，体会到数形结合的魅力。

生 4：原来数学史可以用微课来学习，比往常数学课上老师讲的，更加直观形象。

生 5：HPM 微课生动有趣，对数学学习很有帮助，我更喜欢数学课了。

基于学生的观点，可以看出学生对 HPM 微课融入数学教学持有肯定态度。HPM 微课能够创造数学史情境，展现数学知识的来龙去脉，展现数学史上丰富多彩的数学思想。HPM 微课融入高中数学教学，能够激发学生的数学学习兴趣，帮助他们了解数学的发生、发展过程，理解数学的本质，拓宽数学思维，在一定程度上能够促进学生的自主学习，培育逻辑推理、直观想象、数学运算等数学学科核心素养。同时，HPM 微课能在课堂中辅助数学教学，为数学课堂增光添彩。另外，有些学生提出，高中的学习时间相对紧张，希望 HPM 微课能够进一步兼顾高考内容的重点与难点，更好地辅助他们的数学学习。

## 5 教学反思

### 5.1 HPM 微课对学生的影响

HPM 微课融入“两角和的正弦公式”的教学实践表明，HPM 微课以学生喜闻乐见的微视频形式来营造数学史情境，使数学史由静态转变成动态，由生硬的学术形态转变成易于理解的教育形态。比如，HPM 微课首先呈现 2002 年国际数学家大会会徽，引出勾股定理与赵爽弦图的出入相补法，进一步借鉴其来探究两角和的正弦公式。可见，HPM 微课可以创设数学史情境，帮助学生忆旧迎新，回顾勾股定理与出入相补法，为后面探究两角和的正弦公式所需要用到的数学思想方法埋下伏笔。

教师借助 HPM 微课引导学生探究矩形模型、菱形模型，经历两角和的正弦公式的逻辑推理过程，帮助学生学会用数学语言有理有据地表达数与形的联系，体会数形结合的思想方

法，借鉴出入相补法进行数学运算，循序渐进地推导出两角和的正弦公式。可见，HPM 微课是学生进行数学学习的好帮手，其以生动有趣的微视频形式来促进学生对数学本质的理解，促进逻辑推理、直观想象、数学运算等数学学科核心素养的综合培育，帮助学生提高学习数学的兴趣，培养善于思考、严谨求实的理性精神。

**5.2 HPM 微课对教师的影响**

对于教师而言，HPM 微课能够帮助数学教师在有限的课堂教学时间里灵活地呈现相关的数学史内容，较好地规避因数学史内容不熟悉而引发的科学性错误，或为了阐述数学史内容而导致课堂教学时间延长等情况，提高 HPM 教学效率。本节 HPM 微课以引导探究法、启发式讲解法为主，通过微视频简要引出出入相补法，进一步借鉴其来着重探究两角和的正弦公式。可见，HPM 微课能够快速巧妙地创设数学史情境，避免数学教学中枯燥冗长的引入，使得整体 HPM 教学详略得当、重点突出。

HPM 微课是开展 HPM 教学活动的有效载体，其能灵活地引导学生探索数学知识的来龙去脉，品味数学的历史韵味与文化芳香。比如，在引导学生探究矩形模型、菱形模型后，借助 HPM 微课来归纳出两类模型中蕴含的两角和的正弦公式，接着展示了两角和的正弦公式的历史，使数学探究活动有头有尾、生动有趣，使得数学课堂变得熠熠生辉。同时，HPM 微课能够及时暂停、反复观看，不仅能在课中辅助 HPM 教学，而且能课前导学、课后巩固与拓展，促进优质 HPM 微课的积累，提高 HPM 教学内容的应用性、可重复性。

HPM 微课不仅继承微课的内容精炼、目的明确、时间简短、应用灵活、适合学生自主学习等特点，而且以“图、文、声、动画”相结合的微视频来展现数学史，促使数学史焕发新鲜活力。HPM 微课融入高中数学教学，在一定程度上有效地改善 HPM 教学“高评价、低应用”的境遇，优化传统数学教学模式，传播 HPM 教育理念，顺应“互联网+数学教育”时代的发展。

## 参考文献

[1] 徐冉冉, 裴昌根, 宋乃庆. 互联网+数学教育：“机遇”“挑战”与“应对”[J]. 数学教育学报, 2016, 25(3): 6-9.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 8-10.

[3] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 16-23.

[4] 陈晏蓉, 汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析[J]. 教育研究与评论, 2017(12): 37-43.

[5] 中国教育发展战略学会教育信息化专业委员会. 第三届全国中小学优秀微课征集活动的优秀参赛作品[DB/OL]. http://dasai.cnweike.cn/index.php?r=matchV4/search/index. 2017-12-04/2018-01-12.

[6] 中国教育发展战略学会教育信息化专业委员会. 全国中小学优秀微课征集活动评审标准[EB/OL]. http://dasai.cnweike.cn/index.php?r=matchV4/default/standard. 2018-01-02/2018-01-14.

[7] 余庆纯. HPM 微课融入高中数学的教学研究[D]. 江门: 五邑大学, 2018.

[8] 汪晓勤, 邵铭宇. 三角公式的若干几何模型[J]. 数学通报, 2017, 56(6): 1-5.

# 学术讯息

## 第八届“数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学”会议纪要

“数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学”（European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education，简称 ESU）是数学史与数学教学的关系（简称 HPM）国际研究小组最重要的活动之一，每 4 年召开一次。第八届“数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学”（简称 ESU-8）于 2018 年 7 月 20-24 日在挪威奥斯陆城市大学举行。曾任 HPM 国际研究小组主席的 Constantinos Tzanakis、 EvelyIle Barbin 及奥斯陆城市大学的 Bjørn Smestad 等组织了此次会议。

纵向来看，ESU-8 涉及各个阶段的教育——从小学到大学——包括在职教师培训，横向来说，此次会议主要围绕以下 6 个主题展开：（1）在数学教育中整合数学史及认识论的理论及概念框架；（2）学生及教师数学教育中的历史及认识论：课程，科目，教科书及各种教学材料——它们的设计、实施及评价；（3）数学教学中的原始素材；（4）数学及其与科学、技术和艺术的关系：与跨学科教学有关的历史问题及社会文化面向；（5）数学教育史；（6）北欧国家的数学史。

本届会议参会代表包括来自英国、法国、德国、希腊、丹麦、意大利、美国、加拿大、南非、中国等地的一百余位数学史与数学教育专家、学者，以及中小学数学教师。会议共设大会报告 6 场，大会专题讨论 1 场，2 小时工作坊 8 场，1.5 小时工作坊 12 场，30 分钟口头报告 50 场，15 分钟简短口头报告 2 场及展览会 1 场。

此次国际 HPM 会议研究有如下特点：着力历史研究，聚焦实践应用；立足本体知识，细化研究主题；重视信息技术，强调学科联系；夯实理论基础，拓展研究方法，这对今后可关注的 HPM 研究路径、HPM 研究主题、如何借力其他领域研究成果、如何更好地处理 HPM 实践与研究的关系等问题有重要启示。

（孙丹丹 供稿）