上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2015 年第 4 卷第 2 期

迪克斯特修斯

（E. Jan Dijksterhuis, 1892-1965）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

目录

Content

刊首语

本期封面人物为荷兰科学史家迪克斯特修斯（E. Jan Dijksterhuis, 1892-1965）。

迪克斯特修斯于 1892 年出生于荷兰南部的蒂尔堡。1911 年进格罗宁根大学学习数学，1918 年，获得博士学位。1919 年，他开始在蒂尔堡的高级公民学校任教，讲授数学、物理学和宇宙学，直到 1953 年。1953 年和 1955 年，他相继被乌特勒支大学和莱顿大学聘为精密科学史教授。

1924 年，迪克斯特修斯出版他的第一部科学史专著：《降落与抛掷——从亚里士多德到牛顿的力学史》。1929 年，他出版《欧几里得》，1938 年，又出版《阿基米德》，充分显示了非凡的语言才能和出色的科学史研究水平。1943 年，他出版了《斯蒂文：16 世纪前后的荷兰科学》。在许多中国人眼里，斯蒂文只是小数的西方发明者。但事实上，他是文艺复兴时期百科全书式的学者：他的研究涉及数学、力学、天文学、建筑学、逻辑学和荷兰语。如果不是像迪克斯特修斯那样既精通精密科学又精通人文科学，那么一个人是写不出斯蒂文传记的。1950 年，迪克斯特修斯出版《世界图景的机械化》，并因此荣获荷兰国家文学奖。1961 年，《世界图景的机械化》被译为英文，他因此于翌年荣获萨顿奖。1963 年，他与另一位科学史家福布斯（Forbes, 1900-1973）合作编写了两卷本的《科学技术史》。

迪克斯特修斯还长期担任荷兰最古老的的文学期刊《领导者》的编辑，并在该刊物上发表了许多文章或书评。他还精通音乐，是一位钢琴家；他对神学也有着浓厚的兴趣。

迪克斯特修斯认为，在大、中学教授科学史，能够在科学和人文之间架设起桥梁。他十分强调数学史对于数学教师教育的重要价值，指出：

> “中学数学教师的主要任务是向新一代传授数学知识，并且，如果可能的话，激发起他们对于人类千百年以来在该领域中所取得成就的热爱与崇敬。对于这些师范生来说，关于这门学科历史演进的知识乃是一种财富，这种财富不仅是宝贵的，而且是不可或缺的，它——自然还需要掌握现代数学知识——将使他们能够令人满意地完成自己的职责。”

长期以来，迪克斯特修斯的观点一直深深印在笔者的脑海里。不断挖掘教育取向的历史素材，为一届又一届的师范生讲授并没有什么地位可言的数学史课程，不为别的，只为让他们能够带着一笔特殊的精神财富走上杏坛。

文献研究

20 世纪中叶以前的正弦定理历史*

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

近年来，HPM 视角下的数学教学日益受到中学数学教育界的关注，人大报刊资料中心《高中数学教与学》2014 年第 12 期转载了“数学史教学”系列论文；《教育研究与评论》杂志则于 2014 年开始开辟了 HPM 教学案例的专栏。然而，数学史资源的匮乏仍是中学数学教师开展 HPM 实践和案例开发的主要障碍之一。另一方面，在高中数学教材即将开始修订之际，“数学史融入数学教材”业已成为人们关注的主要研究课题之一。

在开发正弦定理的 HPM 教学案例以及探讨数学史融入正弦定理的教材内容编写时，我们首先需要解决“融入什么”，才能解决“如何融入”的问题。为此，我们对 17-20 世纪 144 种三角学文献进行考察（限于篇幅，绝大部分文献未在参考文献中列出），试图回答：20 世纪中叶以前，正弦定理是如何演变的？有哪些推导方法？正弦定理的历史对今日教学有何启示？

1 从纳绥尔丁到韦达

早在公元 2 世纪，正弦定理即已为古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy）所知。中世纪阿拉伯著名天文学家阿尔·比鲁尼（al-Biruni, 973-1048）也知道该定理（Smith, 1925）。但是，最早清楚地表述并证明该定理的是 13 世纪阿拉伯数学家和天文学家纳绥尔丁（Nasir-Eddin, 1201-1274）。如图 1 所示，延长 BA 到 E，延长 CA 到 G，使得 $BE=CG$；分别以 B 和 C 为圆心、以 BE 和 CG 为半径作圆弧。过 E、A、G 分别作 BC 或其延长线的垂线，垂足分别为 F、D 和 H。则 $EF=\sin B$，$GH=\sin C$。需要指出的是，16 世纪以前，三角函数均为线段而不是比值，线段的大小乃是相对于圆的半径而言的。这里，纳绥尔丁所采用了大于 AB 和 AC 的半径。利用三角形的相似性，有

$$AB:AD=BE:EF=R:\sin B$$

*人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一。

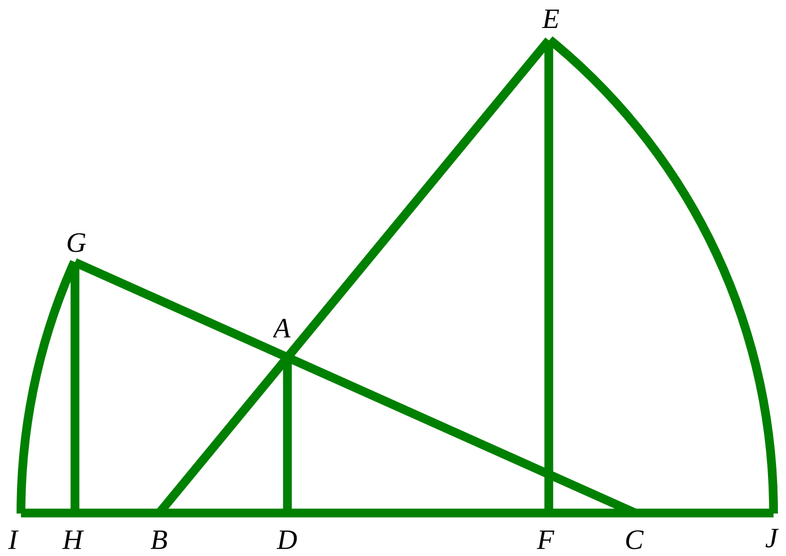


图 1 纳绥尔丁对正弦定理的证明

$$AD:AC=GH:CG=\sin C:R$$

将上面的两个等式相乘，得

$$AB:AC=\sin C:\sin B$$

在欧洲，犹太数学家热尔松（Levi ben Gerson, 1288-1344）在其《正弦、弦与弧》中陈述了该定理："在一切三角形中，一条边与另一条边之比等于其对角的正弦之比"（Braunmühl, 1900），但他没有给出清晰的证明。15 世纪，德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）著《论各种三角形》，使得三角学脱离天文学而成为几何学的一部分。书中含有正弦定理，但简化了纳绥尔丁的证明：如图 2 所示，在ΔABC 中，$AC>AB$，延长 BA 至 E，

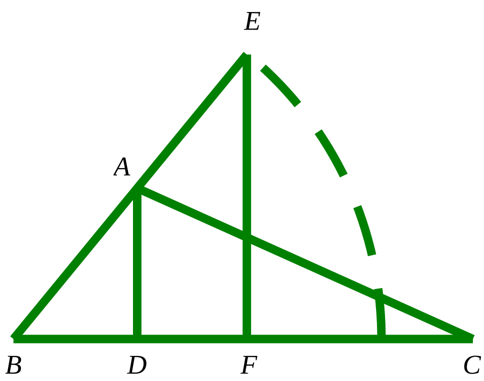


图 2 雷格蒙塔努斯的证明

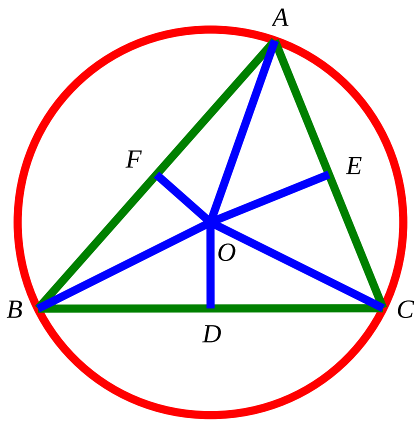


图 3 韦达的证明（锐角三角形）

使得 $BE= AC$，过点 E 作 BC 的垂线，垂足为 F。于是 $EF=\sin B$， $AD=\sin C$。由三角形的相似性得 $AB:BE=AD:EF$，即 $AB:AC=\sin C:\sin B$。

1571 年，法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）在其《数学表》（*Canonem Mathematicum*）中用新的方法证明了正弦定理。（Braunmühl, 1900）如图 3，从三角形 *ABC* 的外心 *O* 向 *AB*、*BC* 和 *CA* 引垂线，垂足分别为 *D*、*E* 和 *F*，则 $\angle A = \angle BOD$，$\angle B = \angle AOE$，$\angle C = \angle AOF$。于是

$$a = 2BD = 2\sin BOD = 2\sin A,$$

$$b = 2AE = 2\sin AOE = 2\sin B,$$

$$c = 2AF = 2\sin AOF = 2\sin C,$$

故得

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$$

1593 年，韦达将正弦定理推广为以下等式：

$$a : \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = b : \left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right) = c : \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$$

之后，德国数学家毕蒂克斯（B. Pitiscus, 1561-1613）在其《三角学》中沿用韦达的方法来证明正弦定理。（Smith, 1959）

2　17-18 世纪

纳绥尔丁的同径法和韦达的外接圆法成为 17-18 世纪数学家证明正弦定理的两种基本方法。在我们所考察的 27 种 17-18 世纪的三角学著作中，8 种采用了纳绥尔丁的同径法，14 种采用了韦达的外接圆法，3 种采用了直角三角形法，3 种未给出证明。

2.1 纳绥尔丁的方法

意大利数学家卡瓦列里（B.Cavalieri, 1598-1647）、中国数学家梅文鼎（1633-1721）、英国数学家海尼斯（S.Heynes, 18 世纪）、辛普森（T. Simpson, 1710-1761）等采用了纳绥尔丁和雷格蒙塔努斯的方法。纳绥尔丁并未明确讨论三角形的一个底角为钝角的情形，卡瓦列里在《平面与球面三角学》中对此作了补充，如图 4 所示。（Cavalieri, 1643）类似地，海尼斯补充了雷格蒙塔努斯的证明中三角形底角为钝角的情形，如图 5 所示。（Heynes, 1716）

梅文鼎在《平三角举要》中、辛普森在《平面与球面三角学》中各自对雷格蒙塔努斯的方法做了进一步简化。（梅文鼎, 1759; Simpson, 1799）如图 6，在 *AC* 上取点 *E*，使得 *CE*=*AB*，以 *AB*= *CE* 为圆的半径，则有 $AD = \sin B$， $EF = \sin C$，故有 $EC : AC = EF : AD$，

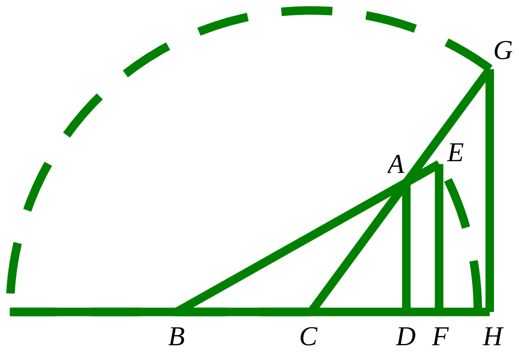


图 4 对纳绥尔丁证明的补充

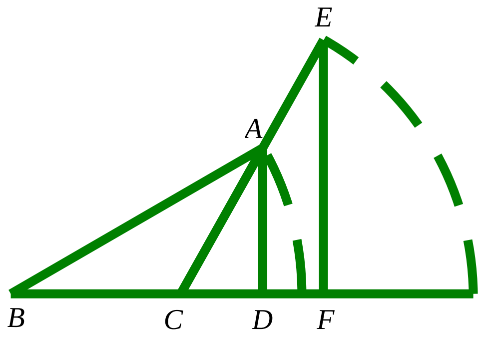


图 5 对雷格蒙塔努斯证明的补充

即 $AB:AC=\sin C:\sin B$。《平三角举要》是梅文鼎的早期数学著作，在时间上远早于辛普森的《平面与球面三角学》。

苏格兰数学家麦克格雷戈（J. Mcgregor）在其《实用数学大全》中对雷格蒙塔努斯的方法作了另一种简化。（Mcgregor,1792）如图 7，麦克格雷戈作 *AB* 和 *AC* 上的高线 *CE* 和 *BD*，将 *BC* 作为圆的半径，则有 $CE=\sin B$， $BD=\sin C$；又由 $\Delta BAD \sim \Delta CAE$ 得

$$AB:AC=BD:CE=\sin C:\sin A。$$

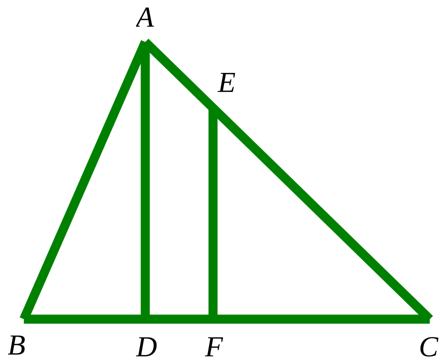


图 6 辛普森的证明

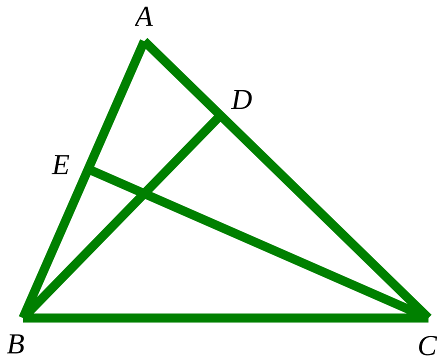


图 7 麦克格雷戈的证明

英国数学家赖特（J. Wright）在其《平面与球面三角学基础》中给出了新的证明方法。（Wright, 1772）如图 8 所示，过 *A* 作 *BC* 的平行线 *AF*，以 *A* 为圆心，*AB* 为半径作圆弧，交 *AF* 与点 *F*，过 *B* 和 *F* 分别作 *AC* 的垂线，垂足为 *D* 和 *E*。于是， $BD=\sin A$，

