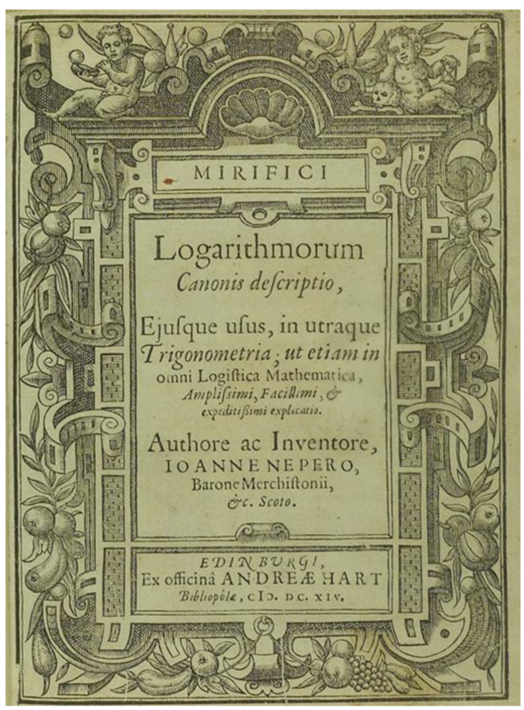
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 3 期



纳皮尔《奇妙的对数表说明书》（1614）

《上海 HPM 通讯》编委会

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：韩 粟

编委（按姓氏字母序）：

纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 邵爱娣 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯 岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

对数历史的德育价值

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

歌德曾经说过："一门科学的历史是就是这门科学本身。"在以"立德树人"为教育根本任务的今天，这一观点对于教师来说具有重要的指导意义。就数学学科而言，数学的历史既是改善教学的工具，同时也应该成为教学的目标之一。

教学实践表明，HPM 视角下的数学教学对于学科德育的实施有着独特的价值，但由于教师对于"数学学科德育"内涵的理解还不够清晰，许多 HPM 课例未能充分挖掘或凸显有关知识点的德育价值。有鉴于此，本文以对数为例，对数学史与数学学科德育之间的关系进行进一步的探讨。

1 对数的历史

1.1 一个人物

纳皮尔于 1550 年出生于苏格兰郊区的莫契斯顿城堡，父亲阿奇巴尔德·纳皮尔（Archibald Napier）是城堡的第七代领主，曾先在阿盖尔郡担任法官，后担任造币厂厂长长达三十余年。纳皮尔的童年是在城堡里度过的，并没有去学校上学。可能的情况是：父亲为他请了家庭教师，在城堡里接受启蒙教育。13 岁那年，纳皮尔进了苏格兰最古老的大学——圣安德鲁斯大学圣萨尔瓦多（St. Salvator）学院学习，师从当时苏格兰最著名的教师、圣萨尔瓦多学院院长约翰·卢瑟福（John Rutherford）。卢瑟福早年留学法国，且曾任教于波尔多著名的吉耶纳（Guyenne）学院。他从事哲学研究，且爱好文学。纳皮尔日后对神学和哲学产生浓厚兴趣，显然是受了卢瑟福的影响。

不久，纳皮尔带着失去母亲的深深伤痛，也带着父亲的殷殷期望，负笈来到欧洲大陆留学。虽然没有文献记载纳皮尔的留学之地，但最有可能的是法国。直到 1571 年，21 岁的纳皮尔结束了大陆的留学生活，回到了阔别已久、魂牵梦绕的家乡。然而，不见亲人的笑颜，惟有残酷

的现实。那是苏格兰历史上最黑暗的一页：教派纷争，兵连祸结，满目苍夷，父子反目，兄弟成仇，亲属相残……家乡的一切都变了：父亲阿奇巴尔德被支持玛丽女王的一方囚禁于爱丁堡城堡；莫契斯顿城堡被支持詹姆斯六世的一方所占领，还不时遭到玛丽派的炮击。

男儿有家归不得。纳皮尔被迫离开爱丁堡，来到父亲曾经在加特尼斯（Gartness）购置的一处庄园。就在这里，纳皮尔收获了爱情，不久走进了婚姻的殿堂。同时，纳皮尔开始致力于庄园的建设。很快，在风景秀丽的恩德里克（Endrick）河畔出现了一幢占地面积很大的新楼。大楼边有花园和果园。远处有流泉飞瀑，近处是绿树成荫、鸟语花香。纳皮尔在这里一住就是三十几年。

