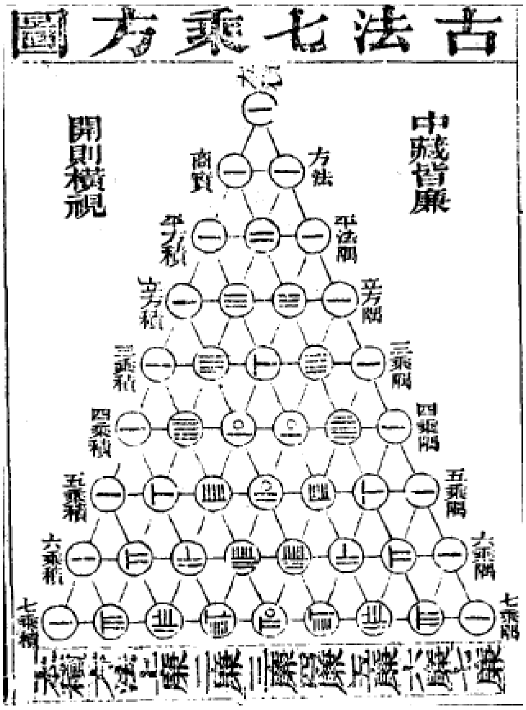
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2019 年第 8 卷第 1 期

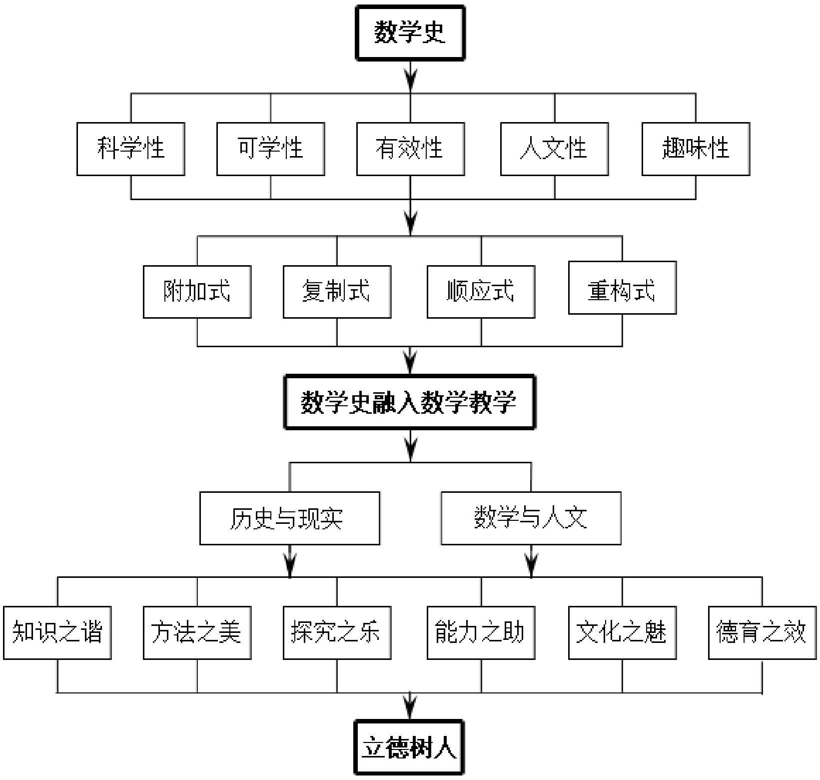


古法七乘方图

刊首语

《左传·襄公二十四年》称：“太上有立德，其次有立功，其次有立言，虽久不废，此之谓不朽。”古人因此称“立德”、“立功”、“立言”为“三不朽”。“立德”为“三不朽”之首。今天，立德树人是教育的根本任务，如何在数学教学中落实立德树人，是今后数学教育研究的重要课题，也是 HPM 视角下数学教学的最终目的。

将数学史融入数学教学，首先在历史与现实、数学与人文之间各架起两座桥梁，进而构建知识之谐，彰显方法之美，营造探究之乐，实现能力之助，展示文化之魅，达成德育之效，最终落实立德树人。下图给出了有中国特色的 HPM 理论框架。



2019 年，我们将继续通过文献研究和 HPM 课例研究来夯实 HPM 理论，对数学史的六类价值，尤其是“能力之助”（数学核心素养）和“德育之效”（数学学科德育）进行更为深入的探讨。我们也将开拓创新，不断丰富和拓展 HPM 的内涵。期待年轻而充满活力的 HPM 学者们，在“HPM 研究方法”、“HPM 课例评价”、“HPM 与 STEM 教育”、“技术与 HPM”、“HPM 与问题提出”、“HPM 专业学习共同体”、“HPM 与少数民族数学教育”等课题上贡献自己崭新的、优质的研究成果。

且让我们带着不变的理想和美好的憧憬，携手步入 HPM 的春天。

目　录

CONTENT

理论探讨

基于数学史的高中数学文化内涵课例分析

余庆纯[1]　汪晓勤[2]

（1 华东师范大学数学科学学院，上海，200241； 2 华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称《标准》）在“课程目标”中指出：“通过高中数学课程的学习，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值”[1]。在“教学建议”中又要求：“在整个数学教学中，教师应当有意识地结合相应的教学内容，引导学生了解数学的发展，认识数学在科学技术、社会发展中的作用，体会数学的科学价值、应用价值和文化价值，提升学生的科学精神、应用意识和文化素养”[1]。可见，如何在数学课程和数学教学中体现数学的文化价值，是数学教育工作者和一线教师需要关注的重要课题之一。

关于“数学文化”的内涵，国内研究有不同的界定。顾沛教授指出：狭义的数学文化内涵是指数学思想、精神、方法、观点以及它们的形成和发展；广义上的数学文化除上述内涵外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学与人文的交叉、数学与各种文化的关系等[2]。杨豫晖、宋乃庆教授等学者从数学学科、文化、数学共同体、数学活动、系统等五个角度述评数学文化内涵，在此基础上提出：数学文化是指一群人（数学家），当他们从事数学活动时，遵循共同的数学规则，经过长期的、历史的沉淀，形成了许多关于数学知识、精神、思想方法、思维方式等的共同约定，这些共同约定的总合就是数学文化[3]。《标准》提出：数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点以及他们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动[1]。可见，数学史是数学文化的必要组成部分，是体现数学文化价值的重要途径之一，因此本研究借鉴《标准》中“数学文化”的定义。

数学史与数学教育（HPM）视角下的数学教学受到越来越多一线教师的热切关注，相关的 HPM 课例也日益增多。实践证明：数学史融入数学教学，有助于揭示知识之谐，凸显方法之美，营造探究之乐，达成能力之助，展示文化之魅，实现德育之效[4]。然而，张奠宙先生却指出：在当前的数学教学中，往往局限于一个概念、一个定理、一种思想的局部历史的介绍，缺乏宏观的历史进程的综合性描述。实际上用宏观的数学史进程可以更深刻地揭示数学的含义，加深对数学知识的文化理解[5]。目前，基于数学史的“文化之魅”的价值探讨依旧存在理解不深刻、实践不到位等情况，缺乏进一步深入研究。

有鉴于此，本研究对最新提出的“基于数学史的数学文化”框架[6]进行专家论证，并对高中 HPM 课例进行分析，试图回答：高中 HPM 课例教学中体现了哪些文化内涵？数学文化不同维度的分布情况有何特点？是否印证了“基于数学史的数学文化”框架？对今日教研有何启示？

2 研究方法与设计

本研究以质性研究为主，采用专家咨询法、文献分析法开展研究。研究设计如下：

（1）框架建立与论证。基于《标准》所提出的数学四类价值以及西方学者总结的数学史教育价值提出了“基于数学史的数学文化”的分析框架[6]。为保证分析框架的客观合理性，本研究采用专家咨询法，以访谈、研讨等形式对该分析框架进行论证。

（2）课例分析。采用文献分析法，根据 HPM 课例的研究要求[7]，对收集的 2012~2018 年的高中 HPM 课例进行筛选，选取出符合要求的 20 个高中 HPM 课例作为研究对象，分析课例中的基于数学史的数学文化内涵及其分布特点。

3 数学文化框架的构建与论证

3.1 框架构建

基于《标准》所提出的数学四类价值以及西方学者总结的数学史教育价值，可以将课堂数学教学中的数学文化内涵分成知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化五个维度[6]。

“知识源流”是指某个知识点的历史演进过程中所涉及的人物与事件、概念与术语、问题与求解、命题与证明等。“学科联系”是指数学与其他学科之间的关联。数学乃是人类的文化活动，这种活动与人类其他文化活动水乳交融、不可分割，数学史是“数学与其他学科之间的一座桥梁”[8]。“社会角色”是指数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义。数学史“有助于解释数学在社会中的作用”[9]。“审美娱乐”是指数学美（包括对称美、奇异美、简洁美、统一美等）与趣味数学。《标准》在“美与数学”课程中指出：“学会审美不仅可以陶冶情操，而且能够改善思维品质”[1]。数学史展现出人类对于美的追求以及对于趣味的倾向性伴随着数学的诞生而诞生，“促进数学发展的不仅是实用性因素，而且还有美学标准、智力好奇、趣味娱乐等因素”[8]。“多元文化”是指不同文明、不同地域的数学家在同一数学课题上的成就与贡献。数学从来不是某个人、某个文明、某个国家或地区的专利。不同文化都对数学发展产生过影响，数学在不同时空的历史演进也是数学学习的目标[10]。

图 1 给出了基于数学史的数学文化内涵与《标准》所提出的数学四类价值之间的关系。

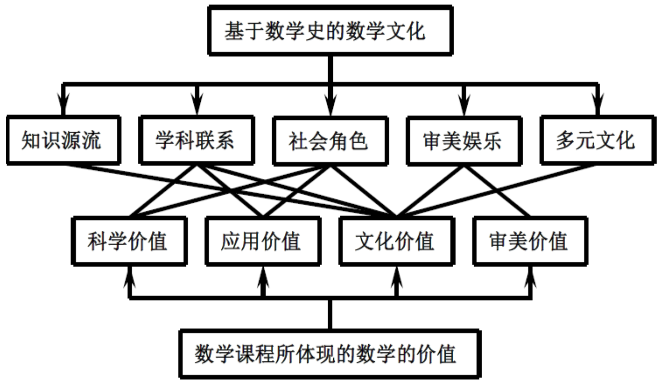


图 1 数学文化内涵与数学价值的对应关系

3.2 框架论证

为保证分析框架的客观合理性，本研究采用专家咨询法。参与对象分别是两位高校研究者与六位一线专家型数学教师、教研员（基本信息如表 1），均有一定的数学史与数学文化研究经历，具有一定的代表性。

表 1 访谈人员的基本信息

专家编码	任教学段	教龄	职 称
A1	大学	30 年	正高级
A2	大学	28 年	正高级
A3	高中	35 年	中学特级，正高级
A4	高中	27 年	中学特级，正高级
A5	高中	26 年	中学高级
A6	高中	25 年	中学高级
A7	高中	25 年	中学特级，正高级
A8	高中	20 年	中学特级

专家咨询流程分为三个环节：开放式访谈、评价式研讨、复核式访谈。开放式访谈旨在了解各位老师对数学史与数学文化的研究情况；评价式研讨，主要由八位老师针对“基于数学史的数学文化”框架进行线上研讨与论证；复核式访谈是基于评价式研讨的内容，对各位老师进行针对性地回访与复核。

基于专家咨询论证，得出如下结论：

（1）“基于数学史的数学文化”分析框架关注“知识源流”与“多元文化”的互融互通。前者是时间纵轴，属于数学文化研究，需求深，帮助了解数学中的文化。后者是空间横轴，属于数学文化比较，需求广，帮助认识文化中的数学。

（2）“学科联系”从历史视角连结数学与其他学科(如哲学、文学、天文学、艺术等)的知识脉络，“社会角色”通过数学史揭示数学的社会价值与意义，二者居于社会发展的演进，凸显跨学科的文化交融。

（3）“审美娱乐”包含数学美与趣味数学。数学美横跨“文化中的数学”与“数学中的文化”，对称美、奇异美、简洁美、统一美是数学审美的内隐模式，而借助数学表现出审美

的外显模式。趣味数学是数学知识的基本元素，无趣无以成数学。两者均是数学文化相当重要的组成部分。

（4）“基于数学史的数学文化”分析框架既扎根于数学史的教育价值与高中新课程标准的新要求，又为数学文化融入课程、落实到教学提供指导，具有“上通理论、下达实践”的特点，具有一定的客观合理性。

4 课例分析

4.1 课例选取

HPM 视角下的数学教学，是指借鉴数学知识的发生发展、再现历史上的数学思想方法、采用适当的方式运用数学史料以提升教学的有效性、优化数学教育价值的一种教学方式，其所形成的教学案例简称为 HPM 课例。

依据 HPM 课例研究中史料的适切性、应用方式的多元性等要求[7]，以数学史融入数学教学的四种方式与五项原则作为高中 HPM 课例的筛选条件，筛选出 2012~2018 年 7 年间发表的具有代表性的 20 个高中 HPM 课例[11]作为研究对象，其基本信息见表 2。其中，科学性、可学性、有效性、趣味性和人文性原则分别以 a，b，c，d 和 e 来表示；附加式、复制式、顺应式和重构式分别以 1，2，3 和 4 来表示。

按照《标准》分类，20 个课例的课题分属函数、几何与代数、概率与统计、微积分等 4 个领域。其中，19 个课例属于新授课，1 个课例是复习课。绝大多数课例是由 HPM 专业学习共同体（由大学研究者和中学一线教师组成）依照“选题与准备”、“研讨与设计”、“实施与反馈”、“整理与写作”四个环节合作开发。

表 2　20 个高中 HPM 课例的基本信息

课　例	教学设计概要	运用方式	融入原则
函数的概念[11]	通过具体问题，引导学生经历函数的解析式定义到变量依赖关系定义，再到变量对应关系定义的演进过程。	2，3，4	a，b，c，e
对数的概念[12]	从大数乘法的简化过程出发，让学生经历对数产生的过程。	1，2，4	a，b，c，e
函数的零点[13]	通过斐波那契解三次方程的故事引入，探究方程的根与函数零点的等价关系。	1，2	a，b，c，d
数列的概念[14]	通过两河流域月相表、古埃及趣味问题以约瑟夫游戏引入数列概念；通过天文学上的波德律，展示数列之用。	1，2，3	a，b，c，d
递推数列的概念[15]	通过汉诺塔游戏引出递推数列概念；通过微视频，回顾斐波那契数列的历史背景。	1，2，3	a，b，c，d
任意角[16]	利用古代计时工具日晷引入静态角和动态角概念；引导学生探究正负角、 象限角和终边相同的角。	2，3	a，b，c，d