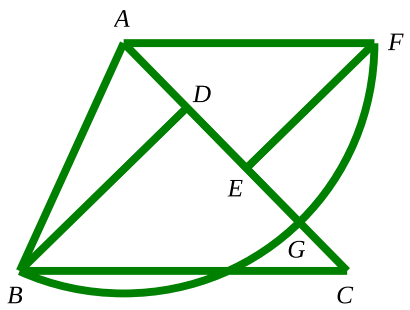


图 8 赖特的新证明

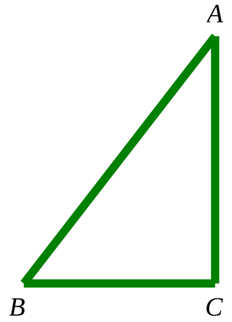


图 9 直角三角形的边角关系

$FE = \sin FAE = \sin C$。因 $\Delta FEA \sim \Delta BDC$，故有 $AF : BC = FE : BD$，此即 $AB : BC = \sin C : \sin A$。

2.2 韦达的方法

17 世纪荷兰数学家弗拉克（A. Vlacq, 1600-1667）、斯内尔（W. Snell, 1591-1626）、法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640-1717）等都沿用了韦达的方法。（Vlacq, 1720; Snell, 1627; Zaragoza, 1673; Ozanam, 1684）韦达并没有讨论钝角三角形的情形，英国数学家凯尔（J. Keil, 1671-1721）对此做了补充。（Keil, 1726）如图 10 所示，在优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上任取一点 *L*，连接 *BL* 和 *CL*。则 $a = 2BD = 2\sin BOD = 2\sin L = 2\sin\left(180° - A\right) = 2\sin A$，故正弦定理仍然成立。

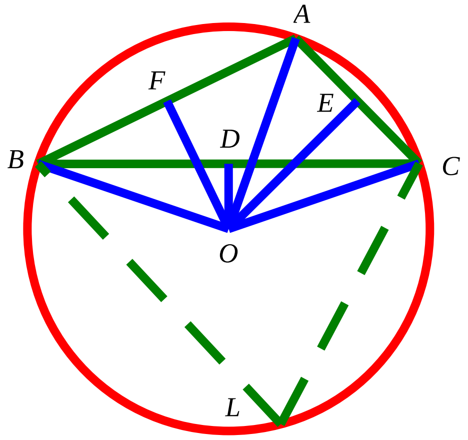


图 10 韦达证法中的钝角三角形情形

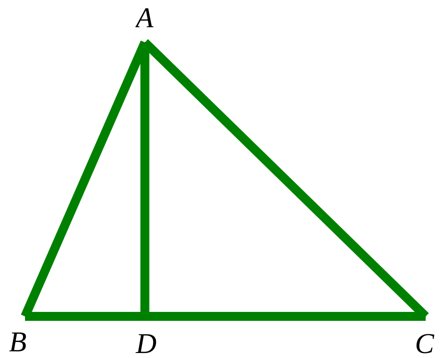


图 11 哈里斯的证明

值得一提的是，在《平三角举要》中，梅文鼎在运用同径法的同时，也采用了韦达的方法。

2.3 直角三角形法

英国数学家哈里斯（J. Harris, 1667-1719）最早采用了直角三角形法。（Harris, 1706）他首先建立 RtΔABC（C 为直角顶点）的边角关系：

$$R : \sin A = AB : BC \tag{1}$$

$$R : \sin B = AB : AC \tag{2}$$

其中 R 为圆的半径。这里，正弦仍只是线段而非比值。有了上述关系，哈里斯并不需要像纳绥尔丁、雷格蒙塔努斯以及后来的追随者那样，具体地去选择并作出圆的半径，然后再利

用相似三角形性质。如图 11，在ΔABC中，AD是BC边上的高，利用直角三角形边角关系有：

$$AB:AD=R:\sin B，\quad AD:AC=\sin C:R，$$

相乘得

$$AB:AC=\sin C:\sin B。$$

Heynes(1716)、Emerson(1749)、Ewing(1771)和 Cagnoli (1786)都采用了同样的证法，其中，Heynes(1716)、Ewing(1771)和 Cagnoli (1786)由上面两个比例式得到

$$AB\sin B=AC\sin C，$$

后世数学家大多采用了上面的等式。若取$R=1$，直角三角形法就是今天的教材普遍采用的方法了。

直角三角形法其实就是纳绥尔丁方法的演化，只不过我们直接利用直角三角形边角关系，而不再需要选择并作出具体的半径。

3 十九世纪

在我们所考察的 19 世纪 67 种三角学著作中，有 4 种采用了纳绥尔丁的等径法，9 种采用了韦达的外接圆法，55 种采用了直角三角形法，1 种采用了余弦定理，2 种未给出证明。

3.1 纳绥尔丁与雷格蒙塔努斯的方法

在采用等径法的 4 种教材中，三角函数仍被视为线段而非比值。Nichols(1811)和 Lewis(1860)运用了辛普森的简化方法，而 Gregory(1816)和 Robinson(1873)则选取同时小于AB和AC的半径。

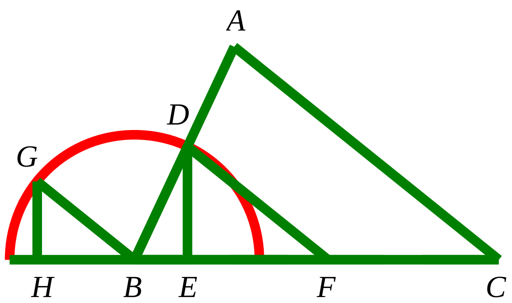


图 12 格雷戈里的证法

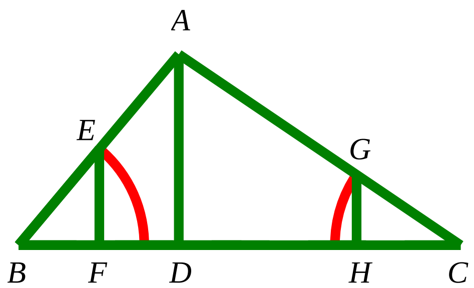


图 13 罗宾逊的证法

如图 12 所示，Gregory(1816)以B为圆心，BD为半径（大小等于教材所使用的正弦表的半径）作圆，过D和B作AC的平行线，分别交BC和圆于F、G；过D和G作BC和

CB 延长线的垂线，垂足分别为 E、H。则 $DE = \sin B$， $GH = \sin C$ 。于是

$$AB : AC = DB : DF = GB : DF = GH : DE = \sin C : \sin B$$

Robinson(1873)以小于 AB 和 AC 的任意长度为半径作圆弧，如图 13 所示，推导方法与纳绥尔丁一致。

3.2 韦达的方法

虽然 17-18 世纪的数学家常用韦达的外接圆法，但由于他们将正弦函数看作线段而非比值，故并不去关注三角形的边与对角正弦之比究竟是多少。到了 19 世纪，人们逐渐将正弦看作比值，于是这个比值就应运而生了。事实上，由图 3 可知，

$$\sin A = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R}，\ \sin B = \frac{\frac{1}{2}b}{R} = \frac{b}{2R}，\ \sin C = \frac{\frac{1}{2}c}{R} = \frac{c}{2R}$$

故得出命题：三角形任一内角的正弦等于对边与外接圆直径（2R）之比（Serret, 1850），故知

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3.3 直角三角形法

至迟在 1819 年，英国数学教学伍德豪斯（R. Woodhouse, 1773-1827）开始抛弃（1）、（2）这样的等式，而统一取 $R = 1$，相当于用比值来表示三角函数。这样，直角三角形方法得到简化。（Woodhouse, 1819）如图 11，$\sin B = \dfrac{AD}{c}$，$\sin C = \dfrac{AD}{b}$，故有 $AD = c\sin B = b\sin C$，同理可得其他等式。这是 19 世纪三角形教材用得最多的一种方法。

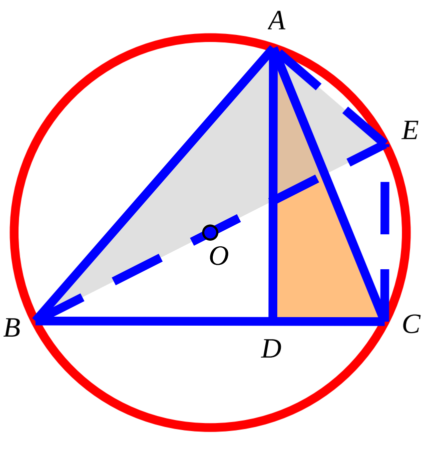


图 14 辅助直径法

3.4 辅助直径法

这个时期，有人开始不再拘泥于韦达的方法而采用了辅助直径法，如 Nixon (1892)。如图 14 所示，AD 为ΔABC 底边 BC 上的高，过 B 作直径 BE，连 AE 和 CE，易证 Rt$\Delta BAE\sim$ RtΔADC，于是有 $c:AD=2R:b$。但 $AD=c\sin B=b\sin C$，故得：

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3.5 利用余弦定理

伍德豪斯还用余弦定理来推导正弦定理：由余弦定理得

$$\sin^2 A=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 B=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2c^2},$$

$$\sin^2 C=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2},$$

故有

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}$$

从而得到正弦定理。

4　20 世纪上半叶

在我们所考察的 1900-1955 年间出版的 50 种教材中，45 种采用了直角三角形法，18 种采用了外接圆法（其中有 12 种采用韦达的方法，另 6 种采用辅助直径法）。此外，2 种教材采用解析几何方法，1 种利用三角形面积公式。

4.1　辅助直径法

采用辅助直径法的 6 种教材都简化了 Nixon (1892)的方法，如 Rothrock (1910)、Hun & MacInnes (1911)、Moritz (1915)等。仍如图 14，在 RtΔBCE 和 RtΔBAE 中，直接利用边角关系得 $a=2R\sin A$，$c=2R\sin C$。

4.2 解析几何法

解析几何方法直到50年代才开始出现，如Holmes (1951)和Vance (1954)。如图15所示，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则点 C 的坐标为 $\left(b\cos A, b\sin A\right)$；若 x 轴不变，而以 B 为原点，则点 C 的坐标为 $\left(a\cos\left(\pi-B\right), a\sin\left(\pi-B\right)\right)$，或即 $\left(-a\cos B, a\sin B\right)$，因在两种坐标系中，点 C 的纵坐标相同，故有 $b\sin A = a\sin B$。

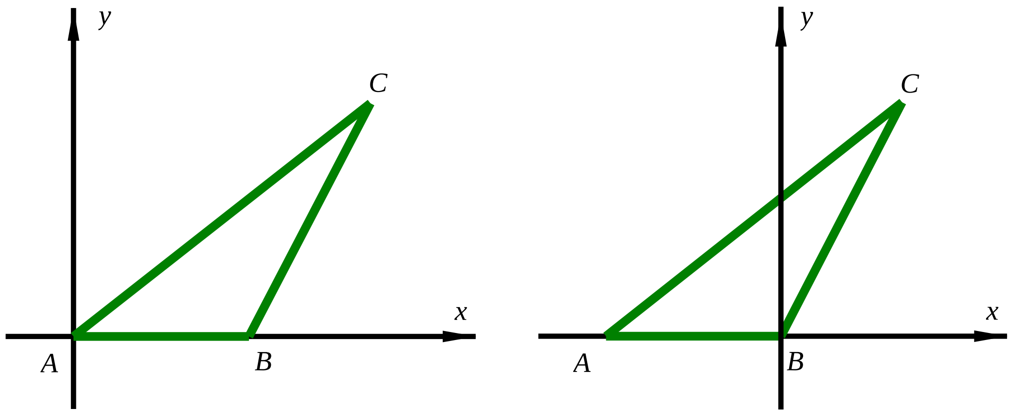


图 15 正弦定理的解析几何证法

5 正弦定理证明方法的演变

图16给出了各种方法在三个时期的分布情况。从图中可见，19世纪之后，随着三角比的普遍采用，纳绥尔丁的等径法逐渐退出历史舞台，最终销声匿迹。17-18世纪占据优势的韦达外接圆法到19世纪之后虽不绝如缕，但基本上处于被边缘化的状态，事实上，一些教材只是将其作为第二种证法加以介绍，或在推导边与对角正弦之比为外接圆直径时才用到该方法。直角三角形法到19世纪以后可谓一枝独秀，备受青睐。

各种方法都经历了演变过程。纳绥尔丁等径法经历了以同时大于三角形两腰的线段为半径，到以较长腰为半径，再到较短腰为半径，最后到同时小于两腰的线段为半径的过程。韦达的外接圆方法经历了从定性（只关注各边与其对角正弦之比相等，而不关注比值的大小）到定量（关注比值的大小）的过程，最后逐渐衍生出辅助直径法。直角三角形法经历从依赖于任意半径 R（正弦为线段）到统一取 $R = 1$（正弦相应成为比值）的过程。