1593 年，信仰天主教的一些贵族暗地里邀请西班牙的菲力二世向苏格兰派遣军队以占领英国。纳皮尔随基督教最高裁决会议派遣的代表团三度进谏国王詹姆斯六世，要求立即处理那些“基督教会众和国家的敌人”。在祖国面临战争威胁的时候，纳皮尔充分发挥自己的聪明才智，设计了许多用于保家卫国、打击敌人的武器，其中包括

- 燃烧镜：可以烧毁任意远处的敌舰；
- 大炮：可以将方圆 4 英里内的敌人全部消灭；
- 战车：可以从各个方向消灭敌人；
- 水下武器：可能具有水雷的功能；

………………………………

但这些武器最终都没有派上用场。纳皮尔还发明了著名的用于做乘法的工具，后人称之为“纳皮尔筹”。在加特尼斯，纳皮尔还对农学产生浓厚的兴趣。据说他是第一个提出盐是有效肥料的人，也是第一个提出许多农艺新方法的人。有理由相信，纳皮尔关于对数的研究始于加特尼斯。然而，在宁静的夜晚，纳皮尔的思路常常被恩德里克河对岸一家棉绒厂发出的噪音所打断。

在加特尼斯忙碌而充实的生活中，纳皮尔遭遇了人生新的不幸。爱妻伊丽莎白在为他生下孩子后不久便撒手人寰。后来，他有了第二任妻子，并育有十几个孩子。1608 年，纳皮尔父亲去世，他离开加特尼斯，迁回默契斯顿。关于纳皮尔的许多有趣的故事都发生在这里。

一个故事说，纳皮尔有一只乌黑发亮的公鸡。他说，这只鸡有一种神奇的本领，能告诉他家里人的最隐秘的想法。某一天，家中的一件贵重物品失窃，纳皮尔怀疑是某个仆人所为，却

没有任何证据。于是，他将那只“神鸡”关在一个暗室里，并告诉仆人们：它被一个偷过东西的人摸到时会叫。他让仆人们依次进入暗室摸鸡，出来后向他出示双手。结果，只有一个仆人的双手是干净的，而其他仆人的手上都沾上了煤灰！原来，纳皮尔在公鸡身上抹了煤灰，那位可怜的偷东西的仆人，因为怕鸡叫而不敢摸，所以双手干干净净。就这样，纳皮尔找出了家贼。这个故事简直就是我国北宋著名科学家沈括（1031-1095）在《梦溪笔谈》中所讲述的“摸钟”故事的翻版。

另一个故事说，纳皮尔邻居家养了一群鸽子，鸽子常常飞到默契斯顿城堡内吃麦粒。纳皮尔警告邻居说，若鸽子以后再飞来吃麦粒，他就把它们捉起来关到笼子里去。“如果你能捉住它们的话，随你的便。”邻居自信地回答。第二天早上，默契斯顿城堡内的地上到处都是鸽子——它们被纳皮尔施了“魔法”，再也飞不起来了。于是，在主人的吩咐下，仆人们将一只只鸽子关进了笼中。

这些故事在当时广为流传，传到最后，纳皮尔就成了地地道道的魔法师了。实际上，在第一个故事中，纳皮尔的那只公鸡显然不是什么神鸡，他只是利用了小偷“做贼心虚”的心理而已。而在第二个故事中，纳皮尔一定是在麦粒上做了手脚，一个容易的做法是，前一天将麦粒浸于酒中，第二天一早晒出，吃麦粒的鸽子自然都醉倒了。

1614 年，经过 20 年的努力，纳皮尔终于出版了他一生中最重要的数学著作——《奇妙的对数表说明书》。对数的发明将天文学家从繁重的计算劳动中解放出来，用后来的法国数学家拉普拉斯的话来说，就是“由于省时省力，对数的发明让天文学家的寿命增加了一倍”。对数的诞生标志着人类的计算史翻开了新篇章，成了 17 世纪三大数学成就之一。1615 年，远在伦敦的数学家布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）读到《奇妙的对数表说明书》后，叹为观止，爱不释手。在写给友人的一封信中，布里格斯说，自己从未遇到过一本让他如此愉悦的书。他致信纳皮尔，说暑期里要专程去拜访他，并约好了时间。