表 2 20 个高中 HPM 课例的基本信息（续表）

课 例	教学设计概要	运用方式	融入原则
任意角的三角函数[17]	借助曲柄连杆模型引出三角函数的单位圆定义；以曲柄连杆的四个阶段运动状态来引出终边定义。	4	*a*，*b*，*c*
周期函数[18]	通过周期现象引出周期函数概念；引导学生辨析历史上周期函数的三种不同定义，加深概念理解。	1，2，4	*a*，*b*，*c*，*e*
正弦定理[19]	通过流星测量问题引入正弦定理；利用梅文鼎的同径法和韦达的外接圆法对定理进行证明。	1，2，3	*a*，*b*，*c*，*e*
余弦定理[20]	利用欧几里得、毕帝克斯的几何方法以及今日向量法证明余弦定理。	1，2，3	*a*，*b*，*c*，*e*
平面的概念[21]	引导学生探究平面概念和性质，并与历史上数学家所给出的平面定义进行比较。	3，4	*a*，*b*，*c*，*e*
线面垂直的判定[22]	以历史上的两种方法证明线面垂直判定定理，将定理运用于中国古代的鳖臑和阳马模型。	1，2，3，4	*a*，*b*，*c*，*e*
棱柱的定义[23]	让学生给棱柱下定义，并与历史上数学家的定义作对比；引导他们对定义进行辨析，寻找有关定义的反例。	1，3，4	*a*，*b*，*c*，*e*
点到直线的距离[24]	利用历史上的交点法、最值法、三角形面积法推导点到直线的距离公式。	2，3	*a*，*b*，*c*
椭圆的定义[25]	通过光照实验引出单德林单球模型；通过拼图活动引出双球模型，导出焦半径性质；进而引入椭圆定义。	4	*a*，*b*，*c*
抛物线的概念[26]	用平面截圆锥，探究截口曲线的形状；借助光学实验，引出抛物线焦点概念；最后让学生归纳抛物线的定义。	4	*a*，*b*，*c*
数系扩充与复数的引入[27]	以卡丹分十问题和邦贝利三次方程问题，引入虚数概念；通过高斯复平面，引入复数的几何表示。	1，2，3，4	*a*，*b*，*c*，*e*
二项式定理[28]	借鉴历史，通过开立方运算引入二项式定理；利用卡斯蒂隆的"先异后同"法证明定理。	1，2，3	*a*，*b*，*c*，*e*
导数的几何意义[29]	利用刘徽的割圆术，引导学生经历从切线的静态定义到动态定义的演进过程。	3，4	*a*，*b*，*c*，*e*
导数的应用[30]	利用导数解决 17 世纪数学家开普勒、费马和莱布尼茨的最值问题。	1，2，3	*a*，*b*，*c*，*e*

4.2 HPM 课例中的数学文化内涵

4.2.1 知识源流

20 个 HPM 课例所涉及的“知识源流”维度大致可分成人物与事件、概念与术语、命题与证明、问题与求解等四个子维度。图 2 给出了“知识源流”各子维度的频数分布。

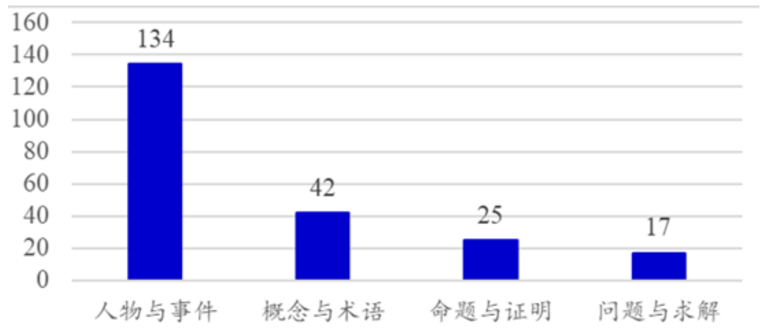


图 2 “知识源流”各子维度的频数分布

课例“函数的概念”[11]以史为鉴，再现了函数概念从“解析式”定义到“变量依赖关系”定义、从“变量依赖关系”定义到非集合语言的“变量对应关系”定义、最后从非集合语言的“变量对应关系”定义到集合语言的“变量对应关系”定义的演进过程。课例“对数的概念”[12]涉及苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550~1617）发明对数的事件，还运用了古巴比伦泥版上的利息问题作为应用题。课例“点到直线的距离”[24]引入 20 世纪中叶西方教科书中的最值法和三角形面积法。在课例“椭圆的定义”[25]中，学生通过探究，经历了从椭圆截面定义到课本上的动点轨迹定义（第一定义）的过程。课例“数系的扩充与复数的引入”[27]向学生呈现了 16 世纪意大利数学家邦贝利（R. Bombelli, 1526~1572）在求解三次方程时所遇到的“矛盾”。

4.2.2 学科联系

课例“数列的概念”[14]以苏轼《水调歌头•明月几时有》中的经典名句“人有悲欢离合，月有阴晴月缺”，指出“月相变化”中蕴含的数列规律。在课例“任意角”[16]中，教师引入白居易的诗句“离离原上草，一岁一枯荣，野火烧不尽，春风吹又生”，激发学生思考生活中常见的周期现象。可见，数学背后的文学意境蕴含着数学抽象思维与文学形象思维之间的奇妙联系，彰显了数学的文化之魅。

课例“导数几何意义”[29]借鉴 17 世纪促使数学家研究切线的三类问题，设计“光在曲面上的反射”、“曲线运动的速度方向”与“拱桥的坡度”等问题情境，体现了数学与物理学、建筑学等学科之间的联系。课例“导数的应用”[30]中，教师引入“费马原理（最小光程原理）”，通过导数推导出“折射定律”，同样揭示了数学与物理学的密切关系。

4.2.3 社会角色

课例“数列概念”[14]通过两河流域泥版上的月相表，说明数学在古人的生产、生活中的巨大作用：抬头望月，日期可计，春耕秋收，井然有序；同时通过意大利天文学家皮亚齐（G. Piazzi, 1746~1826）发现谷神星的故事，体会数列推动天文学的发展。在课例“任意角”[16]的新知探究部分，教师引入古代计时仪器日晷与《周髀算经》中测量四季的方法，引导学生

感受静态角与动态角在确定时间上的不同作用。课例“正弦定理”[19]以在新知引入环节介绍10 世纪阿拉伯天文学家阿尔•库希（Al-Kuhi, 约 940~1000）的流星测量方案，激发学生探究流星高度的学习动机，引入正弦定理；在知识应用环节，回顾、解决流星测量问题，揭示正弦定理的重要社会价值。课例“抛物线的概念”[26]以古希腊人利用凹面镜原理采集火种的故事，说明抛物线的社会角色。在课例“导数的应用”[30]中，教师借鉴历史编制导数在生产设计、交通运输、通讯网络等领域的应用问题，体会微积分在现实生活中的重要应用。

4.2.4 审美娱乐

课例“递推数列”[15]中复制式地融入斐波那契兔子问题和棋盘问题，引导学生探究其递推关系，并学会用递推公式表示问题，揭示数学的简洁美。“数系的扩充与复数的引入”[27]中通过数学上的最美公式——欧拉公式，展示了虚数之奇异美。

课例“数列概念”[14]将历史上著名的“约瑟夫问题”改编成“找位置”趣味游戏，让学生在游戏中体会数列的“序”的本质特征；课例“递推数列”[15]则利用“汉诺塔游戏”来引出递推数列概念，寓理于“做”。可见，历史上的趣味数学问题在高中数学课堂上可以大放光彩。

4.2.5 多元文化

课例“函数的概念”[11]展示了西方数学家欧拉（L. Euler, 1707~1783）、德摩根（A. De Morgan, 1806~1871）、狄利克雷（L. Dirichlet,1805~1859）的函数定义以及中国数学家李善兰（1811~1882）的函数译名。在课例“正弦定理”[19]中，学生既欣赏韦达外接圆方法的精彩，也领略中国数学家梅文鼎（1633~1721）同径法的美妙。课例“二项式定理”[28]通过微视频呈现二项式定理的相关历史，东方的“贾宪三角”和西方的“帕斯卡三角”交相辉映。在课例“导数几何意义”[29]中，先出现欧几里得（Euclid，约公元前 325~公元前 265）的切线静态定义，后出现费马的切线动态定义，而刘徽的割圆术在静态定义和动态定义之间架起了一座桥梁。在上述课例中，仿佛东西方数学家穿越时空，齐聚今日课堂，探讨数学概念的起源和定义、数学定理的发现和证明，体现了精彩纷呈的多元文化。

5 讨 论

表 3 给出了 20 个 HPM 课例在数学文化五维度上的分布情况。

表 3 数学文化各维度的课例分布情况

HPM 课例	知识源流	学科联系	社会角色	审美娱乐	多元文化
函数的概念	√		√		√
对数的概念	√	√	√		√
函数的零点	√			√	
数列的概念	√	√	√	√	√
递推数列的概念	√			√	
任意角	√	√	√	√	
任意角的三角函数	√				√
周期函数	√				√
正弦定理	√	√			√
余弦定理	√				√
平面的概念	√		√		√
线面垂直的判定	√				√
棱柱的定义	√		√		√
点到直线的距离	√				√
椭圆的定义	√	√			
抛物线的概念	√		√	√	
数系扩充与复数引入	√				√
二项式定理	√				√
导数的几何意义	√	√	√		√
导数的应用	√	√	√		√

由表3可知，数学文化五个维度的分布并不均衡。数学文化各维度及其课例个数为：“知识源流”20个，“多元文化”15个、“社会角色”9个、“学科联系”7个、“审美娱乐”5个。

首先，HPM视角下的数学教学在历史与现实之间架起一座桥梁，借鉴知识的历史发展规律，实现历史顺序、逻辑顺序和心理顺序的统一乃是HPM教学的基本特征。因此，所有HPM课例均体现了“知识源流”维度。其次，数学文化是不同时空下古今中外的数学交汇和文化碰撞，不同文化背景的数学家皆可能做出各自的贡献（如符号的创造、公式的推导、定理的证明等）。因此，当教师将数学史融入教学时常常会涉及“多元文化”维度，这便是该维度出现的频数仅次于“知识源流”维度的原因。最后，“社会角色”、“学科联系”、“审美娱乐”三个维度的运用情况不够理想，有待继续加强。

尽管部分课例采用了HPM视角，但其“文化味”仍显不足。究其原因，有如下因素制约了数学文化的多元运用。

• 教师在数学文化内涵理解上的局限性。数学史是数学文化的重要组成部分，在一定程度上，数学史融入数学教学也是数学文化融入数学教学的一种方式。但HPM专业学习共同体对于“基于数学史的数学文化”内涵并无清晰的界定与分类，往往把握不了数学文化多个维度内容的综合呈现，偏向于注重选择和运用历史素材。

• 教师可支配的数学文化素材比较单一。以“数系的扩充与复数的引入”[27]为例，通过了解数学家（如莱布尼茨、爱因斯坦）对虚数的评价，点明发现虚数的重要性。除此之外，

历史上还有一些文学名著，如扎米亚金（Y. Zamyatin, 1884~1937）在《我们》中、穆西尔（R. Musil, 1880~1942）在《小特尔莱斯》中用虚数来比喻人性中的非理性一面，表明作家对虚数的错误认识；美国电气工程师斯坦梅茨（C. P. Steinmetz, 1865~1923）将虚数用于电路计算，体现了虚数的应用价值。这样，“学科联系”维度就得到了体现。

• 数学教学现实条件的制约。许多HPM课例都是在常规课堂上实施的，教师既要完成一定的教学目标，保证高考制度下的应用练习时间，又要兼顾班级的教学进度。因此，在实际教学中，不能够苛求一节课中体现数学文化的所有维度，而且所承载的历史素材宜少不宜多、宜精不宜杂。

6 结 语

张奠宙先生指出：“如果数学课堂能够有广博的文化知识滋养，充满高雅的文化氛围，弥漫着优秀的文化传统，数学教学可以说达到最高境界了”[31]。综上，在所分析的 HPM 课例中，“基于数学史的数学文化”内涵的五个维度——知识源流、学科联系、社会角色、多元文化和审美娱乐均有体现，印证了“基于数学史的数学文化”框架的客观合理性。然而，五个维度的分布不均。要在高中数学常态课中更全面地呈现数学文化的五个维度，进一步提升数学教学的境界，HPM 学习共同体必须做好如下几个方面的研究工作。

• 加强历史研究。HPM教学的“文化之魅”始于历史研究，而数学史蕴含着丰富的教学素材和思想养料。所谓有源之水常新，有根之木常青，加强历史研究是未来HPM课例中数学文化多元维度开发的基础环节。

• 夯实理论基础。HPM研究的基本进路是“自下而上”，基于HPM课例分析印证“基于数学史的数学文化”分析框架；同时这个分析框架反过来指导HPM课例研究。未来，需要基于一线教学实践经验，不断对数学文化的内涵做出更深刻的研究。

• 立足教育现实。数学文化融入数学教学，其最终目的是促进学生的数学学习，为未来的发展打下良好的基础。因此，HPM视角下的数学教学不可能脱离教育现实来进行。任何一位一线教师都不可能仅为文化而文化，为历史而历史。建议可以根据史料编制数学例题或练习题，或制作生动有趣的HPM微视频等。

美国学者 Bidwell 曾说过：“在教学中融入数学史，可以将学生从数学的孤岛上挽救出来，并将他们安置于一个生机勃勃的新大陆上，这个新大陆包含了开放的、生动活泼的、充满人情味的并且总是饶有趣味的数学”[32]。随着 HPM 理论研究与教学实践的深入，充满文化芬芳的高中数学课堂必将彰显立德树人的教育价值，焕发更加强大的生命力。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版） [M]. 北京：人民教育出版社, 2018: 8-34, 69.

[2] 顾沛. 南开大学的数学文化课程十年来的探索与实践——兼谈科学教育与人文教育的融合[J]. 中国高教研究, 2011, (09): 92-94.

[3] 杨豫晖，吴姣，宋乃庆. 中国数学文化研究述评[J]. 数学教育学报, 2015, 24(01): 87-90.

[4] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study [J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.

[5] 张奠宙. 关于数学史和数学文化[J]. 高等数学研究, 2008, (01): 18-22.

[6] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, (2): 37-43.

[7] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社, 2017: 422-425.

[8] Tzanakis, C., Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey[C]. In: J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, 201-240.

[9] Fauvel J. Using history in mathematics education [J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.

[10] Jankvist U T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71(3): 235-261.

[11] 钟萍，汪晓勤. 函数概念：基于历史相似性自然过渡[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2016, (2): 62-68.

[12] 钟萍，汪晓勤. 对数概念：从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 2015, (5): 50-53.

[13] 陈飞. “函数的零点”：用历史故事和问题激发动机[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版）, 2015, (12): 28-31.

[14] 李玲，汪晓勤. 数列概念：通过历史体现“奇、趣、本、用”[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版）, 2016, (4): 61-65.

[15] 李玲. “递推数列”：从汉诺塔游戏出发[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2015, (9): 19-23.

[16] 饶彬. “任意角”：从历史看必要性与规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版)， 2017, (4): 45-51.

[17] 刘石洋. HPM 视角下的“任意角的三角函数”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2014, (12): 33-37.

[18] 向荣，陈莎莎，沈中宇. HPM 视角下的周期函数概念教学[J]. 中小学数学(高中版), 2018, (11): 45-50.

[19] 张筱瑜, 汪晓勤. “正弦定理”: 用历史拓思维、润情感[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2015, (6): 21-25.

[20] 顾彦琼, 汪晓勤. “余弦定理”复习课: 通过数学史体现综合性[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2015, (2): 52-57.

[21] 沈中宇, 汪晓勤. 平面概念: 基于相似性, 重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2016, (10): 46-51.

[22] 高振严, 何伟淋. “线面垂直判定定理”: 从历史看证明、找模型[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2018, (7): 35-40.

[23] 陈锋. 基于历史相似性的棱柱定义教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2015, (5): 52-57.

[24] 杨懿荔, 汪晓勤. “点到直线的距离”: 基于认识基础, 选择历史方法[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2017, (2): 60-64.

[25] 陈锋, 王芳. 基于旦德林双球模型的椭圆定义教学[J]. 数学教学, 2012, (4): 5-8.

[26] 徐超. 抛物线概念教学: 重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2015, (8): 26-31.

[27] 方国青, 王芳. HPM 视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究[J]. 数学教学, 2013, (4): 29-32.

[28] 方倩. “二项式定理”:在历史中探源、求法、寻魅[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2016, (9): 37-41.