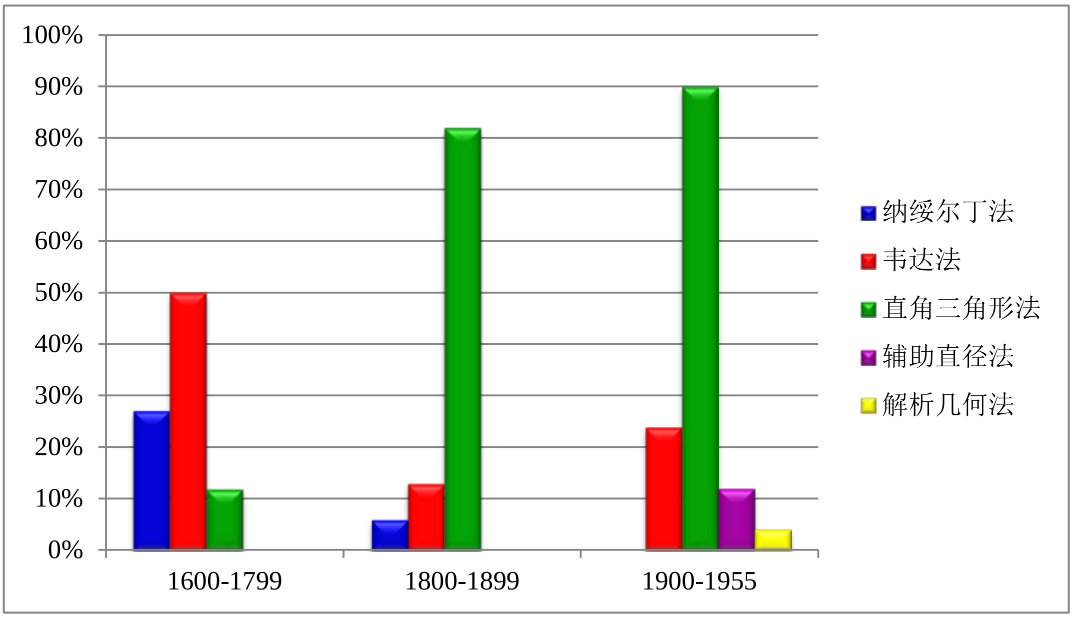


图 16 正弦定理证明方法在不同时期的分布

6 结论

随着时代的变迁，正弦定理的证明方法逐渐趋于单一，直角三角形法最终一统天下。但是，这并不意味着纳绥尔丁和雷格蒙塔努斯方法无用了。事实上，尽管直角三角形法比较简约，但因三角形两底角的正弦具有不同的分母，因而正弦定理并不直观。梅文鼎在《平三角举要》卷四中记录了当时学习者的疑惑："或问：各角正弦与各边皆不平行，何以能相为比例？"（梅文鼎，1769）显然，直角三角形法未能消除初学者的这一疑惑，而梅文鼎正是通过同径法来解决这一问题。如果我们采用梅文鼎、辛普森、麦克格雷戈、赖特等人的简化方法（但仍视正弦为比值），那么，由于表达正弦的比具有相同的分母，因而正弦之比等于相应的分子之比；而分子之比又等于三角形两边之比，因而正弦定理变得十分直观、易于为初学者所理解。

正弦定理的历史为我们提供了丰富的教学素材和思想养料，包括不同的几何证明、证明的不断演进过程以及隐含在定理背后不同时空的数学家的创新精神。如果全然抛弃这些素材，那么，学生在课堂上面对的就只是一个单调的定理而已，他们从中既未能看到几何之美，也未能领略方法之妙；既未能拓宽数学思维，也未能感受多元文化。割裂历史，我们的课堂将失去了很多很多。

参考文献

[1] von Braunmühl, A. (1900). *Vorlesungen über Gischichte der Trigonometrie*. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner. 176-177

[2] Cagnoli, M. (1786). *Traité de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique*. Paris: Didot. 115-116

[3] Cavalieri, B. (1643). *Trigonometria Plana et Sphaerica*. Bononiae: Haercdis Victorij Benatij, 17-21

[4] Emerson, W. (1749). T*he Elements of Trigonometry*. London: W. Innys. 96-97

[5] Ewing, A. (1771). *A Synopsis of Practical Mathematics*. Edinburgh: William Smellie & Co.

[6] Gregory, O. (1816). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: Baldwin, Cradock & Joy

[7] Harris, J. (1706). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: Dan Midwinter

[8] Heynes, S. (1716). *A Treatise of Trigonometry, Plane and Spherical, Theoretical & Practical*. London: Town Hill. 20-28

[9] Holmes, C.T. (1951). *Trigonometry*. New York: Mcgraw-Hill Book Company. 87-88

[10] Hun, J. G.& MacInnes, C. R. (1911). *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. New York: The Macmillan Company, 53-54

[11] Keil, J. (1726). *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. Dublin: W. Wilmot

[12] Lewis, E. (1860). *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Philadelphia: Uriah Hunt & Son

[13] Macgregor, J. (1792). *A Complete Treatise on Practical Mathematics*. Edinburgh: Bell & Bradsute.

[14] 梅文鼎(1759). 平三角举要. 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇(数学卷第 4 册). 郑州: 河南教育出版社, 1994. 485-387

[15] Moritz, R. E. (1915). *Elements of Plane Trigonometry*. New York: John Wiley & Sons, 125-126

[16] Nichols, F. (1811). *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Philadelphia: F. Nichols

[17] Nixon, R. C. J. (1892). *Elementary Plane Trigonometry*. Oxford: The Clarendon Press. 202-206.

[18] Ozanam, J. (1684). *La Geometrie Pratique*. Paris: Chez L'Auteur & Estienne Michallet. 110-129.

[19] Robinson, H. N. (1873). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. New York & Chicago: Ivison, Blakeman, Taylor & Co., 256-258

[20] Rothrock, D. A. (1910). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. New York: The Macmillan Co. 69-70

[21] Serret,J. A. (1850). *Traité de Trigonométrie*. Paris: Bachelier.103-106

[22] Simpson, T. (1799). *Trigonometry, Plane & Spherical*. London: F. Wingrave.

[23] Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics* (Vol.2). Boston: Ginn & Company. 631

[24] Smith, D. E. (1959). *A Source Book in Mathematics* (Vol.2). New York: Dover Publications.. 434-435

[25] Snell, W. (1627). *Doctrinae Triangulorum Canonicae*. Lugduni Batavorum: Ioannis Maire, 70-74

[26] Vance, E.P. (1954). *Trigononometry*. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Co. 65-66

[27] Vlacq, A. (1720). *La Trigonométrie Rectiligne et Sphérique*. Paris: Claude Jombert. 56-57

[28] Wright, J. (1772). *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*. Edinburgh: A. Murray & J. Cochran

[29] Woodhouse, R. (1819). *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Cambridge: J. Deighton & Sons

[30] Zaragoza, J. (1673). *Trigonometria Hispana: Resolutio Triangulorum plani & Sphaerici*. Valentiae: Hyerommum de Villagrafia. 59-72

一部三角学教材中的数学史*

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

随着 HPM 研究的深入，“数学教材中的数学史”这一课题也进入了人们的视野。早在 1998 年，英国学者 J. Fauvel 和荷兰学者 van Mannen 在马塞召开的 ICMI 研究会议上，就组织 16 个国家（包括中国）的学者对数学史在各国数学课程中的地位进行考察[1]；2010 年，在维也纳召开的第 6 届欧洲“数学教育中的数学史与认识论”暑期大学（ESU-6），来自法国、意大利、波兰、希腊等国的学者组织组织讨论了有关国家数学教材中的数学史[2]。“数学教材中的数学史”是 2016 年国际数学教育大会 HPM 专题研究小组的重要研究课题之一。在我国高中数学教材即将开始修订之际，如何将数学史融入数学教材也成了教材编写者们关注的课题。笔者在该课题的研究过程中，考察了从 19 世纪末到 20 世纪初美国出版的一些初等数学教材，发现只有少数教材运用数学史，且不同学科的教材运用数学史的情况千差万别。其中，美国数学家瑞德（P. R. Rider, 1888-?）和戴维斯（A. Davis）合编的《平面三角》[3]无论在素材数量还是运用方式上，都遥遥领先于同类教材。本文对该教材中的数学史素材及其运用方式作一分析，以期为今日教材编写和课堂教学提供参考。

1《平面三角》中的数学史内容

在数学教学中，数学史的运用方式有显性和隐性之分[1]。同样，数学教材中数学史的呈现方式也可分为显性和隐性两类。可以直接看出的数学史内容，属于以显性方式呈现的数学史（下文简称为“显性数学史”），不能直接看出来、但源于或借鉴数学史的内容属于以隐性方式呈现的数学史（下文简称“隐性数学史”）

*人民教育出版社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一。

1.1 显性数学史

1.1.1 数学人物

《平面三角》中使用了韦达（F. Viete, 1540-1603）、纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）、笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）和欧拉（L. Euler, 1707-1783）的画像（图 1），并简要介绍他们的生平。这些数学家与教材内容有密切的关系：韦达最早发现余弦定理；纳皮尔是对数的发明者（18-19 世纪的三角学教材一般都含有对数一章，因为对数是解三角形的重要工具）；笛卡儿是解析几何的发明者，而三角函数的图像与解析几何密切相关；欧拉则让三角学发展成为独立的数学学科，是三角函数符号的传播者和欧拉公式的发现者。作者在介绍人物时，尽可能体现数学背后的人文精神。如，韦达有一次呆在房间里数日不吃不喝做数学研究。

韦达　　纳皮尔　　笛卡儿　　欧拉

图 1 数学家画像

此外，在棣莫佛定理之后介绍了法国数学家棣莫佛（A. de Moivre, 1667-1754）的生平。

1.1.2 数学名词

《平面三角》在开篇的引言中即介绍“三角学”一词的来源：Trigonometry 由希腊文 trigonon （三角形）和 metria（测量）构成，愿意为“三角学形的测量”。在“对数”一章，介绍了“对数”一词的来源：logarithm 由希腊文 logos（比）和 arithmos（数）构成，原意为“比数”。

“三角函数”一章则介绍了六种三角函数名称的起源。sine一词源于印度的“*jiva*”[1]（弦），传入阿拉伯后，被音译为“*jiba*”，这个没有实际意义的词又被阿拉伯人改为有意义的“jaib”

[1]或“*jyā*”，是 *ardhā-jyā*（半弦）的简称，最早出现于 6 世纪印度数学家阿耶波多（Aryabata）的著作中。

（海湾）一词。12 世纪意大利人柏拉图（Plato of Tivoli）在翻译阿拉伯数学著作时，将“jaib”译成拉丁文“sinus”（意为“海湾”）[②]，最后，sinus被译为英文的sine。

丹麦数学家芬克（T. Finck, 1561-1656）于 1583 年创用 tangent 和 secant 二词。17 世纪，英国人冈特（E. Gunter, 1581-1626）最早使用 cosine 和 cotangent 二词，取意为“余角的正弦”和“余角的正切”。

17 世纪荷兰数学家吉拉尔（A. Girard, 1595-1632）最早使用简化的符号 sin、tan、sec 等，这些符号经过欧拉和英国数学家辛普森（T. Simpson, 1710-1761）的使用之后，逐渐被人们广泛采用。

1.1.3 数学问题

在“斜三角形”一章的习题中，有如下的“波特诺问题”：“给定三点 A、B 和 C，AB、BC 和 CA 已知，求第四点 D 到 A、B、C 的距离，其中$\angle ADB$ 和$\angle CDB$ 已知（分别设为α和β）。”波特诺（L. Pothenot, 1650–1732）于 1730 年解决该问题，但实际上早在 1617 年就被荷兰数学家斯内尔（W. Snell, 1591-1626）解决了，解法如下：

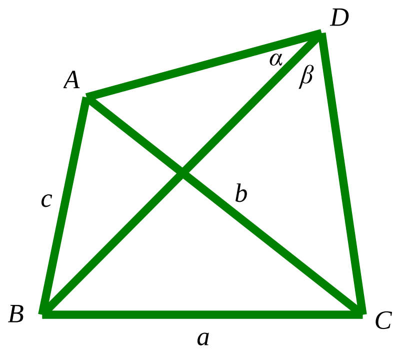


图 2 波特诺测量问题

设 $\angle BAD = x$，$\angle BCD = y$，则由正弦定理，$BD = \dfrac{c\sin x}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sin x}{\sin\beta}$，故得 $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{a\sin\alpha}{c\sin\beta}$，于是得

[②]关于拉丁文 sinus 一词的最早译者，有不同的说法。史密斯在其《数学史》中认为是意大利人格拉多（Gherardo of Cremona, 1114-1187），卡约黎在其《数学史》中认为是柏拉图。Rider 和 Davies 依据的是卡约黎的说法。后来，波耶在《数学史》中又认为是英国人罗伯特（Robert of Chester, 12 世纪），而伊夫斯在《数学史引论》中则认为是格拉多，与史密斯的说法一致。

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{a\sin\alpha+c\sin\beta}{a\sin\alpha-c\sin\beta}$$

即

$$\frac{\tan\dfrac{x+y}{2}}{\tan\dfrac{x-y}{2}}=\frac{a\sin\alpha+c\sin\beta}{a\sin\alpha-c\sin\beta}$$

因 $x+y+\angle ABC+\alpha+\beta=2\pi$，而由余弦定理可求得 $\angle ABC$，故可求得 $x+y$，由上面的等式可求得 $x-y$，从而可求出 x 和 y。最后，由正弦定理可求得 DA、DB 和 DC。

1.1.4 数学专题

在《平面三角》中，Rider 和 Davies 对角的度量（60 进制）、对数概念、正弦定理、余弦定理、正切定理等知识点作了历史注解，见表 1。

表 1 数学专题的历史注解

主题	发现者或相关数学家	国家或地区	年代
海伦公式	海伦	古希腊	公元前 2 世纪
角度制（六十进制）	迦勒底人	两河流域	公元前 7 世纪
对数	纳皮尔；布里格斯	英国	17 世纪
计算尺	奥特雷德	英国	17 世纪
正弦定理	纳绥尔丁	阿拉伯	13 世纪
余弦定理	韦达	法国	16 世纪
正切定理	芬克	丹麦	17 世纪
棣莫佛定理	棣莫佛	法国	18 世纪

值得一提的是，作者在对数的历史注记中，专门讲述了 1615 年暑假纳皮尔和布里格斯那场旷世之约的故事，正是这次会面导致了常用对数的诞生。

1.1.5 学科简史

在《平面三角》的引言中，Rider 和 Davies 概述了三角学的历史：三角形的历史可以上溯至古埃及的阿莫斯（Ahmes，约公元前 1800 年）纸草书；古希腊天文学家希帕切斯（Hipparchus，前 2 世纪）创立了三角学；古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy, 2 世纪）制