暑期来临了。根据约定的时间，纳皮尔在家中恭候远方的稀客。当时，从伦敦到爱丁堡，乘马车需要整整四天四夜。布里格斯按照约定的时间从伦敦出发，但由于天气的缘故，没能赶在约定的时间到达默契斯顿。一天过去了，伦敦的几何学家没有现身；翌日，依然是久等不遇的失望。直到第三天，纳皮尔在客厅再也坐不住了。他和前来拜访的朋友马尔说：“看样子，我们远方的朋友今天是不会来了。”话音刚落，楼下响起了敲门声。马尔急忙跑下楼开门，来

客通报自己是布里格斯。马尔将客人领到二楼的客厅。两位数学家初次会面，彼此在沉默中对视了整整一刻钟。我们无法想象，那是多么激动人心的时刻！人生得一知己足矣，两位哲人相见恨晚。

在莫契斯顿城堡，布里格斯一住就是一个月。当清晨的阳光洒满城堡的时候，两位数学家已经漫步在城堡中的林荫小道上。他们热烈地讨论着一个重要话题：如何对现有的对数进行改进？在两位哲人的思想碰撞中，常用对数诞生了！

1616 年暑期，他们又一次相聚默契斯顿城堡。他们原本约好下一年暑期再次相聚，怎料天不假年，纳皮尔不幸病逝。不久，布里格斯出版了他的常用对数表，以此告慰他的朋友、对数发明者、苏格兰一代伟人的在天之灵。

1.2 一种思想

在《奇妙的对数说明书》前言里，纳皮尔告诉我们：

“没有什么比大数的乘、除、开平方或开立方运算更让数学工作者头痛、更阻碍计算者的了。这不仅浪费时间，而且容易出错。因此，我开始考虑怎样消除这些障碍。经过长久的思索，我终于找到了一些漂亮的简短法则……”

这段话十分清楚地表达了作者发明对数的动机——简化计算。大道至简。“求简”是数学的重要思维方式之一：数学符号的运用，为的是语言的求简，而对数的发明，则是计算方法的求简。

实际上，在纳皮尔之前，数学家早已有了简化计算的想法。如，15 世纪法国数学家许凯（N. Chuquet, 1445-1488）在其《算学三部》（1484）中利用双数列

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	…	1048576
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	20

将上一列中某两数相乘转化为下一列中对应两数相加。德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）在《整数算术》（1544）中提出四个运算法则。给定双数列

0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	…

则有：

- 等差数列中的加法对应于等比数列中的乘法；
- 等差数列中的减法对应于等比数列中的除法；
- 等差数列中的简单乘法对应于等比数列中的乘方；
- 等差数列中的除法对应于等比数列中的开方。

我们看到，要求等比数列中某项（真数）的乘积或商，只需在等差数列中找到相应的“替身”（假数），通过“替身”的和或差，即可找到所求真数的乘积或商。这是纳皮尔对数思想的源泉之一。

虽然许凯和斯蒂菲尔的双数列可以用来简化计算，但其适用范围却很小很小，因为等比数列所含的数太少，对于 2 的正整数次幂以外的数的乘法，完全无用。纳皮尔需要做的是构造新的等比数列，使其相邻项的间隔小于 1，这样，它就能包含一定范围内的所有正整数。当时的天文学家已利用“加减术”，即积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

或

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

来简化乘法运算，所以他们离不开正弦或余弦表，而当时的正弦或余弦表是以10^7为圆的半径制作的，所以纳皮尔选择10^7作为等比数列的首项，又选择了$1-10^{-7}$作为公比：

$$\begin{array}{ccccccc} 10^7 & 10^7\left(1-10^{-7}\right) & 10^7\left(1-10^{-7}\right)^2 & 10^7\left(1-10^{-7}\right)^3 & \cdots & 10^7\left(1-10^{-7}\right)^n & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \end{array}$$

在这样一个数列中，相邻两项的间隔很小，例如，其前 1000 项为

10000000，9999999，9999998，9999997，9999996，9999995，9999994，

9999993，9999992，9999991，9999990，…，999001

相邻两项的差不超过 1，其对数分别为 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，⋯，999。因而我们可以在其中找到所需要的真数，进而可以找出它们的对数，达到简化计算的目的。

经过商讨，他们一致同意，先建立表 1 所示的双数列对应关系，然后通过在等比数列相邻项之间插入等比中项，得到相应的对数，不断插入等比中项，能够得到相邻项之间任一给定的正整数，从而求得该数的对数。