[29] 王芳, 汪晓勤. HPM 视角下“导数几何意义”的教学[J]. 数学教育学报, 2012, 21(5): 57-60.

[30] 王芳, 汪晓勤. HPM 视角下的“导数应用”教学[J]. 数学通报, 2014, 53(9): 28-32.

[31] 张奠宙. 数学教育纵横[M]. 广西: 广西教育出版社, 2018: 378-379.

[32] Bidwell J K. Humanize your classroom with the history of mathematics[J]. *Mathematics Teacher*, 1993, 86(6), 461-464.

历史研究

算术三角形的历史及其文化价值

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准》（2017年版）在“课程目标”中指出：“通过高中数学课程的学习，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值；进一步促进学生全面、可持续发展。”[1] 在“教学建议”中又要求：“在整个数学教学中，教师应当有意识地结合相应的教学内容，引导学生了解数学的发展，认识数学在科学技术、社会发展中的作用，体会数学的科学价值、应用价值和文化价值，提升学生的科学精神、应用意识和文化素养。”[1]可见，如何体现数学的文化价值，是中学数学教师需要关注的课题。

数学史是数学文化的重要组成部分。笔者曾根据西方学者关于数学史教育价值的讨论并结合课程标准，将基于数学史的数学文化内涵分成知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化五个维度[2]，HPM视角下的数学教学可以其中一个或若干个维度来体现数学的文化价值。

众所周知，二项式定理是高中数学中的一个重要定理，高中数学教材的编写以及 HPM 课例的开发促使我们思考：二项式定理（局限于正整数指数的情形）的历史揭示了它的哪些文化价值？本文试图通过二项式系数表——算术三角形的历史来回答上述问题。

2 算术三角形的历史

2.1 中国

在中国，早在汉代，数学家就利用完全平方和完全立方公式来开平方和开立方。为了开四次方以及更高次方，北宋数学家贾宪在其《释锁算书》中给出直到六次幂的二项式系数表，如图 1 所示。其中自上而下第 i 层即为 $(a+b)^{i-1}$ 展开式的系数（$i=1$，2，…，7）。贾宪称该数表为“开方作法本原图”，今称“贾宪三角”。《释锁算书》已失传，南宋数学家杨辉在《详解九章算法》（1261）中记载了该图，并注明“出《释锁算书》，贾宪用此术”。“释锁”是当时的一种数学术语，指的就是开方。

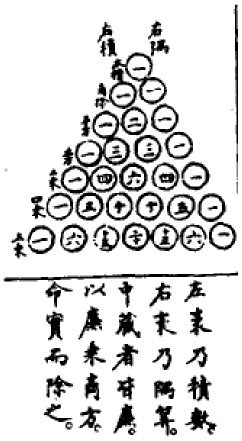


图 1 杨辉《详解九章算法》中的贾宪三角

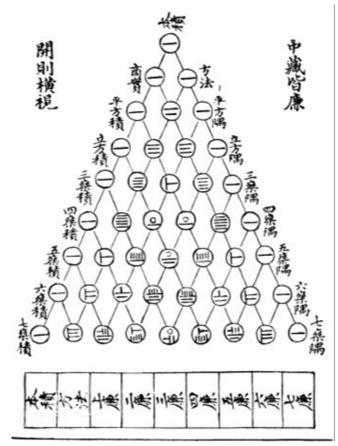


图 2 朱世杰《四元玉鉴》中的贾宪三角

元代数学家朱世杰（1249~1314）在《四元玉鉴》（1303）中给出贾宪三角，但在贾宪的基础上添加了两层，并将各数连以两组平行斜线（图 2）。可见，朱世杰已经十分清楚贾宪三角的构造方法。

到了明代，数学家吴敬在《九章算法比类大全》（1450）中、王文素在《算学宝鉴》（1522）中、程大位（1533~1606）在《算法统宗》（1592）中都沿用了贾宪三角，见图 3-5。其中，王文素在其《算学宝鉴》中明确给出了贾宪三角的构造方法："欲识廉隅递益生，直斜二上并分明。便知其下廉隅数，变化无穷照此行。"[3]程大位在《算法统宗》中也说明了由贾宪三角的构造方法。

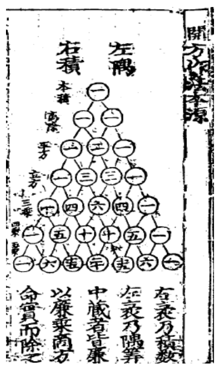


图 3 吴敬《九章算法比类大全》中的贾宪三角

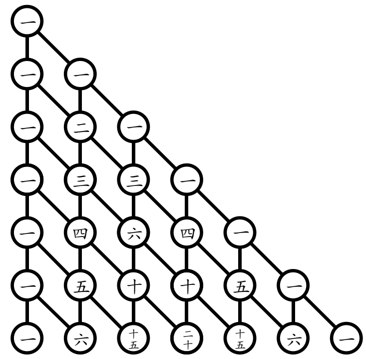


图 4 王文素《算学宝鉴》中的贾宪三角

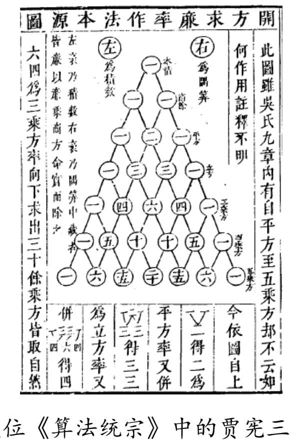


图 5 程大位《算法统宗》中的贾宪三角

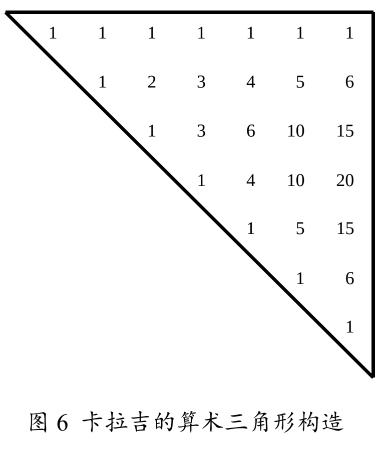


图 6 卡拉吉的算术三角形构造

2.2 穆斯林国家

算术三角形在中世纪的阿拉伯世界已经广为人知。12 世纪阿拉伯数学家阿尔·萨马瓦尔（Al-Samawal）在其《代数之光》中记载，10-11 世纪著名数学家阿尔·卡拉吉（Al-Karaji, 953~1029）已熟知算术三角形的构造方法，如图 6 所示，每一列中的任一数等于上一列同一行中的数及其上面一数之和。13 世纪数学家阿尔·赞加尼（Al-Zanjani, ?~1262）在其《代数学中的方程平衡》中记载了七次幂的展开式[4]，从中可知，作者十分熟悉阿尔·卡拉吉和萨马瓦尔的有关数学著作。

与中国数学家一样，11-12 世纪的著名诗人、数学家奥马·海牙姆（Omar Khayyam, 1048?~1131）在其《算术问题》中也利用二项式系数来开任意高次方，因而也构造了算术三角形，但其原著已失传。13 世纪，著名数学家纳绥尔丁（Nasir al-Din al-Tusī, 1201~1274）在其《算板与沙盘算法集成》（1265）中也利用二项式定理来开高次方，他将奥马·海牙姆的算术三角形扩展到 12 次。

15 世纪，另一位数学家阿尔·卡西（Al-Kashi, ?~1429）在其《算术之钥》（1427）中给出算术三角形的造表方法，并给出直到 9 次幂的算术三角形，如图 7 所示。

9							
36	8						
84	28	7					
12	56	21	6				
12	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2

图 7 阿尔·卡西的算术三角形

2.3 中世纪欧洲

在欧洲，13 世纪德国数学家约丹努斯（Jordanus de Nemore, 1225~1260）最早发现算术三角形，记载于其《算术》（未出版）中。不同抄本中表示数字的方式互有不同，见图 8[5]。

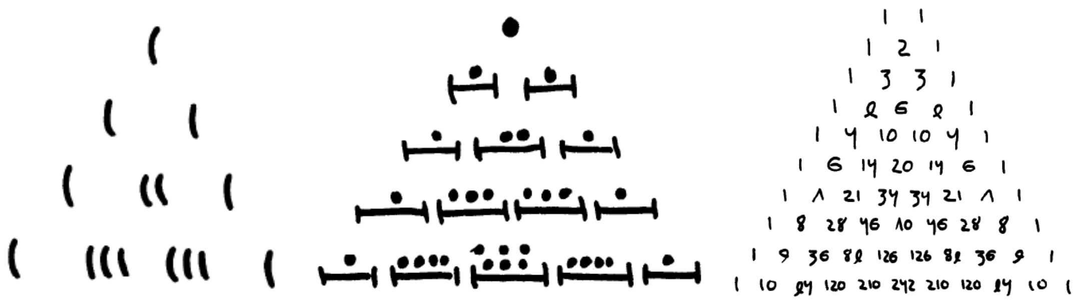


图 8 约丹努斯《算术》抄本中的算术三角形

值得注意的是，约丹努斯在书中利用算术三角形构造若干等比数列，实际上分别相当于：

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n\text{，}\qquad(1)$$

$$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=3^n\text{，}$$

$$C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots+3^nC_n^n=4^n\text{，}$$

……………………………………………

2.4 16 世纪的欧洲

到了 16 世纪，算术三角形逐渐为欧洲数学家所知。德国数学家和天文学家阿皮亚努斯（P. Apianus, 1495~1552）于 1527 年出版的商业算术书的扉页上呈现了算术三角形（图 9），这在西方印刷出版的数学书中属于首次。1544 年，德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1486~1567）在《整数算术》中给出直到 17 次的算术三角形（图 10），并引入“二项式系数”这一术语[6]。翌年，德国数学家舒贝尔（J. Scheubel, 1494~1570）在《数与各种比例》（1545）中给出直到 16 次的算术三角形[7]（图 11）。数十年后，德国数学家提尔菲尔德（Thierfelder）在其《算术》（1587）中也给出了直到九次的算术三角形（图 12），形状与舒贝尔的相似。

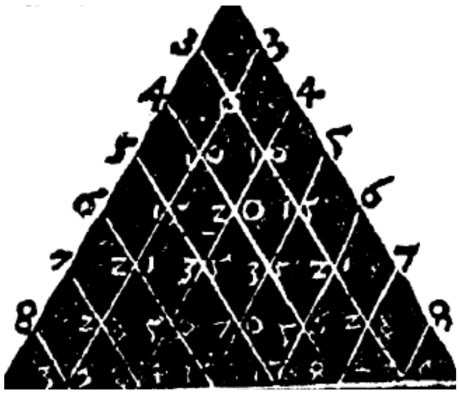
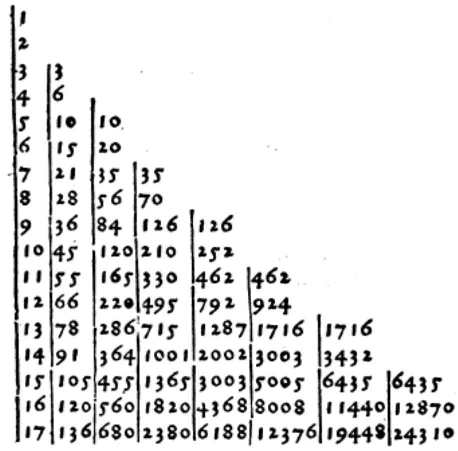


图 9 阿皮亚努斯《算术》中的算术三角形



1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

图 10 斯蒂菲尔《整数算术》中的算术三角形

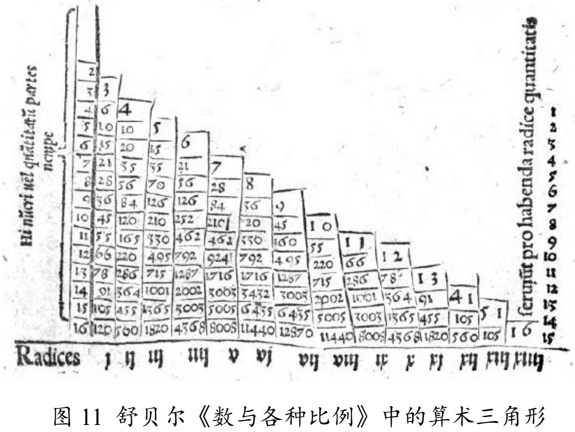


图 11 舒贝尔《数与各种比例》中的算术三角形

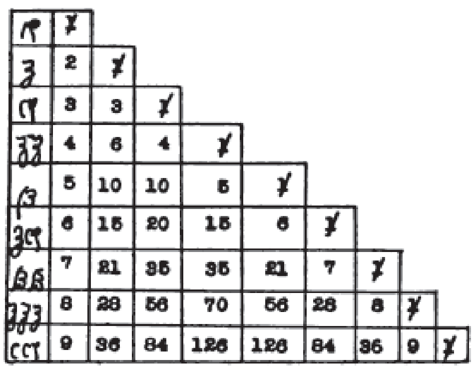


图 12 提尔菲尔德《算术》中的算术三角形

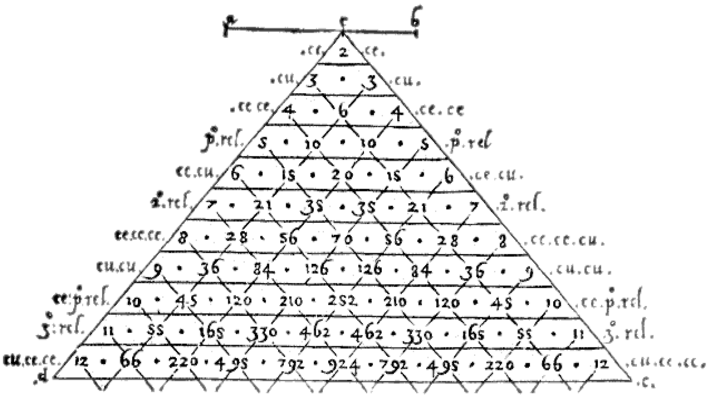
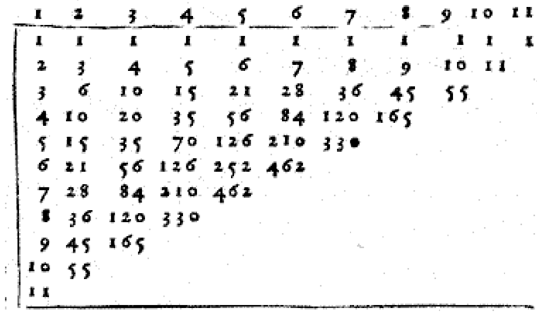


图 13 塔塔格里亚《数量通论》中的算术三角形



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	6	10	15	21	28	36	45	55		
4	10	20	35	56	84	120	165			
5	15	35	70	126	210	330				
6	21	56	126	252	462					
7	28	84	210	462						
8	36	120	330							
9	45	165								
10	55									
11										

图 14 卡丹《实用算术》中的算术三角形

意大利数学家塔塔格里亚（N. Tartaglia, 1506~1557）在《数量通论》（1556）中、卡丹（G. Cardan,1501~1576）在《比例新作》（1570）中、邦贝利（R. Bombelli, 1530~?）在《代数》（1572）中各自给出算术三角形，如图 13 和 14 所示。卡丹发现了算术三角形的一个性质[7]，相当于

$$C_n^r = \frac{n-r+1}{r} C_n^{r-1}, \tag{2}$$

卡丹还建立了算术三角形与组合数之间的联系，并得出结论，从 n 个物品中一次 1 个、2 个、…、n 个的取法总数等于 2^n-1，与（1）等价。

此外，16 世纪法国数学家佩勒提埃（J. Peletier, 1517～1582）、荷兰数学家斯蒂文（S. Stevin, 1548？~1620）都在其算术著作中给出了算术三角形。