作了弦表并完善了三角学；德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）将三角学从天文学中分离出来，使之成为几何学的一部分；而欧拉则使三角学成为一门独立的学科；瑞士数学家约翰•伯努利（John Bernoulli, 1667-1748）和欧拉将三角学发展成一种分析的工具；棣莫佛将三角学用于复数的研究；瑞士数学家兰伯特（J. H. Lambert, 1728-1777）将其推广到双曲函数；法国数学家傅里叶（J. Fourier, 1768-1830）研究了三角级数；最后，挪威数学家阿贝尔（N. H. Abel, 1802-1829）研究了椭圆函数。

1.2 隐性数学史

《平面三角》也含有许多隐性数学史素材，包括数学问题、数学概念的呈现、思想方法等。

1.2.1 数学问题

中国和印度古代的“大风折竹”问题以及古巴比伦的“梯子”问题均为勾股定理的应用题，Rider 和 Davis 将其改编为解直角三角问题：

•树为风所折，与地面构成直角三角形。若折断部分与地面构成的角为 50°，树梢距树根 55 英尺，求树高。

•梯子长 36 英尺，靠墙斜放，底端距墙 25 英尺。求梯子与底面所构成的角。

1.2.2 数学概念

《平面三角》借鉴了对数的历史来引入对数概念。首先让学生回忆指数律：

指数律	例子
$b^m \times b^n = b^{m+n}$	$b^6 \times b^3 = b^{6+3} = b^9$
$b^m \div b^n = b^{m-n}$	$b^6 \div b^3 = b^{6-3} = b^3$
$\left(b^m\right)^n = b^{mn}$	$\left(b^6\right)^3 = b^{6\times 3} = b^{18}$
$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{b^6} = b^{\frac{6}{3}} = b^2$

由指数律可知：要求 b 的两个幂的乘积，只需将幂指数相加；要求 b 的两个幂的商，只需将幂指数相减；要求 b 的幂的乘方，只需将幂指数与乘方次数相乘；要求 b 的幂的方根，

只需将幂指数除以方根次数。这些事实表明，乘、除可用加、减代替，乘方、开方可用乘、除代替。

以 $b=2$ 为例，列出幂和相应的指数如下：

指数…………	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
幂…………	2	4	8	16	32	64	128	256	512	…

要求 4×32，只需将 2 和 5 相加得 7，7 对应的幂 128 就是所求的乘积。类似可做其他运算。

虽然利用上面的数表，可以简化计算，但该数表并不实用，因为它所含的数太少，对于 2 的正整数次幂以外的数，完全无用。如何将这张数表进行扩充呢？观察两列数的规律，上一列数中，从第二个数开始，每一个都是前后相邻两个的等差中项，而下一列数中，从第二个数开始，每一个都是前后相邻两个的等比中项。因此，对于上下两列数，我们可以在两个相邻项之间插入新的数：在下一列数的 16 和 32 之间插入 $\sqrt{16\times32}=22.624$，相应地，在上一列数的 4 和 5 之间插入 $\dfrac{4+5}{2}=4.5$，于是，我们有

指数……………	4	4.5	5	…
幂……………	16	22.624	32	…

但上述插入指数和幂的方法仍然不实用，事实上，我们无法获得等比中项的精确值；另一方面，给定一个幂，相应的指数往往也是无法精确得到的。因此，数学上需要定义对应于任意一个数的指数。

这里，作者试图引导初学者经历对数产生的完整过程。

1.2.3 思想方法

这里所说的“思想方法”，指的是教材中推导公式或证明定理所用的思想方法。《平面三角》在推导三角公式时，往往沿用了历史上的几何方法。

考虑锐角α和β。如图 3 所示，由 $PM=PQ+RN$， $OM=ON-QR$ 可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

类似地，由图 4 中的 $PM=RN-PQ$ 和 $OM=ON+QR$ 可得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

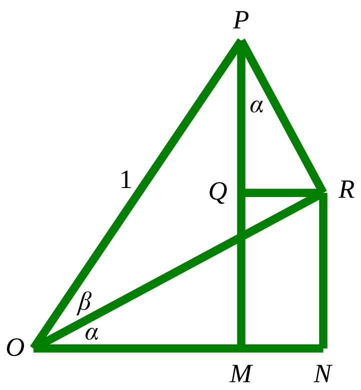


图 3 和角公式的证明

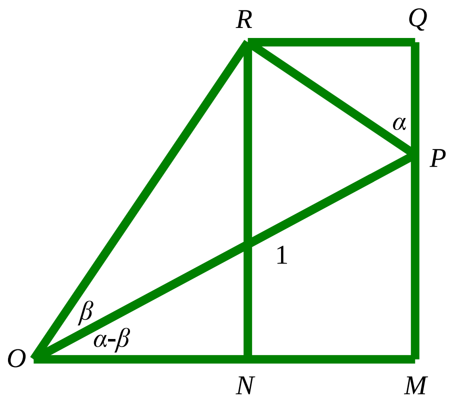


图 4 差角公式的证明

再利用诱导公式可证，上述公式对于任意的α和β均成立。

在习题中也设置了几何证明问题：利用图 5 和 6 分别证明倍角和半角正余弦公式。

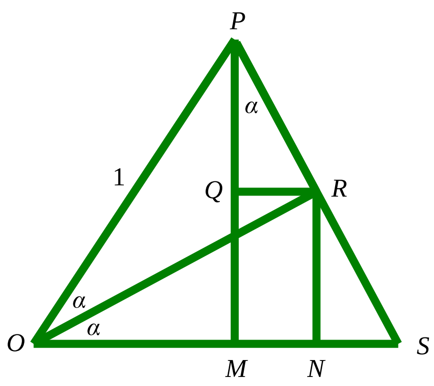


图 5 倍角公式的证明

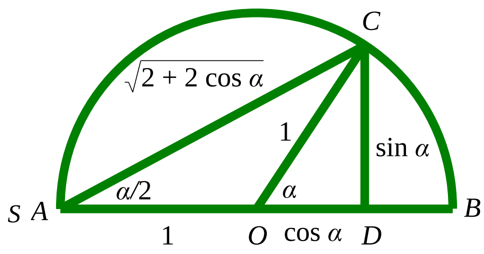


图 6 半角公式的证明

关于正弦定理，《平面三角》分别采用作高法和韦达的外接圆方法来证明。而关于正切定理，则采用典型的几何方法：如图 7 所示，以ΔABC的顶点C为圆心、CA为半径作圆，

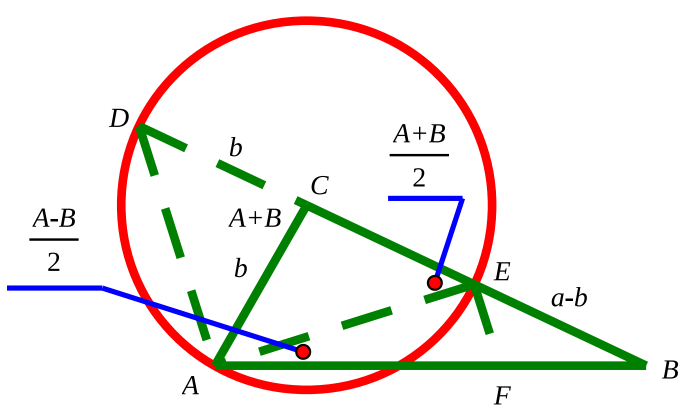


图 7 正切定理的证明

分别交 BC 及其延长线于点 E 和 D，过点 E 作 $EF \perp AE$，交 AB 与 F。易证

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{EF}{DA}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

上述三角公式的几何证明方法已见于 18-19 世纪的许多三角学著作中。

2 数学史的运用方式

根据各类数学史素材在教材中所发挥的功能，我们将数学教材运用数学史的方式分为点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式五种[4]。其中，显性数学史的运用方式为点缀式、附加式和复制式，而隐性数学史的运用方式为顺应式或重构式。

《平面三角》中的数学家画像即属于点缀式素材，与教材的主题相配，起着点缀教材、使教材更为人性化的作用。数学家生平、数学名词的来源、数学专题的历史注解等均属于附加式素材，这类素材可与教材的正文内容分离开来，起着“追溯历史起源、补充历史知识、提供辅助材料”的作用。波特诺测量问题、三角学的历史均属于复制式素材，这类素材是教材正文不可分割的一部分，其功能是提供数学问题、提供历史背景、促进数学学习。

改编自历史上数学问题的习题，或根据历史材料而编制的数学问题，或源于数学史、但经过简化的思想方法均属于顺应式素材，是教材不可分割的一部分。18 世纪的教材以及 19

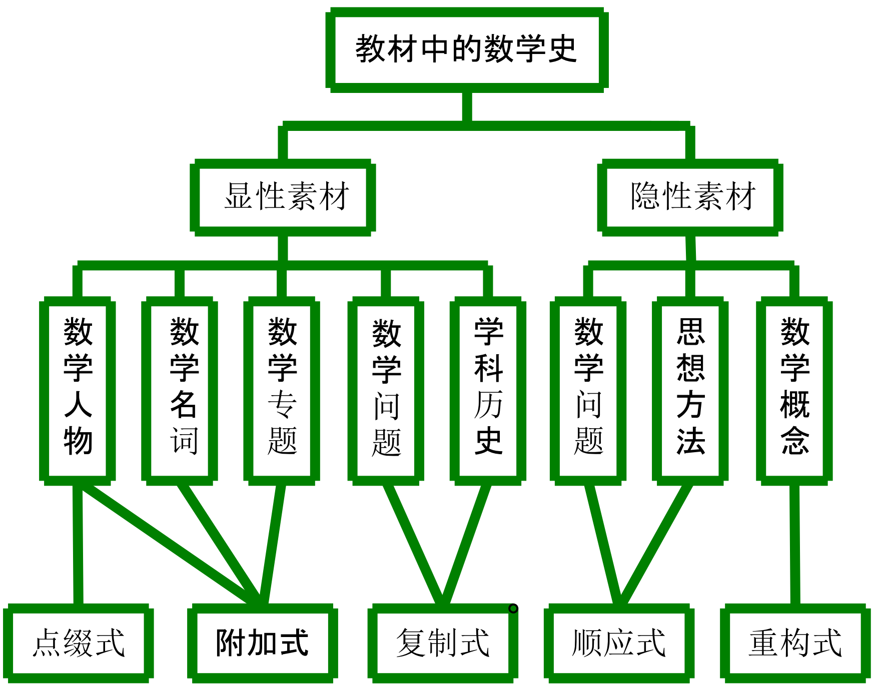


图 8《平面三角》中的数学史素材及其运用方式

世纪的很多教材将三角函数视为线段而非比值，而《平面三角》和今日教材一样将三角函数作为比值来处理，因而其中一些三角公式的证明属于顺应式。顺应式素材的功能是提供数学问题、增加探究机会、再现古人思想、激发学习兴趣。

重构式是指借鉴知识的发生、发展历史，以发生法来呈现知识。重构历史不是重复历史，而是在借鉴历史的基础上，结合知识的逻辑顺序和学生的心理发生顺序，自然而然地呈现一个主题。《平面三角》中对数概念的引入即属于重构式素材，其功能是把握认知基础、激发学习动机、促进概念理解。

图 8 给出了《平面三角》中的数学史素材与五种运用方式之间的关系。

3 结语

以上我们看到，《平面三角》运用了相当丰富的数学史素材，这些素材可分成显性和隐性两大类，显性素材又可分为数学人物、数学名词、数学问题、专题历史、学科历史五类；而隐性素材则包括数学问题、数学概念和思想方法三类，各类素材的具体运用方式分属点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式。一部近百年前出版的数学教材竟运用了所有五种方式，即使与今天的教材相比，也毫不逊色！就“数学史融入数学教材”这个角度而言，《平面三角》为教材编写提供了一个范例。

在浩如烟海的西方数学教材中，只有少数教材运用数学史，《平面三角》给我们一种“鹤立鸡群”的感觉，令人印象深刻。这从一个侧面说明，将数学史融入教材并非易事。教材编写者需要深入了解数学的历史及其教育价值，手头掌握丰富的素材，心中充满人文关怀。我们有理由相信，“数学史融入数学教材”将是一个需要长期研究的课题。

参考文献

[1] Boyé, A. et al. The History of Mathematics in School Textbooks: Panel Discussions of the 6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education, 2010

[2] Fauvel, J. & van Maanen, J. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

[3] Rider, P.R.& Davis,A.*PlaneTrigonometry*. New York: D. van Nostrand Co.,1923

[4] 汪晓勤. 法国初中教材中的数学史. 数学通报, 2012, 51(3): 16-20, 23

教学实践

HPM视角下的分数指数幂教学 *

叶晓娟[1] 顾海萍[2]

（1.华东师范大学数学系，上海, 200241; 2. 上海师范大学附属经纬实验学校，上海, 200444）

1 引言

在沪教版教材中，分数指数幂是“实数”一章的最后一节。教材从把 $\sqrt[3]{2}$ 表示为 2 的 m 次幂出发，首先由 2 的任意整数指数幂都是有理数判断出 $\sqrt[3]{2}$ 是一个无理数，进而指出必须将指数的范围扩大，才有可能把 $\sqrt[3]{2}$ 表示为 2^m 的形式。于是在整数指数幂运算律的基础上扩大指数的取值范围，得到 $m=\dfrac{1}{3}$。随后教材规定：

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\left(a\geq 0\right)，\quad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=a^{-\frac{m}{n}}\ （a>0），$$

其中 m、n 是正整数，$n>1$。接下来是六道用来练习的计算题。

虽然教材编写者的意图是说明分数指数幂的合理性，但其出发点是“$\sqrt[3]{2}$ 可以表示为 2 的 m 次幂”，而这一出发点本身并不自然。另一方面，为了避免讨论 $2^{\frac{1}{2}}$ 究竟是 $\sqrt{2}$ 还是 $-\sqrt{2}$，编者无奈选择了 $2^{\frac{1}{3}}$，最终通过一般规定“蒙混过关”。