表 1　作为常用对数基础的双数列

指数	0	1	2	3	4	5	6	7	…
幂	1	10	102	103	104	105	106	107	…

例如，要求 2 的常用对数（精确到 7 位小数），在 1 和 10 之间插入等比中项 $10^{\frac{1}{2}} \approx 3.1622777$，其对数为 0.5；接着，在 1 和 $10^{\frac{1}{2}}$ 之间插入等比中项 $10^{\frac{1}{4}} \approx 3.7782794$，其对数为 0.25；然后，在 $10^{\frac{1}{4}}$ 和 $10^{\frac{1}{2}}$ 之间插入等比中项 $10^{\frac{3}{8}} \approx 2.3713737$，其对数为 0.375，等等，不断在最接近 2 的两数之间插入等比中项，在第 25 步时，即得到了 2，其常用对数为 0.3010302，见表 2。经过两位哲人的思想碰撞，常用对数诞生了！

表 2　2 的常用对数计算过程（精确到 7 位小数）

步骤	M	N	$\sqrt{MN}$	$\lg M$	$\lg N$	$\lg\sqrt{MN}=\frac{1}{2}(\lg M+\lg N)$
1	1	10	3.1622777	0	1.0000000	0.5000000
2	1	3.1622777	1.7782794	0	0.5000000	0.2500000
3	1.7782794	3.1622777	2.3713737	0.2500000	0.5000000	0.3750000
4	1.7782794	2.3713737	2.0535250	0.2500000	0.3750000	0.3125000
5	1.7782794	2.0535250	1.9109530	0.2500000	0.3125000	0.2812500
6	1.9109530	2.0535250	1.9809567	0.2812500	0.3125000	0.296875
7	1.9809567	2.0535250	2.0169145	0.2968750	0.3125000	0.3046875
8	1.9809567	2.0169145	1.9988547	0.2968750	0.3046875	0.3007812
9	1.9988547	2.0169145	2.0078643	0.3007812	0.3046875	0.3027344
10	1.9988547	2.0078643	2.0033544	0.3007812	0.3027344	0.3017578
11	1.9988547	2.0033544	2.0011033	0.3007812	0.3017578	0.3012695
12	1.9988547	2.0011033	2.0005409	0.3007812	0.3012695	0.3011475
13	1.9988547	2.0005409	2.0002597	0.3007812	0.3011475	0.3010865
14	1.9988547	2.0002597	1.9995571	0.3007812	0.3010865	0.3009339
15	1.9995571	2.0002597	1.9999084	0.3009339	0.3010865	0.3010102

16	1.9999084	2.0002597	2.0000840	0.3010102	0.3010865	0.3010484
17	1.9999084	2.0000840	1.9999962	0.3010102	0.3010484	0.3010293
18	1.9999962	2.0000840	2.0000401	0.3010293	0.3010484	0.3010389
19	1.9999962	2.0000401	2.0000182	0.3010293	0.3010389	0.3010341
20	1.9999962	2.0000182	2.0000072	0.3010293	0.3010341	0.3010317
21	1.9999962	2.0000072	2.0000017	0.3010293	0.3010317	0.3010305
22	1.9999962	2.0000017	1.9999989	0.3010293	0.3010305	0.3010299
23	1.9999989	2.0000017	2.0000003	0.3010299	0.3010305	0.3010302
24	1.9999989	2.0000003	1.9999996	0.3010299	0.3010302	0.3010301
25	1.9999996	2.0000003	2.0000000	0.3010301	0.3010302	0.3010302

1.3 一个概念

在对数发明之后相当长时期内，数学家都利用等差和等比数列对应关系来定义对数，即，给定双数列，等比数列中的项在等差数列中的对应项称为对数，前者称为真数。表 3 给出了 18 世纪部分数学文献中的对数定义。

表 3　18 世纪部分数学家的对数定义

年份	作者	著作	对数的定义
1700	福斯特（M. Forster）	《算术三角学》	对数是构成等差数列的一组**借数**，与构成等比数列的一组数相对应。
1702	拉弗森（J. Raphson, 1648?~1715?）	《数学辞典》	对数是构成等差数列的一组数，与等比数列中同样多的数相对应。
1717	罗奈因（P. Roaune, 1683~1755）	《代数专论》	对数是与**真数**相对应的一组**假数**，任意两个**真数**的对数（或**假数**）之和等于这两个**真数**乘积的对数，任意两数的对数之差等于这两个数的商的对数。
1730	马尔科姆（A.	《算术新法：理论	对数是对应于其他数而构造的数，前