2.5 17 世纪的欧洲

17 世纪，荷兰数学家吉拉尔（A.Girard, 1595~1632）在其《代数新发明》（1629）中、英国数学家奥特雷德（W. Oughtred, 1574~1660）在其《数学之钥》（1631）、布里格斯（H. Briggs, 1561~1631）在其《对数算术》（1633）中均载有算术三角形[9]。

1654 年，法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623~1662）著《论算术三角形》，首次将二项式系数表称为“算术三角形”，并对其性质作了系统的研究[10]，如图 15 所示。帕斯卡详细介绍了算术三角形的构造：第一行和第一列各单元均为 1，其它每个单元等于同行中前一单元

和同列中上一单元之和。关于算术三角形，帕斯卡的主要工作有：

（1）给出了算术三角形的 19 条性质，其中两条分别等价于约丹努斯的（1）和卡丹的（2）。引人注目的是，帕斯卡运用了今日的数学归纳法。

（2）将算术三角形第 $n+1$ 条底边上从一端数起的第 $r+1$ 个单元与组合数 C_n^r 联系起来，得到组合数公式

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \tag{3}$$

（3）明确提出 n 次幂二项式系数恰好是算术三角形第 $n+1$ 条底边上的各单元，于是建立了正整数次幂的二项式定理：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n \tag{4}$$

（4）利用算术三角形求自然数诸次幂和。

至今，算术三角形在西方被称为“帕斯卡三角形”。帕斯卡之后，沃利斯在其《代数专论》（1685）中用字母符号来表达正整数情形中的二项式定理，如图 16 所示[11]。

17 世纪末，法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640~1717）在其《趣味数学与物理》（1694）中利用算术三角形来解决趣味数学问题，如帕斯卡和费马曾经解决过的赌金分配问题[11]。在规定赢五局获胜的情形，甲已赢了 3 局，乙只赢了 1 局，赌局因故半途而废，未能最终决出胜负。设想接下来再赌五局，以 a 表示甲赢，b 表示乙赢，所有可能的情形见图 18。于是得知甲、乙所得赌金之比为：

$$\left(C_5^5+C_5^4+C_5^3+C_5^2\right):\left(C_5^1+C_5^0\right)=26:6=13:3\text{。}$$

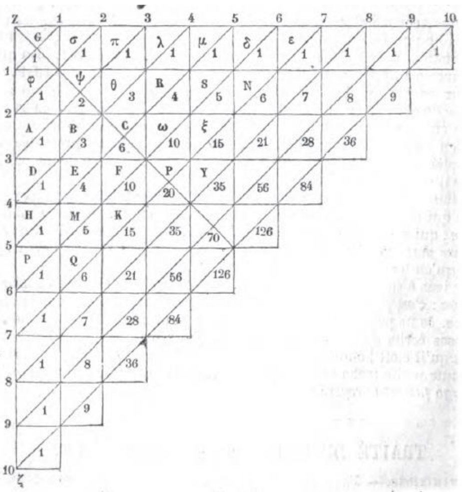


图 15 帕斯卡的算术三角形

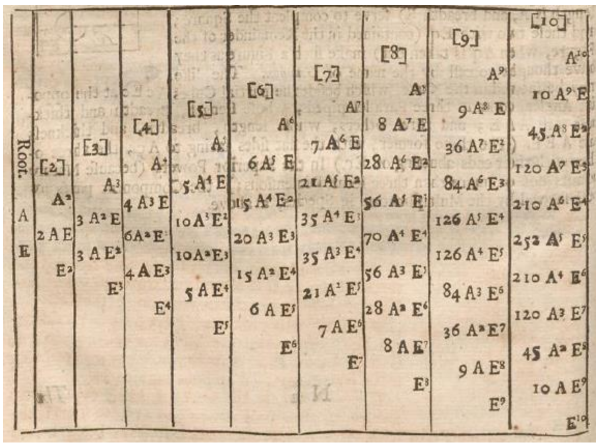


图 16 沃利斯《代数专论》中的二项式系数表

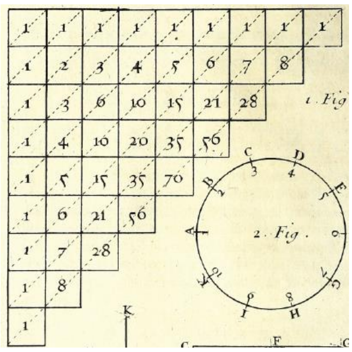


图 17 《趣味数学与物理》中的算术三角形

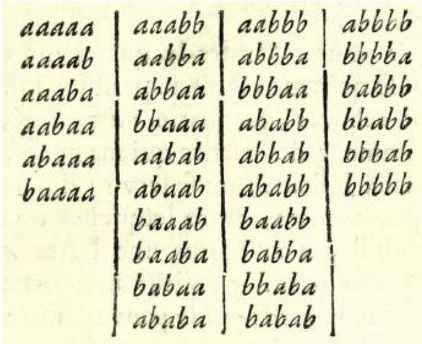


图 18 算术三角形在赌金问题中的应用

3 结 语

以上我们看到，数学史揭示了算术三角形的以下文化价值。其一，算术三角形从低次到高次的扩展，从各行之间的相互独立到相邻行间关联的发现，从一两条性质到一系列性质的探究，从正整数的开方到组合数与幂和公式的导出，体现了数学知识由浅入深、从特殊到一般的演进过程。其二，中世纪以降，中国、阿拉伯、欧洲等地的数十位数学家先后都在其数学著作中记载、运用算术三角形，因而算术三角形既体现了我国优秀的传统文化，也蕴含了丰富而生动的多元文化。其三，除了实用性，算术三角形呈现了对称之美，犹如一幅隽永的艺术品，广受喜爱，历久不衰；它在后世成为邮票或数学杂志封面的图案，也充分说明了这一点。其四，17 世纪末，算术三角形成了趣味数学的主题。可见，在二项式定理的课堂教学中，我们可以通过算术三角形有关历史材料的运用，从知识源流与演进、传统文化与多元文化、审美与娱乐等维度来反映数学的文化价值。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, (2): 37-43.

[3] 王文素.中国科学技术典籍通汇(数学卷二) 算学宝鉴[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994: 920.

[4] Yadegari, M. The binomial theorem: a widespread concept in medieval Islamic mathematics [J]. *Historia Mathematica*, 1980, 7: 401-406.

[5] Hughes, B. The arithmetic triangle of Jordanus de Nemore [J]. *Historia Mathematica*, 1989, 16 (3): 213-223.

[6] Stifel, M. *Arithmetica Integra* [M]. Norimburgae: Johan Petreium, 1544.

[7] Scheubel, J. *De Numeris et Diversis Rationibus seu Regulis Computationum* [M]. Leipzig: Officina Michaëlis Blum, 1557.

[8] Boyer, C. B. Cardan and the Pascal Triangle [J]. *American Mathematical Monthly*, 1950, 57:

387-389.

[9] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol.2) [J]. Boston: Ginn & Company, 1925.

[10] Pascal, B. *Traité du Triangle Arithmétique* [M]. In: *Oeuvres Complètes de Blaise Pascal* (T.3). Paris: L. Hachette et C^{ie}, 1865. 243-303.

[11] Ozanam, J. *Récréations Mathématiques et Physiques* (T.1) [M]. Paris: Jean Jombert, 1694.

教学实践

HPM 视角下的“全等三角形角边角判定定理”教学

黄蓓[1] 张亚琦[2]
(1 同济大学第二附属中学，上海，200060; 2 华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

“全等三角形角边角判定定理”是沪教版初中数学第 14 章第 4 节第 2 课时的教学内容。教科书在第 3 节已经通过画三角形得到，已知三角形的两角及其夹边可以确定三角形的形状。本节通过“叠合法”说理，给出全等三角形“角边角”的判定定理。实际教学中，用叠合法解释判定定理较难理解，且教科书中“碎片化”的知识无法让学生感受到说明判定定理正确的必要性和重要性。此外，叠合法确切来说是一种操作方法，而不是一种严谨的定理证明方法，除了叠合法以外，教材中没有介绍其他说明角边角定理成立的方法。已有的有关全等三角形判定的教学设计中，大多都是采用先动手操作，如剪两个全等三角形[1]或者画两个全等三角形[2-7]，让学生感受给定哪些条件才能得出两个全等的三角形，再利用叠合法进行说明的方式。

事实上，数学史告诉我们全等三角形判定定理的证明还有其他方法。数学史可以帮助学生体会数学知识在现实世界中的应用，真正达到培养学生应用意识的教育目标，因此我们从 HPM 的视角来设计本节课，并拟定以下教学目标：

（1）理解并掌握全等三角形判定方法“角边角”及“角角边”，能运用这两个全等三角形判定进行简单的几何证明；

（2）学生经历探索“角边角”“角角边”判定三角形全等的过程，体会数学建模思想及化归思想的应用；

（3）学生感受数学与现实的密切联系，在问题解决中闪现的数学智慧，激发学习兴趣和善于探究的精神。

2 历史材料与运用

2.1 泰勒斯与角边角判定定理

根据史料记载[8]，古希腊著名哲学家泰勒斯（Thales，公元前 6 世纪）首先想到要对角边角判定定理进行说理并运用于实践，也是他率先引入命题证明的思想，让人们对客观事物的认识上升到理论，这是数学史上的一次飞跃。因此本节课开始之初先对这位大学者进行了

介绍，并创设了一个关于他解决问题的故事情境来引出角边角判定定理。

这个问题情境是：有一次，在希腊爱琴海上发生了海难，急需救援，可是大家却因无法测得船难地点的具体位置而束手无策，于是求助泰勒斯。

2.2 《几何原本》中证明角边角问题的方法

欧几里得（Euclid，公元前 330 年~公元前 275 年）在《几何原本》中用反证法证明角边角判定定理[9]。初一学生尚未接触过反证法，对于反证法的步骤和证明方式都不了解，我们大胆创新将反证法融入本节课，提供给学生不同的视角来理解角边角判定定理的正确性。如何能让学生听明白《几何原本》中的证明方法呢？执教者最后选择采用微视频的方式介绍该方法，视频内容如下：

一般情况下，我们想要去证明一个结论正确的时候，都会利用条件去进行推理.然而当一些命题不容易从正面直接证明时，我们不妨用反证法来试一试。

什么是反证法呢？反证法是从反方向证明的证明方法。

反证法的步骤是：1.假设命题不成立，那么命题的反面成立；2.从假设出发，经过推理论证，得出矛盾；3.由矛盾得出假设不成立，从而证明原命题正确。

接下来我们一起来看一下欧几里得在《几何原本》中是如何运用反证法来证明“两角及其夹边对应相等的两个三角形全等”的。已知，即$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，夹边$BC=EF$，要证其他对应边和对应角相等。为此，首先需要证明这两个三角形全等。

根据反证法，

第一步：假设命题不成立，即假设AB不等于DE，那肯定有一条边比另一条边长，不妨设AB大于DE。

第二步：我们从假设出发进行正确的推理看看是否能找出矛盾。

既然AB比DE长，那我们一定能在边AB上取一点G，使BG的长度等于DE，连接GC。可以看到在$\triangle BGC$和$\triangle EDF$中，BG、DE是我们取的两条相等的线段，再来看看已知条件，我们知道 $\angle B=\angle E$ ，$BC=EF$ ，通过边角边的判定定理可以得到$\triangle BGC$和$\triangle EDF$全等，从而我们可以知道$\angle BCG=\angle F$，再由已知$\angle BCA=\angle F$，通过等量代换可以知道$\angle BCG=\angle BCA$，推理到这一步，相信细心的同学们已经观察到 一个小的角是不可能等于大的角，所以在这里产生了矛盾！

第三步：假设不成立，所证的结论 $AB=DE$ 正确。

这就是欧几里得在 2400 多年前给我们后人留下的不朽之作《几何原本》中所呈现的这个定理的证明.而这本书，也就成了欧式几何的奠基之作。

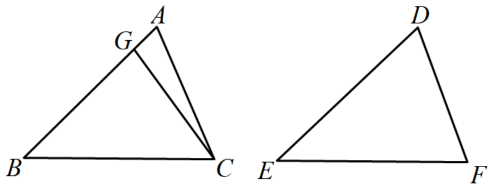


图 1 反证法

2.3 数学史材料在练习中的运用

在练习部分，执教者也加入了两个史料作为角边角判定的应用举例，分别是拿破仑的行军工程师利用定理帮助军队解决了河宽问题以及中国志愿军利用定理测出了碉堡的距离，从而帮助自己军队在战争中掌握主动权取得胜利的故事[10]，目的让学生感受到我们所学数学知识的确可以学以致用，帮助我们解决现实中的问题。

3 教学设计与实施

3.1 情境引入

首先，教师介绍了因智慧与成就而深受当地人民爱戴的古希腊哲学家泰勒斯的故事。然后，利用泰勒斯帮助寻找在爱琴海上遇难的船只的故事来引入新课，激发学生学习兴趣。

根据情境，教师先将泰勒斯寻找船难地点的工具进行简单介绍，然后找同学扮演小小泰勒斯，利用测量工具模拟测量船的具体位置，教师在学生演示的过程中加以补充讲解。

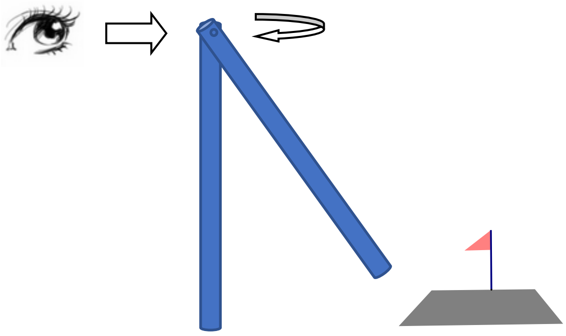


图 2 泰勒斯寻找船难地点的工具

师：这个工具其中一边垂直于地面，但另一边可以转动。我们可以沿着另一边的孔中看见沉船，但是这段距离在海里，我们无法测量，同学们能不能扮演下小小泰勒斯，想办法把这段距离转移到岸上来吗？

学生上来演示的时候将工具地面固定的那个点旋转了 180 度，将工具指向了沙滩。其他同学纷纷表示赞同。

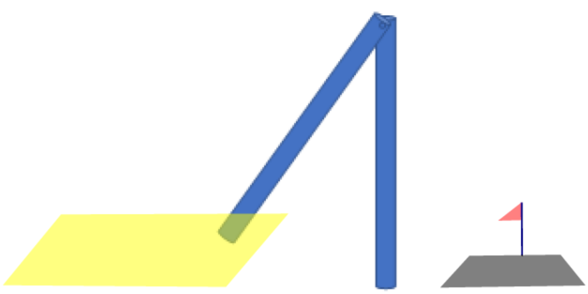


图 3 工具使用方法

师：为什么这条线段就是船离岸的距离？

生：因为这两个三角形全等，所以这段距离就是船离岸的距离。

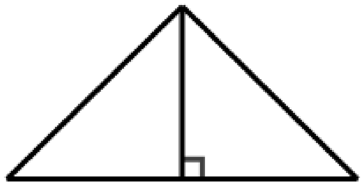


图 4 抽象得到的全等三角形

师：你是由什么条件得到这两个三角形是全等的？

生： A.S.A.。

师：你能解释一下为什么是角边角吗？

生：由于工具和地面垂直，所以这里的 90°是不变的，这个工具的长度也是不变的，还有这个工具张开的角度也没有变化，所以我觉得是角边角。

师：你说得特别好，那么利用角边角，究竟能否判定两个三角形全等呢？我们可不可以验证呢？还记得上节课我们学习边角边判定方法时我们是用什么方法来验证的？

生：叠合法。

师：那我们也试着用叠合法来说明一下当确定了两角及其夹边的两个三角形全等。

3.2 证明定理

因为用叠合法进行说理对七年级的学生而言比较困难，所以教师采用填空的形式来完成叠合法说理，这样既可以表述清楚，又可以训练学生使用规范的数学语言。

已知：在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$，$\angle C=\angle F$（具体见图 5）。