鉴于此，我们希望从分数指数幂的历史起源中寻找恰当的教学方法，更加自然地引入该概念，并加深学生的概念理解。我们拟定的教学目标如下：

（1）经历幂概念的扩充过程，感受分数指数幂规定的合理性，理解分数指数幂的意义。

（2）能将方根转化成幂的形式。

（3）通过历史上分数指数幂符号形成的过程，感受数学的发展历程，感悟数学文化。

*本文发表于《教育研究与评论（中学教育教学）》2015 年第 4 期。

2 历史材料及其运用

14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）在其《比例算法》（约写于 1360 年）中，分别用 $\boxed{\begin{array}{cc}\mathbf{1} & \boldsymbol{p} \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{array}}$ 和 $\boxed{\begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \boldsymbol{p} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{array}}$ 来表示 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$ [1]，用我们今天的记号来表达，就是

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,,\quad \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$$

由此可知，奥雷姆已经知道方根与分数指数幂之间的关系。

16 世纪德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）在其《整数算术》（1544 年）中将幂指数从非负整数推广到负整数，建立如下指数和幂之间的对应关系：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \ldots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \ldots \end{array}$$

用今天的记号，斯蒂菲尔已经知道 $2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}$ 了，这是历史上负整数指数幂的最早使用。但斯蒂菲尔没有将指数推广到分数的情形。

16 世纪荷兰数学家斯蒂文（S. Stevin, 1548-1620）在《十进算术》（1585 年）中将分数写在圆圈内，表示一个未知数的分数指数幂。17 世纪荷兰数学家吉拉尔（A. Girard,1595-1632）在《代数新发明》（1629 年）中将分数写在一个数的前面，表示该数的分数指数幂；而将分数写在一个数的后面，则表示这个数为系数，后面乘以未知数的分数指数幂[1]。如 $\left(\dfrac{3}{2}\right)49$ 表示 $49^{\frac{3}{2}}$，而 $49\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 表示 $49x^{\frac{3}{2}}$。

17 世纪英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）在《无穷算术》（1655 年）中给出负指数幂和分数指数幂的运算，从而将指数律推广到了任意有理数指数幂。牛顿（I. Newton,1643-1727）在其通信（1676 年）中用 $a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{3}{2}}$，$a^{\frac{5}{3}}$ 等表示 $\sqrt{a}$，$\sqrt{a^3}$，$\sqrt[3]{a^5}$ 等，用 a^{-1}，a^{-2}，a^{-3} 等表示 $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{a^2}$，$\dfrac{1}{a^3}$ 等[2]，这就是我们今天使用的记号。

18 世纪，欧拉在《代数学基础》中用类比的方法来引入分数指数幂：因 a^2 的平方根为 a，a^4 的平方根为 a^2，a^6 的平方根为 a^3，等等，平方根为同底数的幂，指数折半。故 a^3 的

平方根应为$a^{\frac{3}{2}}$，a^5的平方根应为$a^{\frac{5}{2}}$，等等，因此，$a^{\frac{1}{2}}$为a的平方根，即$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$，这里，欧拉所说的平方根均指算术平方根，$a>0$。类似地可考虑更高次方根[3]。

奥雷姆、斯蒂文和吉拉尔如何发现方根与分数指数幂之间的关系，并无文献记载，但他们以正整数指数幂为出发点，殆无疑问。在教学设计中，我们借鉴斯蒂菲尔的“幂与指数对应法”以及欧拉的类比法，从正整数指数与幂之间的对应关系入手，自然地呈现分数指数幂概念的形成过程；展示分数指数幂的符号的历史；同时，在课堂内外的练习中也运用了沃利斯和欧拉的有关分数指数幂问题。

3 教学设计与实施

3.1 新课引入

首先让学生回顾2^n（n为整数）的含义，引导他们建立 2 的正整数指数幂与指数之间的对应关系：“指数减 1，幂折半。”基于这一对应关系，将指数推广到 0 和负整数，检验已学过的负整数指数幂的意义，见表 1。

表 1 整数指数幂与指数之间的对应关系

指数	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
幂	…	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	…

引导学生总结：2 的非负整数指数幂是正整数，2 的负整数指数幂是正分数，即 2 的整数指数幂是正有理数。如果在指数 0 和 1 之间插入平均数$\frac{1}{2}$，那么对应的幂$2^{\frac{1}{2}}$会是什么数呢？有学生猜测：$2^{\frac{1}{2}}$是 0 和 1 所对应的幂 1 和 2 的平均数$\frac{3}{2}$。这时，教师引导学生观察相邻三个正整数指数幂之间的关系，来推翻上述猜测。

观察相邻的三个指数 0、1、2 所对应的幂 1、2、4，1 和 4 的平均数显然不等于 2！此时，学生恍然大悟：上述猜测是错误的。但当教师问：1、2、4 三个数中，中间的 2 与 1、4 之间究竟有什么关系时，绝大多数学生未能发现规律。

教师相继再取指数 1、2、3 对应的幂 2、4、8 和 2、3、4 对应的幂 4、8、16。在教师的提示下，学生终于发现：在中间的指数是左右指数的平均值时，它所对应的幂是左右两个

幂的乘积的算术平方根。因此，0 和 1 的平均数 $\frac{1}{2}$ 所对应的幂 $2^{\frac{1}{2}}$ 应该等于 1 和 2 的乘积的算术平方根，即 $\sqrt{2}$ 。

接下来，在整数指数幂的运算律仍然适用的前提下，验证上述猜测的合理性：

$$2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^1=2$$

因表 1 中第二行不含负数，故得 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 。

经过合理的猜测与证明，学生能够很自然地接受 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 这一事实。

3.2 概念形成

在概念形成部分，我们设计了四道思考题来进行幂和方根之间的转化，通过改变幂指数逐步增加转化的难度。其中第 1、2、4 三题需借助同底数幂运算法则来完成。

思考 1：将 $2^{\frac{1}{3}}$ 、 $2^{\frac{1}{4}}$ 和 $2^{\frac{1}{5}}$ 表示成方根的形式。

小结： $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ （ $a\geq 0$ ， n 为正整数，且 $n>1$ ）。

注：若 $a<0$ ，则当 n 为偶数时，根式无意义。

思考 2：把 $2^{\frac{2}{3}}$ 和 $2^{\frac{5}{4}}$ 表示成方根的形式。

小结：分数指数中的分母是方根的根指数，分子是被开方数的幂指数。

归纳： $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ （ $a\geq 0$ ， m,n 为正整数，且 $n>1$ ）

注：若 $a<0$ ，则当 n 为偶数、 m 为奇数时，根式无意义。

思考 3：把 $2^{-\frac{1}{2}}$ 表示成方根的形式。

引导学生回头观察表 1：在 0 和-1 之间插入平均数数 $-\frac{1}{2}$ ，对应的幂 $2^{-\frac{1}{2}}$ 是什么数呢？根据刚才的经验，学生立即得出这个数是 1 和 $\frac{1}{2}$ 的乘积的算术平方根，即 $2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

思考 4：把 $2^{-\frac{2}{3}}$ 表示成方根的形式。

小结：负分数指数幂表示为正分数指数幂的方根的倒数。

归纳：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0$，其中 m,n 是正整数，且 $n>1$）

接下来，教师加以总结：$a^{\frac{m}{n}}$ 和 $a^{-\frac{m}{n}}$ 称为分数指数幂，a 为底数。整数指数幂和分数指数幂统称为有理数指数幂。

注意：指数的取值范围扩大到有理数后，方根就可以表示为幂的形式，开方运算可以转化为乘方形式的运算。

3.3 历史展示

历史上，从 14 世纪的奥雷姆到 17 世纪的牛顿，分数指数幂的符号表示经历了三百余年的完善过程。分数指数幂概念形成之后，我们通过时间坐标轴，向学生展示该过程，如图 1 所示。

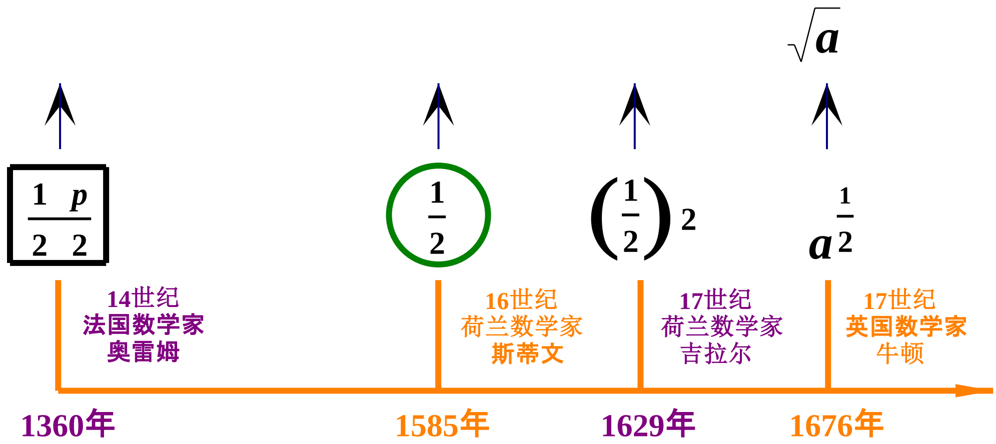


图 1 分数指数幂符号的历史

当被问及最喜爱哪位数学家的符号时，学生的回答是牛顿或斯蒂文。此时，分数指数幂已不仅仅是个枯燥的数学符号，而是数学家创造活动的见证。

3.4 例题讲解

为了让学生熟练运用分数指数幂概念，利用分数指数幂的意义求幂的值，我们设计了两道例题和一道思考题。

例 1：把下列方根转化成幂的形式：（1）$\sqrt[3]{5}$；（2）$\sqrt[4]{5^3}$；（3）$\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$；（4）$\sqrt[4]{9}$。

例 2：计算下列分数指数幂的值：（1）$49^{\frac{1}{2}}$；（2）$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$；（3）$16^{-\frac{1}{4}}$；（4）$4^{\frac{1}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}$。

思考题：17 世纪英国数学家沃利斯在其《无穷算术》中给出分数指数幂的运算：$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n^2=\sqrt{n^3}$，你能否验证这个等式？

学生在教师引导下才完成验证。

4 练习反馈

课后，布置了一道根据欧拉《代数基础》中的习题改编而成的问题：将 a^2 和 $\sqrt{a}$ 化成指数同为 $\frac{1}{3}$ 的幂（原题中 $\sqrt{a}$ 为 $a^{\frac{1}{2}}$）。

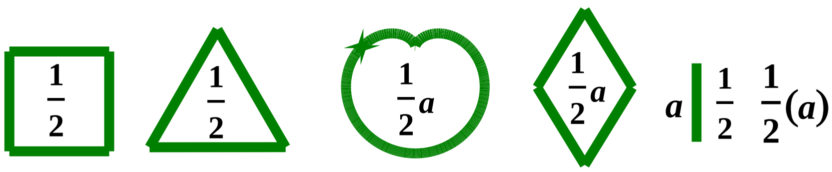
在提交答卷的 26 人中，15 人（57.7%）给出了正确答案，3 人（11.5%）解错，8 人（30.8%）未完成或是空白。

$$a^2=(a^6)^{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

图 2 欧拉问题：学生的正确解法

在课后调查问卷中，我们设计了这样一个问题："历史上数学家给出了分数指数幂的不同记号，你最喜欢哪一种？请你自己再创造一个新的符号。"共收回 32 份有效问卷。表 2 给出学生对回答情况。

学生自己创造了各种各样的符号，以下为其中一部分：



调查问卷中，我们还设计了这样一个问题："这节课你印象最深的是什么？请说明理由。" 17 人回答"分数指数幂的定义"或"幂与方根互化"，15 人回答"数学史"、"数学家"或"符号创造"，2 人回答"幂从有理数扩展到无理数"。

访谈中，六位学生均表示自己很喜欢数学概念背后的历史文化知识，一致认同老师引入分数指数幂的方式，一位学生这样说道："万一我考试的时候忘记了定义，我可以用老师

表 2 学生对符号的选择情况（$N=32$）

年份	数学家	分数指数幂的符号	选择人数
1360	奥雷姆	$\boxed{\begin{array}{cc}1 & p\\ \hline 2 & 2\end{array}}$	0
1585	斯蒂文	$\frac{1}{2}$	13
1629	吉拉尔	$\left(\frac{1}{2}\right)2$	1
1676	牛顿	$a^{\frac{1}{2}}$	18

课上讲过的方法自己推出来。”

5 结语

我们可以用数字来总结本节课的特点。

•一个视角。本节课一改“从规定到规定”的做法，从历史发生的视角进行教学设计，试图呈现分数指数幂的自然发生过程。

•两座桥梁。整节课建立了两座桥梁：一是沟通历史和现实之桥，重构分数指数幂的历史，使之再现于课堂，走过这座桥，学生也就完整地经历了分数指数幂的形成过程；二是沟通已知和未知之桥，方根对学生来说是已知的，而分数指数幂对他们来说则是全然未知的，走过这座桥，学生也就理解了分数指数幂的必要性和合理性。

•三维目标。无疑，没有 HPM 的介入，也能很好地达成知识和技能目标。但由于数学史的融入，本节课在“过程和方法”、“情感、态度和价值观”这两个目标上显得更有成效。学会探索一种新知的方法比仅仅学会这种新知更重要。波利亚（G. Polya, 1887-1985）说过，“类比是一个伟大的领路人”，在本节课，学生面对一个未知的知识领域，学会了运用类比的探究方法，这对今后的数学学习乃至工作和生活都有积极的意义。另一方面，通过幂指数符号的历史，让学生认识数学活动的本质——数学史人的文化活动，那些数学符号并非从天而降，乃是数学家的创造，且经历了优胜劣汰的过程；学生自己也能创造出数学符号。由此可以拉近学生与数学的距离。

•四种方式。本节课主要采用重构历史的方法。同时，复制式或顺应式运用了历史上数

学家的有关问题，附加式展示了分数指数幂符号的历史。

•五项原则。和我们之前已经开发的其他 HPM 教学案例一样，本节课的设计也遵循了趣味性、可学性、科学性、有效性和新颖性五项原则，这里不再赘述。

在开发本案例之前，任课教师，甚至是数学教育方向的在读研究生们，都曾怀疑采用 HPM 视角教授分数指数幂的可能性，因为该知识点的历史对于他们而言是一个盲点。然而，事实证明，数学史是一座丰富的宝藏，蕴含了取之不尽、用之不竭的教学资源和思想养料，任何知识点的教学都能从中获益。

参考文献

[1] Cajori F. *A History of Mathematical Notations* (Vol.1). La Salle: The Open Court Publishing Company, 1951. 91-93; 154-160.

