上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2019 年第 8 卷第 3 期

吴文俊（1919.5.12 ~ 2017.5.7）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

中国著名数学家、中国科学院院士、首届国家最高科学技术奖获得者吴文俊（1919-2017）先生在数学、数学史研究等领域做出了卓越贡献。1946 年，吴文俊先生着手研究代数拓扑，次年便在拓扑学研究中开创性地引入“吴公式”，成为 20 世纪 50 年代时期拓扑学的重大突破之一，被誉为“拓扑学的地震”。20 世纪 70 年代，吴文俊先生受到中国古代数学思想的启发，逐渐将研究兴趣从数学研究转向数学史研究，其将中国传统数学的特点概括为构造性与机械化，不仅成功将其应用于数学机械化新领域，成为古为今用、自主创新的典范，而且开创并引领了继李俨（1892-1963）、钱宝琮（1892-1972）先生之后的中国数学史研究的新局面。吴先生对中国传统数学的历史源流与研究方法的独到认识，主要表现为“两条主流”、“古证复原”、“古为今用”、“丝路精神”等四个方面，逐渐形成了影响深远的“吴文俊数学史观”。

1975 年，吴文俊先生率先澄清世界数学发展有“两条主流”脉络，一条主流是从古希腊欧几里得系统发展而来，一条是发源于古代中国。1976 年，吴文俊先生突破以往数学史研究中“以西释中、以今议古”研究方法的局限，以“海岛公式”为例，填补了独立于西方数学的、符合当时社会文化背景的数学知识与方法的证明。接着以此为基点，提出“古证复原原则”，认为数学史研究需要坚持客观的历史主义，当时的史料与历史语境对数学史研究具有重要意义，并进一步研究“出入相补原理”、“刘徽原理”、“祖暅原理”等一般算法原理，均收录于《中国古代科技成就》一书中。随后，吴文俊先生开拓了数学机械化的新领域，倡导“古为今用”的原则，即不能以今推古，用现代眼光研究过去，曲解古人研究数学的本意，要从历史的发展中获得借鉴、汲取教益，促进现实的数学研究。20 世纪 80 年代，吴文俊先生明确指出中国传统数学具有构造性、机械化（后也称为“算法化”）两大特色，这在中国数学史界连续掀起了对中国古代数学再认识的研究高潮，可见吴文俊先生对中国古代数学的钻研日趋成熟。2001 年，因在拓扑学与数学机械化等领域的一系列开创性研究工作，吴文俊先生荣获首届国家最高科学技术奖。同年，吴先生成立了“数学与天文丝路基金”，资助有发展潜力的年轻学者从事有关古代与中世纪沿丝绸之路（重点为中亚地区）数学与天文交流的研究，促进数学史研究与多元文化的互通互融、共同发展。

通过认真研读《九章算术》与刘徽注解等中国古代数学经典著作，吴文俊先生指出：中国古代几何学体系不同于古希腊公理化的演绎体系，而是根据几条“简明原理”（如出入相

补原理、刘徽原理、祖暅原理等）构造性地逐步推导出所需要的结果，凸显数学的简洁美。其中，“出入相补原理”源自刘徽对《九章算术•勾股章》的“勾股术注”中一句精髓的话语“令出入相补，各从其类”，吴先生将其概括为“出入相补法”，并在《周髀算经》的“日高公式”、《海岛算经》的“重差公式”、《数书九章》的“三角形面积公式”等内容中进行推理证明与应用，揭示出中国古代数学家在“出入相补原理”启示下将几何问题转化为代数方程求解的规律，创新性地发掘中国古代数学“几何的代数化”的精彩数学本质。

实际上，我国数学家、数学教育家张奠宙先生曾指出：吴文俊先生建议把中国古代的“出入相补原理”作为中小学几何课程的一个重要原理，但是没有引起普遍的关注，各种教科书往往以“割补法”一词轻微带过，没有彰显出古代几何学数形结合、寓形于算的数学思想方法，甚是惋惜。所幸的是，在 HPM 的史料研究中，诸如“出入相补原理”等简明原理已有部分应用于教育取向的数学史研究中。中国对“基本不等式”的推理或证明方法古已有之，在古代数学文献中有迹可循。公元 3 世纪，赵爽注解典著《周髀算经》中“勾股圆方图”时写道：“以图考之，倍弦实，满外大方，而多黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也”，可从几何图形“出入相补”的角度，推算出两个正数的算术中项与几何中项的基本不等式关系。此外，汉代数学典著《九章算术》勾股章有一问答：“今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何……并勾股为法，勾股相乘为实，实如法而一，得方一步”，后至公元 263 年，刘徽在《九章算术》注解中利用“出入相补法”给予证明，进一步借助刘徽的“勾股容方图”可以推算出均值不等式。

在 HPM 教学中，“出入相补原理”常用于“活动探究”或“问题解决”教学环节，如在“三角形中位线定理”课例中，在探究“三角形土地四等分”的土地分配问题上，借鉴数学家刘徽在证明三角形面积公式时采用的“出入相补法”推导三角形中位线定理。“出入相补原理”融入 HPM 教学实践，贯穿吴文俊先生对赵爽、刘徽、杨辉等中国古代数学家“出入相补原理”数学本质的提炼，渗透“代数的几何化”等数形结合思想，促进学生形成动态数学观，弘扬古代几何学寓形于算的算法思想与“立德树人”的数学学科德育。

20 世纪 70 年代中期至今，吴先生潜心钻研中国古代数学史料，发表了一系列中国古代数学对世界数学发展贡献的研究成果，开辟了中国数学史研究的历史新征程，弘扬优秀的中国古代数学文化。2019 年，正值吴先生诞辰 100 周年之际，谨以此文纪念吴先生渊博深厚的数学史学术成就，启示未来 HPM 研究发展。

目　录

CONTENT

理论探讨

基于数学史的初中数学批判性思维案例分析

——以三角形一边平行线定理为例

卢成娴，姜浩哲

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

作为 21 世纪技能的核心[1]，批判性思维是指“理性的、反思性的思维，其目的在于决定我们的信念和行动”[2]。数学的教育价值之一在于培养学生的理性思维[3]。苏格兰数学家阿布斯诺特（J. Arbuthnot, 1667-1735）在其《论数学学习的益处》中指出：数学使人获得清晰的、论证性的、有条理的推理习惯，为头脑注入生命力，使其免受偏见、轻信和迷信的影响[4]。因此，批判性思维是理性思维中不可或缺的组成部分。近年来，如何在数学教学中发展学生的批判性思维，已经成为备受关注的热点问题[5]。

研究发现，基于历史的教学有助于发展学生的批判性思维[6]。事实上，数学史的教育价值可以分成知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效六类[7]，而这六类价值均与批判性思维有着密切的联系。那么，HPM 视角下的数学教学对批判性思维的培养有何独特价值？本文试图通过对“三角形一边平行线定理”这一具有代表性的初中 HPM 课例进行分析，以回答上述问题，为未来的 HPM 课例研究以及数学学科德育的实施提供参考。

2 分析框架

20 世纪 90 年代初，美国哲学协会曾组织来自不同领域的 46 位批判性思维研究专家制定和发布了著名的《德尔菲报告》[8]，对批判性思维的内涵作了具体阐述，在此基础上，法乔恩（P. A. Facione）等研制了《加利福尼亚批判性思维倾向测试》（California Critical Thinking

基金项目：上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究（A8）；华东师范大学教育学部 2018 年度大学生科研基金项目“初中生数学批判性思维测评工具开发与培养路径探析”（ECNUFOE2018KY021）

Disposition Inventory, 简称 CCTDI），被公认为具有较好的信度和效度，在美国的大、中学广为使用[9]。CCTDI 将批判性思维的特质分为以下七个方面[10][11]：

（1）求知欲：指对知识充满好奇，渴望学习，即使这些知识的实用价值并非直接明显；

（2）开放思想：指对不同的方法和意见采取包容的态度，防止个人偏见的可能；

（3）批判思维的自信心：是相信自己的推理过程与分析能力；

（4）系统化能力：是指有组织、有目标地去努力处理问题；

（5）认知成熟度：是指审慎地作出判断，或暂不作判断，或修改已有判断，警觉性地去接受多种解决问题的方法；

（6）寻找真相：是指勇于寻找最佳方案，敢于质疑，在寻找知识时保持真诚和客观的态度；

（7）分析能力：指能够鉴定问题所在，预计可能出现的结果，基于证据、运用推理解决问题。

在不同的 HPM 课例中，批判性思维特质的体现互有不同。本文选择课例“三角形一边的平行线性质定理及推论”，对其中的求知欲、开放思想、批判思维的自信心、系统化能力、认知成熟度、寻找真相和分析能力等维度进行分析。

3 课例的教学过程

在上课之前，学生已经对课本以及教师下发的阅读材料进行预习，对“三角形一边的平行线”有了一定的了解。阅读材料介绍了欧几里得（Euclid, 公元前 3 世纪）《几何原本》命题VI.2、命题I.43 以及杨辉的“勾中容横、股中容直”原理。

《几何原本》命题VI.2：如果一条直线平行于三角形的一条边，那么它所截得的边成比例；如果三角形的边被截成比例，那么通过两点的直线平行于三角形的第三边。（如图 1）

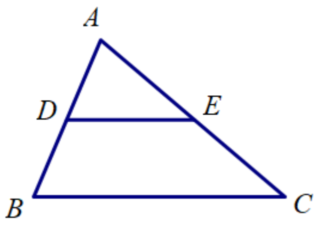


图 1

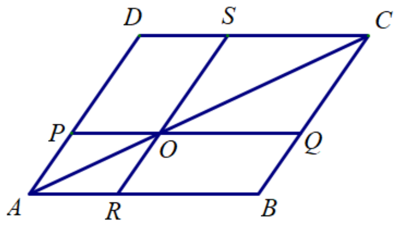


图 2

《几何原本》命题I.43：在任何平行四边形中，对角线上两边的平行四边的补形面积相等。（如图 2）

杨辉“勾中容横、股中容直”原理：如图 3 所示，设 O 是矩形 $ABCD$ 对角线上一点，过 O 是分别作一组邻边的平行线 PQ、RS，则 $S_{OD}=S_{OB}$。

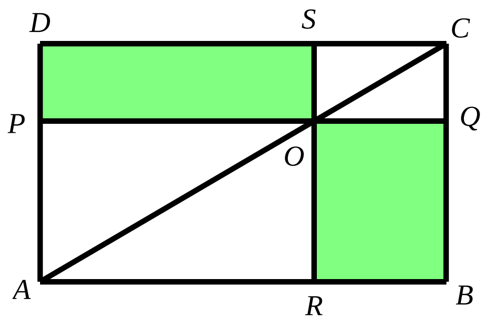


图 3

在课例“三角形一边的平行线性质及推论”中，教师主要从定理“是什么”、“如何证”、“怎么用”三个方面展开教学。

环节一：理解定理

教师带领学生分别从文字语言、图形语言以及符号语言三个角度解读三角形一边的平行线性质定理。

文字语言：平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例。

图形语言：三角形一边的平行线性质定理对应两种情形，如图 4、5。为了方便起见，教师根据图像特点将其命名为“A 字型”与“8 字型”。

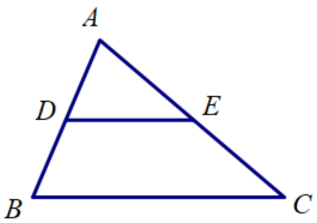


图 4　A 字型

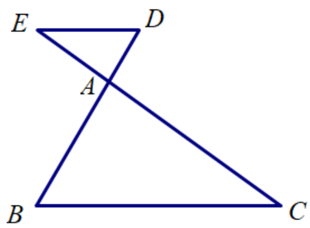


图 5　8 字型

符号语言：$\because DE /\!/ BC$，$\therefore \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC},\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC},\dfrac{DB}{AB}=\dfrac{EC}{AC}$。

环节二：证明定理

教师首先带领学生回顾《几何原本》中“A 字型”的证明方法，引导学生在“A 字型”基础上证明“8 字型”；师生共同探究“三角形一边的平行线性质定理推论”，用三种语言描述推论，并类比欧氏方法进行论证；然后教师进一步引导学生用“出入相补原理”证明上述定理与推论，由直角三角形推广到一般三角形；最后，师生总结欧氏几何与出入相补原理证明方法的异同，深入体会中西数学思想。

环节三：应用定理

教师选择 2 道历史问题，引导学生分别从欧氏几何和出入相补两个角度进行解答，感受"三角形一边的平行线性质定理及推论"在测量问题中的广泛应用。例 1 为《九章算术》勾股章第 19 题，此题在测量中属于一次测望；例 2 为《周髀算经》中的日高公式，属于二次测望。

环节四：课堂小结

教师引导学生从数学知识、数学方法、数学思想等方面概括本节课的内容，并总结：中西数学方法的殊途同归体现了海纳百川、兼容并包的思想意识，在后续的学习中会进一步体会中西结合的思想方法。

4 批判性思维分析

4.1 开放思想

教师引导学生从多角度、多方面证明"三角形一边的平行线性质定理"，通过展现中西数学文化思想，培养学生的开放思维。以下为具体片段：

师： 根据阅读材料，欧几里得在《几何原本》中是如何证明"A 字型"的呢？

生 1： 连接 BE、CD，设 DE、BC 间的距离为 h，则 $S_{\Delta DEB}=\dfrac{1}{2}DE\cdot h$，$S_{\Delta DEC}=\dfrac{1}{2}DE\cdot h$，所以 $S_{\Delta DEB}=S_{\Delta DEC}$。又因为 $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DEB}}=\dfrac{AD}{BD}$，$\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DEC}}=\dfrac{AE}{CE}$，所以 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{EC}$。（如图 6）

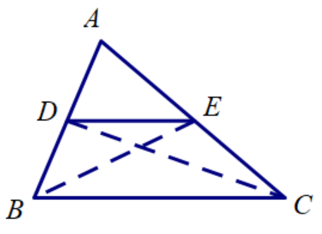


图 6

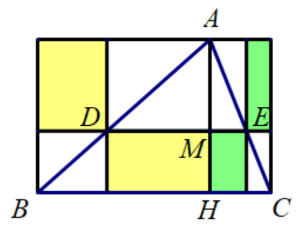


图 7

而后，教师又引导学生利用中国古代的出入相补原理进行证明。

师： 虽然"出入相补原理"可以一图多含，但它的应用范围却在特殊的直角三角形中，这种证明方法可以用在一般的三角形中吗？

生 2： 过 A 点作 BC 的垂线。

师： 为什么想到作垂线呢？

生 3：这样就将一个三角形分成两个直角三角形，左边补一个（长方形）可以得到 $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{MH}$，右边补一个（长方形）可以得到 $\frac{AE}{EC}=\frac{AM}{MH}$。（如图 7）