说明：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$

填空：（叠合法）把$\triangle ABC$放在$\triangle$____ 上，因为$BC=EF$，可以使BC与____重合并使点A和点D在EF的同一侧，这时点B和点___重合，点C和点___重合。由于$\angle B=\angle E$，因此射线___和射线___叠合；由于____，因此射线CA和射线___叠合；于是点A和点D重合。这样____与_____ 重合，即$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

师：可是叠合法并不算严格的逻辑证明，它更多的是操作，没有充分的说服力，无法令人深信不疑，因此，欧式几何学的开创者，古希腊著名数学家欧几里得不满足这样操作证明，在他的传世之作《几何原本》中用了一种叫反证法的方法来证明这个命题

播放微视频。

师：由此，我们得到：全等三角形判定方法 2：在两个三角形中，如果有两个角及它们的夹边对应相等，那么这两个三角形全等。（简记为 A.S.A.）

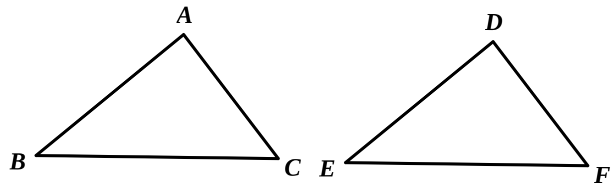


图 5 全等三角形判定方法 2

符号语言，在△*ABC* 与△*DEF* 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ BC = EF \\ \angle C = \angle F \end{cases}$$

∴ △*ABC* ≌ △*DEF*（*A.S.A.*）

师：如果把判定方法 2 中的条件 $\angle B = \angle E$ 改变为 $\angle A = \angle D$，其他不变，那么这样的两个三角形全等吗？

生：还是全等的。

师：为什么这两个三角形还是全等的？

生：可以利用三角形内角和转化。

师：说的很好，这里用到了数学中转化的数学思想。

由此，我们又推得了全等三角形判定方法 3：在两个三角形中，如果有两个角及其中一个角的对边对应相等，那么这两个三角形全等。（简记为 A.A.S.）

符号语言：

在△*ABC* 与△*DEF* 中

$$\begin{cases} \angle \mathrm{A} = \angle D \\ \angle C = \angle F \\ BC = EF \end{cases}$$

∴ △*ABC* ≌ △*DEF*（A.A.S.）

3.3 练习巩固

首先利用练习 1，让学生学熟悉两种判定方法，再利用例 1 和例 2，让学生逐步的学会应用判定 2 和判定 3 的符号语言来解决问题，并体会其中图形的运动与两个三角形全等的关系，通过练习 2 加以巩固学生对判定的应用，最后通过引入拿坡仑行军工程师测河宽过河和中国志愿军帽檐测碉堡距离的故事，让学生体会角边角判定定理的实际应用，从而感受我们现在所学的内容可以为现实应用服务。

练习 1：判定下列各对三角形是否全等，如果全等，请说出理由。

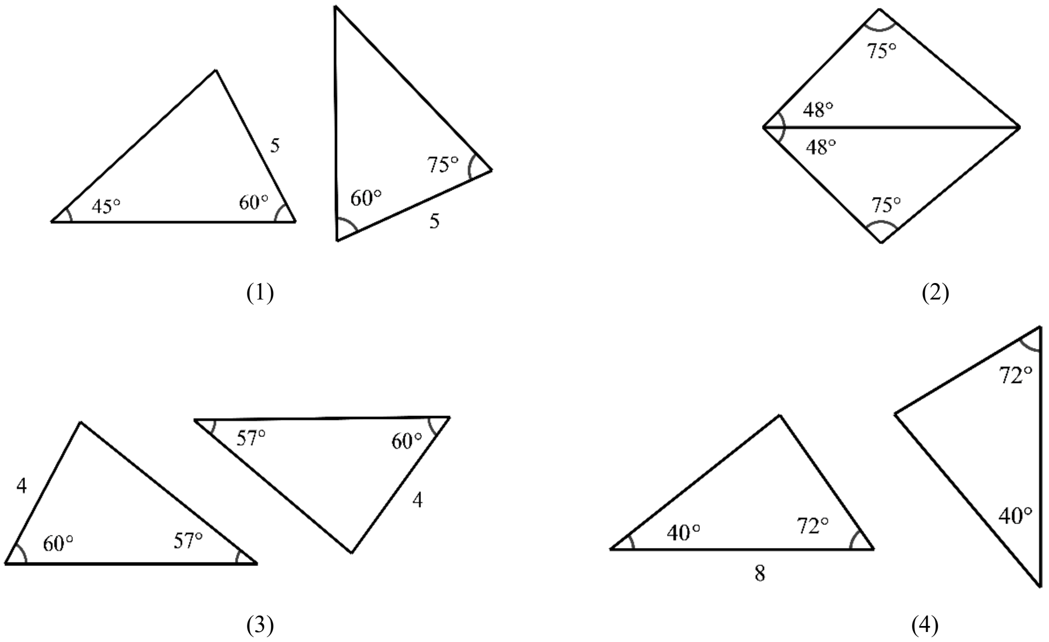


图 6　练习 1

例 1：如图，已知AB与CD相交于点O，$AO = BO$，$\angle A = \angle B$，说明$\triangle AOC$ 与$\triangle BOD$ 全等的理由。

例 2：如图，已知$AE = AC$，$\angle B = \angle D$，说明$\triangle ADE$ 与$\triangle BCA$ 全等的理由。

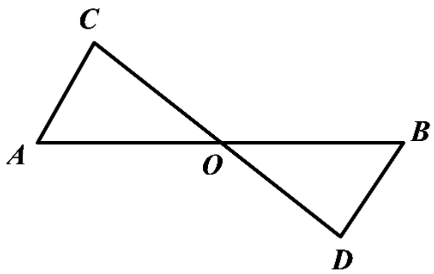


图 7　例 1

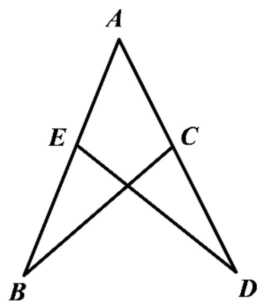


图 8　例 2

练习 2：如图，$\angle 1 = \angle 2$，$AD = AE$，$\angle B = \angle ACE$，且B、C、D三点在一直线上，试说明BD与CD相等的理由。

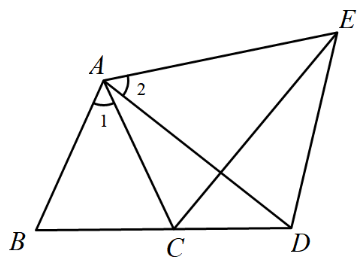


图 9　练习 2

师：再回到沉船场景，比如现在讲台旁边的某块地方是沉船地，你是泰勒斯，是否必须要转 180 度后才能找到船里岸的距离？

生：不需要的，只要转到岸上即可，不一定非要 180 度。

师：其实泰勒斯是最早应用角边角这个方法的人，但不是唯一使用这种方法的人.当时拿破仑的军队在行军过程中就被一条河流所阻，一名随军工程师就帮他解决了测量河宽的问题，受到了嘉奖。

抗美援朝期间，中国志愿军在行军途中发现美国军营，于是想炮轰敌军，苦于无法确定敌我两军的大致距离，一位战士想出了用自己的帽檐定距离的方法。等等这些都是角边角在现实情况中的应用！

3.4 回顾总结

引导学生从以下几方面进行总结：一种思想（转化的思想）；二种判定方法（角边角和角角边）；三个故事（泰勒斯、拿破仑以及志愿军）。

4 学生反馈

课后，我们收集了全班 24 名学生对于本节课的反馈信息。对于“希望老师在课堂上介绍相关数学家生平或相关的数学史吗？为什么？”这个问题，94.29%的同学给予肯定回答，由此可以看出数学史在数学课堂中的融入是受学生欢迎的。

对于“这节课你印象最深的是什么？为什么？”这个问题，有 7 位同学提到了引入部分的沉船事件，认为全等三角形有着实际应用价值；7 位同学提到了反证法，认为视频讲解的非常清楚明白，而且之前没有接触过这样的证明方法，这对于他们来说很新鲜，也让他们知道了解题思路的多样性；7 位同学提到了泰勒斯；3 位同学提到了拿破仑。这些令学生印象深刻的内容全部都要归咎于我们将数学史融入到数学课堂中。

对于“听了这节课，你的收获是什么？请用自己的语言描述。”这个问题，学生回答主要包括：（1）反证法，一个新的证明方法，很感兴趣；（2）了解了数学家（泰勒斯，欧几里得）的杰出贡献，以及知道了《几何原本》这本书；（3）考虑问题可以通过多个角度去思考；（4）全等三角形的判定方法；（5）全等三角形的实际应用价值；（6）叠合法，一个通过操作来证明的方法。

根据课后调查问卷中数据可知：

85.45%的学生听懂了用反证法证明角边角判定方法；92.73%的学生认为了解数学的背景知识对学习数学有帮助；92.73%的学生喜欢这样将历史融入课堂中。

另外，课后教师还布置了课外实践作业，让学生利用所学知识尝试去测量学校门口苏州河的宽度，并让学生写出测量方案、比较测量出的数据与实际河宽，检验方法的有效性。让学生真正的发挥所学，将所学的知识应用于实践作业之中，既锻炼了学生的动手能力，又加强了他们对知识的理解和应用。

5 结 语

本节课虽然没有大篇幅地运用数学史，但在几处教学环节中使用数学史所达到的教学效果是显而易见的。在开始之初介绍希腊哲学家、数学家泰勒斯的部分，充分引起了学生的学习兴趣，让学生迫不及待地想要探究泰勒斯到底如何解决沉船问题。提前设计和准备好的教具，让学生有机会扮演小小泰勒斯，充分体现了“探究之乐”；通过微视频的方式让学生了解角边角定理的反证法证明，不仅让学生又了解了一种证明方法，感受“方法之美”，也让学生看到古代数学家们追求真理的严谨的数学精神，感受到做人做事“要讲道理”，感悟了数学家的人格魅力，彰显了“德育之效”；而课堂练习部分中拿破仑和中国志愿军的两个利用角边角定理解决实际问题的小故事让学生感受到学习数学知识的价值。

参考文献

[1] 李艳军. 借“剪纸”打开“全等三角形判定”之谜——以“边边边、边角边、角边角、角角边”为例[J]. 课程教育研究(学法教法研究), 2018, (22): 245.

[2] 梅少琳, 杨雪莲. 介绍全等三角形的判定定理的探究式教学[J]. 中小学数(初中版), 2010, (04): 9-10.

[3] 李雅萌. 全等三角形的判定(SSS)教学设计[J]. 中小学数学(初中版), 2017, (06): 29-31.

[4] 李霞. “全等三角形的判定(2)——SAS 公理”教学心得[J]. 中小学数学(初中版), 2010, (1): 78-79.

[5] 顾建锋. 巧在作图立意 妙在问题设计——“全等三角形判定方法(复习课)”的教学实录与思考[J]. 中国数学教育, 2016, (17): 8-11.

[6] 王立贺. 新课程标准下的“全等三角形的判定”教学设计[J]. 教育教学论坛, 2013, (08): 208-209.

[7] 陈海烽. 解读教材是教学有效的必由之路——以“全等三角形的判定 SSS”为例[J]. 数学教学通讯, 2013, (28): 5-8.

[8] 汪晓勤, 王甲. 全等三角形的应用: 从历史到课堂[J]. 中学数学教学参考(初中), 2008, (10): 55-57.

[9] 欧几里得. 几何原本[M]. 南京: 译林出版社, 2011: 22-23.

[10] 王进敬, 汪晓勤. 运用数学史的“全等三角形应用”教学[J]. 中学教研(数学), 2012, (11): 46-49.

HPM 视角下的分式概念教学

——同课异构案例分析

林庄燕

(华东师范大学教师教育学院，上海，200062)

1 引言

分式的概念是沪教版数学七年级上册第十章“分式”第一节的内容。在学习本课之前，学生已经具备了分数、整式及其基本运算的代数知识基础。初中数学教材选取生活中学生熟悉的关于分式的实例作为引入，通过观察代数式的表示与整式的区别，引出分式的概念。已有分式概念的教学设计往往从数学内部出发，采用类比的方式展开：一种是类比分数，抓住运算这一核心，引导学生经历从整数的除法运算到整式的除法运算的一般化过程；另一种是类比有理数的体系建立，引导学生尝试建立代数式体系。

HPM视角下的数学概念教学关注学生的认知基础和学习动机，将概念的历史序、逻辑序与学生的心理序统一起来，让学生经历概念的发生和发展过程，充分揭示知识之谐，营造探究之乐；又通过人文元素的植入，彰显文化之魅，达成德育之效。在实践中，由于学生水平、教学风格、个人倾向以及在数学史教育价值认识上的差异，不同教师即使同样采用HPM的视角来实施教学，最终呈现的课例也往往迥然不同。

2018年11月，来自HPM工作室的教师A和教师B就“分式的概念”这一课题，各从HPM的视角实施了教学。他们多次参加HPM工作室举行的教学设计研讨，其教学设计都经过了多次的改进。我们关心的是：这两位老师是如何选取和运用史料的？数学史在两节课中都体现了哪些价值，两节课各有哪些特色？为了回答上述问题，我们运用HPM课例的分析框架，对这两节课作出比较和分析，以期为未来的HPM课例研究提供参考。

2 分式概念的历史素材

2.1 分式方程

翻开历史的书卷可以发现，早在分式概念产生之前，人们已经会解分式方程了。很多数学家或物理学家往往是在解决数学或物理问题时直接使用分式方程，这正说明了分式的产生源于实际问题，它是刻画某些实际问题的数学模型的重要工具。

9世纪，阿拉伯数学家花拉子米（Al-Khwarizmi,780A.D~850A.D）在《代数学》中已经解决过有关分式方程问题，如“将10分成两部分，第一部分除以第二部分，第二部分除以第一部分，它们的和是二又六分之一”，相应的分式方程为

$$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$$

13 世纪，意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci,1175~1250）在《计算之书》中列举了许多用分式方程求解的问题，其中部分问题源于花拉子米。例如：

- 将 10 分成两部分，将 10 除以其中一部分，所得商乘以另一部分，得 $20\frac{1}{4}$，（$\frac{10}{x}\cdot(10-x)=20\frac{1}{4}$）；
- 将 10 分成两部分，10 除以每一部分，两商之和为 5 第纳尔，（$\frac{10}{x}+\frac{10}{10-x}=5$）。

13 世纪，中国数学家李冶在《测圆海镜》中通过建立分式方程来解决部分实际问题，如第 7 卷第 2 题涉及方程 $-x^2+8640+\frac{652320}{x}+\frac{4665600}{x^2}=0$。

18 世纪，英国数学家桑德森（N. Saunderson，1682~1739）将分式方程写入其《代数基础》中。书中，桑德森提出分式方程的若干应用题，例如："在酒馆中，若干人需付费 7 镑 4 先令（1 镑=20 先令），其中两人溜之大吉后，其余的人每人不得不多付 1 先令。问：共有多少人？"（答案：$\frac{144}{x-2}-\frac{144}{x}=1$）。