[2] Smith, D. E.*A Source Book in Mathematics*(Vol.2). New York: Dover Publications, 1959. 217-228.

[3] Euler, L. *Elements of Algebra*. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co. 1822. 56-60.

同底数幂的运算：从历史到课堂 *

齐春燕[1] 顾海萍[2]

（1.华东师范大学数学系，上海, 200241; 2.上海师范大学附属经纬实验学校，上海, 200444）

上海市初中数学课程标准指出：“要展现知识的发生、发展、形成和应用的过程，加强数学学习活动，提供学生亲身感受、体验的机会。”[1]但在教材和实际课堂教学中，不少知识点的引入都未能完全反映上述要求，“同底数幂的运算”就是这样一个知识点。为了展现该知识点的自然发生过程，激发学生的学习动机，我们从 HPM 的视角进行教学设计，并付诸实施。

1 历史概述

古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 前 287～前 212）在数沙粒数时，要面对10^{51}这个大数，但在 17 世纪以前，人们并没有简便的大数记法。阿基米德采用了万万进的记数方法表达了这个大数，并提出了一个定理，用今天的记号，就是$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$。

在阿基米德之后，古希腊数学家丢番图（Diophantus, 3 世纪）、阿拉伯数学家阿尔·卡拉吉（al-Karaji, 953～1029）、意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 1170?～1250?）等都采用“加法法则”来记四次及更高次幂，如“平方-平方”表示四次幂，“平方-立方”表示五次幂，等等[2]。

15-16 世纪的欧洲数学家通过等差和等比数列之间的对应关系来呈现同底数幂的运算法则。德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487～1567）在《整数算术》中讨论了等差和等比数列之间的四种对应关系，等比数列中的乘、除、乘方、开方运算分别对应于等差数列中的加、减、乘、除。在首相为 1、公比为 2 的等比数列情形，第一种对应关系相当于$2^m \times 2^n = 2^{m+n}$（$m \in Z$，$n \in Z$）。

1637 年，法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）在其《方法论》附录——《几何学》中创用了幂的新记号，用a^3表示aaa，a^4表示$aaaa$，等等。有了笛卡儿的新记号，同底数幂运算法则的导出就变得自然而然了。

*本文发表于《教育研究与评论（中学教育教学）》2015 年第 3 期。

历史告诉我们，同底数幂的运算源于大数的记法。运算律经历从以 10 为底的幂到以 2（或 3）为底的幂再到以字母为底的幂的发展过程。借鉴历史，我们设计了两个问题，先让学生经历大数的表达和以 10 为底的幂的运算，再引导学生完成以 2 为底的幂的运算，最后总结用字母表示同底数幂的乘法公式，让学生经历同底数幂的运算律的自然发展过程，体会其中所蕴含的数学思想，感受其背后的数学文化。接下来利用三道例题，由浅入深，让学生在实践中理解并掌握用字母来表示同底数幂的乘法公式。

2 教学设计与实施

2.1 大数的记法

问题 1　宇宙沙数

教师首先给学生发一份学案，其中含有一则发生在公元前 3 世纪的故事——阿基米德和叙拉古王子盖罗在海边散步时谈起的沙粒数问题（参阅文献[3]）。

教师通过阿基米德的大数记法来引入以 10 为底的幂的运算法则。

第一步：从 1 数到 1 万，再从 1 万数到 1 万万，请用科学记数法来表示 1 万万；

第二步：把第一步得到的数作为一个新数 a，从 a 开始数到 1 万万个 a，请用科学记数法来表示这个数；

第三步：再把第二步得到的数作为一个新数 b，从新数开始数到 1 万万个 b，请用科学记数法来表示这个数。

引导学生完成以上步骤后，教师继续提问：阿基米德最后得到装满整个“宇宙”（以地球为中心，地日距离为半径的球）的沙粒数目不超过 6 个 1 万万相乘再乘以 1000，用今天的记数法如何表示？

这个大数由$10^8\times10^8\times10^8\times10^8\times10^8\times10^8\times10^3$得出，它究竟有多大呢？教师告诉学生：阿基米德是用运算律$10^m\times10^n=10^{m+n}$得出最后结果的。

为了加深学生对以 10 为底的幂运算的理解，教师又提出以下问题：

（1）阿基米德数到万万万时，得到 10 的几次幂？

（2）当数到 10 的 20 次幂时，用了几个万？

（3）如果没有我们今天的幂的符号，如何用平方和立方来表达十次幂呢？

通过第 3 个问题让学生感受到，只用平方和立方来表示更高次的幂很不方便，这实际上

是让学生经历古人在没有幂的现代记号的情况下表达高次幂的过程。

2.2 同底数幂与指数之间的对应关系

问题 2：沙场点兵

古代某沙场，每个千夫长所率领的士兵需排列成一个32×32的方阵。某天，将军叫来64个千夫长按8×8的排列于军营中开会，要求大家按照会场所排列的位置，带领手下士兵在列兵仪式上站到相同位置。如：第3排第3列的千夫长需要带领他的方阵在列兵仪式上站在第3排第3列。请问：一共多少人？

通过分析学生列出$32\times32\times8\times8=1024\times64=65536$。一些学生在计算时不但速度慢，而且还出错。在教师的指导下，学生发现上式是 2 的同底数幂的乘法运算：

$$2^5\times2^5\times2^3\times2^3=2^{10}\times2^6=65536$$

接着，教师给出了一个如下关于2^n的表格：

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
14	15	16	17	18	19	20

表格的第一行为2^n的值，第二行为n的值。让学生从表格中快速地找到 32、8、1024、64、65536 及其相应的n的值 5、3、10、6、16，得到

$$2^5\times2^5\times2^3\times2^3=2^{16}$$

或

$$2^{10}\times2^6=2^{16}$$

教师接着提问：在表格中的n分别为m和k时，$2^m\times2^k=?$引导学生归纳出以 2 为底的幂的乘法法则。

以上两个例子都是同底数幂相乘，可通过“底数不变、指数相加”的办法得到结果，通过这种方法可以减少大数的运算。那么，对于以其他正整数为底的幂的运算，上述方法是否适用呢？

2.3 以字母 a 为底的幂的乘法

让学生思考：前面我们学习了“用字母表示数”，知道任意一个数或一类数可以用字母来表示，那么，我们可以用字母来表示任意一个正整数的幂以及同底数幂的乘法法则吗？引导学生推导 $a^m \cdot a^n$：一般地，如果 m、n 是正整数，那么

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m\text{个}a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n\text{个}a} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(\quad)\text{个}a} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{aligned}$$

据此给出同底数幂乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加。教师强化同底数幂相乘，指数是相加，而不是相乘。

3 实践应用

为了巩固对法则的应用，我们设计了卡片大作战游戏。

第一回合：先给几个同学发几张写有单项式的卡片，让学生找出与 3^5、x^4 和 $(a-b)^2$ 同底的幂后，再计算两个幂的乘积，结果用幂的形式来表示。

在计算过程中强调数字之间的乘号用“×”，字母之间的乘号用“ •”。

学生很快就找到了与教师在黑板上给出的幂同底的幂，并给出正确的结果，但对应于 $(a-b)^2$，出现了两个同底的幂 $(a-b)^3$ 和 $(a-b)^4$，为了计算三个同底数幂相乘的公式，接着进行第二回合：让学生找到两个与黑板上的幂同底的幂后，计算这三个幂的乘积，结果用幂的形式来表示。

思考：三个或三个以上同底数的幂相乘，是否也符合上述法则？

法则推广：$a^m \cdot a^n \cdot a^p =$______________。

为了增加难度，接着进行第三回合：让学生找到与黑板上的幂的底数互为相反数的幂后再计算乘积，结果用幂的形式表示。

大部分学生能顺利地找出与 3^5 和 x^4 的底数互为相反数的幂，但有些学生对 $b-a$ 是否 $a-b$ 的相反数感到困惑。

对于底数互为相反数的幂的乘法运算，一般把它转化为相同底数幂的乘法运算，然后运

用同底数的幂相乘的法则进行计算。提醒学生注意转化时的运算符号，如 $a-b=-(b-a)$，所以 $(a-b)^2=[-(b-a)]^2=(b-a)^2$。

为了考察学生对同底数幂乘法公式的综合运用接着进行最后一个回合：让学生计算：

（1）$3^5+(-3)^2\times3^3$

（2）$x^4\cdot x^2+x^3\cdot(-x)^3$

（3）$(a-b)^2\cdot(a-b)^4-(b-a)^3\cdot(a-b)^3$

有学生在解第 1 题时出现了 $3^5+3^5=3^{10}$ 这样的错误，原因是误将整式加法的合并同类项当做同底数幂的乘法。

对于整式的加（减）、乘混合运算，需根据先乘再加（减）的运算顺序进行计算。

4 学生反馈

课后，我们对 33 名学生进行了问卷调查。结果表明，32 人（96.9%）能够理解阿基米德的计数方法，33 人都能够准确地表示故事中的万万和万万万万。针对问题：“如果没有我们今天的幂的符号，你能用平方和立方来表达一个数的 15 次幂吗？若不可以，为什么？若可以，请表示出来”，所有 33 人都认为可以。其中，13 人写成 6 个平方、1 个立方的乘积，8 人写成 5 个立方的乘积，5 人写成 3 个平方、3 个立方的乘积，2 人使用两个 6 次幂、一个立方的乘积，3 人因为粗心，给出的结果中指数之和不等于 15，2 人未表达。有 3 人使用了两种以上的表达方式。可见，大多数学生掌握了同底数幂运算法则，并能处理三个以上的幂的情形。

针对问题：“等式 $5^3+5^4=5^7$ 正确吗？为什么？”所有 33 人都给出否定回答。多数学生回答“这不是同底数幂的乘法”，或者“要是乘法就成立了”；还有一部分学生给出的理由是“不是同类项，不能合并”。

最后一题是底数中含有负号、幂的前面含有负号的乘法问题，考察学生对同底数幂乘法公式的理解。只有 3 人全部做对。学生对用字母表示的带负号的同底数幂的乘法还没有完全理解，有多添负号的，有漏写负号的，还有把乘法当成加法进行合并同类项的。

5 结语

对同底数幂乘法的理解与掌握直接影响着学生对字母表示数和后续要学习的幂的乘方、积的乘方运算律的理解，所以本节课的内容起着承上启下的作用。通过学生练习的结果和反馈来看，学生对同底数幂的乘法运算的掌握情况总体较好，对底数为具体数字的幂的乘法法则掌握得最好，对于以字母为底的幂，若不出现负号，绝大多数学生也能运用自如。但若底数中出现了负号，学生的错误率就大大增加。

本节课主要采用重构数学史和顺应式的方式展开教学。从整体上来看，从以 10 为底的幂的乘法到以 2 为底的幂的乘法，再到以字母为底的幂的乘法，再现了同底数幂乘法的历史发展过程，属于重构式；从局部来看，利用阿基米德著作《数沙者》中的材料以及 16 世纪等差和等比数列对应关系来编制有关幂运算问题，属于顺应式。

本设计还存在许多不足之处。首先，同底数幂乘法公式的形成过程还重构得不够流畅自然，特别是从以具体数字为底的幂到以字母为底的幂的过渡还有待于改进。其次，虽然学案中给出了一则关于阿基米德数沙的阅读材料，但因篇幅较长，且未经裁剪加工，课堂上没有起到应有的效果。如果教师能够在课上以生动浅显的语言叙述阿基米德数沙的故事，那么，教学效果将得到提高。再次，虽然“实践应用”环节与数学史没有关系，但我们仍可以将其设计得更为人性化。历史上，18 世纪大数学家欧拉（L. Euler, 1707～1783）较早提出 a 的两个幂相乘的法则。我们可以将“卡片大战”游戏设计成欧拉的“挑战题”，让学生更加亲近数学。

参考文献

[1] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准（试行稿）[M].上海: 上海教育出版社, 2004.

[2] 汪晓勤. 同底数幂运算法则的历史[J].. 中学数学月刊, 2015, (1): 46-48.

[3]田方琳, 汪晓勤.初中数学课堂上的数学故事[J]. 中学数学月刊, 2013, (9): 50-53.