师：作出垂线 AH，以它作为桥梁，将一般的三角形转化成特殊的三角形。那么除了这种方法，还有其他方法吗？

生 4：把ΔABC 补成平行四边形，过 A 作 BC 的平行线，过 B 作 AC 的平行线。（如图 8）

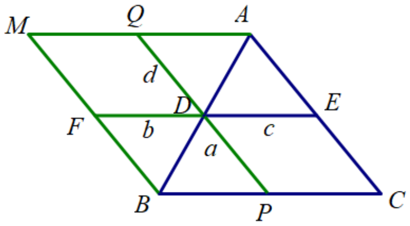


图 8

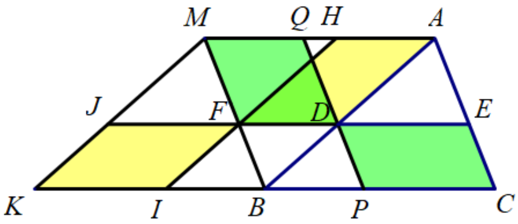


图 9

师：补出来的这张图就是《几何原本》里的图吧！根据预习，我们已经知道什么式子？

生：$ac=bd$。

师：那我们要证明的是什么？

生：$\frac{d}{a}=\frac{AD}{BD}$。

师：刚刚我们说可以将直角三角形补成矩形，那么对于一般的三角形我们是否可以把它补成平行四边形？大家尝试一下。

（经过 3 分钟思考讨论）

生 5：（上台演示）可以在ΔABC 左侧再补一个平行四边形。过点 M 作 AB 的平行线，过点 B 作 AM 的平行线。（如图 9）

师：这在原来的基础上又做了一次出入相补。在平行四边形 $MACB$ 中，$\frac{QD}{DP}=\frac{DE}{DF}$，在平行四边形 $MABK$ 中，$\frac{FH}{FI}=\frac{FJ}{DF}=\frac{DE}{DF}$，因此 $\frac{FH}{FI}=\frac{QD}{DP}$，即 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$。

师：那么除了这种补法，还有其他的方法吗？刚刚我们是在左边补了一个平行四边形，还可以在右边补一个平行四边形吧。（如图 10）

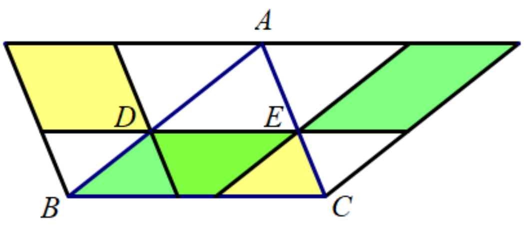


图 10

图 6 的欧氏方法与图 7 出入相补法分别代表了中西数学文化，是同一个定理在不同视角下的探索，有助于开拓学生的思维；图 9 与图 10 的证法则更进一步，将《几何原本》与出入相补法相融合，展现了中西文化的水乳交融，有助于培养学生兼容并包，开放思想。

4.2 批判性思维的自信心

在证明“8 字型”的过程中，教师引导学生以《几何原本》中“A 字型”为媒介，探索多样的证明方法，完善定理的证明过程。在这一探索过程中，学生能够站在古代数学家的肩膀上思考问题，弥补数学家的不足，无形中提高学生批判思维的自信心。

师：《几何原本》中只给出了“A 字型”，那么用欧氏面积的方法，能否证明“8 字型”呢？

生 1：联结 BE、CD，因为$\triangle BED$ 面积与$\triangle CED$ 面积相等，所以$\triangle ABE$ 面积与$\triangle ADC$ 面积相等，所以 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{S_{\Delta EAD}}{S_{\Delta EAB}}=\dfrac{AE}{AC}$。（如图 11）

师：好，非常棒！她原模原样搬取了欧几里得的方法，体现了思维的不变性。那除了这种方法，还有其他方法吗？

生 2：可以将“8 字型”转化成“A 字型”。只要在 AB 上截取 $AD'=AD$，在 AC 上截取 $AE'=AE$，连接 $D'E'$，可以证明 ΔADE 与 $\Delta AD'E'$ 全等，将 ΔADE 转化为 $\Delta AD'E'$。（如图 12）

师：我们完全可以把“A 字型”转化为已知的条件，这就是欧几里得《几何原本》非常漂亮的地方，将结论作为条件应用。那这种转化还有其他的方式吗？

生 3：过 D 作 EC 的平行线，交 BC 的延长线于 C'。（如图 13）

师：你怎么想到这种方法的呢？

生：本来 BD 与 EC 是交叉的，通过平移以后，就可以转化成“A 字型”。

师：非常棒，我们通过这种思路把它转化为常见的图形。

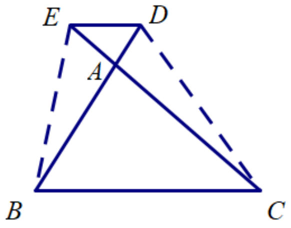


图 11

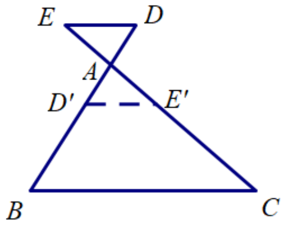


图 12

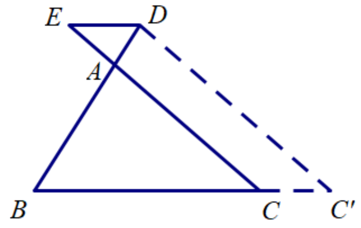


图 13

4.3 认知成熟度与寻找真相

在讨论“出入相补原理是否能证明平行线性质定理？”问题时，起初部分同学的答案是否定的，但在交流中发现利用出入相补法是能够证明直角三角形中平行线性质定理的，若结合等比性质还能优化证明过程。这一探究过程不仅培养了学生求真的精神，也提高了学生的认知成熟度。以下是探究片段：

师：在阅读材料中，我们给出了由“出入相补原理”得到的“勾中容横、股中容直”原理。我们既然要走中西结合的道路，那么通过出入相补我们能证明上述的定理与推论吗？

师：我们先一起来说一说根据“出入相补”可以得到什么？

生：根据 $S_{OD}=S_{OB}$ 可以得到 $OS\cdot OP=OQ\cdot OR$，也就是 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{c}{b}$。

师：但我们现在的问题是“可否证明三角形一边的平行线性质定理与推论？”。我们找一个“A 字型”（如图 14），在这个图形中，我们需要证 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{d}{a}$。这个定理结论与刚刚“容直容横原理”结论并不一样，是否就可以下定论：出入相补原理无法证明平行线性质定理？

（学生思考，有人说不能，也有人说可以）

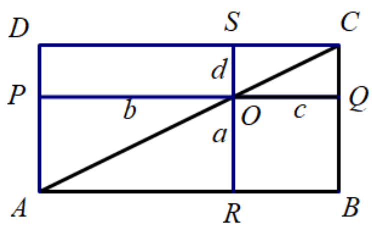


图 14

师：有同学一开始说无法证明，后来又说可以证明的，我们就请他来说说看。

生 1：根据勾股定理可知，$\dfrac{OC^2}{OA^2}=\dfrac{c^2+d^2}{a^2+b^2}$，而 $a=\dfrac{bd}{c}$、$d=\dfrac{ac}{b}$，将它们带进去化简就可以得到。

师：相信一定能算出来！只是代进去计算有点复杂，有没有同学有其他方法，如果没有，我们就把上面的式子一起代进去计算。

生 2：由 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{c}{b}$ 可得 $\dfrac{d^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$，直接利用等比性质 $\dfrac{c^2+d^2}{a^2+b^2}=\dfrac{d^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$，就可以证出 $\dfrac{OC^2}{OA^2}=\dfrac{d^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$，开方后可得 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{d}{a}=\dfrac{c}{b}$。

对于“出入相补法能否证明定理及推论”这一问题，虽然部分同学的初始回答与最终的结果有所不同，但在探索过程中，学生始终以客观的态度进行探索，以严密的逻辑推理证实了三角形平行线性质定理，并结合等比性质寻找到最佳证明方法，无形之中培养了求真的精神。同时，这一探究过程也启示学生：面对问题要有自己的思考，不可轻易作出判断。有助于培养学生科学论证的理性精神，提高学生认知的成熟度。

4.4 分析能力

在利用欧氏几何和出入相补原理证明定理及推论后，教师进一步引导学生比较这两种方法之间的异同，挖掘其背后的数学思想文化，提高学生的分析能力。以下是具体过程：

师：我们用欧氏几何和出入相补原理分别证明了“三角形一边的平行线性质定理及其推论”，你觉得他们之间有怎样的关系呢？或者他们之间有什么相同点和不同点？

生 1：所有的证法都用到了面积。

师：通过面积从什么证什么？

生 1：已知的都是平行线，通过面积证比例式。

师：非常好！它们的共性都是将平行关系转化为比例式，都是通过面积。在这个过程中还包括了从特殊到一般，从静态到动态，体现了类比、化归、分类讨论和一题多解等思想方法。那么它们之间的不同点在哪里呢？

生 2：欧氏几何只是研究了 A 字型，而出入相补不仅包含了 A 字型，还包括了 8 字型，可以直接得出定理和推论。出入相补更加完整，但欧氏几何更加简单。

师：我们总结一下，欧氏几何是完美的演绎推理，由一个推到另一个，可以将已经证明的结论作为解题的条件，是结论性方法。可是出入相补不同，它一个图包含多个内容，一个结论出来另一个也就出来，在求解的过程中就包含了解题的方法，它是过程性方法。这和中西价值取向有很大的关系，西方崇尚理性而中国重视应用，这在“勾股定理”这节课中就有体现。那我们进一步探讨，你觉得中西为什么都想到用面积来证明“三角形一边的平行线性质定理”？这与想到用“面积”来证明勾股定理，存在必然的联系吗？

生 1：比例式可以化成乘积式，乘积式就表示面积。

生 3：两条边相乘是两维的，最常见的两维表示是面积。

生 4：在勾股定理中 a^2，b^2 都可以看作是正方形的面积，在这个定理中，乘积式与面积也有一定的联系。

师：大家都说得很好！纪伯伦曾说，人性是一条光河，从无始流到永恒。可能就是数学家的这种人性之美发现了数学的理性之美。他们共同发现，原来路可以往这里走，作为我们同学，我们也可以继续发现数学的美。

教师由历史上的定理证明出发，一步一步引导学生挖掘证明方法之间本质的联系，发现比例的基本性质是中西都用面积证明定理的关键，这一过程有助于培养学生分析问题和解决问题能力。

4.5 系统化能力

在定理应用部分，教师借鉴古人的测量方法，以《九章算术》与《周髀算经》中的测量题为例，从“一次测望”到“重差术”，系统介绍各类测量问题的求解方法。

例 1 《九章算术》勾股章第 19 题：今有邑方不知大小，各开中门。出北门三十步有木，出西门七百五十步见木，问邑方几何？

例 2 我国西汉时期天文学家提出著名的“重差术”：如图，为了测量太阳离大地（当时人们误认为大地是平的）的高度 H，立高为 a 的两表，测得影长分别为 s_1 和 s_2，两表之间相距 d，则日高为 $H=a+\dfrac{ad}{s_2-s_1}$。请用杨辉的“勾中容横、股中容直”原理加以证明。

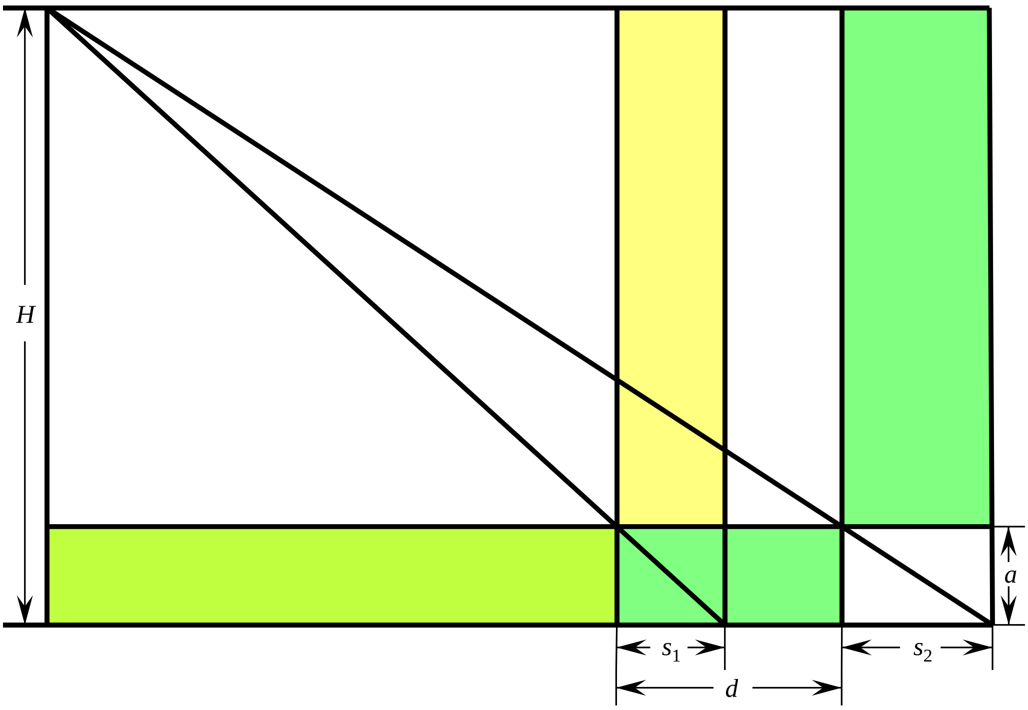


图 15

教师归纳：例 1 的测望问题，只用一次测量即可；而例 2 则需要用到二次测望，两次测望称为“重差术”，刘徽曾在《海岛算经》中阐述这种方法。刘徽曰：“凡望极高，测绝深而兼知其远者，必用重差。”《海岛算经》中还记载了三次测望、四次测望，课后同学们可以进一步去探究。

5 讨论

从发展批判性思维特质的教学片段来看，数学史通过复制式、顺应式、重构式等融入数学教学，培养了学生的批判性思维：在证明“三角形一边的平行线性质定理”时，中西方的数学文化思想为学生提供了多角度、多方面证明的启迪，开拓了学生解决问题时的思维；在证明“8 字型”时，欧几里得的证明方法为学生的探究奠定基础，学生基于数学家的研究，进一步完善了证明过程，提高了批判思维的自信心；在用出入相补法证明定理时，“勾中容横、股中容直”原理的结论与定理结论不一致的问题引发了学生的深度思考，培养了学生勇于探索的求真精神，提高了认知成熟度；为了使学生更深刻地分析和体会数学思想精髓，教师引导学生比较欧式几何与出入相补异同，数学史上中西方的证明方法为学生铺设了独特的分析视角，成为学生更进一步理解数学本质的有力抓手；在定理应用部分，古人系统的测量之术为如今解决测量问题提供了有效的借鉴。