2.2 圆周率的分数近似值

根据《隋书·律历志》的记载，南北朝时期著名数学家祖冲之曾获得圆周率的两个分数近似值 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$，分别称为"约率"和"密率"。前者最早由古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287~公元前 212）求得，后者则是祖冲之首创。日本著名数学史家三上义夫（Y. Mikami，1875~1950）建议将其命名为"祖率"。由于祖冲之的《缀术》失传了，祖冲之计算圆周率的具体方法成了千古之谜。今人对此作过许多猜测，其中之一便是"调日法"。

"调日法"背后的数学原理是分数的如下性质：若 $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}(0<b<a且0<d<c)$，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。15 世纪法国数学家许凯（N. Chuquet）在其《算学三部》中最早给出该性质。该性质也适用于假分数的情形，即 $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}(0<a<b且0<c<d)$，有 $\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。因此，从分数 $\frac{3}{1}$ 和 $\frac{4}{1}$ 出发，可逐步得到 π 的各个分数近似值，最终得到祖率[1]。

3 两节课的宏观比较

3.1 教学目标

两节课的目标为：（1）了解学习分式的必要性，理解并掌握分式的概念；（2）会求分式

有意义、无意义、分式值为零时字母取值的条件；（3）通过对相关数学史的了解，感悟数学与生活之间的密切关系，感悟数学文化之魅。不同之处在于，A 教师着重通过历史上的实际问题引入分式，同时利用整式与分式的比较，加深学生对分式概念的理解；B 教师则让学生经历从分数到分式的探究过程，体验分式的一般性的优势，了解学习分式的必要性，了解祖率的由来，体验数学文化之魅力。

教学重点：理解分式的概念，会求分式有意义、无意义、分式值为零时的字母取值。

教学难点：调日法（夹逼法）求圆周率的分数近似值，如何用字母表示此类分数的特征。

3.2 教学过程

教师 A 和 B 的教学过程均由四个环节构成：创设情境、概念探究、新知运用、课堂小结，具体内容见表 1。

表 1 两位教师的教学环节对比

教学环节	A 教师	B 教师
创设情境	引入斐波那契的分 10 问题和桑德森的酒馆付账问题，引导学生得到分式与分式方程	（1）比较$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$和$\frac{1+2}{2+3}$的大小，猜想并验证两个分数的分子和分母分别相加得到的新分数与原来两个分数的大小关系； （2）运用夹逼法求出 π 的分数近似值——约率$\frac{22}{7}$
概念探究	通过比较整式与分式的不同，得出分式概念	用字母表示上述逼近法得到的一系列数，给出分式定义
新知运用	（1）判断哪些式子是整式，哪些是分式； （2）已知字母的赋值，求分式的值； （3）求分式有意义、无意义、分式值为零时字母的取值范围	（1）给分式中的字母赋值，求出分式的值； （2）探讨字母是否可以赋任意值，得出分式有意义、无意义以及分式值为零的条件； （3）探究密率$\frac{355}{113}$的逼近过程
课堂小结	（1）思考上完这堂课后有什么收获； （2）我国古代数学家对于分式的应用；（3）分式概念是如何提出的	（1）分式的概念、分式的值、分式有意义的条件； （2）方法回顾：夹逼法（调日法）； （3）历史回眸：祖冲之与 π 的分数近似值

从表 1 可以看出，两位教师均采用了 HPM 的视角，且在新知运用环节，都让学生探讨了分式的赋值以及分式有意义、无意义以及分式值为零的条件。

但是在创设情境和概念探究两个环节的设计上却大不相同，各有千秋。A 教师主要是从数学史上有趣的数学问题引入，让学生通过观察表达式的特点，区别于整式，给出分式概念；B 教师利用调日术让学生经历 π 的分数近似值的产生过程，体会分式是分数抽象化的结果。

4 两节 HPM 课的微观比较

我们根据 HPM 课例评价的四个指标——史料的适切性、方式的多元化、融入的自然性和价值的深刻性对这两节 HPM 课进行微观比较[2]。

4.1 史料的适切性

在 HPM 实践中，选择史料的原则有趣味性、科学性、有效性、可学性和人文性[3]。本文从教学的四个环节分析史料的适切性，具体分析见表 2。

表 2 A 教师和 B 教师所用的史料分析

教学环节	A 教师	B 教师
创设情境与概念探究	（1）花拉子米的分 10 问题； （2）桑德森的酒馆付账问题； （3）斐波那契、桑德森的故事	（1）《九章算术》及其刘徽注中的圆周率近似值 $\left(3;\frac{157}{50};\frac{3927}{1250}\right)$； （2）祖冲之的约率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$； （3）15 世纪法国数学家许凯在《算学三部》中给出的关于分数的一个定理
新知运用与课堂小结	（1）斐波那契关于分 10 问题的另一种设法； （2）历史上的分式方程与分式	（1）南北朝天文学家何承天的调日法； （2）许凯关于分数的定理； （3）祖冲之密率

A 教师最先抛出的“分 10 问题”与“酒馆付账问题”分别选自花拉子米的《代数学》和桑德森的《代数基础》，根据问题写出各项式子并列出方程，符合学生的认知基础，因此具有一定的科学性和可学性；其中，关于盲人数学家桑德森提出的“酒馆付账问题”，与生活实际息息相关，能够快速吸引学生的注意力，具有一定的趣味性；此外，A 教师还讲述了两位数学家生平的故事，着重介绍了盲人数学家桑德森励志的一生，体现了数学背后的人文精神，符合人文性原则；A 教师在新知运用环节中，引导学生对于分 10 问题，还可以设为 $5-x$ 和 $5+x$ 的形式，潜移默化中渗透“和差术”的思想，最后介绍了历史上的分式与分式方程，为后续“和差术”思想与分式方程的学习埋下了伏笔，符合有效性原则。

B 教师在引入环节中引入学生熟悉的圆周率，并介绍多位古代数学家在计算圆周率时得到精度越来越高的近似值，吸引了学生的兴趣，激发学生继续探索的动机，符合趣味性的原则。此外，B 教师将古人探索真理过程的艰辛和他们不断追求真理、不断钻研和永不言弃的精神传达并感染学生，符合人文性的原则。通过简单的三个分数之间的大小比较引出许凯在《算学三部》中给出的关于分数的定理，既扩大学生的知识面又符合学生的认知基础，还为圆周率逼近的方法提供思路，符合可学性和有效性原则。B 教师利用上述定理和夹逼法，经过一定的引导后，学生可以成功地探究出约率，有助于学生后续进一步理解分式概念，故符合可学性和有效性原则。在课堂小结环节，有了前面的引导与铺垫，B 教师继续让学生通过调日法进一步探究密率，体现了可学性的原则。

4.2 融入的自然性

数学史融入数学教学，需要同时考虑所讲授主题的逻辑序、历史序和学生心理序，自然

地将数学史融入课堂教学中。以下是 A 和 B 教师的教学片段。

4.2.1 A 教师的教学片段

师：9 世纪阿拉伯数学家花拉子米在其《代数学》中提出如下问题："将 10 分成两部分，第一部分除以第二部分，第二部分除以第一部分，它们的和等于二又六分之一。"如果我们假设第一部分是 x，那第二部分是多少呢？

生：第二部分就是$10-x$。

师：那么由此得到的关于 x 的等式是什么呢？

生：可以得到$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$。

师：很好！看来同学们列方程这部分掌握得很不错。我们接着看下一道题目：1739 年，英国盲人数学家桑德森在《代数基础》一书中提出过这样一个问题：酒馆中，若干人需付费 7 英磅 4 先令，其中两人溜之大吉后，其余的人每人不得不多付 1 先令。问：共有多少人？（货币单位：1 英镑 ＝20 先令）同学们有没有想法呀？

生：和上一题一样的，设未知数求解。

生：可以假设一共有 y 人，那最开始每个人付$\frac{144}{y}$先令；走了两个人后就剩$y-2$人，那么每个人就要付$\frac{144}{y-2}$先令。

师：那你能由此得出关于 y 的等式吗？

生：$\frac{144}{y-2}-\frac{144}{y}=1$。

师：很好！我们仔细观察上述得到的各式，与我们之前学过的整式相比有什么不同呢？

A 教师由此引出分式的概念，并顺便介绍了分式方程。

【评析】A 教师利用历史上的两个数学问题，先让学生分析问题并列出分式方程，为后面引出方程中的某些项是分式做好铺垫，与历史上先有的分式方程再有分式概念的历史顺序相吻合。在 A 教师的引导下，学生在学过的整式和整式方程的基础上得到分式并列出分式方程。虽然 A 教师通过分式方程的建立，让学生感受到了学习分式的必要性，但由于学生对分式方程比较陌生，因而在数学史融入的自然性方面还有待于改进。

4.2.2 B 教师的教学片段

先让学生比较$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$和$\frac{1+2}{2+3}$的大小。紧接着让学生猜想并验证：把两个分数的分子和分母分别相加，所得到的新的分数与原来两个分数有怎样的大小关系？

师：其实我国南北朝时期的天文学家何承天也发现了这个规律，并利用它来解决一些天文历法问题，所以这种方法也常常被称为"调日法"。直到 15 世纪，法国数学家许凯才用数

学语言将这种性质表达出来：若$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$（$0<b<a$，$0<d<c$），则$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。许凯定理中的分数为真分数，将它推广到假分数依然成立，也就是我们刚才探究的规律：若$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$（$0<a<b$，$0<c<d$），则$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$。

之后教师简要回顾了π的历史，并让学生根据调日法得到π的近似分数——约率$\frac{22}{7}$。

师：因$\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$，根据何承天的调日法，我们应该怎么取中间这个数呢？

生：分子、分母分别相加可以得到中间这个数是$\frac{7}{2}$。

师：$\frac{7}{2}$和π哪个数更大？

生：$\frac{7}{2}$。

师：也就是说，$\frac{3}{1}<\pi<\frac{7}{2}$。按照这个做法，利用调日法求出约率需要几步？

生：六步。

师：为什么？

生：因为第一步分母是 2，第二步分母是 3，每步加 1，分母是 $n+1$，所以第六步就是 $6+1=7$。

师：那你有没有验证分子？一定要验证分子的吧！

生：$\frac{4}{1}\to\frac{7}{2}\to\frac{10}{3}\to\frac{13}{4}\to\frac{16}{5}\to\frac{19}{6}\to\frac{22}{7}$。每次都是分母加 1，分子加 3。

师：那你们会用字母来表示这一系列分数吗？

生：分母是$n+1$，分子是$3(n+1)+1=3n+4$，即$\frac{3n+4}{n+1}$。

【评析】学生很熟悉用字母来表示一类整数，如用$2n$表示偶数，$2n-1$表示奇数等，那么，如何用字母来表示一类分数呢？教师通过圆周率近似分数的探求，既揭示了分式的必要性，又让学生经历从分数到分式的抽象过程，数学史的融入十分自然。但由于探究过程有一定的难度，因此在该环节花费了较多的时间。

4.3 方法的多样性

数学史融入教学有附加式、复制式、顺应式以及重构式四种方式[4]。

A 教师在情境创设环节和新知运用环节，根据教学的需要和学生的认知，引入花拉子米和桑德森书中的数学问题，属于复制式。之后，简单介绍几位数学家的生平与故事，属于附加式。在最后的课堂小结环节，关于分式方程与分式的历史介绍也属于附加式。

B 教师在情境创设和概念探究环节介绍了我国古代数学家在圆周率计算方面所做出的

贡献，属于附加式。教师介绍并推广法国数学家许凯的定理，并采用定理的推论来推求圆周率的分数近似值，进而得到约率与密率，既有复制式又有顺应式。在探究过程中，教师引导学生经历了从 π 的一个分数近似值到一系列分数近似值，再到以同一个分式来表达 π 的近似值，最后产生分式概念的过程，这个过程是对分式概念发生和发展过程的重构，故属于重构式。

可见，A 教师主要采用附加式和复制式，而 B 教师运用数学史的方式更为多元。

4.4 价值的深刻性

数学史融入数学教学主要有六种教育价值：知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、德育之效和文化之魅。

在创设情境环节中，A 教师直接给出历史上涉及分式的两道问题，让学生与已经学过的整式进行比较，从而得到分式的概念。B 教师通过引导学生对圆周率分数近似值的探究，从一系列分数抽象为分式的表示，让学生经历了分数到分式，从具体到抽象，特殊到一般的认识过程，揭示新知的必要性，也让知识的产生更为自然。因而，B 教师的引入环节更好地体现了知识之谐。

A、B 两位教师介绍数学家的生平及数学贡献，不仅让学生感悟知识的源与流，体会数学文化的多元性，呈现数学史的“文化之魅”，而且还鼓励学生在数学学习的过程中要学习数学家们永不言弃、孜孜不倦的精神。此外，B 教师在课堂上展示了我国古代数学家在圆周率计算方面的贡献，从而实施了爱国主义教育。因此，两节课都体现了数学史的德育之效和文化之魅。

A 教师在新知运用环节介绍“分 10 问题”的另一种方法时，向学生传递和差术的思想与方法多样性的思想；B 教师虽然在探究环节费时较多，但是通过圆周率的分数近似值的探究过程，学生不仅掌握了许凯其《算学三部》中利用的定理及推论，而且还经历了分数到分式的过程，进一步加深对分式与分数两者关系的理解。因而 B 教师的探究设计更能体现方法之美。同时，B 教师给予学生充分的探究时间，并充分搭建脚手架使学生对约率和密率的探究更具有方向性和目的性，初步能达到预期的探究目的，同时也充分调动学生的运算能力、逻辑推理能力等，体现了探究之乐和能力之助的价值。

5 结语

尽管 A 教师和 B 教师都采用 HPM 的视角开展分式概念的教学，但两节课的特点迥异。A 教师和 B 教师所选择的史料都符合趣味性、科学性、可学性、人文性和有效性原则，但 A 教师只采用了附加式和复制式，而 B 教师采用了所有四种方式。A 教师借鉴历史，采用了从分式方程到分式的路径，虽然符合历史序，但不完全符合逻辑序和心理序，因而在融入的自

然性上还有改进的空间。从数学史教育价值来看，A 教师和 B 教师的课堂都体现了文化之魅和德育之效，但由于 B 教师采用了重构式，使得分式概念的发生和发展过程更为自然，因而数学史帮助教师呈现了知识之谐。A 教师并未利用或借鉴历史来设计探究活动，而 B 教师设计了用调日法来推求约率和密率的探究活动，体现了数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养，因而营造了探究之乐，达成了能力之助。总的说来，B 教师的教学更能体现 HPM 教学的特点。

通过对两节课的比较和分析，我们得到如下启示。

（1）注重数学史的选取与运用。数学史素材往往丰富多彩，但不同的选择与运用方式往往导致课堂教学效果截然不同。恰当的数学史料能够为教师设计探究活动提供参照，而且能够实现数学史价值的多元化。B 教师的教学之所以取得了良好的效果，就在于让学生通过 π 分数近似值的探究活动，经历分式概念“再创造”的过程。这是分式概念教学的创新之举。

（2）寻求探究与练习的平衡。数学史融入数学教学，不可能脱离数学教学的现实，HPM 只不过是常态课中的一种新视角，需要在符合统一的教学进度，留给学生一定的巩固和练习时间。因此，在实施探究活动时，需要确保其他教学环节的完整性。B 教师所设计的探究活动，其目的不是许凯定理，而是圆周率的一类分数近似值的获得和分式概念的形成。因此，无须在许凯定理本身花费太多时间。换言之，探究任务必须聚焦。

参考文献

[1] 汪晓勤. 数学文化透视[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.

[2] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的构建: 以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(1): 35-41.

[3] 陈晏蓉, 汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017 (12): 37-43.