HPM视角下的正弦定理教学 *

张筱瑜

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

正弦定理是人教 A 版高中数学必修 5 第一章第一节的内容。教材在章头以嫦娥奔月、测地月距离来引入解三角形的问题，提到在数学发展历史上，天文、航海和地理对解三角形的推动，并列举较多实际问题。由探究三角形边角关系入手，从定性（大边对大角、小边对小角）到定量，遵循从特殊到一般的规律进行探究，从直角三角形出发，得到 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，利用作高法证明锐角三角形的情形，并讨论钝角三角形情形，得出正弦定理。习题中含有等式 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ 的证明。最后给出三角形面积公式。

沪教版高中数学教材中，正弦定理是第 5 章第 3 节“解斜三角形”的内容。教材从林场问题出发，引入斜三角形边角关系问题；进而建立直角坐标系，推导三角形面积公式，据此得出正弦定理。在例 6 中，由辅助直径法证明正弦定理的比值为$2R$。

关于正弦定理，历史上不同时空的数学家曾给出丰富多彩的几何推导方法。两种教材各具特色，但都未能让学生看到定理证明方法的多样性，未能让他们经历边与对角正弦比值的探究过程；同时，由于数学文化元素的缺乏，学生也未能感受定理背后的人文精神。鉴于此，我们尝试将数学史融入正弦定理的教学，旨在开发新的 HPM 教学案例，促进 HPM 的实践研究，并为高中数学教材的修订提供参考。

1 历史材料及其运用

1.1 历史概述

历史上，正弦定理的证明有两种方法。第一种方法可以称为“同径法”，为 13 世纪阿拉伯数学家和天文学家纳绥尔丁（Nasir-Eddin, 1201-1274）和 15 世纪德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）所采用。“同径法”是将三角形两个内角的正弦看作半径相

*人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列教学案例之一。

同的圆中的正弦线（16 世纪以前，三角函数被视为线段而不是比值），利用相似三角形性质得出两者之比等于角的对边之比。纳绥尔丁同时延长两个内角的对边，构造半径同时大于两边的圆。雷格蒙塔努斯将纳绥尔丁的方法进行简化，只延长两边中的较短边，构造半径等于较长边的圆。

18 世纪英国数学家辛普森（T. Simpson,1710-1761）进一步简化了“同径法”[1]。如图 1，在 *AC* 上取点 *E*，使得 *CE*= *AB*，以 *AB*= *CE* 为圆的半径，则有 $AD=\sin B$， $EF=\sin C$，故有 $EC:AC=EF:AD$， 即 $AB:AC=\sin C:\sin B$ 。

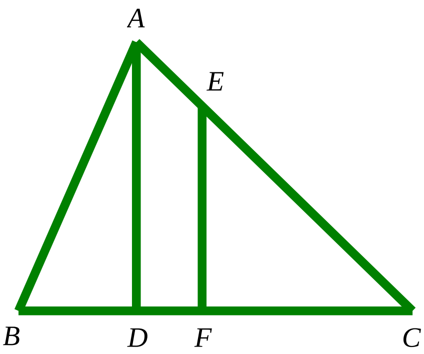


图 1 辛普森的同径法

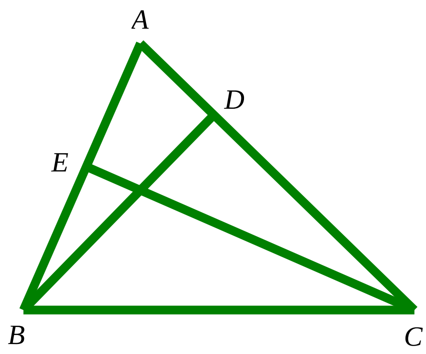


图 2 麦克格雷戈的同径法

18 世纪苏格兰数学家麦克格雷戈（J. Macgregor）则对“同径法”作了另一种简化[2]。如图 2，作 *AB* 和 *AC* 上的高线 *CE* 和 *BD*，以 *BC* 为圆的半径，则有 $CE=\sin B$，$BD=\sin C$；又由 $\Delta BAD\sim\Delta CAE$ 得 $AB:AC=BD:CE=\sin C:\sin A$。

18 世纪初，“同径法”又演化为“直角三角形法”，这种方法不需要选择并作出圆的半径，而只需作出三角形的高线，利用直角三角形边角关系（仍要用到圆的半径 *R*）得出正弦定理[3]。19 世纪，英国数学教学伍德豪斯（R. Woodhouse, 1773-1827）开始统一取 R = 1，相当于用比值来表示三角函数。如图 1， $\sin B=\dfrac{AD}{c}$ ， $\sin C=\dfrac{AD}{b}$ ， 故有 $AD=c\sin B=b\sin C$ [4]。这就是今天普遍采用的“作高法”。

第二种方法为“外接圆法”，最早为 16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）所采用[5]。如图 3，从三角形 *ABC* 的外心 *O* 向 *AB*、*BC* 和 *CA* 引垂线，垂足分别为 *D*、*E* 和 *F*，则 $\angle A=\angle BOD$， $\angle B=\angle AOE$， $\angle C=\angle AOF$ 。于是

$$a=2BD=2\sin BOD=2\sin A,$$

$$b=2AE=2\sin AOE=2\sin B,$$

$$c=2AF=2\sin AOF=2\sin C,$$

故得 $a:\sin A=b:\sin B=c:\sin C$ 。注意，这里的正弦只是线段而非比值。韦达并没有讨

论钝角三角形的情形，后世数学家对此做了补充。

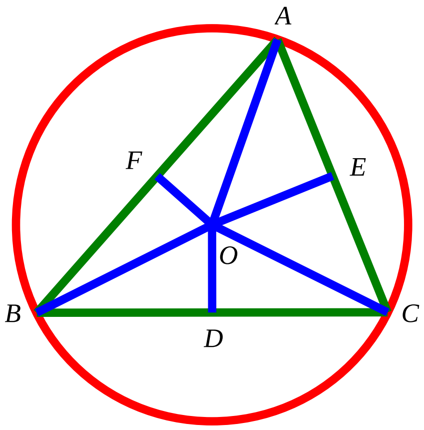


图 3 韦达的外接圆法

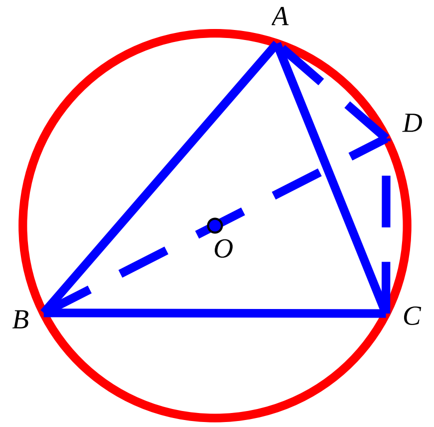


图 4 辅助直径法

20 世纪初，“外接圆法”演化为“辅助直径法”[6]。如图 4，在 RtΔBCD 和 RtΔBAD 中，直接利用边角关系得 $a=2R\sin A$， $c=2R\sin C$，其中 R 为ΔABC 的外接圆半径。

1.2 历史材料的运用

本节课主要运用了以下数学史料。

（1）根据 10 世纪阿拉伯天文学家阿尔·库希（al-Kuhi）的流星测量的方案[7]，编制流星测量问题，引入正弦定理，激发学生的学习动机，展现数学与天文学之间的密切关系。

（2）在用作高法证明正弦定理之后，引入辛普森的简化的“同径法”；在探究边与对角正弦的比值时，引入韦达的外接圆法，拓宽学生的思维，展现几何之美。

（3）通过对正弦定理历史的介绍，让学生感受数学的发展历程以及数学家的创新精神。

（4）在课后作业中，让学生分别用麦克格雷戈的同径法以及 20 世纪初的“辅助直径法”来证明正弦定理，一方面，检验学生对同径法和外接圆法的掌握情况，另一方面，进一步拓宽学生的思维。

流星测量问题的应用属于顺应式。辛普森、韦达、麦克格雷戈等数学家的证明方法也属于顺应式，因为这些数学家将正弦视为线段（正弦线），而我们统一使用了比值。此外，正弦定理的历史介绍属于附加式。

2 教学过程

2.1 新课引入

首先通过流星测量问题，引入正弦定理。

师：同学们有没有想过，流星离我们有多远呢？像星星那样远吗？比月亮离得近吗？图5是某次测量的示意图，其中 O 是地球的球心，A、B 是两个观测者所在的位置，相距 500 km，即 $\overset{\frown}{AB}=500\,\text{km}$。$AD$、$BD$ 表示地平线，相交于点 D。两人观测到同一颗流星 C 时记录的仰角分别为 $\alpha=23.2°$，$\beta=44.3°$。问题是：流星距离两位观测者分别有多远呢？

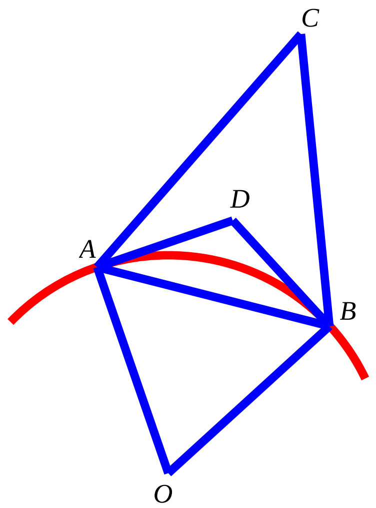


图 5 流星测量

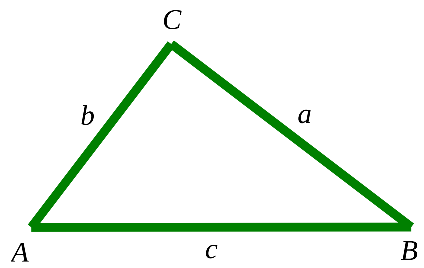


图 6 直角三角形的边角关系

教师引导学生从流星测量问题中抽象出数学问题：在三角形 ABC 中，已知 $\angle CAB$、$\angle CBA$ 和 AB，求 AC 和 BC，即已知两角及其夹边，求另两条边。进而引入“斜三角形”和“解斜三角形”的概念。

师：由初中学过的全等三角形判定定理可知，若一个三角形的两角及其夹边（角边角）已知，那么这个三角形是完全确定的，换言之，三角形的其他元素是可以求出来的。那么，究竟如何求其他元素呢？为此，我们需要建立斜三角形的边角关系。

2.2 定理探究

首先，让学生回忆图 6 中的 RtΔABC 的边角关系：

$$\sin A=\frac{a}{c}，\ \sin B=\frac{b}{c}，\ \sin C=1=\frac{c}{c}$$

将上面三个等式变形，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \tag{1}$$

然后，让学生思考：对于斜三角形，是否有类似的结果呢？先考虑图7中的锐角三角形ABC。如何得到$\angle A$和$\angle B$的正弦？由学生自己提出作AB上的高线CD，并得出$\sin A=\frac{CD}{b}$，$\sin B=\frac{CD}{a}$，从而得到$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$，或即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$。同理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。故对于锐角三角形，（1）同样成立。

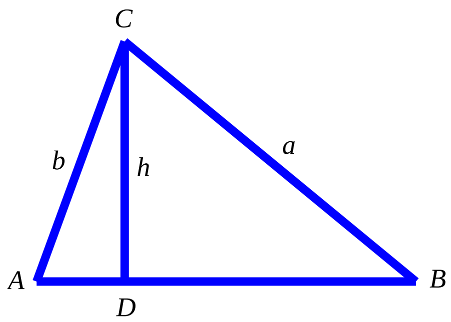


图7 锐角三角形边角关系

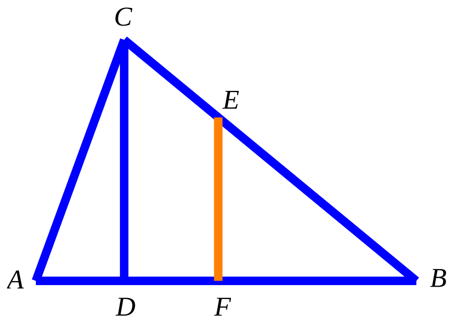


图8辛普森的同径法

接下来讨论钝角三角形的情形，并总结正弦定理。

2.3 定理新证

在通过作高法得出正弦定理之后，介绍辛普森的同径法。

师：在锐角三角形情形中，我们利用等式右边分子相同，得到正弦之比等于线段之比。18世纪，英国数学家辛普森则给出另一种证明方法，利用同分母，将正弦之比转化为线段之比。如图8，在三角形ABC中，$AC<BC$，在BC上取点E，使$BE=AC$，过C、E分别作AB的垂线段CD和EF，则$\sin A=\frac{CD}{b}$，$\sin B=\frac{EF}{BE}=\frac{EF}{b}$，两式右边分母相同，作比得到：

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{CD}{EF}=\frac{BC}{BE}=\frac{a}{b}$$

同理可得另外的等式。钝角三角形的情形也类似，感兴趣的同学课后自己去完成证明。

2.4 定理拓展

接下来，从直角三角形和等边三角形出发，探讨正弦定理中的边与对角正弦之比值。

师：前面我们看到，在直角三角形中，边与对角正弦之比值恰为斜边长 c。那么，在斜三角形中，这个比值是什么呢？探究问题总是遵循着从特殊到一般的规律，想一想，还有什么特殊的三角形可供研究吗？

学生回答“等边三角形”后，教师出示图9，引导学生发现：等边三角形中，边与对角

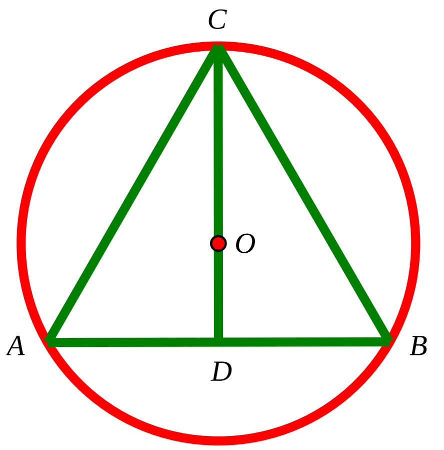


图 9 等边三角形边与对角正弦之比

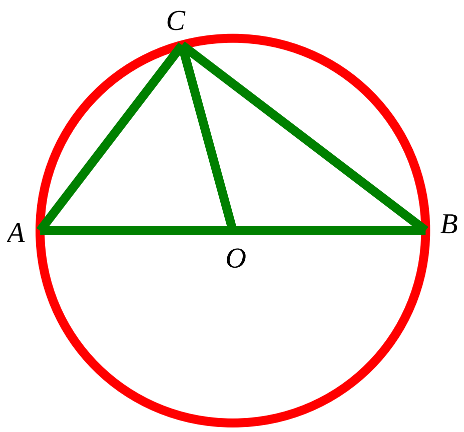


图 10 直角三角形边与对角正弦之比

正弦之比 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ 等于图中 OC 的两倍，即三角形外接圆的直径；进而发现直角三角形中的比值也是外接圆的直径（图 10）。由此猜想：任意三角形中，边长与对角正弦之比均为外接圆的直径。