表 1 给出了上述教学片段中数学史的融入方式以及对发展学生批判性思维特质的价值。

表 1 发展学生批判性思维特质的内容分析

批判性思维特质	教学内容	数学史融入数学教学方式	数学史价值
开放思想	通过展现中西方的数学文化思想引导学生从多角度、多方面证明“三角形一边的平行线性质定理”。	复制式、顺应式、重构式	拓宽解题思维
批判思维的自信心	通过展现《几何原本》中“A 字型”的证明过程，引导学生用多种方法证明“8 字型”，完善数学家对“三角形一边的平行线性质定理”的探索过程，激发学生的自信心。	复制式、顺应式	奠定探究基础

认知成熟度、寻找真相	通过对"勾中容横、股中容直原理"的讨论，引导学生探究"出入相补法能否证明定理与推论"，培养学生求真求实的理性精神。	复制式、顺应式	引导深度思考
分析能力	通过中西方不同证明方法的比较，引导学生分析其中的异同点，感受数学思想的水乳交融。	顺应式	铺设分析视角
系统化能力	在例题部分引用古代测量问题，系统介绍各类测量问题的求解之法，由"一次测望"到"二次测望"。	复制式	提供解法借鉴

6 结 语

通过上述分析和讨论可知，在"三角形一边的平行线性质定理和推论"课例中，数学史对发展开放思想、批判思维的自信心、认知成熟度、寻找真相、分析能力和系统化能力六个维度的批判性思维特质具有独特的优势。因此，我们有理由相信，数学史融入数学教学可以且应当成为有效发展学生批判性思维的重要路径之一。

但是，在本节课中也有一些需要进一步完善的地方。在课堂引入部分，教师可以结合数学史料，阐述学习定理的必要性，激发学生的求知欲；对于学生的证明方法，教师可以从数学史角度给予肯定，将学生方法与数学家方法进行比较，倡导古今对话，激发学生的自信心；在比较中西数学方法的异同时，教师详细分析了两者的不同之处，事实上可以进一步揭示东西方文化的共同之处，使学生感受到中西文化的殊途同归，提高学生的分析能力。从这个意义上说，HPM 教学揭示学习必要性、倡导古今对话等价值同样对发展学生的批判性思维具有重要价值，这同时也给未来数学史料的选材与加工、课堂教学的开放与生成，乃至 HPM 课例的开发与应用提供了启示。

参考文献

[1] 彭正梅，邓莉. 迈向教育改革的核心：培养作为 21 世纪技能核心的批判性思维技能[J].教育发展研究, 2017, 37(24): 57-63.

[2] Ennis, R. H. Critical thinking: A streamlined conception [J]. *Teaching Philosophy*, 1991, 14(01):5-25.

[3] 张奠宙，赵小平. 玻璃对喝水有何用？[J]. 数学教学, 2010(05): 50.

[4] Arbuthnot, J. *An Essay on the Usefulness of Mathematical Learning* [M]. Oxford: Anth. Peisley, 1701.

[5] 李文婧，傅海伦. 数学批判性思维及其教学策略[J]. 教育科学研究,2006(05):36-38.

[6] Malamitsa, K., Kasoutas M, Kokkotas P. Developing Greek Primary School Students' Critical Thinking through an Approach of Teaching Science which Incorporates Aspects of History of Science[J]. *Science & Education*, 2009, 18(3-4): 457-468.

[7] Wang, X. Q., Qi, C. Y., Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study [J]. *Science & Education*, 2017, 26(02): 1029-1052.

[8] The American Philosophical Association. *The Delphi Report* [M]. California: California Academic Press, 1990.

[9] 马军英等. 高校师范生批判性思维倾向的调查研究[J]. 数学教育学报，2015，24(06): 21-25.

[10] Facione, N. C., Facione, P. A. Critical Thinking Disposition as a Measure of Competent Clinical Judgment: The Development of the California Critical Thinking Disposition Inventory[J]. *Journal of Nursing Education*,1994,33(08):345-350.

[11] 彭美慈等. 批判性思维能力测量表的信效度测试研究[J]. 中华护理杂志，2004(09): 7-10.

历史研究

美英早期平面几何教科书中的三角形内角和定理

瞿鑫婷

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

三角形内角和定理是平面几何三个最重要的定理之一，它既是研究三角形性质的工具，又为学习三角形外角和、圆心角与圆周角关系打下了基础。学生在小学阶段就已用拼图的方法得出三角形三个内角的和等于 180°，而 2011 年颁布的《义务教育数学课程标准》要求初中阶段的学生“探索并证明三角形的内角和定理”并“掌握它的推论：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”[1]，使学生对三角形内角和定理的认识与理解上升到思维与理性的高度。目前，大多数教科书都采用了拼剪法引入三角形内角和，但各版教科书的证明方法互有不同。沪教版和人教版教科书采用毕达哥拉斯的方法，将三个内角转化为一个平角，苏教版则以木板绕点转动进行说理，将三个内角转化为两个同旁内角。从现有文献来看[2-5]，绝大多数教学设计都采用了教科书上的方法，由实验几何过渡到论证几何，但也有个别教师采用了 HPM 的视角开展教学[6][7]。

目前，在三角形内角和的有关 HPM 课例中，数学史的运用主要局限于探究环节，有关素材主要采自文献[8]。但文献[8]并未涉及历史上的几何教科书。为了更深入地了解三角形内角和定理的历史，获取更丰富的教学资源，还需要对历史上的平面几何教科书进行考察。为此，笔者选取 1860 ~ 1929 年间出版的 77 种英美平面几何教科书为研究对象，其中 71 种教科书出版于美国，6 种出版于英国，其年代分布情况见图 1。本文关注以下问题：关于三角形内角和定理，美英早期平面几何教科书中出现了哪些证明方法和实验操作方法？定理有哪些应用？对今日教学有何启示？

2 三角形内角和定理的证明

考察发现，77 种英美早期教科书中，关于三角形内角和定理，有以下 6 种证明。

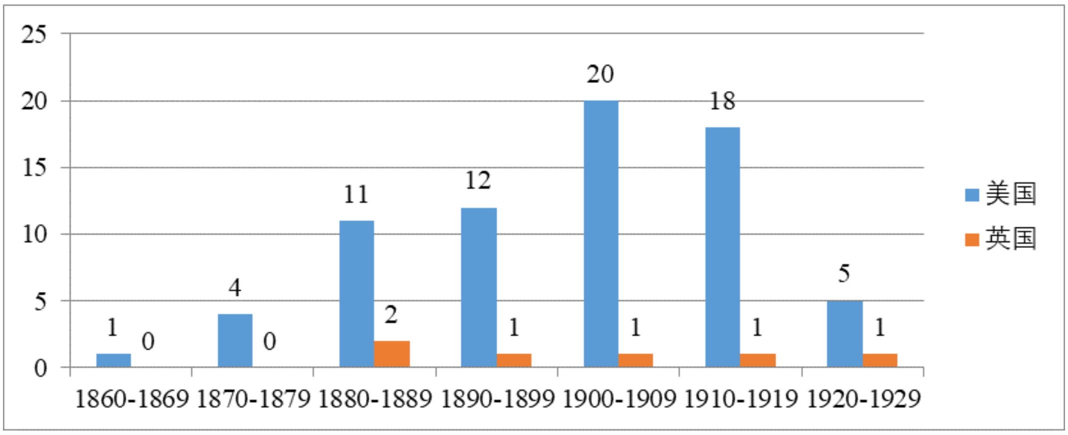


图 1　77 种美英几何教科书的时间分布

2.1 过三角形某一顶点作平行线

19 世纪末 20 世纪初，西方早期教科书大多数采用古希腊毕达哥拉斯学派或欧几里得的证明，部分教科书的课后习题中还出现了克莱罗（A. C. Clairaut, 1713-1765）的方法。

2.1.1 毕达哥拉斯的方法

过三角形的一个顶点作一条平行线，即毕达哥拉斯学派的证明[9]。如图 2，过三角形 ABC 的顶点 A 作 BC 的平行线 DE，由平行线的性质：“两直线平行，对内错角相等”，得$\angle B=\angle 1$，$\angle C=\angle 2$，故$\angle B+\angle C+\angle BAC=\angle 1+\angle 2+\angle BAC=\angle DAE=180°$。

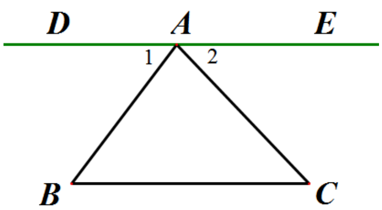


图 2 毕达哥拉斯学派的证明

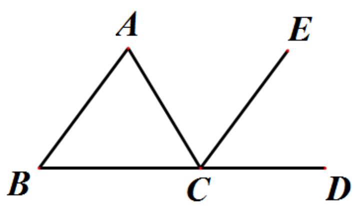


图 3 欧几里得法

2.1.2 欧几里得的方法

第一种，延长三角形的一边，过顶点作平行线，即欧几里得的证明方法[10]。如图 3，延长 BC 至点 D，过点 C 作 BA 的平行线 CE，则$\angle ACE = \angle A$（两直线平行，内错角相等），$\angle ECD = \angle B$（两直线平行，同位角相等）。故得$\angle A+\angle B+\angle ACB=\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB=\angle BCD$为一平角。

第二种，延长三角形的两边，过顶点作平行线，是欧几里得法的推广[11]。如图 4，延长 CA、BA，过点 A 作 BC 的平行线 DE，则有∠1=∠C，∠3=∠B（两直线平行，同位角相等），∠2=∠A（对顶角相等），故∠A+∠B+∠C=∠1+∠2+∠3=∠DAE=180°。

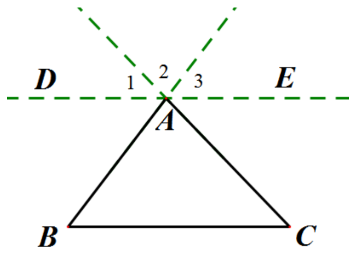


图 4　欧几里得法的推广

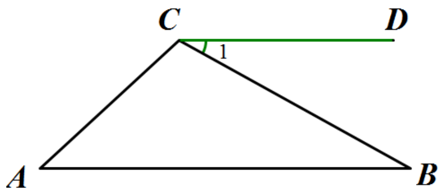


图 5　克莱罗的证明

2.1.3 克莱罗的方法

如图 5[12]，过点 C 作 CD∥AB， 得∠1=∠B，∠DCA+∠A=180°。由∠DCA = ∠1+∠ACB = ∠B+∠ACB，故得∠B＋∠BAC＋∠A = 180°。这种方法将三角形的三个内角转化为一对同旁内角，是由法国数学家克莱罗提出的。

2.2 过三角形一边上的点作平行线

2.2.1 过三角形某一条边上的任一点作另两边的平行线

教科书编者将古希腊的方法推广到一般情形：不在某一顶点处作某一边的平行线，而是过三角形某一条边上的任一点作另两边的平行线[13]。

如图 6 所示，过 BC 上一点 E 作 DE∥AC，FE∥AB，分别交 AB、AC 于 D、F。由 DE∥AC，得∠1＋∠2 = 180°，∠C=∠3 。由 EF∥AB ，得∠1＋∠A=180°，∠B =∠4，故∠2=∠A。所以∠2＋∠3＋∠4=∠A＋∠B＋∠C=180°。图 7 的证明方法与之类似。

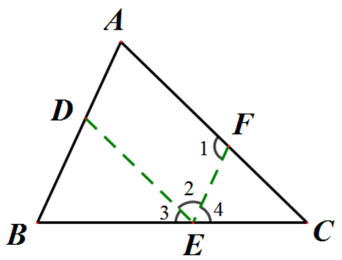


图 6　过边上任一点作平行线

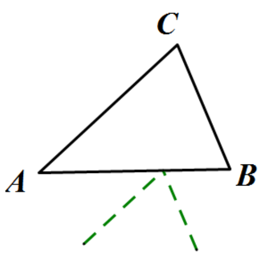


图 7　过边上任一点作平行线

2.2.2 作边上任一点与顶点连线的平行线

部分教科书的课后习题采用了古希腊数学家普罗克拉斯（Proclus, 410 ~ 485）的方法，连接边上任一点与顶点，作连线的平行线[14]。如图 8，过三角形 *ABC* 的三个顶点 *A*、*B* 和 *C*，分别作底边 *BC* 的垂线。则 *AD*//*BE*//*CF*，得∠*BAD* = ∠1，∠*CAD* = ∠2（两直线平行，内错角相等）。因此，∠*BAC* = ∠*BAD* +∠*CAD* =∠1 + ∠2。故∠ *A* + ∠*B* + ∠*C*= ∠*ABC*+ ∠1 + ∠2+∠*ACB* = ∠*EBC* + ∠*FCB* = 180°。这种证明方法可推广至一般的非垂直情形，这两种情形都是将三角形的三个内角转化为一组同旁内角。

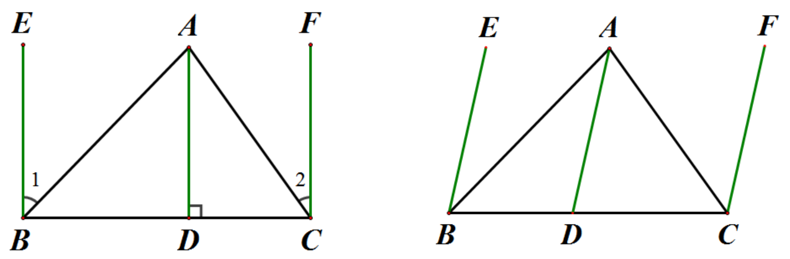


图 8 普罗克拉斯的证明

2.3 过三角形所在平面内任一点作平行线

更值得探究的是，过三角形所在平面内任一点处同时作三条边的平行线，也可以证明三角形内角和定理。这种方法多用于多边形外角和定理的证明，也出现在个别早期教科书三角形内角和定理的习题中[9]。

如图 9 所示，过三角形外任意一点分别作三角形三条边的平行线，通过添加辅助线，可证明得∠1=∠*C*，∠2=∠*A*，∠3=∠*B*，则∠*A*+∠*B*+∠*C*=∠1+∠2+∠3=180°。

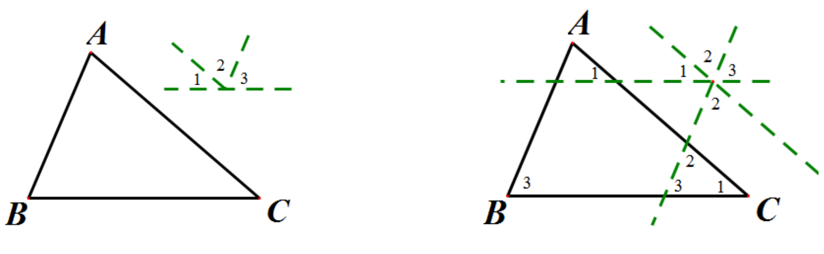


图 9 过三角形外一点作平行线

2.4 避免使用平行线的证明

个别教科书在证明三角形外角和定理时，采用了德国数学家提波特（B. F. Thibaut,

1775～1832）的旋转法，避免了使用平行线。在课后习题中，编者要求用旋转法证明三角形内角和定理[15]。

如图 10 所示，将 AB 所在的直线 XY 绕点 A 沿逆时针方向旋转角度 A，到 AC 所在直线 $X'Y'$；将 $X'Y'$绕点 C 沿逆时针方向旋转角度 C，到 BC 所在直线 $X''Y''$。最后 $X''Y''$绕点 B 沿逆时针方向旋转角度 B，到 AB 所在直线 $Y'''X'''$。从 XY 到 $Y'''X'''$，总共转过 180 度。