	Malcolm, 1685~1763）	与实践》	者的和与差对应于后者的积与商以及幂与方根。
1740	桑德森（N. Samnderson, 1682~1739）	《代数基础》	对数是与**真数**相对应的一组**假数**，其加法对应于**真数**的乘法，即，若将任意两数相乘得到第三个数，则它们的对数之和构成了第三个数的对数。
1740	马丁（B. Martin, 1705~1782）	《对数理论》	对数是一系列构成等差数列的数，它们与另一系列构成等比数列的数相对应，前者中的每一项等于后者中的相应项与单位之间的比的指数。
1765	达朗贝尔（J. R. D'Lembert, 1717~1783）	《大百科全书》	对数是指一个等差数列中的数，与另一个等比数列中的数相对应。

18 世纪英国数学家斯通（E. Stone, 1700?~1768）《新数学辞典》（1743）中给出了对数的定义：

对数是一个给定数的幂的指数……例如，给定数为 10，10 的零次幂等于 1，故 1 的对数为 0；10 的 0.301036 次幂等于 2，故 2 的对数为 0.301036；10 的 0.477121 次幂等于 3，故 3 的对数为 0.477121；……10 的 1.079181 次幂等于 12，故 12 的对数为 1.079181，等等。

可见，至迟到 1743 年，就已经有数学家家直接用幂指数来定义对数了，只是没有采用符号语言。

1748 年，欧拉在《无穷分析引论》中用现代符号给出了对数的幂指数定义："若 $a^z = y$，则 z 可以看作是 y 的函数，通常称 z 为 y 的对数，其中 a 称为底数。因此，以 a 为底 y 的对数即为幂 a^z 的指数，a^z 等于 y。y 的对数常记作 $z = Ly$。"在欧拉之后，人们逐渐习惯于用幂指数来定义对数，旧定义逐渐退出了历史舞台。

在对数的幂指数定义中，人们已经看不到真数与假数之间的对应关系，对数的简化计算功能也被淡化了。

2 基于对数历史的教学设计

对数概念的历史由四个阶段组成：第一阶段是正整数指数幂所对应的正整数指数；第二阶段是任意正整数所对应的正整数指数，即纳皮尔对数；第三阶段是任意正整数所对应的小数指数，即常用对数；第四阶段是任意一个幂的指数，即一般对数。在课堂上，教师可以设计三个探究任务，让学生依次经历对数概念历史的第一、第三和第四阶段。

任务 1：不用计算器，求 2 的两个不同正整数次幂的乘积，如 4096×32768、32768×262144 等。在通过笔算获得结果后，让学生思考是否存在更便捷的方法。引入 2 的正整数次幂和正整数指数的对应表（图 2），引导学生从中发现，在做 32768 和 262144 的乘法时，可以找到两数的“替身”，将“替身”相加，和所对应的幂即为所求的乘积，原来的两个数并不需要参与实际运算，如图 2 所示。

任务 2：不用计算器，求任意两个多位正整数的乘积，如：已知光的传播速度为 299792458 米/秒，光从太阳照射到地球大约需要 499 秒，则日地之间的距离为 299792458×499 米，但相乘的两个数都不是 2 的正整数次幂，任务 1 中所用的表用不上了。此时，教师引导思考：应

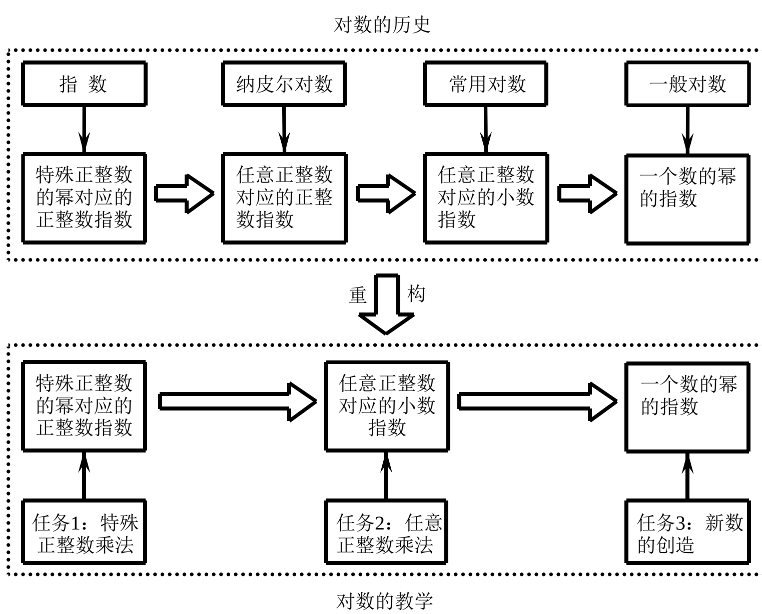


图 1 对数的历史与教学

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

x	11	12	13	14	15	16	17	18
2^x	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144