教师介绍韦达的证明。先证明命题“同弧所对圆周角是圆心角的一半”，再用韦达的方法，分锐角三角形和钝角三角形两种情形证明等式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

然后，介绍正弦定理的变形：

（1）$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$；

（2）$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$；

（3）$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

（4）$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

最后，扼要介绍正弦定理的历史以及相关的数学家纳绥尔丁、雷格蒙塔努斯和韦达。

2.5 知识应用

例1.（角角边问题）在ΔABC中，a、b、c分别为内角A、B、C的对边。已知$b=2$，$B=30°$，

$C=45°$，求c。

例2. （边角边问题）流星测量问题。

练习：略。

2.6 课堂小结

用数字来总结本节课。

- 一个定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$；
- 两种方法：纳绥尔丁同径法（简化后的方法）和韦达的外接圆方法（包括辅助直径法）；
- 三类应用：角边角、角角边、边边角（一般含两个解）。
- 四则启示：（1）数学源于实际问题；（2）数学发展逐渐完善；（3）数学方法丰富多彩；（4）数学文化无处不在。

3 学生反馈

本节课的授课对象是上海某高中的高一普通班学生，课后的问卷调查结果显示：

（1）在情感上，81.8%的学生喜欢本节课，其中，21.2%的学生表示非常喜欢本节课。

（2）在概念理解上，所有学生都能写出正弦定理的符号表达式，其中，有 21.2%的学生提到比值为 $2R$；66.7%的同学能准确地用文字表述正弦定理的涵义。

（3）关于课后的证明练习，75.6%的学生能正确填写麦克格雷戈的证明方法；有 18.2%的学生能正确填写辅助直径法。关于外接圆法，20 人表示更喜欢韦达的方法，10 人表示更喜欢辅助直径法；3 人表示都不喜欢。

（4）关于正弦定理的证明，更倾向于作高法和韦达外接圆法的学生各占 36.4%；倾向于辅助直径法的学生占 22.7%；只有 1 名学生表示更倾向于麦克格雷戈的方法。

访谈中，大多数学生表示喜欢并愿意了解相关的数学史知识，认为数学史能够加深对知识的理解。当然，迫于升学压力，个别学生也提出，学会解题才是当务之急，只有帮助他们更好地解题，教学中才有必要运用数学史。

4 结语

本节课通过数学史的运用，让学生经历了正弦定理的发现过程，体会定理证明中的不同

思想，感受数学思维的丰富与美妙。课后问卷调查表明，绝大多数学生表示喜欢本节课。

辛普森同径法的运用，有助于学生直观地理解正弦定理的变形公式（1）和（4），即角的正弦之比等于角的对边之比。问卷调查和访谈表明，大多数学生会运用同径法证明正弦定理。对等边三角形边与对角正弦比值的探究，让学生易于联想到外接圆的半径，接下来引入韦达的方法，过程更为自然。与辅助直径法相比，更多的学生喜欢韦达的外接圆法。这一方面说明，后者对学生来说更简单自然；另一方面也说明，一种证明方法若融入了人的元素，会让学生产生更深刻的印象。

本节课也有考虑欠周之处，如生长在城市的学生对流星并不熟悉，因而流星问题并未引发他们的浓厚兴趣，这是笔者始料未及的。若换成北极星或月亮等更常见的天文现象，可能效果更佳。

在笔者看来，将数学史融入数学教学，可以打造实用与趣味兼得、科学与人文并重的美好课堂。第一次实施 HPM 教学，笔者深感知不易、行更难。一方面，自身的数学文化素养有待于提升，数学史知识有待于积累；另一方面，要将历史材料转化为教学材料，需要深入了解学生，密切结合教材，精心裁剪加工；同时，还需要与 HPM 领域的专家和实践者深入交流研讨。笔者深信，在未来的教学岗位上，HPM 将一路伴随着自己的成长。

参考文献

[1] Simpson, T. *Trigonometry, Plane & Spherical*. London: F. Wingrave, 1799

[2] Macgregor, J. *A Complete Treatise on Practical Mathematics*. Edinburgh: Bell &Bradsute, 1792

[3] Harris, J. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry.* London: Dan Midwinter, 1706

[4] Woodhouse, R. A. *Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1819

[5] von Braunmühl, A. *Vorlesungenüber Gischichte der Trigonometrie*. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1900. 176-177

[6] Rothrock, D. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. New York: The Macmillan Co., 1910. 69-70

[7] 朱卫平, 汪晓勤. 数学文化融入数学课堂的若干案例[J]. 中学数学月刊, 2013, (1): 50-52

共富实验中学 HPM 教学观摩与研讨活动

任芬芳

（华东师范大学数学系，上海，200241）

2015 年 4 月 1 日，春光明媚，华东师范大学数学系汪晓勤教授率领 HPM 研究团队与沪太路教育发展区合作项目组的教师共计三十余人在上海共富实验中学参加了 HPM 课例开发及研讨活动。

此次活动是在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，在 HPM 视角下以同课异构的形式展示 7 年级“三角形的内角和”的课堂教学，授课教师分别是项目合作组成员唐秋飞和陈丽娜老师。

课堂一：三角形的内角和（克莱罗的方法引入）

第一节课由陈丽娜老师讲授。陈老师首先向同学们提问：“三角形的内角和是多少度”和“是否所有的三角形内角和都是一样的”，接下来让学生们思考如何验证三角形内角和，学生们利用手头剪好的三角形得到了“量一量、折一折、拼一拼”三种方法。然后师生们一起分析指出了上述方法不够严密，这个结论需要用推理论证的方法进行证明。

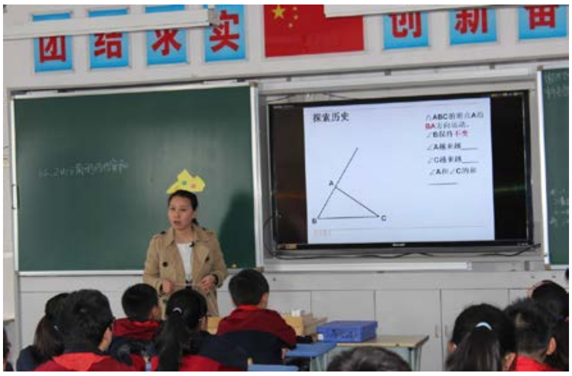
接下来，陈老师很自然地介绍了数学家克莱罗小时候拉橡皮筋的故事，让学生想象当橡皮筋拉到无穷远处的情形，并让学生们沿着数学家的思路自己探索这个证明过程。在两位同学在黑板上进行演示克莱罗方法后，学生们逐渐形成了证明的基本思路，陈老师紧接着用几何画板做了演示，完善了整个证明的说理过程。笔者从课堂上观察到，部分学生的表情有些迷茫，困惑的眼神昭示着他们在这个知识点的理解上仍存在一定的困惑。最后，陈老师又从添加辅助线的角度，引导学生们利用“欧几里得的方法”与“毕达哥拉斯的方法”证明了“三角形的内角和是 180 度”，这个证明过程建立在刚学过的“平行线的性质”上，学生理解起来明显轻松了很多。

课堂二：三角形的内角和（泰勒斯的方法引入）

第二节课由唐秋飞老师讲授。引入部分，唐老师讲述了希腊数学家泰勒斯拼地砖发现“等

边三角形内角和是 180 度”的故事，随后请学生们模仿泰勒斯的方法，以小组为单位，用 6 个同样的等腰三角形和 6 个同样的不等边三角形分别进行拼图，在动手操作中感受“三角形内角和是 180 度”的发现过程。

新课讲授环节，唐老师指出泰勒斯仅仅是通过实验发现了“三角形的内角和是 180 度”，并没有给出严谨的证明。于是要求学生们观察自己完成的拼图，锁定其中一个三角形，思考如何通过添加辅助线来得到严谨的证明。在唐老师的启发下，学生们表现比较活跃，很快探索出了“毕达哥拉斯”、“19 世纪美国教科书”和“克莱罗”的证明方法。



（陈丽娜老师公开课）　　（唐秋飞老师公开课）

教学观摩结束以后，华东师范大学 HPM 团队分别对两个课堂的学生进行了问卷调查，并与听课教师及授课教师在课后进行了热烈的教学研讨与交流。

（交流及研讨活动）

交流活动中，两位授课教师首先介绍了自己的教学设计思路，然后与会者也纷纷讲述了自己的观察和见解。一些老师认为虽然这两节课都是把数学史融入到了课堂教学，但是克莱

罗的方法比较抽象，要让学生理解“两条相交直线移到无穷远点处是平行的”着实有些困难，陈老师在运用几何画板演示数学家的发现过程时技术处理上如果再加强一些就好了。相对来说，泰勒斯的拼图方法比较直观，更容易被学生接受。还有很多老师提到通过今天这两节课的观摩，发现 HPM 可以落实到课程的探究过程中，自己对 HPM 有了一个崭新的认识。此外，还有一位听课老师对唐老师课上的一位学生总结印象深刻：“认识了许多数学家，同时也学到了许多历史。要学习他们善于发现、开动脑筋，从多方面思考问题、解答问题”，她说，毫无疑问，这节数学史融入课堂的教学给学生们的心灵带来了震撼，也让我们这些 HPM 的研究者深受鼓舞。

最后，汪晓勤教授对这次研讨活动做了全面总结。汪教授首先对两位授课教师能从不同思路顺利地将数学史融入课堂给予了高度肯定，认为本次活动突出了教学中的两个关键词“探究”与“证明”，并指出教师在小结的时候可以说明一下“探究与证明”对数学学习的价值，最后对大家提出了“提升一点，立意更高”的期望。

华东师大与沪太路教育发展区合作项目本学期还有更多公开课陆续开展，将会形成更多的 HPM 教学案例。我们会迎着 HPM 的春风，采数学史之玉，纳 HPM 之长，在教中学，在学中研，在教和研中走出 HPM 的一路风采。

市西初级中学 HPM 教学观摩与研讨活动

廖飞 任芬芳

（华东师范大学数学系，上海，200241）

2015 年 4 月 15 日，华东师范大学数学系汪晓勤教授及其 HPM 研究团队与静安区部分初中教师共计五十余人在上海市西初级中学一起参加了静安区教委组织的“听课议课”活动。

公开课由市西初级中学王进敬老师讲授 7 年级“三角形的内角和”的内容，在汪教授的指导下，王老师选取了 19 世纪德国数学家提波特的“旋转”方法进行教学引入。

王老师首先演示几何画板，让学生们观察：随着三角形形状的变化，单个角的度数是否改变？内角和的度数是否改变？然后抛出这节课的探究任务：如何运用旋转方法验证“三角形内角和是 180 度”。

探究活动分成四个部分：（1）引导学生利用提波特的方法，将某一边分别以三个顶点为中心逆时针依次旋转各角度；（2）要求学生以某一边的一个顶点为中心逆时针旋转各角度；（3）将某一边上的任意一点为中心逆时针依次旋转两个角度；（4）以平面内任意一点为中心旋转各角度。学生们表现比较活跃，王老师在每个教学环节都通过几何画板进行演示，师生共同探索出了毕达哥拉斯、欧几里得的严谨证明方法，以及 19 世纪美国教科书上的证明方法。此外，王老师强调了旋转角度与方向的重要性，总结出四种方法的共同特征是利用了“平行线的性质”。最后，王老师通过构造三角形，拓展了“平行线性质”的应用，得到了数学家普罗克拉斯的证明方法。

（王进敬老师授课）

（课后研讨）

教学观摩课结束以后，笔者对全班学生进行了问卷调查。对于“我对老师教学中关于三角形内角和等于 180 度的启发、引导和发现过程理解的很好”这一观点，100%学生持“同

意”或“非常同意”态度；对于“我愿意了解与教学内容有关的数学历史知识，特别是数学家解决问题的思考过程”这一观点，97%学生持“同意”或“非常同意”态度；对于“这堂课给我提供了一些表达自己想法和展示自己能力的机会”这一观点，92%学生持“同意”或“非常同意”态度；对于“是否喜欢提波特的旋转方法”这个问题，97%学生非常喜欢，认为旋转方法直观、容易理解，具有趣味性。从课堂观察和学生的反馈来看，数学史知识给学生们留下了深刻印象，让学生在知识和技能、过程和方法上有了提高，真正实现了“情感与信念”的教学目标。

随后，与会者进行了热烈的交流和探讨。区教研员蔡丽娜老师对王老师尝试 HPM 教学给予了高度的肯定，并提出了一些设想。很多老师对王老师利用数学史料激发学生兴趣、亲和力较强、熟练驾驭课堂能力等表现给予了高度肯定，同时还对旋转方法的直观性、添加辅助线的重要性、重实验操作轻演绎推理等问题做了更深入的交流。市西初级中学教研组长尹卫平老师感慨地说，在 HPM 教学中，教师学会了研究方法。

汪晓勤教授首先对顺利将数学史融入课堂教学给予肯定，认为这节课突出了探究活动的创新性，并指出王老师在旋转时要强调说明添加辅助线的重要性。然后，汪教授介绍了宝山区“三角形的内角和”的两节 HPM 课例：克莱罗的无穷远点方法和泰勒斯的拼图方法，说明从历史的视角给学生们的心灵带来了震撼，也让我们深受鼓舞。最后，汪教授对大家提出了“在 HPM 中提升，在提升中成长”的期望。

市西初级中学丁海洋副校长希望多开展这样的教学活动，为学生增添数学的体验，拓展学生的知识视野，让老师能实现“为学而教，为学而研”的理想。

华东师大与静安区的教研活动将陆续开展，让我们乘着 HPM 的东风，且行且思，期待 HPM 的花蕾挂满枝头。