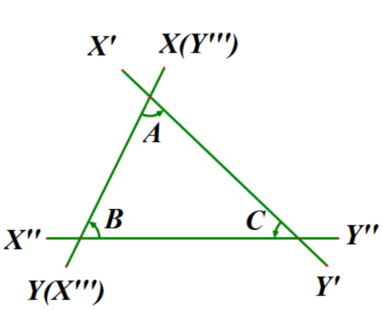


图 10 提波特旋转法

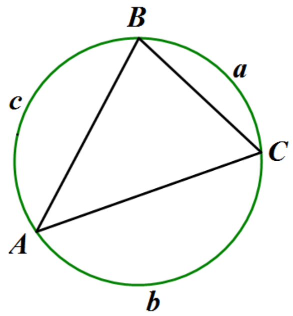


图 11 外接圆法

2.5 基于外角性质的证明

少数教科书采用欧几里得《几何原本》的处理方式，先证明三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，再利用这一外角性质得到三角形内角和[16]。如图 3，由$\angle ACE = \angle A$，$\angle ECD = \angle B$，得$\angle ACD=\angle ACE +\angle ECD = \angle A+\angle B$。证明得三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和。则$\angle ACB+\angle ACD=\angle ACB+\angle A+\angle B=\angle BCD=180°$。

2.6 外接圆法

部分教科书利用圆周角与圆心角的关系，得到了三角形的内角和。[17]如图 11，作三角形 ABC 的外接圆。由圆心角与圆周角的关系，得$\angle A=\frac{1}{2}\angle BaC$， $\angle B=\frac{1}{2}\angle CbA$， $\angle C=\frac{1}{2}\angle AcB$，

则$\angle A+\angle B+\angle C=\frac{1}{2}(\angle BaC+\angle CbA+\angle AcB)$，三角形的内角和为圆周角的一半，故三角形内角和等于二直角。

图 12 给出了 7 种证明方式在 77 种教科书中的频数分布情况。图 13 则给出了各方法在不同阶段的分布情况。从图中可见，过顶点作平行线的方法独占鳌头，随着时间的推移，正文和习题中涉及的证明方法呈现多元化的趋势。

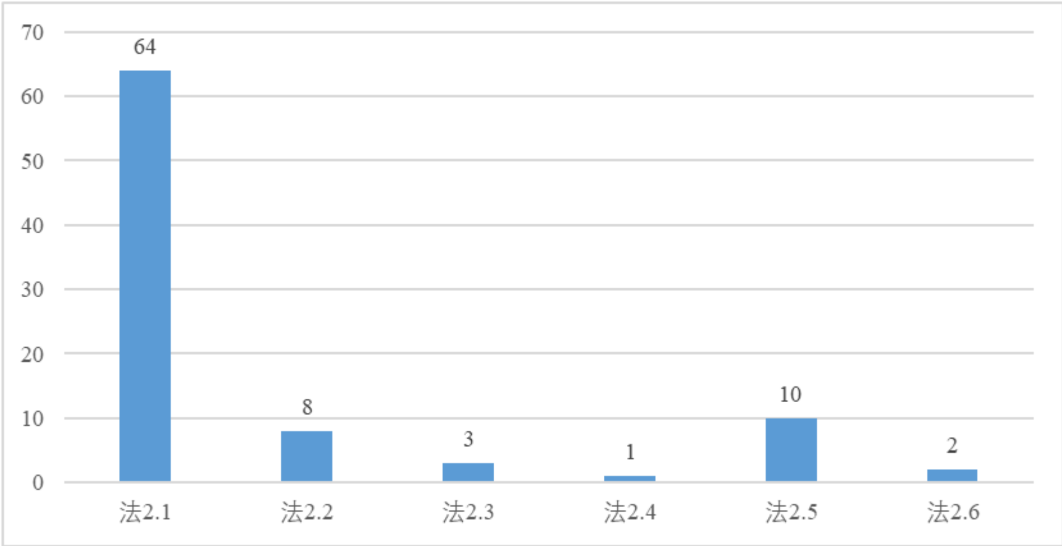


图 12 各种方法出现的频数统计

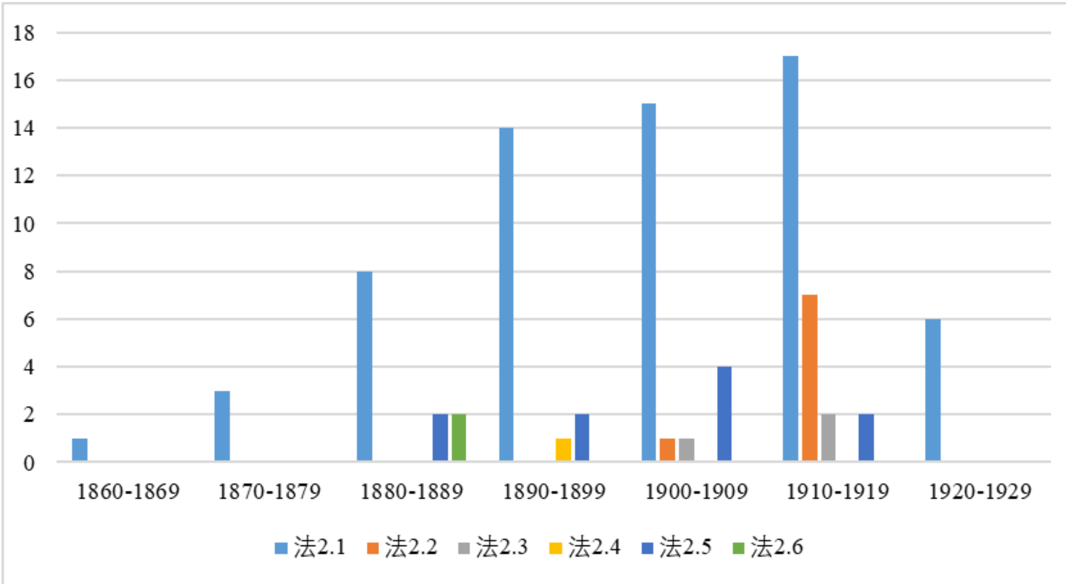


图 13 各种方法的年代分布

3 实验的方法

内角和定理的实验操作方法最早出现在 1877 年出版的一种教科书[18]的习题中。到了 20 世纪初，更多的教科书采用这种方法。

如图 14，在一张纸上剪出任意形状的三角形，接着撕下三角形的三个角 a、b、c，把它们旋转后拼在一起，使这三个角的顶点重合，猜测三角形内角和大小，并用一把直尺检验。再剪出另一个不同大小不同形状的三角形重复以上步骤[18]。

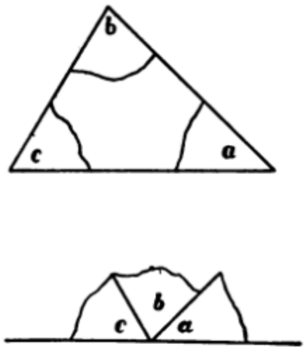


图 14 拼剪法

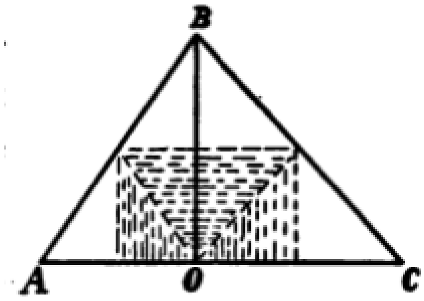
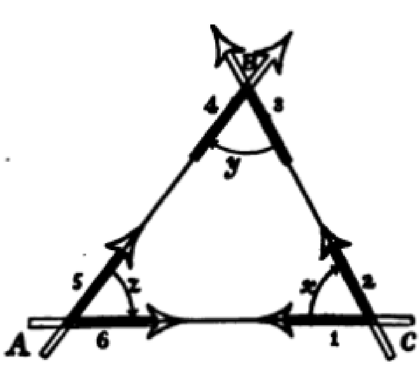


图 15 折叠法

如图 15，从三角形的一个顶点 B 处作对边 AC 的垂线 BO，将三角形对折，使三个顶点与垂足 O 重合，则三角形内角和大小看似是 180°，再折叠另一个不同大小不同形状的三角形，重复以上步骤[18]。有时这种方法也叫做帕斯卡的方法，法国数学家帕斯卡（B.Pascal,1623~1662）将三角形分成两个直角三角形，而其中两个直角拼成了一个平角，则可说明三角形的内角和为 180°+180°-180°=180°。



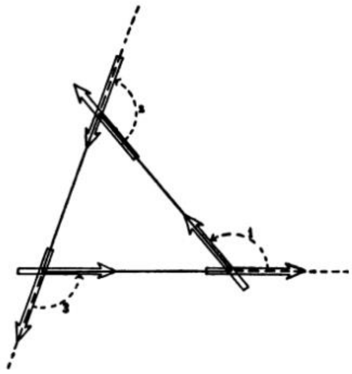


图 16 铅笔旋转法

如图 16，在点 C 处将铅笔尖朝左与三角形的一条边重合，然后依次绕三角形的三个顶点顺时针旋转，在铅笔分别转过 x、y、z 后，笔尖的方向由向左变成向右，共旋转了 180°，由此说明三角形的内角和为 180°。同理，若在点 C 处将铅笔尖朝右，然后依次绕三角形三个顶点逆时针旋转，笔尖绕了一圈，共旋转 360°，由此可验证三角形的外角和为 360°[18]。

4 典型应用

4.1 数学中的应用

三角形内角和定理是平面几何中最重要的定理之一，我们可以利用该定理证明其他定理和性质。

例 1：如图 17，在ΔPQR中，$PQ = PR$，延长 RP 至 S，使得 $SP = PR$，联结 QS，证明：$QS \perp RQ$。[19]

由 $PQ=PR=PS$，得$\angle 1=\angle S$，$\angle 2=\angle R$（等边对等角），因为$\angle S+\angle R+\angle SQR=180°$，$\angle SQR=\angle 1+\angle 2$，得$\angle 1+\angle 2+\angle 1+\angle 2=180°$，所以$\angle 1+\angle 2=90°$，即 $\angle SQR=90°$，$QS\perp RQ$。

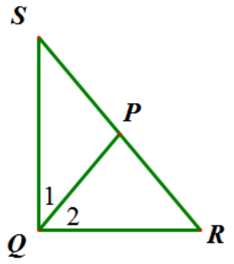


图 17　例 1 图

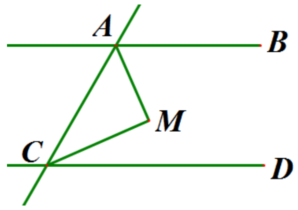


图 18 例 2 图

此题不仅加强了学生对三角形内角和的理解与应用，也为今后学习“直角三角形的中线等于斜边的一半”、“直径所对的圆心角为直角”埋下伏笔。

例 2：如图 18，若 $AB//CD$，AM 平分$\angle BAC$，CM 平分$\angle ACD$，证明：$AM \perp CM$。[20]

由 $AB//CD$，得$\angle BAC+\angle ACD=180°$（两直线平行，同旁内角互补），又因为 AM 平分$\angle BAC$，CM 平分$\angle ACD$，所以 $\angle BAC = 2\angle MAC$，$\angle ACD = 2\angle MCA$，故$\angle MAC + \angle MCA = 90°$，$\angle M = 90°$。

此题利用三角形内角和定理、平行线与角平分线的性质，证明了“同旁内角的角平分线互相垂直”这一性质。

除此之外，三角形内角和定理还能证明外角和定理等其他定理，在高中阶段，还可利用该定理解斜三角形，由此可见，三角形内角和定理在平面几何中占据了重要的地位。

4.2 生活中的应用

三角形的内角和定理对于调查者来说非常重要，测量人员在地图绘制时只要测量其它两个角的精确值，就可计算出第三个角的大小。

如图 19，假设在纸上有一条基线 FG，若测量员要在此基线上绘制出陆地上三角形 ABC 的相似三角形 FGH，则可以首先使用量角器确定$\angle CAB$ 和$\angle CBA$ 的大小，再作出与角 CAB、CBA 相等的角 HFG、HGF，边 FH 与 GH 相交于点 H。由三角形内角和定理可知，第三个角 FHG 等于$\angle ACB$，则ΔFGH 与ΔABC 的每个内角都相等，两个三角形相似[21]。

由这一定理，我们可以精确地作出地图上按一定比例缩放的相似三角形。且只要测量三

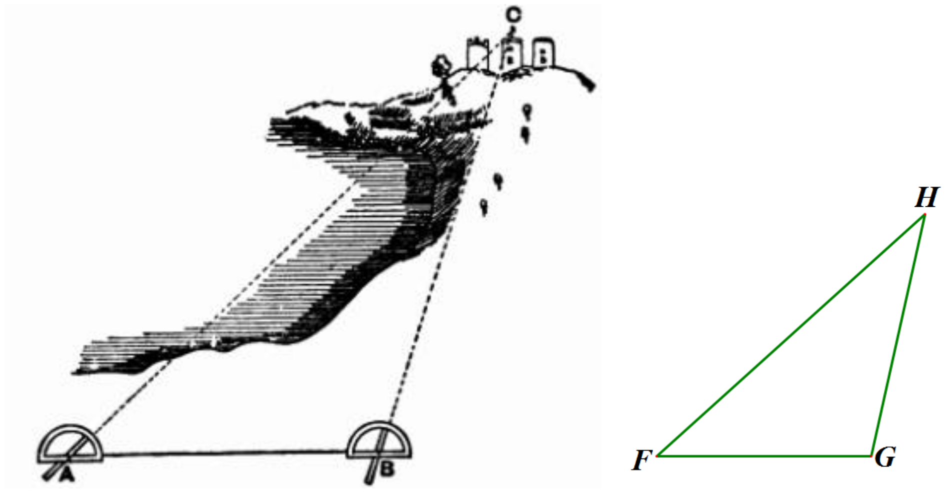


图 19　大地测量

角形中的两个角，所作的第三个角一定与原来三角形的第三个角相等。另外，三角形内角和在天文测量中也有应用，在北半球，通过测量北极星的仰角，我们能测量出一个地方的纬度。