x	19	20	21	22	23	24
2^x	524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216

x	25	26	27	28	29
2^x	33554432	67108864	134217728	268435456	536870912

x	30	31	32	33
2^x	1073741824	2147483648	4294967296	8589934592

图 2　正整数指数幂与正整数指数的对应表

该如何寻找两个数的“替身”以达到简化计算的目的呢？从图 2 可见，499 的“替身”在 8 和 9 之间，299792458 的“替身”在 28 和 29 之间。通过尝试，发现前者约为 8.9，后者约为 28.1，其和约为 37，故所求的乘积约为 137,438,953,472，这个结果与我们直觉上的结果（300000000×500=150,000,000,000）相去甚远，其原因是上述两个“替身”过于粗略。实际上，用有限小数精确表达出“替身”，是不可能做到的。

任务 3：如果幂的底数不是 2，而是任意正数 a（$a>0, a\neq 1$），那么，如何求给定幂（$a^x=N$）的指数 x 呢？由于指数 x 的小数值往往无法精确获得，我们需要引入一种新的数，就像初中的时候，当我们初次遇到面积为 2 的正方形边长问题时一样。

由此，引入对数的现代定义。教师可以制作简短的微视频，追溯对数的历史，让学生在古今对照中走进 17 世纪数学家的心灵之中，从而深刻理解对数在数学史上的价值。

3 对数历史的德育价值

对数的历史蕴含着丰富的德育价值。

（1）体会数学的理性精神

求简是数学家的重要思维方式之一，但求简并不是以牺牲准确性为代价的，相反，数学家需要建立科学有效的方法。为此，纳皮尔构造了全新的等比数列，突破了 15-16 世纪数学家所用数列以及天文学家所用三角公式的局限性，体现了数学家的创新精神。但纳皮尔发明对数后并未感到心满意足，相反，他很快就发现自己的对数表还有改进的空间，体现了数学家的求真精神。

（2）认识数学活动的本质

首先，数学是人“做”出来的。但做数学的人和从事其他体力和智力活动的人一样，并非生活在真空之中，他们不可能不食人间烟火，不可能没有喜怒哀乐，不可能完美无缺。巧捉飞鸽、神鸡识贼，如果我们觉得纳皮尔的所作所为很难与一位取得 17 世纪三大数学成就之一的数学家联系在一起的话，那么，这种看法实际上源于我们对数学家的不恰当的认识。纳皮尔的故事让我们看到数学家的真面目。

其次，数学知识的发生是有动因的。今日数学教科书直接用指数来定义对数，使得对数概念仿佛从天而降，对数概念的学习动机荡然无存；而对数概念的发生发展过程却清楚地表明，对数的发明有着极其强烈的动机。事实上，任何数学概念的诞生都源于数学外部或内部问题解决的需要，而非凭空出现。

再次，数学的思想方法是不断演进的。从正整数的幂指数到纳皮尔对数，再到常用对数，作为计算工具的对数经历了不断完善的过程。

（3）丰润数学学习的情感

为什么人们会喜欢央视“百家讲坛”节目？原因很简单，“百家讲坛”的主讲人所讲的都是人的故事。人们从人的故事中，了解人生百态，感悟岁月更迭，吸收经验教训，品味思想智慧，汲取精神力量。为什么数学教师难以走上“百家讲坛”？为什么数学会沦为“枯燥乏味”的代名词？原因也很简单，数学缺失了人的元素。对数历史中的人物故事，特别是纳皮尔与布里格斯初次会面的故事，让数学变得人性化，极易激发学生的兴趣。

（4）感悟先哲的优秀品质

从纳皮尔的一生中，我们可以读出以下几个关键词。

一是“执着”。人生能有几个二十年？纳皮尔用二十年的时间致力于同一件事，取得了成功，为我们诠释了“执着”二字在实现人生价值过程中的重要性。

二是“坚强”。少年丧母，青年丧妻，慈父入狱，家园失陷，面对生活中的灾难和不幸，纳皮尔没有沉沦，没有失去生活的勇气，而是在逆境中自强不息、砥砺前行，最终成就大业。

三是“责任”。于国、于家、于知识界，纳皮尔都是一个有担当的人。当国家面临战争威胁，他发明众多武器，为保家卫国做准备；当看到天文学家苦于大数计算，他焚膏继晷、夜以继日，以寻找简化计算的工具为己任；身逢乱世，家道中落，他承担起了建设家园、振兴家业的责任。