[4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

HPM 视角下的圆面积公式教学*

王雅琪[1]，瞿鑫婷[2]

（1 上海市风华初级中学，上海，200072；2 华东师范大学教师教育学院，200062）

1 引 言

“圆的面积”是沪教版初中数学六年级上册的内容。各版本的数学教材中用了不同的引入方式：人教版、北师版、沪教版以生活背景问题引入占地面积、活动范围等；苏教版用数方格的方法进行估算引入；西师版从圆周长公式引入。圆面积公式的推导则均采用割圆拼补法，虽然所转化的目标图形互有不同，但所蕴含的转化思想是一致的。

在已有教学设计中，多数教师依照教科书的编排，启发学生动手操作，将圆面积转化为已学图形面积。[1]-[7]受教科书给出的拼图方法（用扇形拼成近似平行四边形）的影响，学生往往认为圆面积公式是近似公式，而非准确公式，难以真正体会极限思想和以直代曲的思想，无法接受剪拼法在极限的情况下可以将圆转化为平行四边形、长方形的过程。这些问题反映出学生对圆面积公式的探究和理解还不够到位。而少数 HPM 教学设计为了解决以上问题，采用了开普勒等积变换的方法，但在教学实践中，教师直接将三角形的面积代替了扇形的面积，没有体现极限的过程[8-9]。

为了使学生更好地体会图形变化中无限逼近的数学思想、更深入地理解圆面积公式，我们尝试从 HPM 的视角设计“圆的面积”的教学，通过融入刘徽的割圆术、阿基米德的同心圆法、开普勒的分割变形法等数学史料，促进学生对圆面积公式的理解，帮助学生突破认识上的障碍。基于以上考虑，我们拟定了如下教学目标：

（1）知道圆面积的概念，理解和掌握圆面积的计算公式，并能正确地计算圆面积。

（2）通过剪圆的操作过程，培养直观想象能力、动手操作能力、抽象概括能力和自主探索能力。通过交流与分享圆面积公式的推导过程，提升语言表达能力。

（3）探索圆面积公式，体会以直代曲、“圆出于方”的转化思想和极限思想。

（4）了解历史上数学家推导圆面积公式的方法，理解数学文化的多元性，体会数学背后的人文精神，感悟数学的应用价值。

2 历史材料的选择

2.1 刘徽与圆面积公式

公元 263 年，刘徽在为《九章算术》作注时用割圆术证明了圆面积公式。所谓割圆术，就是用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积的方法。刘徽在注中称：“割之弥细，所失

* 本文系华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣。”如图 1 所示，刘徽在单位圆内作出内接正十二边形，利用出入相补原理，将正十二边形拼成一个长为正十二边形的半周长、宽为圆半径的长方形。[10]再作圆内接正二十四边形、正四十八边形、正九十六边形、…，相应得到与多边形等积的长方形。圆分割得越细，长方形的面积就越接近圆面积。随着正多边形的边数越来越大，相应的长方形的长越来越接近圆周长的一半，而宽始终等于圆半径，最后通过长方形面积公式得到了圆面积公式——半周乘以半径。

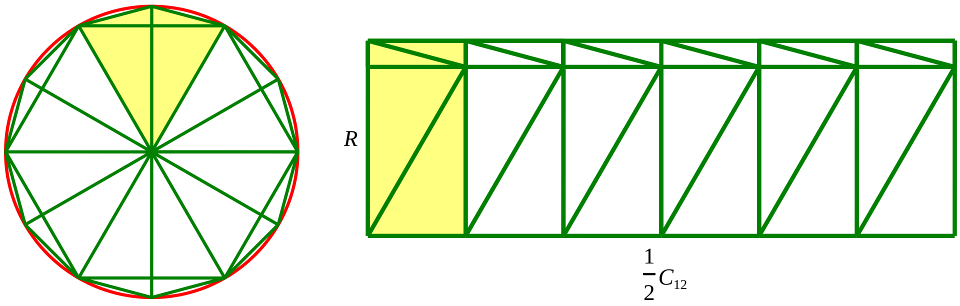


图 1 刘徽的割圆术

2.2 阿基米德与圆面积公式

公元前 3 世纪，古希腊数学家阿基米德在《圆的度量》中给出一个命题：“圆面积等于一条直角边长等于圆半径，另一条直角边长为圆周长的直角三角形面积。”[11]据推测，阿基米德是通过以下方法发现圆面积公式的：将圆从圆心开始直到边缘分成一些细窄的同心圆环，并将这些同心圆环逐一展开叠成一个直角三角形，将圆无限细分时，圆面积与直角三角形的面积近似相等（如图 2）。

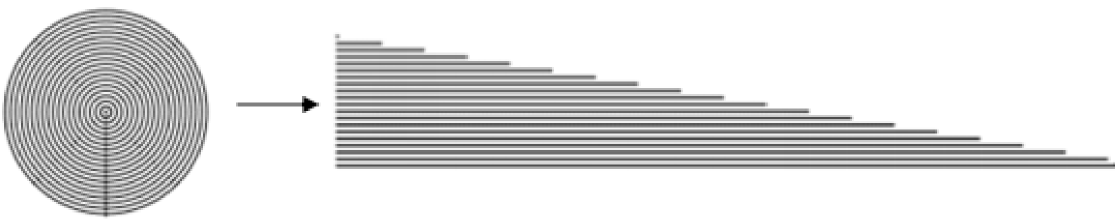


图 2 将圆面积转化为直角三角形

2.3 开普勒与圆面积公式

17 世纪，在德国著名天文学家和数学家开普勒自己的婚礼上，他思考着葡萄酒桶体积的算法，但要解决这个问题之前，要先解决圆的面积公式。如图 3，开普勒将圆分割成小扇形，分割得越细，小扇形就越接近为以圆心为顶点、半径为高的小“三角形”。依次将这些小三角形转化为等底等高的小三角形，得到一个直角三角形。在极限的情形，该直角三角形的面积等于圆的面积[12]。

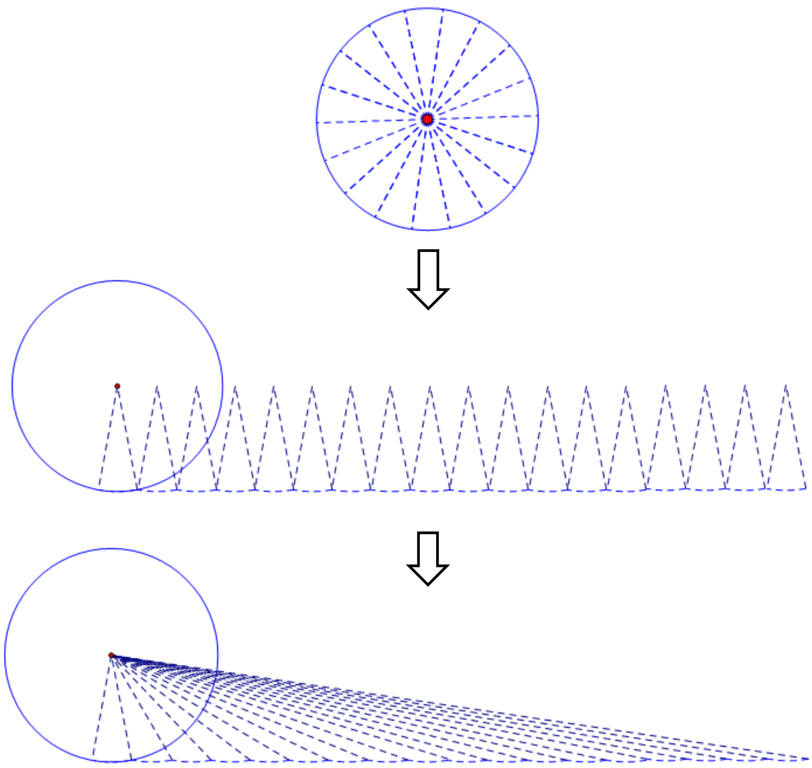


图 3 开普勒等积变换法

3 教学设计与实施

本课的复习引入与动手操作环节注重联系实际，在学生原有知识和生活经验的基础上引入概念及方法；分析交流环节中，融入刘徽的割圆术、阿基米德的同心圆法、开普勒的分割变形法等相关数学史，并将它们作为阅读材料，引导学生观察、分析、推理，在教学过程中渗透“化曲为直”、“以直代曲”、“无限逼近”等数学思想，发展学生的直观想象和逻辑推理能力。

3.1 复习旧知，引入新课

教学之前，学生已经学习过圆的有关概念、圆的周长、弧长等内容。通过简短的问答，既能回顾之前所学内容，又能很快地引入本节课的课题。

师：在前几节课中，我们已经学习了有关圆的什么知识？

生：圆的周长、弧长、圆周率。

师：你们还想知道关于圆的哪些知识呢？

生：还想知道如何求圆的面积。

师：今天就让我们一起来探究如何求圆的面积。那么什么是圆的面积呢？

生：圆的面积是圆所占平面的大小。

3.2 动手操作，感知极限

这一阶段设计了两个操作环节，让学生探究正多边形与圆的关系，知道可以利用正多边形的面积去无限逼近圆面积，体会极限思想。

环节一：将方形纸片剪成圆

师： 请大家不借助于其他工具，只用剪刀把桌上的纸剪成一个圆形。

生 1： 我是靠感觉剪的，四分之一、四分之一地剪。

生 2： 将纸对折 4 次，再剪出稍微平一些的弧。

师： 展开后我们发现这个圆类似花瓣，有点坑坑洼洼，还有其他方法吗？

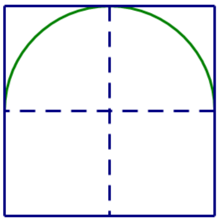


图 4 生 1 的方法

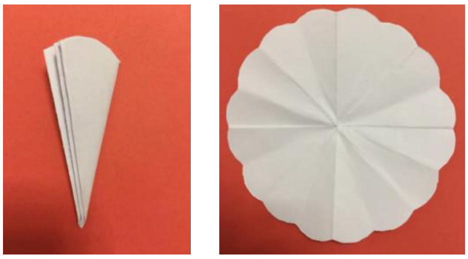


图 5 生 2 的方法

生 3： 我的方法与生 2 相同，展开后，将凸起来的地方再修整。

师： 有的同学是将纸片对折那么只需剪一个半圆就可以了，个别同学也有将纸片对折两次，那么这样我们只要剪四分之一圆弧就可以了，如何能使剪的路径尽可能短呢？

生： 对折更多次数。

师： 首先我们将纸片对折到不能对折为止，那么怎样剪才能使展开的图形更接近圆呢？

生： 剪一段弧。

师： 剪一段怎样的弧呢？弧度大概是怎样的？

生： 不能太弯的弧。

师： 我们不妨用直线段代替曲线，剪直线段试试（操作展示）。

生： 基本接近圆了。

师： 利用圆的对称性，对折的次数越多，剪出的正多边形越接近圆（图 6）。我们知道，在纸上对折的次数是有限的，如果借助技术手段将纸无限次对折，剪直线段后展开，极限状态下的图形就是圆。

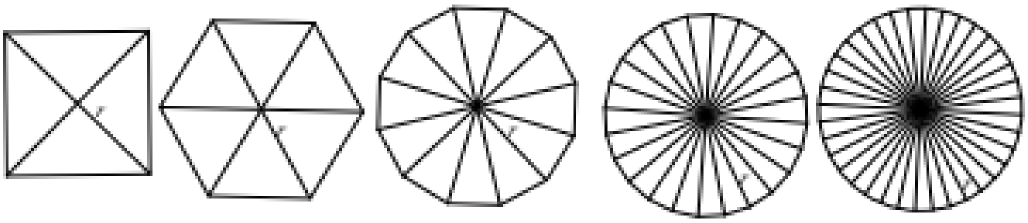


图 6 用正多边形逼近圆

环节二：将圆形纸片剪成正多边形

师：通过剪圆，我们能感受圆出于方，这对于我们求圆的面积有什么启发吗？

生：我们可以把圆的面积近似看成为一个正多边形的面积。

师：那么正多边形的面积近似等于圆的面积，他们之间还是有一定的差值，现在我们把圆形剪成正多边形，感受一下剪下来的差值到底有多大。

【分组操作，将圆对折不同的次数（2 次，3 次，4 次，5 次），剪出圆中最大的正多边形，比较剪下来的部分。】

师：我们发现，当对折的次数越多，正多边形的面积与圆面积之间的差值就越小。如果能够无限次对折，正多边形的面积与圆面积就可以相等。

教师通过几何画板分别作了圆内接正四边形、正八边形、正十六边形、正三十二边形，让大家更直观地感受，多边形的边数越多，圆与正多边形的面积差越小。边数无穷多时，正多边形的面积近似等于圆的面积。

第一个环节，教师引导学生对折纸后剪直线，体现了以直代曲的思想；第二个环节，教师要求学生比较剪下来的面积大小，感受正多边形与圆之间的面积差，直观地体会极限思想。

此外，在方形纸中剪圆，本质上是从外侧逼近圆；而在圆形纸中剪正多边形，则是从内测逼近圆，体现了阿基米德的双侧逼近法[11]，但由于内容偏难，不作为阅读材料，而是融入在实际操作当中。

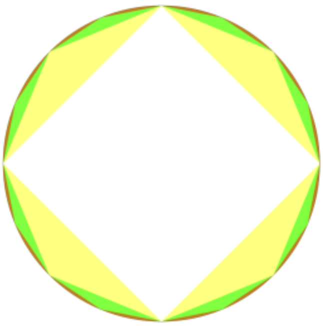


图 7 圆与内接多边形的面积差

3.3 转化图形，推导公式

师：从圆中剪出正多边形的过程与我国古代数学家刘徽的割圆术十分类似，阅读材料一介绍了刘徽用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积，推导出了圆面积公式，并求得了圆周率的近似值。有没有同学会翻译刘徽的经典名句——“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”？

生：割得越细，剩下的越少，割了又割，到最后不可以割的时候，正多边形就和圆面积一样了，差值为零。

师：很好！通过动手操作剪圆和刘徽割圆术的启发，用正多边形的面积可以近似替代圆的面积。在极限的状态下，正多边形的面积就是圆的面积。那么，怎样求正多边形的面积呢？

生 4：将正多边形沿半径分割成许多小的等腰三角形，然后展开，再将这些小三角形倒插起来。

师：很好的思路！老师现在把一个正多边形剪开成 16 个小三角形，你能否给大家演示一下如何倒插起来？（学生演示倒插过程）好的，请问倒插起来以后得到的是一个什么图形？

生 4：平行四边形。

师：那这个平行四边形的底和高分别是什么？

生 4：它的底近似等于圆周长 C 的一半，高近似等于圆的半径 r，所以面积近似等于 $S=\frac{1}{2}Cr$。

师：当圆分割得越来越细时，平行四边形的面积越来越接近圆的面积，在极限的情形下，平行四边形的底等于圆周长 C 的一半，高等于圆的半径 r，其面积为 $S=\frac{1}{2}Cr$ ，这就是圆面积公式。

教师书写圆面积公式推导过程：$S=\frac{1}{2}Cr=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$。

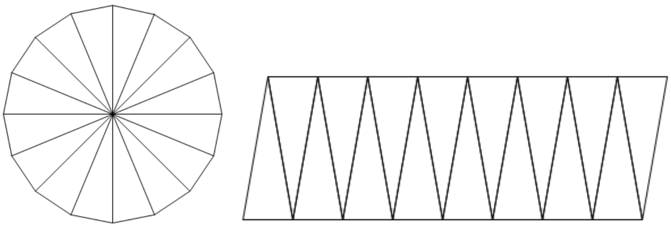


图 8 拼接法

学生的上述方法是将无限接近于圆的正多边形的面积转化为平行四边形的面积，与刘徽的方法异曲同工，但与课本上将圆分割成许多小扇形、再将这些扇形直接拼成近似平行四边形的方法不同：在课本上的方法中，所拼成的图形面积始终等于圆面积，但形状是近似的平行四边形；而在学生给出的方法中，所拼成的图形始终是真实的平行四边形，但其面积是圆面积的近似值。