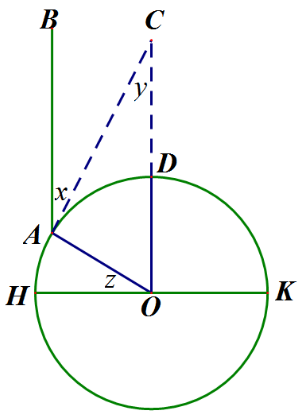


图 20　天文测量

如图 20，HK 是地球赤道，D 是北极点，$OD\perp HK$，$AC\perp AO$，AB 和 OD 都指向北极星，由于北极星距离地球约 400 光年，可忽略地球半径的影响，AB 与 CD 可视为互相平行。

由 $AB//CD$，得 $\angle x=\angle y$。因为 $AC\perp AO$，即 $\angle CAO=90°$，所以由三角形内角和定理得，$\angle y+\angle AOC=90°$。又因为 $OD\perp HK$，得 $\angle AOC+\angle z=90°$，故 $\angle y=\angle z$，等量代换得 $\angle x=\angle z$。也就是说，观测者在北半球的 A 处测量出当地观察北极星的仰角，就能确定该处的纬度[22]。

由此可见，三角形内角和定理在测量和定位上有着重要应用。

5 结 语

以上我们看到，本文所考察的 19 世纪末、20 世纪初美国平面几何教科书主要采用 6 种

方法证明三角形内角和定理。从过顶点作平行线，到过一边上的任意点作平行线，再到三角形所在平面内任一点作平行线，最后到避免使用平行线的四种方法，揭示了三角形内角和的历史演进过程。统计结果表明，美英平面几何教科书倾向于采用在三角形顶点作平行线的证明。

受欧几里得《几何原本》的深刻影响，19 世纪的教科书几乎都只关注定理的演绎证明，而没有采用实验方法来引入，也没有什么实际应用。到了 20 世纪初，受培利运动和摩尔（E. H. Moore, 1862-1932）数学教育主张的影响，开始出现实验操作的方法，少数教科书开始关注定理的实际应用。

美英早期教科书为今日教学提供了丰富的素材。教师可以对有关测量问题进行改编，引入三角形内角和定理，然后，设计探究活动，先让学生通过折纸或旋转，发现三角形内角和；然后引导学生过顶点、过边上一点、过平面上任意一点作平行线来证明定理，让他们深刻领会从特殊到一般、从静态到动态的数学研究方法，最后回到测量问题上来。教师可以将三角形内角和的历史以及它在工程、天文领域的应用制作成微视频，并在教学过程中播放，让学生感受数学的悠久历史以及定理在数学内部和现实世界的应用价值。我们相信，将数学史融入三角形内角和定理的教学，必将让定理焕发勃勃的生机，展现迷人的魅力，从而实现多元的教育价值。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.

[2] 庞彦福, 黄海涛. 从感性认识到推理论证——“同课异构”下三角形内角和课堂教学[J]. 中学数学, 2013, (6): 20-22.

[3] 李昌官. 为发展学生思维而教——以人教版“三角形内角和”教学为例[J]. 数学通报, 2013, 52, (10): 10-13.

[4] 钱德春. 基于认知与生成的数学思维教学——以“三角形内角和定理”一节课为例[J]. 中学数学, 2014, (3): 27-29.

[5] 仲海峰. 大道至简——“三角形内角和”研课手记[J]. 教育科研论坛, 2010, (6): 89.

[6] 唐秋飞. “三角形内角和”: 在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (7): 40-44.

[7] 瞿鑫婷, 汪晓勤, 贾彬. 基于数学史的三角形内角和探究活动的设计与实施[J]. 中小学课堂教学研究, 2019, (2): 12-15.

[8] 汪晓勤. 三角形内角和: 从历史到课堂. 中学数学月刊, 2012, (6): 38-40.

[9] Hart, C. A. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1912.

[10] Wentworth, G. A. *Plane Geometry*[M]. Boston: Ginn and Company, 1910.

[11] Failor, I. N. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Century Company, 1906.

[12] Auerbach, M. *Plane Geometry*[M]. Philadelphia: J. B. Lippincott, 1920.

[13] Sanders, A. *Elements of Plane Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1901.

[14] Sykes, M. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Rand, McNally & Company, 1918.

[15] Edwards, G. C. *Elements of Geometry*[M]. New York: Macmillan & Company, 1895.

[16] Robbins, E. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1907.

[17] Olney, E. *Elementary Geometry*[M]. New York: Sheldon and Company, 1883.

[18] Myers, G. W. *First-year Mathematics for Secondary Schools*[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1909.

[19] Beman, W. W. *New Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn and Company, 1900.

[20] Robbins, E. R. *Robbin's New Plane Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1915.

[21] Clairaut, A.C. *Elements of Geometry*[M]. London: C. Kegan Paul & Co., 1881.

[22] Palmer,C.I. *Plane Geometry*[M]. Scott: Foresman And Company, 1915.

教学实践

周期函数的概念：从历史到课堂*

杜金金[1]，陈莎莎[2]，沈中宇[3]

（1.上海市建平中学，上海 200135；2.上海大学附属中学，上海，2019003;

3. 华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

1 引 言

“函数的周期性”是沪教版高中数学教科书第 6 章第一节“三角函数的图像与性质”的第三课时的内容。沪教版教材在第 3 章第 3 节“函数的基本性质”中主要介绍了函数的奇偶性、单调性、最值和零点，而在介绍三角函数的周期性时才引出周期函数概念。函数的周期性是函数教学的难点之一，主要体现在以下几个方面[1]：学生对周期现象描述不清楚，表达不完整且无法与函数的周期性建立联系；学生对周期函数概念的理解水平不高，学生多数停留在直观或形式化的认识中。出现这些现象的原因之一即教师在教学过程中未能没有注重周期函数的产生发展过程。另一方面，《高中数学课程标准》（2017 年版）将数学核心素养的培养作为课程的主要目标，并提出，数学课程要体现数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值[2]，这就要求教师在课堂教学中致力于从关注结果到关注过程、从关注知识到关注素养、从关注技能到关注文化的转变。

实际上，周期函数在历史上经历了漫长的发展过程。在早期的西方三角学教科书中，人们从日复一日、年复一年的时间变化中感受周期现象。其后，周期性与三角学紧密联系在一起，例如角的终边和诱导公式。最终，数学家给出了周期函数的形式化定义。数学史为教学设计提供了参照，教师可以直接或间接利用利用历史素材，设计一系列问题，让学生在问题解决的过程中经历周期函数概念的发生和发展过程，加深对周期函数的理解，发展有关核心素养；同时，通过数学史的融入，营造人性化的课堂，实施数学学科德育。

鉴于以上分析，我们从 HPM 的视角设计本节课的教学，并拟定如下教学目标：

（1）理解和掌握周期函数的概念，熟练判断一个函数是否具有周期性并灵活运用定义法进行证明；

---

* 本文是 HPM 工作室系列课例之一。

（2）提升从定性描述到定量刻画的能力，能够从多样化的结果中发现共性与差异并进行对比和评价，培养数学抽象的核心素养；

（3）从数学史中感受数学的发展和魅力，感受数学来源于生活且高于生活，体会周期性思想对生活的指导性意义和价值。

2 周期函数概念的历史

根据周期函数概念的历史，我们可以勾勒出三个关键的步骤。

2.1 周期现象：从时间到运动

周期函数概念源于人类对周期现象的观察。人们最开始观察到的周期现象都与时间有关，如 Keith（1810）对一天给出了明确的描述[3]。Bonnycastle（1818）给出了一月的定义，在此期间，周期与时间的变化密不可分，物体重复经历一个位置的时间间隔称之为周期[4]。

接着，人们认识到，时间间隔其实对应于物体运动的间隔，如 Thomson（1825）提到天体的运动规律[5]。之后，数学家进一步将天体的运动类比到角的变化[6]。

2.2 三角函数背景下的周期函数：从描述定义到诱导公式

周期概念的发展与三角函数息息相关。早在 18 世纪，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中给出了三角函数的一系列诱导公式，他已经认识到三角函数的周期性，但并未具体提出周期和周期函数的概念[7]。Morgan（1837）通过角的终边周而复始的规律变化描述性地刻画了周期现象，但主要还是以文字描述为主[8]。与欧拉类似，Seaver（1871）通过诱导公式呈现了三角函数的周期性[9]。Rider（1888)则通过三角函数的图像特征来描述三角函数的周期性："三角函数的值和三角函数曲线重复出现，故称其具有周期性。"[10]但这样的定义仍然是描述性的。

可见，至迟到了 1880 年代，数学家已开始尝试对三角函数的周期性作出刻画，但仅仅局限于文字描述，一般周期函数的形式化定义尚未出现。

2.3 周期函数形式化定义：从不完善到完善

1892 年，尼克逊（Nixon）提出了以三角函数为背景的形式化定义[11]，标志着周期函数

概念进入新的发展阶段。1899 年，加拿大数学家穆雷（D. A. Murray, 1862-1934）摆脱了三角函数的束缚，定义了一般的周期函数[12]：

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在常数 T，对任意一个 x 值都有 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 叫做周期函数，常数 T 叫做函数 $f(x)$ 的周期。

美国数学家博汉南（R. D. Bohannan, 1855-1926）和美国数学家德累斯顿（A. Dresden, 1882-1954）先后于 1904 年和 1940 年给出了一般周期函数的形式化定义：

博汉南(1904)：对于函数 $f(x)$ 存在非零整数 n，对任意一个 x 值都有 $f(x+nT)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 叫做周期函数，常数 T 叫做函数 $f(x)$ 的周期[13]。

德累斯顿 (1940)：对于任意的 x，且 x 和 $x+T$ 均属于定义域 $\mathbf{R}$ 内，$f(x+T)\equiv f(x)$，那么函数 $f(x)$ 叫做周期函数，常数 T 叫做函数 $f(x)$ 的周期[14]。

虽然上述定义仍有瑕疵，但已十分接近现代定义了。

2.4 汉语“周期”一词的由来

“周期”一词英译为 periodicity，释义为具有某个阶段性特征的时间。然而，“周期”一词并非英译而来，最早出现于金元之际数学家李冶的读书笔记《敬斋古今黈》中。书中，“阴阳相配之物。而老少又必相当。干之策。二百一十有六。老阳也。坤之策。百四十有四。老阴也。老阴老阳相得为三百六十。则周期之日也。”[15]便出现了“周期”一词。据汉语大辞典考究，事物在变化过程中，某些特征重复出现，其接连两次出现所经过的时间，称为周期[16]。

3 教学设计与实施

3.1 情境创设，感性认识

课前，首先让学生聆听一首华晨宇演唱的经典歌曲。听完课前播放的歌曲。

师：此时此刻脑中印象最深刻的是？

生：Why nobody fights？因为整首歌曲都是这一句歌词！

师：对，正是这样的重复现象才让人感觉记忆犹新。其实在我们的日常生活中，这样的

例子比比皆是。语文老师常问："语文作文，写了吗？写了吗？写了吗？"数学老师常问："一课一练，做了吗？做了吗？做了吗？"英语老师常问："英语单词，背了吗？背了吗？背了吗？"因为重要的事要说？

生齐答：三遍！

师：其实老师都说了n遍。这样具有规律的重复现象无所不在，同学们能不能用一个你们学过的专业术语来刻画具有规律的重复现象。

生：循环。

师：这位同学从信息学的角度出发非常好，能不能从物理的角度出发呢？

生：周期。

师：今天我们就来共同研究一下周期性现象。老师想问一个也许同学们从前没有考虑过的问题，既然你们都知道周期这个词，那么为什么"周期"会被命名为"周期"，有没有哪位同学能够说文解字，向大家解读一下你心目中对于"周期"一词的理解。

生 1：物理上，周期代表转一圈的时间。

生 2："周"可以理解为星期，释义为一星期的时间。

生 3："周期"一词也许是英译过来的，我猜是 time。

师：事实上"周期"的英文为 periodicity，由形容词 period 和名词性后缀-icity 构成，释义为具有某个阶段性特征的时间。但"周期"一词并非英译，最早出现于我国金元之际数学家李冶的读书笔记《敬斋古今黈》中。据汉语大辞典考究，事物在变化过程中，某些特征重复出现，其接连两次出现所经过的时间，称为周期。二者综合，周期可以被定义为特征重复出现的时间间隔。其实同学们认知中的转一圈的时间和一星期的时间也恰恰是特征重复出现的时间间隔。如果我们知道数学家李冶还是一位文学家和诗人，那么对于这样的一语三关也就不感到惊讶了！

设计意图：通过歌曲和生活中的重复现象，体会周期性现象，引出周期。通过词语的考源让学生进一步了解"周期"一词的来源和意义。

3.2 模型刻画，概念初探

接着，让学生指出物理中最典型的周期运动，从而引出匀速圆周运动。

师：我们可以用大家所熟知的单位圆模型来刻画周期运动。物理上，我们知道，经过一个周期后，质点P的位移不会发生变化，线速度和角速度也不会发生变化。用物理量刻画

运动的周期性背后其实隐藏的是浅显的数学原理。经过一个周期后，点 P 旋转到原来的位置（如图 1），我们在数学上有没有什么数学量可以刻画旋转？

生：角。

师：但是角逆时针旋转一圈，即一个周期后，它的角度增加了 $360°$，不是变化了吗？

生：角的终边没有发生变化。

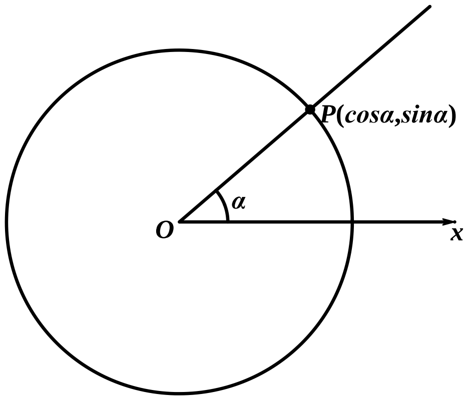


图 1 单位圆及其上点的坐标

师：易知，一个周期后，点 P 的位移不发生变化，在数学上有没有什么量可以刻画位置呢？

生：坐标。

师：你能否写出单位圆上点 P 的坐标？

生：$P\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$。

师：当角 α 逆时针旋转一圈时，点 P 的坐标发生变化吗？

生：不变，因为 $\left(\cos\left(\alpha+2\pi\right),\sin\left(\alpha+2\pi\right)\right)=\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$。

师：其实这就是我们的诱导公式吧。我们发现一个周期后，角 α 的终边，点 P 的坐标，也即角 α 的三角比是不发生变化，我们可以将以上同学提到的周期性刻画方式总结如下（表 1）。

表 1 周期性刻画方式

物理量（经过一个周期后）	数学量（经过一个周期后）	历史相似性
点 P 旋转到原来的位置	角 α 的终边不发生变化	终边定义
点 P 的位移不发生变化	点 P 的坐标不发生变化	诱导公式定义