四是“倾听”。纳皮尔的对数思想不可能从天而降，他是站在前人的肩膀上创造辉煌的；他与布里格斯的旷世之约，导致了常用对数的诞生，从中我们感悟到，摈弃自我为中心的思维习惯、倾听和包容他人，是数学家的优秀品质。

4 结语

今天，人们借助计算器可以得到任何一个数的对数，对数表已成明日黄花，“对数无用论”甚嚣尘上。但是，对于教师而言，一种数学知识的实用价值和教育价值是截然不同的，没有实用价值，并不意味着就没有教育价值，从某种意义上说，教学中融入数学史，就是要让充分挖掘那些今天已没有实用价值的知识点的教育价值。对数历史最重要的教育价值就在于数学学科德育。

对数的历史与教学启示表明，教师可以着眼于“理性、信念、情感、品质”四类数学德育元素，从“一个人物、一种思想、一个主题”三个方面入手来挖掘历史素材，精心设计教学，在课堂上架设沟通历史与现实、数学与人文的两座桥梁，最终达成立德树人的目标。

目 录

CONTENT

历史研究

指数函数概念的历史

蔡春梦

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

作为刻画自然界增长规律的数学模型，指数函数最重要的基本初等函数之一，对于数学抽象、数学建模、直观想象、数学运算等素养的培养具有独特的价值。那么，如何设计指数函数概念的教学？如何在教学中培养学生的核心素养？如何在教学中实施学科德育？在“双新”背景下，一线教师需要针对上述问题进行深入思考。

历史发生原理告诉我们，学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性，历史上数学家所遭遇的困难正是学生会遇到的障碍[1]。因此，借鉴数学概念在历史上的发生和发展过程来讲授该概念，往往更符合学生的认知规律，有助于他们把握教学难点。目前，尽管 HPM 专业学习共同体已经开发了许多高中数学教学案例，但由于指数函数历史知识的缺失，相关案例还付之阙如。鉴于此，本文通过文献研究，试图勾勒出指数函数概念的历史发展脉络，为 HPM 视角下的指数函数教学提供思想启迪。

1 指数函数概念的肇始：等比数列

指数函数最开始源于等比数列，其底数为具体数值，指数为整数。早在公元前 2700 年左右，苏美尔泥版 MS 3047 上就已经出现了等比数列。研究表明，等比数列在泥版数学文献中是最常见的数列。泥版 M 8631 就记录了这样一个问题：“从 1 粒麦子（sě,苏美尔和古巴比伦最小的重量单位）开始，每天加倍，30 天后会增加到多少？[2]这涉及以 2 为公比的等比数列。泥版 MS 1844 上记载了以下问题：“七兄弟分财产，老七得 2，后一个比前一个多得$\frac{1}{6}$，问所分财产共有多少？”[2]问题涉及首项为 2，公比为$\frac{7}{6}$的等比数列。

著名的莱因得纸草书（公元前 1650 年左右）第 79 题[3]描述了一个有趣的问题：某村庄有 7 座房子，每座房子中养了 7 只猫，每只猫每天吃 7 只老鼠，每只老鼠每天吃 7 颗麦穗，每颗麦穗能产 7 体积单位的麦粒。问房子、猫、老鼠、麦穗、麦粒体积总数为多少。该问题涉及首项

和公比均为 7 的等比数列。

中国古代数学文献中也有许多等比数列的例子。约成书于公元 4 世纪的《孙子算经》载有如下问题："今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色。问：各几何？"[6]这里堤、木、枝、巢、禽、雏、毛、色的数量构成首项和公比均为 9 的等比数列。

1202 年，意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 1175?-1250?）在《计算之书》中记载了源于古印度的棋盘（64 格）问题，通过加倍方法分别得一个等比数列：首项为 1，以后每一项都是其前一项的两倍[4]，第 n 项（$1 \le n \le 64$）为 $y = 2^{n-1}$。

15-16 世纪，欧洲数学文献中出现了很多等比数列问题，如马靴钉问题：一位铁匠制作了 24 个马靴钉，第一个售价 1 便士，第二个售价 2 便士，第三个售价 4 便士，第四个售价 8 便士，……。问铁匠出售全部马靴钉后共得多少便士[5]？