师：还有其他的推导方法吗？

生 5：将正多边形沿半径分割成许多小的等腰三角形，求其中一块等腰三角形的面积，再乘以三角形的个数就可以了。

师：很好的思路！假设我们将正 n 边形分割成 n 个相同的小三角形，每个小三角形的底边为 a，用 $C_{正}$表示正 n 边形的周长，那么 $C_{正}$与 a 有何关系？

生 5: $a=\frac{C_{正}}{n}$。

师: 若设每个小三角形的高为 h，则它的面积$S_{\triangle}$是多少？

生 5: $S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{正}}{n}\cdot h$。

师: 那么，正 n 边形的面积为多少？

生 5：$nS_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{正}}{n}\cdot h\cdot n=\frac{1}{2}\cdot C_{正}\cdot h$。

师：通过前面的剪纸操作可知，当正多边形的边数越多，正多边形周长 $C_{正}$越接近圆周长 C，小三角形的高 h 越接近圆的半径 r（PPT 演示，图 9），在极限的情形下，正多边形的周长 $C_{正}$变成了圆的周长 C，高 h 变成了 r。此时，正多边形的面积是多少？

生：$S=\frac{1}{2}Cr$，这就是圆的面积。

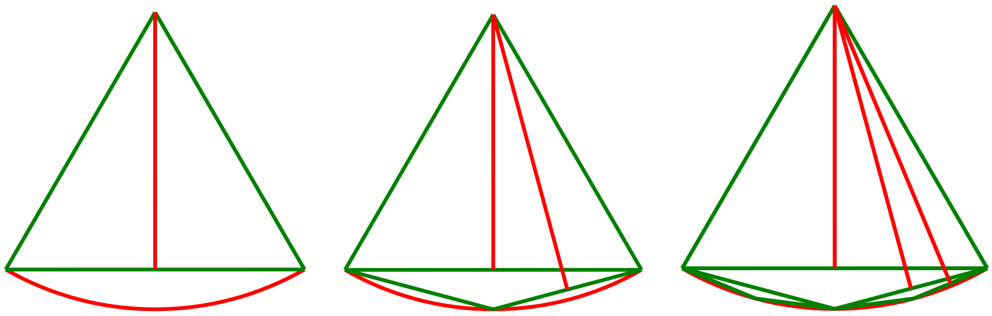


图 9 三角形的高越来越接近圆的半径的演示

上述方法虽然没有采用拼图方法，但每次割圆之后计算每个三角形的面积并将其相加，得到正多边形的面积，实际上将开普勒的方法置于求极限的过程之中。

师：在推导圆面积公式时，我们运用了数学中著名的极限思想，不论是将圆转化为平行四边形，还是若干小三角形，我们都是用直线代替曲线，这也运用了以直代曲的数学思想。

接着，教师播放刘徽割圆术的微视频，让学生进一步感知极限思想。此环节后展示了多幅生活中以直代曲的例子，可见生活中处处有数学。

图 10 生活中以直代曲的例子

3.4 重温经典，交流分享

在数学史长河中，虽然早已有关于圆面积计算公式的记载，仍然有许许多多的数学家出于对数学的热爱，不断创用新方法来探索圆面积公式。本环节让学生回顾历史，重温经典。在阅读历史材料中 2 位数学家推导圆面积公式的小故事后，要求学生根据图形的变化，汇报交流数学家们推导的过程。

生 6：将圆想象成无数同心圆套在一起，然后沿半径剪开，沿着剪开的地方“掰开”，展开成一个等腰三角形的形状，等腰三角形的底即圆的最外圈，其长度就是圆的周长，而高是圆的半径，可以得到公式 $S=\frac{1}{2}Cr$。

生 7： 半径不动，把每个同心圆都拉直，还可以展开成一个直角三角形。

【教师动画演示】

师： 阿基米德圆分割成无数无限细的同心圆的细线，这样的极限思想不得不让人佩服。在我们课本的第一节里有一句话："点动成线，线动成面"，其中也蕴含着极限思想。

生 8： 先将圆分割成无数极小的扇形，把这些扇形展开铺在一条直线上，平移它们的顶点，使得面积不变（即等积变换），得到新三角形的底即圆周长，高是圆的半径，可得 $S=\frac{1}{2}Cr$。

【教师动画演示】

师： 17 世纪的欧洲数学家开普勒在自己的婚礼宴会上竟将注意力放在一个葡萄酒桶上，可见对数学已经达到了痴迷的程度。

在交流分享环节中，教师将讲台交给学生，学生通过理解阅读材料，自主探究，进行猜想、推理，升华了他们对圆面积公式的认识。在学生的讲解之后，教师播放动画，能让学生直观地看到动态的过程，感受极限的思想。

3.5 讲解例题，总结回顾

选取《九章算术》方田章圆田问题作为例 1："今有圆田，径十步，问为田几何？" 让学生将问题译成现代汉语，并自主解答。

例题 2 是关于圆面积公式的若干应用问题。其中有一题将圆面积与圆周长联系在了一起：已知一个圆的周长为 62.8 米，求这个圆的面积。教师提示，可用"半周乘半径"来求。

在课堂小结环节，教师让学生说说最喜欢哪位数学家或哪种求圆面积的方法，并谈谈这节课中感受到了哪些数学思想。同时为了延续学生对于数学史的热情，要求学生在课后向家长介绍圆面积公式的探索过程，锻炼语言表达能力。另外，让学生查阅意大利数学家卡瓦列里（B. Cavalieri，1598~1647）的棉线法以及其他不同的方法，感悟数学家们对于真理孜孜不倦的探究精神。

4 学生反馈

课后对 44 名听课学生进行了问卷调查。

有 43 位同学（占 98%）表示喜欢本堂课中数学史的融入，并且觉得很有帮助。对于圆面积公式的不同推导方法，21 位同学表示喜欢"刘徽的割圆术"；10 位同学喜欢"阿基米德同心圆法"；10 位同学喜欢"开普勒的方法"；还有 2 位同学喜欢"三角形拼成平行四边形"，理由有认为方法本身易于理解，有认为动画清晰直观，也有些是因为数学家的个人魅力或探索精神。对于难以理解的方法和仍有的困惑：8 位同学觉得没有困难；8 位同学觉得割圆术理解有困难，或认为正多边形始终无法与圆完全重合，或对割圆术中用到出入相补原理没有完全理解；9 位同学选了同心圆法，困惑于展开的图形的形状呈"阶梯状"而并非是严格的

三角形；4 位同学选了开普勒的方法，认为三角形的底边仍是曲线。对于课堂中印象深刻的环节，17 位同学提到了剪圆、剪多边形的动手操作，6 位同学提到了自主推导公式的过程，10 位同学提到分享交流数学家的不同方法，7 位同学提到微视频、动画等。

对于问题“你认为这节课中，相关数学史知识给你什么帮助与启示？”有的同学认为，让他知道了要勇于创新，而不是拘泥于他人的方法，图文并茂的方式有助于直观地理解问题。有的认为，数学来源于生活和无数次的实践，反复推敲才能得出大家熟知的公式。有同学认为，了解了 3 种圆面积的推导方法，充分体现了人类永无止境的探索精神。还有同学回答明白了做数学题不能只套公式，要理解如何推导，如何运用，这才是做数学的核心。

5 结 语

本节课中，融入数学史的价值主要体现在以下几个方面。

历史上不同时空的数学家都对圆面积公式作过证明。本节课顺应式运用历史上两种推导圆面积公式的方法，一是刘徽的方法，一是开普勒的方法；同时，阅读材料中还呈现了阿基米德的同心圆法。因此，学生从本节课中充分感受到了圆面积的“方法之美”。

通过用方形纸片剪圆和圆形纸片剪正多边形的操作活动，让学生感受正多边形与圆之间的关系，体会以直代曲、“圆出于方”的转化思想和极限思想。教师借鉴圆面积公式的历史，引领学生通过剪纸操作发现割圆术，实际上通过数学史营造了“探究之乐”。学生课后反馈表明，大多数学生喜欢这一环节。

数学并不是孤立的一门学科，本节课将历史、语文等多学科融合在一起，一些数学薄弱的文科生在数学课堂上也有机会翻译古代汉语。可见，通过数学史融入数学教学，教师为学生提供了学科联系的机会。课堂上所展示的不同时空数学家的圆面积公式推导方法，让学生认识数学文化的多元性。因此，通过数学史，教师展示了数学的“文化之魅”。

此外，学生也能体会到古代数学家求真、创新、执着的精神，因而本节课通过融入数学史达成了“德育之效”。

参考文献

[1] 孟兆山. “圆的面积”教学实践与反思[J]. 小学教育科研论坛, 2004, (6): 54-55.

[2] 吴剑春, 马凤枝. “圆的面积”设计及评析[J]. 小学教育科研论坛, 2004, (Z1): 121-123.

[3] 张平. 课题: 探索圆的面积公式[J]. 教育实践与研究(小学版), 2008, (Z1): 88-92.

[4] 刘韵. 《圆的面积》课堂教学实录[J]. 现代教育论丛,2007, (4): 84-87.

[5] 李艳秋. 《圆的面积》教学设计[J]. 小学教育研究, 2014, (29): 75-76.

[6] 顾文彬. “圆的面积”设计及评析[J]. 小学数学参考, 2003, (9): 37-39.

[7] 余艳红. 将渗透数学思想进行到底——以苏教版第十册“圆的面积”一课教学为例 [J]. 数学学习与研究, 2014, (22): 100-101.
[8] 张纪存. 《圆的面积》教学设计——“自学指导式”教学模式[J]. 课程教育研究, 2018, (20): 132.
[9] 孙红叶. 小学教师运用数学史的困难及解决途径[D]. 四川: 四川师范大学, 2014: 39-41.
[10] 郭书春. 汇校《九章算术》[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1990.
[11] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
[12] 汪晓勤. 数学史与数学教育[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014, (1): 8-14.

活动信息

HPM 工作室学术沙龙（第三、四期）纪要

余庆纯
（华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

2019 年 1 月 20 日，数学史与数学教育（HPM）工作室学术沙龙在华东师范大学中山北校区文科大楼 1313 室举办，本次活动分为两期，分别对应高中和初中小学两个学段。恰逢“大寒”节气之际，工作室中的各位优秀中学数学教师、华东师范大学基础教育学科教研联盟与高校的 HPM 研究者汇聚一堂，总结过去、展望未来。

HPM 工作室学术沙龙旨在搭建一个 HPM 工作室教师的学术交流平台，其主题涵盖了 HPM 课例研究微报告、教师专业发展年度总结报告、公开课荣誉证书颁发、工作室学员考核、学年 HPM 研究概述与未来工作计划等。参与本次学术沙龙活动的有来自华东师范大学 HPM 研究团队的汪晓勤教授、博硕士研究生，还有来自一线中小学的优秀数学教师。

本学期中，无论是高中、初中还是小学学段，HPM 工作室的教师们都积极参与了 HPM 课例设计、教学研讨与课例实施。学术沙龙的第一部分，就是分别由高中、初中、小学三个学段的各位开课教师进行课例微报告。

上午，主要是高中学段的沙龙活动。七位高中数学教师汇报了这学期的 HPM 课例成果，分享自己的专业发展年度总结报告，谈论教学收获和反思。这七位老师分别选择了六个高中课例主题，以 HPM 视角开展教学。其中，华师大二附中的赵玉梅老师开辟了“解三角形的应用”高三复习课，追忆历史，走进课堂，激发学生的思想火花。行知中学的高振严老师从术、道、源三个角度报告了“和差术”这一课题；交大附中的刘志霞老师以生动有趣的方式带来了“向量的坐标表示”的报告；东昌中学的向荣老师在“认识复数”序言课中融入思维导图、数学写作；通河中学的张冰老师以问题驱动报告了“复数概念”。HPM 工作室也在不断进行着同课异构的尝试，融入教师自己的想法与风格，碰撞出更多思维的火花。青浦区第一中学的黄深洵老师与建平中学的杜金金老师共同选择了“函数的概念”，以不同风格展示函数概念的来龙去脉。

下午，主要是初中、小学学段的沙龙活动。首先，由两位小学教师汇报了 HPM 课例，上海理工大学附属小学的刘轩如老师与静安区科技学校的马思聪老师带来了“多边形的面积计算”的精彩报告，开辟了 HPM 视角下小学单元教学的先河。接着，六位初中教师汇报了 HPM 课例研究成果，与大家交流了自己的教学经验与心得。建平远翔学校的贾彬老师以形观数，带来精彩的“素数与合数”课例；六灶中学的袁媛老师以趣味故事汇报了“分式的意义”；新杨中学的李德虎老师分享了“十字相乘法”课例研究的过程与教学心得；南汇第二中学的张丽芝老师探讨了“分式的意义”；风华初级中学的王雅琪老师集数学

家思想之妙，展示丰富生动的“圆的面积”；上海市西中学的王进敬老师以一首词《沁园春•勾股定理》将“勾股定理”的多元文化、数学与文学的学科联系展现得淋漓尽致。

图 1　HPM 课例微报告与年度工作总结

学术沙龙的第二个环节是由汪晓勤教授为各位优秀的开课教师颁发荣誉证书，这份荣誉证书见证了各位教师的辛勤努力与他们的专业成长。

图 2　HPM 工作室学术沙龙（第三期）证书颁发合影

图 3　HPM 工作室学术沙龙（第四期）证书颁发合影

接着，HPM 工作室秘书公布了工作室各位教师对本学期课例活动的参与情况，以考勤

带动教师的专业发展，鼓励教师们更多地参与到工作室的课例研究中，各位老师也积极提交了本学年的 HPM 工作室学员的年度总结报告。

第四个环节是高校的 HPM 研究者概述 2018 年 HPM 研究进展，从工作室成立、举办与参加会议、项目与课题、获奖与荣誉、学术成果等五方面进行总结。进一步，各位工作室的中学教师与高校的 HPM 研究者们一起计划下个学期课例研究的活动。课例的实施依赖于工作室的一线教师与高校研究者双方发挥各自优势，进行深度的合作。老师们积极报名，根据自己所处年级与实际教学进度，选定出了下学期即将实施的课例主题。

图 4　工作室的教师与 HPM 研究者热烈讨论

活动最后，来自华东师范大学基础教育学科教研联盟的王平老师等教师代表们分享参会心得，赞赏 HPM 课例研究具有严谨的理论框架与规范的研究方法，上通教育理论，下达教学实践。同时，华东师范大学汪晓勤教授进行会议总结，鼓励教师们强化教学成果意识，加强课例实施后的深度反思，及时将课例的实施经验进行分享与发表。

自 2018 年 3 月 6 日成立以来，HPM 工作室开展了一系列课例研讨与教学实践等活动，本次学术沙龙集中展示了工作室成立一学年的丰硕成果。HPM 工作室本着“充分发挥基地的示范、引领和辐射作用，加大培养名优骨干教师力度”的宗旨，为落实“立德树人”的教育根本任务而做着努力，在这个学习共同体中，不仅 HPM 课例成果丰硕，更是着重关注于教师的专业发展，为教师们开辟了一条专业进路。未来，高校研究者与一线教师之间会有更广泛更深入的合作，将有更丰硕的研究成果涌现，不断传播本土特色的 HPM 理论，共育数学文化之林。

图 5　HPM 工作室学术沙龙（第三期）合影

图 6　HPM 工作室学术沙龙（第四期）合影