设计意图：匀速圆周运动是典型的周期性运动，通过物理量刻画周期性。揭露物理量背后所对应的数学量，通过数学量刻画周期性。

3.3 结合图像，定性理解

从匀速圆周运动的刻画中，教师引出三角函数的周期性。

师：我们知道弧度制下的角和实数是一一对应的，因此我们引入了三角函数，老师不禁想问，三角函数是否具有周期性呢？我们先从直观的图像上进行判别。

生：我感觉是。

师：老师看到大部分同学都在点头，看来三角函数是周期函数。更一般地，任意函数是否都具有周期性呢？

生：不一定。

师：那函数图像满足什么样的特征时，你们认为可以被称为具备周期性呢？

生：规律变化。

生：重复出现。

生：可以经过平移得到。

师：同学们都说得很好，但通过几何直观作出的判断往往模糊不清，比如高斯取整函数，有些同学认为是，有些同学认为不是。而且，图像的绘制本身就是通过描点法绘制，我们不可能描完所有的点，也不可能画出无穷远方的图像，所以类比函数的奇偶性、单调性等，最终我们要回归到严谨的定量描述。

设计意图：观察三角函数和其他周期函数的图像，从几何直观认识函数的周期性。总结出周期函数图像的共性，体会定量刻画函数周期性的必要性。

3.4 概念探究，定量描述

由于定量刻画的必要性，教师引导学生回归之前的诱导公式。

师：我们回归到大家熟悉的诱导公式，$\cos\left(\alpha+2\pi\right)=\cos\alpha,\sin\left(\alpha+2\pi\right)=\sin\alpha$，从函数的视角可以得到三角恒等式，$\cos\left(x+2\pi\right)=\cos x,\sin\left(x+2\pi\right)=\sin x$。用自然语言准确地刻画即自变量 x 每增加 2π，三角函数值不发生变化。如果对于更为一般的函数，应该如何描述呢？

生：自变量 x 每增加一个周期，函数值不发生变化。

师：一般的函数我们可以用符号 $f\left(x\right)$ 表示，那周期也需要一个形式化的符号记法，我们一般用字母 T 表示，既有时间的意味，又区别于时间，因为周期是特征重复出现的时间

间隔。此时，我们就可以用简洁的式子进行定量刻画，应该是？

生： $f(x+T)=f(x)$。

师： 函数的周期性作为函数的基本性质，需要有一个完整的定义描述，下面请同学们可以类比之前学习过的函数的奇偶性、单调性和对称性，尝试构建周期函数的定义。

生 1： 存在 T 使得对任意 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数。

生 2： $\forall x$，$\exists T(T\neq 0)$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数。

生 3： $\forall x\in D$，$f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为周期。

师： 其实，历史上有三位数学家穆雷、博汉南和德累斯顿也对函数的周期性下了一个定义。请同学们将自己写下的定义和进行一个比对，小组进行讨论，说说它们的共性和个性，以及你对于生 1、生 2 和生 3 写的定义的评价。

生 4： 穆雷的定义和生 1 一模一样，都关注到了存在性和任意性，但是没有关注到周期 T 应该是一个非零的实数，这一点生 2 完美的补充了，并且用简洁符号语言表示。

生 5： 博汉南的定义也关注到了存在性和任意性，并且强调了 n 非零，但是没有强调 T 非零。生 2 的表述应将 $\exists T(T\neq 0)$ 放在 $\forall x$ 之前，否则 T 就不是一个常数，而是可以随着 x 的变化而变化。此外，博汉南用 $f(x+nT)=f(x)$ 刻画函数的周期性也是正确的，因为 $f(x+T)=f(x)$ 可以推出 $f(x+nT)=f(x)$。

生 6： 德累斯顿的定义关注到了任意性，但没有提到存在性和周期 T 的非零性。德累斯顿强调了定义域为全体实数集，而事实上周期函数的定义域也可以不为全体实数集，我们可以像生 3 一样用定义域 D 表示。

师： 同学们都关注得很仔细！在穆雷的定义中，似乎只缺少了周期 T 的非零性。博汉南的定义中，我们发现周期的非零整数倍仍然是周期，所以我们可以考虑定义一个最小正周期，这样所有的周期都可以用最小正周期进行统一表示。德累斯顿定义中的 **R** 在当时并不表示全体实数集，而表示的是定义域 Range，其实间隔相等的散点图对应的函数就是一个典型的周期函数。因此，周期函数的定义应运而生。一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得当 x 取定定义域 D 内的任意值时都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，那么函数 $f(x)$ 叫做周期函数，常数 T 叫做函数 $f(x)$ 的周期。如果在所有的周期中存在一个最小

的正数，那么这个最小正数就叫做函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期。

师：总的来说，穆雷的定义是直观的，博汉南的定义是宏观的，而德累斯顿的定义是微观的。而我们今天在追求一种比穆雷的定义更严谨、比博汉南的定义更精炼、比德累斯顿的定义更普遍的定义，这样的定义具有简洁性、有序性和严谨性。

师：从定义的具体内容来看，周期函数中核心关注的是周期 T 的存在性、自变量 x 的任意性和函数值 $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$ 的恒等性。从常数 T 的角度而言，我们则关注了其存在性、限制性（非零）和唯一性（最小正周期）。

设计意图：借由三角函数和诱导公式，引出函数 $f\left(x\right)$ 为周期函数的必要条件，即 $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$，其中 T 为 $f\left(x\right)$ 的周期。接着将学生自己构建的周期函数的定义和历史上三位数学家对于周期函数的定义进行对比，找寻其中的共性和差异，通过小组讨论进行点评和完善，最终构建出完整的周期函数的定义。最后总结定义、周期函数的定义和周期的三个关键点。

3.5 练习巩固，概念强化

接下来通过一个具体的练习让学生进一步巩固周期函数的定义。

师：判断函数 $f\left(x\right)=\left|\sin x\right|$ 是否为周期函数，我们可以通过画图先从几何直观判断（如图 2），再用定义进行严谨证明。

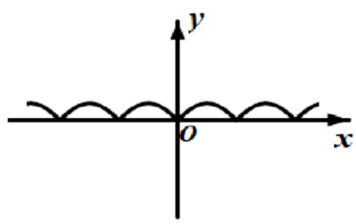


图 2 周期函数练习题

生：$\forall x\in\mathbf{R}, f\left(x+\pi\right)=\left|\sin\left(x+\pi\right)\right|=\left|-\sin x\right|=\left|\sin x\right|=f\left(x\right)$，故函数 $f\left(x\right)=\left|\sin x\right|$ 的周期为 π。

师：证明函数 $f\left(x\right)=1$ 和 $f\left(x\right)=\sin x$ 为周期函数，并求出其最小正周期。

生： $\forall T\neq 0,\forall x\in\mathbf{R}, f\left(x+T\right)=1=f\left(x\right)$，故函数 $f\left(x\right)=1$ 是以任意非零实数为周期的周期函数，不存在最小正周期。

生： $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin(x)=f(x)$，故函数 $f(x)=\sin x$ 是周期函数，最小正周期为 2π 。

师： 这里在证明正弦函数的最小正周期为 2π 时并不是特别严谨，我们可以利用定义中的存在性和任意法进行反证，即可证明。

设计意图： 借助函数图像判断函数的周期，巩固对函数周期性定义的理解。利用定义求解函数的周期和最小正周期。

3.6 课堂小结，思想提升

最后进行课堂小结，升华本节课涉及的周期思想。

师： 其实生活中的周期思想无处不在，天文学中的行星运动、物理学中的单摆运动、医学中的心电图、政治中的五年规划、艺术中的图片以及数学中的叠加之美。

师： 我们可以证明正弦型函数 $y=A\sin(\omega x)$ 和余弦型函数 $y=A\cos(\omega x)$ 是周期函数，如果我们将几个正弦型函数和余弦型函数进行叠加，上了大学后你们会知道可以叠加出任何周期函数！你们猜猜函数 $y=2\sin x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{2}{5}\sin 5x+\frac{2}{7}\sin 7x$ 的图像（如图 3）会有何种神奇？

生： Teeth（牙齿）。

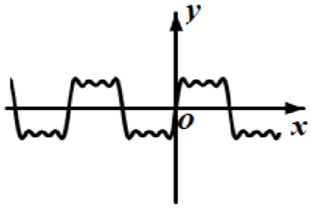


图 3 正弦型函数

师： 我们今天学习了周期函数，我们经历了从定性描述到定量刻画、定性描述到定量表达。通过对于周期函数定义的构建和对于三位数学家定义的评价，让我们多了一个观察的角度，多了一种表达的方式，多了一种拓展的途径，多了一种研究的手段，我们站在巨人的肩膀上展望未来。然而周期最大的意义价值是将无限远处看不见摸不着的结构展现在我们眼前，反之我们又能够将看得见摸得着的结构拓展到无穷远方！

师： 课堂的最后，老师想用一个哲学的问题作为结尾，对于你而言，你的最小正周期是？

师： 也许是年，喜迎新年！也许是周，上着同样的课！也许是天，家里学校的两点一线！

也许是秒，每秒我都爱着我所爱的人！老师的答案是一生！把自己的最小正周期过好，活出精彩，活出自我！周期，虽然周而复始，却也令人期待，不是吗？

设计意图：通过学科交叉中的周期思想，宏观认识事物的循环结构并应用于生活。

4 学生反馈

课后，我们收集了 32 名学生对本节课的反馈信息。超过 80%的学生表示了对于数学史引入课堂的高度认可，并表示对于数学的学习有很大的帮助。

超过 70%的学生能够完整复述周期函数的定义并运用定义判断一个具体的函数是否为周期函数。在判别狄利克雷函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1\left(x\in Q\right)\\0\left(x\in\overline{Q}\right)\end{cases}$ 是否为周期函数时，有 50%的学生正确判断其为周期函数，并发现任何一个非零有理数均为其周期。

本节课后，学生再次看见“周期函数”一词时所联想到的内容大致可分为五类，见表 2。从学生的上述回答可见，学生逐渐从对周期性的直观认识过渡到对抽象性质的认识，同时，学生也对课堂中渗透的数学文化印象深刻，体会到生活与数学的联系，并从中体悟到一定的哲学思想。

表 2 学生再次看到“周期函数”的联想

类别	典型例子	占比
图像特征	重复出现、循环往复、平移后重合	20%
具体函数	$y=\sin x$ 、 $y=\cot x$ 、 $y=1$	20%
抽象性质	$f\left(x+T\right)=f\left(x\right),x\in\mathbf{D}$ $f\left(x+n\cdot T\right)=f\left(x\right),x\in\mathbf{D},n\in\mathbf{N}^{*}$	20%
数学文化	穆雷、博汉南、德累斯顿、生活中的周期现象	25%
哲学思想	周而复始、永无止境、无限与永恒	15%

5 结 语

本节课采用重构、附加和顺应三种方式融入数学史。首先，周期函数概念的历史作为一条主线贯穿于始终。在情境创设环节，学生对周期现象有了初步的感性认识；在模型刻画环节，学生对周期现象的认识从时间过渡到了运动；在定性理解环节，学生从图形直观上认识

了三角函数的周期性，并给出描述性定义；在概念探究环节，学生经历了从三角函数周期性的定量刻画到一般周期函数的形式化定义的过程。因此，本节课融入数学史的主要方式为重构式。

其次，在一般周期函数定义的形成过程中，教师让三名学生各自独立地给出自己的定义，并将其与历史上三位数学家的定义进行比较，数学史的运用属于附加式。再次，教师让学生对数学家的三种定义进行辨析，找出其中的缺陷或不足，数学史的运用属于顺应式。

以史为鉴，让学生经历周期函数概念从现象到本质、从定性到定量、从不完善到完善的自然发展过程，构建了知识之谐。数学史的融入为学生创造自行定义周期函数、穿越时空与数学家“对话”的机会，为他们提供了一个展示自己、充分表达的平台，让他们获得一份归属感、获得感和成就感，从而营造了探究之乐。从角的终边的变化到三角函数的周期性，再到一般函数的周期性，学生经历了完整的数学抽象过程，因而数学史实现了能力之助。呈现历史上数学家的不完善定义，让学生体会数学和数学活动的本质，树立动态的数学观，感悟独立思考、敢于质疑、追求创新的理性精神，达成了德育之效。

参考文献

[1] 吴健. 学生对周期函数的理解[D]. 华东师范大学, 2007.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2017.

[3] Keith, T. *An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: T. Davison, 1810.

[4] Bonnycastle, J. A. *Treatise on Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: Cadell & Davies, 1818.

[5] Thomson, J. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. Belfast, 1825.

[6] Day, J. *A Treatise of Plane Trigonometry* [M]. New Haven: Howe & Spalding, 1824.

[7] 欧拉. 无穷分析引论[M]. 太原: 山西教育出版, 1997.

[8] Morgan, A. de. *Elements of Trigonometry & Trigonometry* [M]. London: Taylor & Walton, 1837.

[9] Seaver, E. P. *The Formulas of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. Boston; Sever, Francis & Co., 1871.

[10] Rider, P. R., Davis, A. *Plane Trigonometry* [M]. New York: D Van Nostrand, 1888.

[11] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry* [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892.

[12] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges and Secondary Schools* [M]. New York: Longmans, Green & Company, 1908.

[13] Bohannan, R. D. *Plane Trigonometry* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904.

[14] Dresden, A. *Introduction to the Calculus* [M]. New York: H. Holt & Company.

[15] 李治. 敬斋古今黈[M]. 中华书局, 1995.

[16] 罗竹风. 汉语大辞典[M]. 汉语大词典出版社, 1993.

出入相补原理在初中数学教学中的应用*

林庄燕　汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

实践证明，通过将数学史融入数学教学，可以构建知识之谐，彰显方法之美，营造探究之乐，实现能力之助，展示文化之魅，达成德育之效[1]。实践中常用的数学史料包括人物与事件、概念与术语、公式与定理、原理与法则、问题与求解、符号与工具、思想与方法等，不同史料在课堂上所能体现的教育价值会有所不同。

“原理与法则”、“思想与方法”都是常用的史料，主要用于命题和问题解决的教学。与其他类型的史料不同，同样的原理或思想可用于不同命题的证明和不同问题的求解，可以贯穿于课程始终；不仅可以用于新授课，而且还可以用于复习课。因此，这类史料的教育价值有其独特性，需要我们借助具体的HPM课例进行深入探讨。

出入相补原理指的是一个平面图形从一处移到他处，面积不变，又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。[2]出入相补原理中，“出”意味着面积的减少，“入”意味着面积的增加；出入相补，即面积间的和差关系不变。从长方形面积公式和出入相补原理出发，能够解决一切平面多边形面积问题，因此，出入相补原理是我国古代几何学中的基本原理，中国古代数学往往用它来推导公式、证明命题和解决问题。中学数学教师所说的“割补法”，实际上就是利用该原理来处理面积问题的方法。

那么，在已有的HPM课例中，教师是如何在教学过程运用出入相补原理的？该原理又有哪些教育价值？为了回答上述问题，我们选取近年来HPM学习共同体开发的若干初中HPM教学案例[3-6]进行分析，以期获得一些教学启示，为未来的HPM课例研究提供参考。

2 出入相补原理的呈现

2.1 平方差公式

HPM 视角下的“平方差公式”[3]通过改编古希腊欺骗性土地分配事件，让学生思考：

* 上海市立德树人数学教育教学研究基地项目“如何在课程与教学中落实立德树人”系列论文之一。

一个长方形的长和宽分别减少和增加同样尺寸，所得的新长方形面积是否不变？由此引入$(a+b)(a-b)$的计算问题。接着，借鉴赵爽的出入相补法提出问题：在一个边长为 a 的正方形的左上角割去一个边长为 b 的正方形，如何表示剩余图形的面积？教师引导学生通过面积割补，将剩余图形拼接为长方形，其面积与原图的面积相等，如图 1 所示。由此得到逆向公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。反过来，对图 1 右边得长方形进行割补，也可以得到左边的磬折形，故得平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

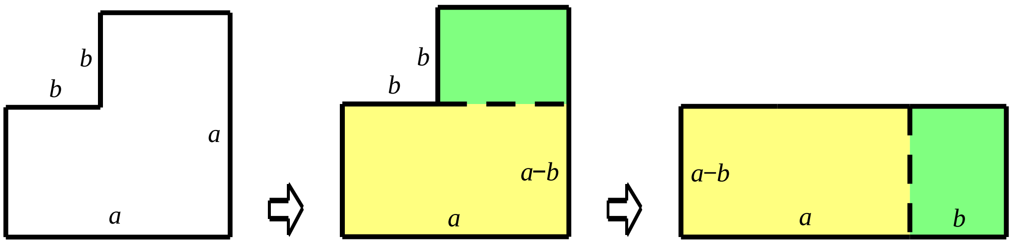


图 1

然后，教师让学生运用出入相补原理，探索其他割补法，学生相继给出图2所示的多种方法，通过面积计算，也得到了平方差公式。

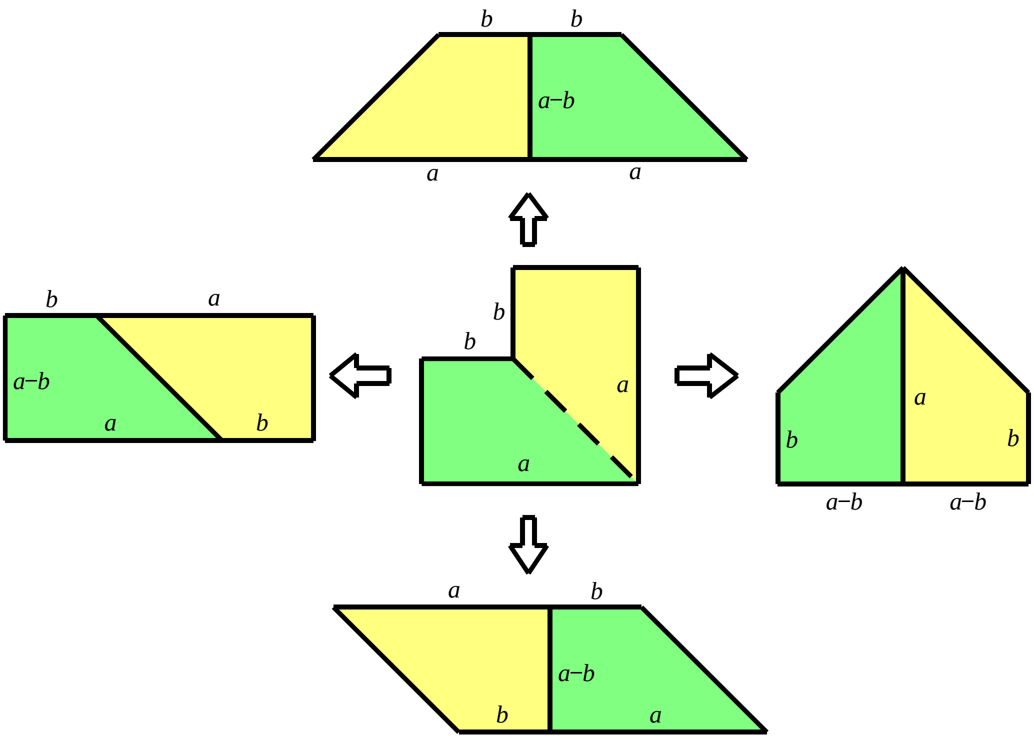
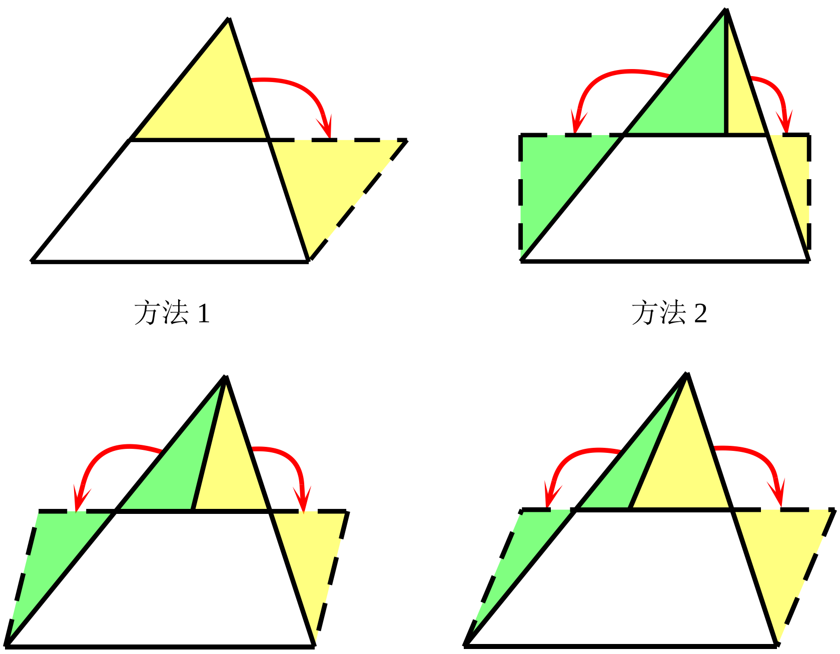


图 2

2.2 三角形中位线定理

在课例“三角形的中位线”[4]中，教师借鉴两河流域的土地分配问题，设计“将三角形土地四等分”的探究任务，从其中的“联结各边中点”的分割方案中发现中位线性质，并让学生探究性质的证明。课堂上，学生相继给出四种证明（图 3）。教师在评价诸方法时指出：方法 2（在中位线上做高线，分别旋转所得到的两个小三角形）其实就是我国三国时代数学家刘徽在证明三角形面积公式时所采用的“出入相补法”；方法 4（在中位线上任取一点与顶点联结，分别旋转所得到的两个小三角形）更是将刘徽的“出入相补法”一般化，是对出入相补法的创造性运用；而方法 1（直接旋转中位线上方的三角形）和 3（在中位线上作中线，分别旋转所得到的两个小三角形）都不过是方法 4 的特殊情形而已。



方法 1　　方法 2

方法 3　　方法 4

图 3

2.3 三角形一边平行线的性质

在课例“三角形一边平行线的性质”（两节课连上，由上海市市西中学王进敬老师执教）中，教师引导学生利用南宋数学家杨辉（13世纪）的“勾中容横、股中容直”原理来证明直角三角形一边平行线的性质。杨辉在《续古摘奇算法》中在解释古人测量方法背后的原理时提出：“直田之长名股，其阔名勾，于两隅角斜界一线，其名弦。弦之内外分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同。”[7]如图4，在矩形$ABCD$的对角线AC上任取一点O，过O作BC和AB的平行线，分别交两组对边于E、F和G、H，则长方形$EBHO$（勾中容

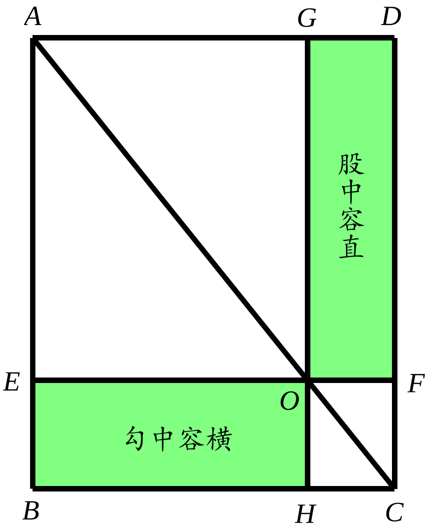


图 4

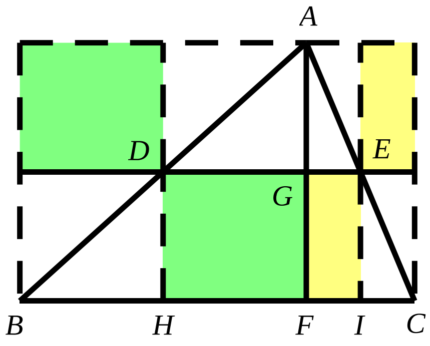


图 5

横）和$GOFD$（股中容直）面积相等。据此可得$OE \cdot OH = OF \cdot OG$，或$\dfrac{OG}{OH} = \dfrac{OE}{OF}$，故得$\dfrac{OG^2}{OH^2} = \dfrac{OE^2}{OF^2}$，再根据等比定律得$\dfrac{OG^2 + OE^2}{OH^2 + OF^2} = \dfrac{OE^2}{OF^2}$，由勾股定理得

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OH};$$

再由比例性质得直角三角形一直角边平行线性质：

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{EO}{BC}。$$

接着，教师让学生将上述证明方法推广到一般三角形中。经过讨论，学生提出作高将任意三角形分成两个直角三角形，利用上述比例关系，得出一般三角形一边平行线性质。如图5，根据直角三角形AFB和AFC中的比例式$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DG}{BF} = \dfrac{AG}{AF} = \dfrac{GE}{FC} = \dfrac{AE}{AC}$，再利用比例性质得$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$。

然后，教师让学生用《几何原本》命题I.43（图6中两个小平行四边形面积相等）来证明三角形一边平行线定理。在教师引导下，学生首先根据图6证明$OE \cdot OF = OG \cdot OH$，即

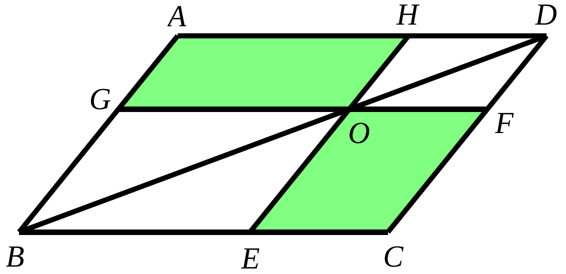


图 6

$\frac{OH}{OE}=\frac{OF}{OG}$，由比例性质得$\frac{HO}{HE}=\frac{OF}{BC}=\frac{DF}{DC}$；再根据图7，在三角形$ABC$上构造两个平行四边形，两次利用欧几里得命题I.43，即可证明$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$。

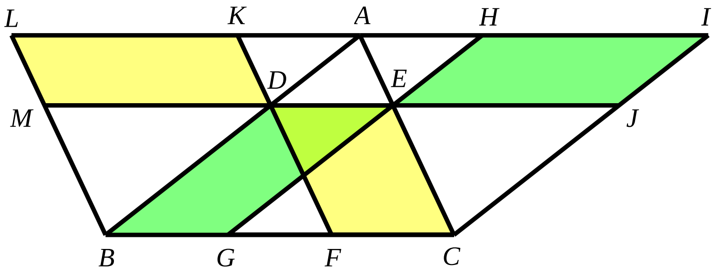


图 7

2.4 一元二次方程配方法

在课例“一元二次方程的配方法（I）”[5]中，教师先引入根据花拉子米《代数学》改编的方程$x^2+10x=20$，引导学生将方程左边用长方形的面积来表示，然后利用割补法将该长方形补成正方形。经过讨论与修正，学生把方程左边看作长为 $x+10$，宽为 x 的长方形，并将其割补成一个磬折形，最后将磬折形补成边长为 $x+5$ 的正方形，如图 7 所示。

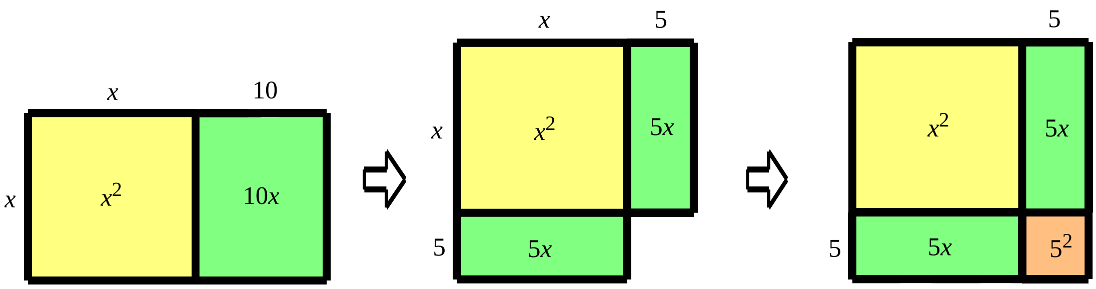


图 7

教师接着让学生探究古巴比伦泥版上的方程$x^2-4x=10$的几何解法。经过讨论，学生仿照一次项系数为正的情形，给出图 8 所示的图形配方法，成功地解决了问题。

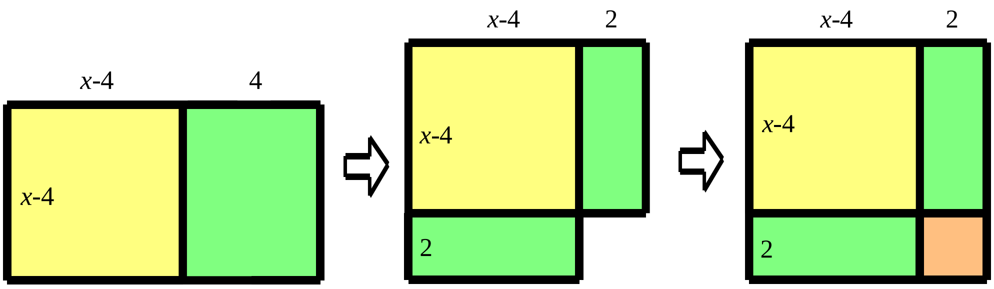


图 8

而在另一个课例“一元二次方程的配方法（II）”[6]中，教师在引导学生用花拉子米的方法完成一元二次方程 $x^2+10x=15$ 的图形配方之后，一名学生还给出了图 9 所示的新的图形配方法，与三国时代数学家赵爽的方法异曲同工！

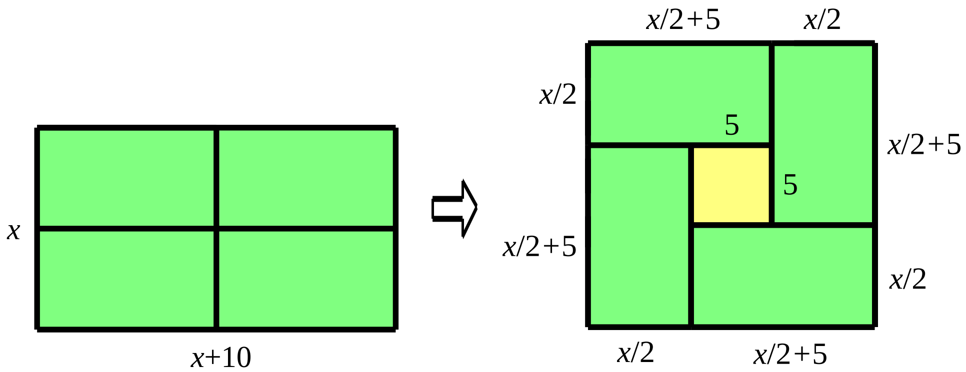


图 9

3 出入相补原理的运用

从我们所考察的五个课例可以看出，教师主要利用出入相补原理来设计探究活动，活动由准备与聚焦、探究与发现、综合与交流、评价与延伸四个环节构成，具体内容见表 1。

表 1 基于出入相补原理的探究活动

案例	准备与聚焦	探究与发现	综合与交流	评价与延伸
平方差公式	在大正方形的一角挖去小正方形，如何将所得磬折形拼成长方形。	用出入相补法将磬折形割补成长方形。	用出入相补法，将磬折形割补成长方形、等腰梯形、平行四边形等多种不同图形。	古今联系：学生在探究与交流环节的方法与赵爽的方法一致。
三角形中位线	如何证明三角形中位线性质。	通过中位线上方三角形的旋转，将原三角形转化为平行四边形。	作中位线上方三角形的高线、中线以及中位线上任意一点与顶点连线，通过两次旋转，将原三角形转化为平行四边形。	古今联系：在中位线上作高的方法就是刘徽推导三角形面积公式时的方法。

三角形一边平行线	如何利用杨辉的“勾中容横、股中容直”原理证明三角形一边平行线的性质。	先证明直角三角形一直角边平行线的性质，再通证明斜三角形一边平行线的性质。	利用欧几里得的命题证明任意三角形一边平行线性质。	古今联系：(1)运用杨辉的原理，但推广了他的结论；(2)杨辉和欧几里得的方法殊途同归。
配方法(I)	如何用几何的方法解一元二次方程。	用花拉子米的长方形割补配方法解方程 $x^2+px=q$（$p>0,q>0$）。	用类似的长方形割补配方法解方程 $x^2-px=q$（$p>0,q>0$）。	古今联系：几何方法有局限，代数方法今胜昔。
配方法(II)	如何用几何方法解一元二次方程。	用花拉子米的长方形割补配方法解方程 $x^2+px=q$（$p>0,q>0$）	学生给出新的长方形分割配方法。	古今联系：学生的新方法与赵爽的配方法相似，极具创造性。

由表 1 可见，五个案例中的探究活动基本上都呈现了同样的模式：在准备与聚焦阶段，教师根据出入相补原理提出探究任务；在探究与发现阶段，学生自主运用出入相补原理解决问题；在综合与交流阶段，教师引导学生进一步运用出入相补原理，或解决更多问题，或发现更多结果，或呈现更多方法；在评价与延伸阶段，教师将学生的方法或结果与古代数学家的方法或结果进行对照，揭示两者的异同。从数学史的运用方式上看，五个课例主要采用了顺应式和附加式。

4 出入相补原理的价值

出入相补原理主要用于命题和问题解决的教学，在所考察的五个课例中，该原理主要有以下教育价值。

4.1 知识之谐

符号代数诞生之前，由于符号语言的缺失，人们在解决代数问题时往往依赖文字语言和图形语言。我们今天通过多项式乘法即可得到平方差公式，在古代却只能通过直观的图形转

化来完成；我们今天习惯于通过符号操作来完成的配方法，在古代也只能借助图形操作来完成。这种图形操作，就是对出入相补原理的具体运用。在课例“平方差公式”和“配方法（I/II）”中，教师引入古人的图形语言和图形操作方法，实际上是在课堂上引领学生“返璞归真”，重走古人公式发现和问题解决之路，构建知识的自然发生和发展过程。但由于学生已具备符号代数的认知基础，教师在教学中并未将几何表征和代数表征割裂开来，两者始终相伴而行，从而实现历史序、逻辑序和学生心理序的有机统一。

另外，出入相补原理在初中数学不同主题的教学中具有广泛的应用，教师如果利用该原理将零散的知识串联起来，有助于学生的对不同知识的理解。图 10 给出了与出入相补原理相关的初中数学各主题。

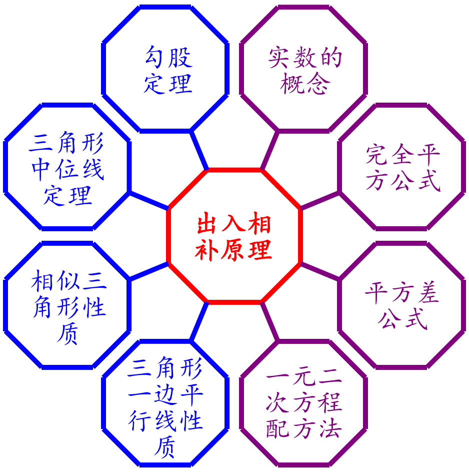


图 10

4.2 方法之美

对于同一个平面图形施以不同的等积变换操作，能够得到不同的平面图形。因此，数学教学中，出入相补原理的运用体现的主要是转化思想。但转化的具体方法往往具有多样性和灵活性，可以彰显方法之美。在课例“平方差公式”中，对同一个磬折形施以不同的割补方法，得到多种不同的图形，从中均可导出平方差公式。在课例“三角形中位线定理”中，从一次旋转到两次旋转、从特殊到一般、从静态到动态，不同方法相继闪亮登场，精彩纷呈。在课例“三角形一边平行线的性质”中，将出入相补原理分别用于长方形和一般平行四边形，分别得到杨辉的“勾中容横、股中容直”原理和欧几里得的命题，而利用两者都能证明三角形一边平行线的性质。在课例在课例“配方法（II）”中，花拉子米的配方法和赵爽的配方法殊途同归、交相辉映！

4.3 探究之乐

基本活动经验乃是“四基”之一，而基于探究活动的“再创造”是 HPM 视角下的数学教学的基本特征之一。在所考察的诸课例中，出入相补原理为学生提供了探究机会。在代数主题（平方差公式、配方法）上，如果没有几何视角，相应的探究活动就付之阙如；而在几何主题（三角形中位线、三角形一边平行线）上，如果没有出入相补原理，探究活动就不会那么富有成效、精彩纷呈。在基于出入相补原理的探究活动中，学生学会研究方法，积累活动经验，经历创造过程，获取成功体验。

4.4 能力之助

从核心素养的角度说，出入相补原理的运用，可以培养学生的直观想象能力和逻辑推理能力。在课例“平方差公式”中，学生有机会从几何图形中发现规律并将其转化为相应的代数表征；而在课例“配方法”中，学生有机会将代数表征转化为几何表征，通过构造图形求方程的正根。在课例“三角形中位线”中，对于每一种图形转化方法，教师都让学生给出演绎证明；而在课例“三角形一边平行线”中，从直角三角形到斜三角形，从杨辉原理到欧氏命题，探究活动始终离不开演绎证明。

从数学能力上说，在代数主题上，出入相补原理的应用有助于表征转化能力的提升；在探究活动的“综合与交流”环节，学生通过交流、论证、质疑、反驳，提升了数学表达能力。

4.5 文化之魅

数学文化包含知识源流、学科关联、社会角色、审美娱乐、多元文化等维度[8]。数学史是数学文化的重要组成部分，出入相补原理有着悠久的历史，诸课例都涉及主题的古今之变以及相关人物。课例“配方法”还展示了图形配方的巴比伦起源，揭示了数学与现实生活的密切联系，体现了数学的社会角色。在课例“配方法”中，图形配方也呈现了数学的对称之美。课例“三角形一边平行线的性质”通过杨辉原理和欧氏命题，呈现了数学文化的多元性。

4.6 德育之效

数学学科德育包含理性、信念、情感、品质等维度。数学史的融入恢复了数学的本来面目，增加了主题背后的人的元素，使得数学变得人性化；在代数主题上，基于出入相补原理的几何方法与代数方法对比，让学生认识到数学的演进性。因此，出入相补原理的运用有助

于改善学生的数学信念。

在探究活动的“评价与延伸”环节，教师通过古今联系，让学生看到，自己完全能够像古代数学家一样做数学，像数学家一样作出发现，甚至将古代数学家的方法一般化、建立古代不同方法之间的联系，从而超越古代数学家。因此，出入相补原理成了学生穿越时空与古代数学家对话的媒介，提升了学生的自信心，拉近了学生与数学家之间的心理距离。

出入相补原理是中国古代几何学的基本原理，刘徽、赵爽、杨辉等数学家经常将该原理用于解决面积问题和测量问题，因此，它也是实施爱国主义教育的理想素材。

5 结 语

通过以上分析，我们得到以下结论。

（1）出入相补原理是实施探究式教学的有效载体。古人采用出入相补原理来解决了大量代数、几何问题，因而它为探究式教学提供了借鉴，所考察的五个课例均利用该原理设计了富有成效的探究活动。

（2）运用出入相补原理可以实现多元教育价值。在所考察的五个课例中，知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效六类价值均得到了不同程度的体现。

然而，已有的五个课例尚未涵盖涉及出入相补原理的所用初中数学主题，探究活动的设计也不尽完善（如诸课例均缺乏方法的延伸）。未来，HPM 专业学习共同体可以进一步完善已有的教学设计，并就该原理的应用开发出更多的教学案例；同时，还需要开发有效的研究工具，进一步验证其教育价值。我们有理由相信，应用出入相补原理的有关 HPM 课例必将成为初中数学教学落实立德树人的范例。

参考文献

[1] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study [J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.

[2] 吴文俊. 出入相补原理. 载《中国古代科技成就》, 北京: 中国青年出版社, 1978. 80-100.

[3] 李玲, 顾海萍. “平方差公式”：以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论, 2014(11): 43-47

[4] 张莉萍, 栗小妮. HPM 视角下的“三角形中位线定理”的教学[J]. 数学教学, 2018(7): 7-11

[5] 沈志兴, 洪燕君. “一元二次方程配方法”:用历史体现联系[J]. 教育研究与评论, 2015(10):

109-113

[6] 王进敬. HPM 视角下的一般一元二次方程解法（配方法）[J]. 中小学数学(初中版), 2019, (1-2): 33-36

[7] 杨辉. 续古摘奇算法. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇（数学卷一）,沈阳: 辽宁教育出版社, 1994.

[8] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, (2): 37-43.

活动信息

HPM 活动简讯

◆ 2019 年 4 月 1 日，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授带领 HPM 研究团队以及 HPM 工作室成员，来到了华东师范大学第二附属中学参加 HPM 工作室教学观摩与研讨活动，此次活动是在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 视角，展现高一年级的“等比数列前 n 项和”，授课教师为 HPM 工作室成员、华东师大二附中蔡东山老师。

（顾彦琼 供稿）

◆ 云南，彩云之南，山美水美，但其教育却不为大众所知。2019 年 5 月 20-24 日，华东师范大学 HPM 团队成员岳增成博士与玉溪师范学院文萍老师走进云南第三大城市玉溪，调研玉溪的小学数学教育，开展小学 HPM 课例研究。数学史融入小学数学教学是本次调研的重要内容，5 月 20 日我们来到澄江县的一所农村小学——左所小学观摩龙街中心小学万立老师“小数的初步认识”的试教。为了进一步了解玉溪少数民族学生的数学学习，5 月 21 日，我们来到民族特色鲜明的元江二小，观摩了龙皮脑老师“喝奶”（分数的加法）、张云凤老师“搭配”（组合问题）两节课。为了进一步了解名师工作室的运行机制，5 月 22 日我们与玉溪市第二届小学数学名师工作室的主持人飞惠玲老师及部分成员进行了交流，了解了名师工作室的基本情况，所开展的活动及进行 HPM 课例研究方面的需求。5 月 23 日我们参与了玉溪市第二届小学名师工作室的工作会议，飞惠玲老师和各个区县的负责老师结合已有的活动就如何切实有效地提高集体活动效率、减轻工作室老师负担进行了沟通。5 月 24 日，云南省“万人计划”教学名师陶培武工作坊、玉溪市第二届小学数学名师工作室、澄江县第二届小学数学名师工作室联袂开展了“数学史融入小学数学课堂”为主题的教研活动，300 余名教师参与了本次活动。

（岳增成 文萍 供稿）

◆ 2019 年 4 月 30 日，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授带领 HPM 研究团队以及 HPM 工作室成员来到了同济大学第二附属中学初中部，组织 HPM 工作室初中教学观摩与研讨活动，参与此次活动的还有华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学组成员、宝山区共富实验学校胡媛老师工作室成员等。此次活动是在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 视角展现八年级的“平面向量”以及“平面向量的加法”两节课，授课教师分别为同济大学第

二附属中学的黄蓓老师和长桥中学的汤雪川老师。

（周天婷 供稿）

◆ 2019 年 5 月 22 日，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师带领 HPM 研究团队、HPM 工作室成员以及教师教育学院 18 级数学教育方向硕士研究生和部分访学教师，来到了上海市晋元高级中学参加 HPM 工作室教学观摩与研讨活动。本次活动与高中数学王华特级教师工作室以及高中数学王志和特级教师工作室联合举办，在汪晓勤教授及 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 的视角展现高二年级“杨辉三角探究”的课堂教学，授课教师为 HPM 工作室成员、晋元高级中学的李莹老师。

（韩嘉业 供稿）

◆ 2019 年 6 月 3 日，玉溪市第二届小学数学名师工作室成员及部分学员、澄江县第二届小学数学名师工作室主持人及部分成员、龙街中心小学领导班子一行 9 人应海口中心小学周跃辉校长、松元小学李雪峰校长之邀，来到了松元小学，开展了送教活动，丁雪娟老师、万立老师先后进行公开课展示，执教的主题分别是“复式统计图”（复习课）、“小数的初步认识”。万老师将数学史融入教学，试图了解 HPM 对山区少数民族学生的影响。这是他继将数学史融入农村小学数学教学后新的尝试。

（万立 文萍 供稿）

◆ 2019 年 6 月 4 日下午，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授带领 HPM 研究团队与 HPM 工作室成员，来到了上海市南汇第二中学参加 HPM 初中教学观摩与研讨活动。在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，来自上海市杨思中学的张翼翔老师、上海市南汇第二中学的张丽芝老师分别基于 HPM 视角展现了七年级“平面直角坐标系”的概念新授课、“平面直角坐标系的发展与数学建模”的单元拓展课。

（马艳荣 余庆纯 供稿）