指数增长在生物生长方面也有较多应用，且往往呈现出指数爆炸的特点。1748 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中讨论了指数函数和对数函数，还引入人口指数增长的实例：大洪水的幸存者有 6 人，若以每年$\frac{1}{16}$的速度繁衍，那么 200 年后，6 个幸存者将有10^6个后代；400 年后，将有10^{11}个后代，这将超过地球所能支撑的数量[7]。

可见，函数 $y = a^n$（其中$a > 0, n \in N^*$）很早就被人们所发现和利用。

2 指数函数的应用

在一些实际的应用中，不可避免地出现了指数为实数的情况。但当时的人们并不知晓现代指数、对数知识，他们是用线段连接相邻两个指数为整数的点，利用线性插值的方式，求解指数为实数时的函数值。

在公元前 2000 年的巴比伦，人们每年需要对农产品或贵金属的贷款支付 10% -20%的利息。一张古巴比伦泥板上就记载：年息 20%，一定数目的钱经过多长时间成为原来的两倍？[8]在这个问题中，如果设本金为 1，那么每一年的本利和可用等比数列

$$1.2^1,\ 1.2^2,\ 1.2^3,\ \cdots,\ 1.2^n$$

表示。所以该问题解决的就是$1.2^x=2$这个方程。当时的古人便是通过数量表$\left(\frac{6}{5}\right)^n$，在$n=3$和$n=4$之间进行线性插值（图 1），得到最终结果为 3 年又$9\frac{4}{9}$个月。

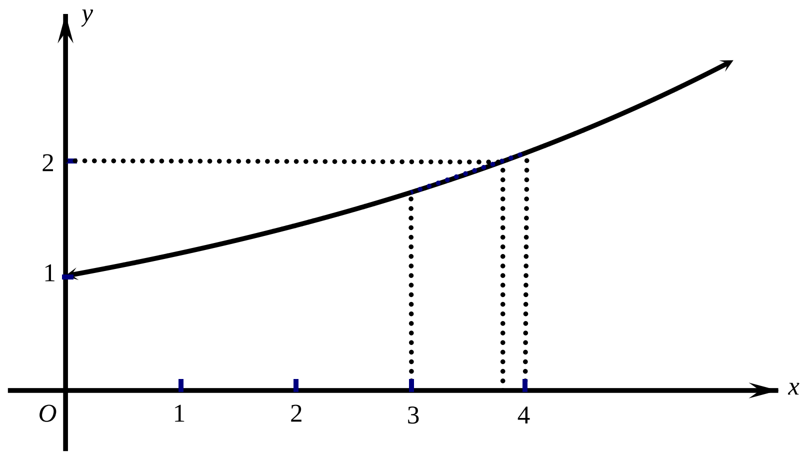


图 1 利息问题的线性插值

古代中算家也采取了类似的处理方式。成书于公元一世纪左右的《九章算术》“盈不足”章中就介绍了“蒲莞同长”、“两鼠对穿”两个经典问题[9]。“蒲莞同长”问题说的是：假设有一株蒲，第一天长 3 尺；又有一株莞，第一天长 1 尺。蒲的生长，后一天是前一天的$\frac{1}{2}$；莞的生长，后一天是前一天的 1 倍，问经过多少天后它们的长相等？显然，蒲每日的增长长度是一个以首项为 3、公比为$\frac{1}{2}$的等比数列；莞每日的增长长度是一个首项为 1，公比为 2 的等比数列。古人将蒲和莞在每一天中的生长情况视为匀速，得到$2\frac{6}{13}$天后同长。

如果我们分别用函数$f\left(x\right)=6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$和$g\left(x\right)=2^x-1$来刻画蒲和莞的生长规律，其中 x 表示时间，那么，古人的结果相当于将前者图像上两点$\left(2,\frac{9}{2}\right)$和$\left(3,\frac{21}{4}\right)$的连线与后者图像上两点$(2,3)$和$(3,7)$的连线交点的横坐标，如图 2 所示。

“两鼠对穿”问题说的是：假设有一堵 5 尺厚的墙，两只老鼠相对穿洞，大鼠第一天穿 1 尺，小鼠第一天也穿 1 尺。大鼠每天比前一天加倍，小鼠每天比前一天减半，问它们几天后相逢？各穿多少？古人通过类似的线性方法求得答案为$2\frac{2}{17}$天。

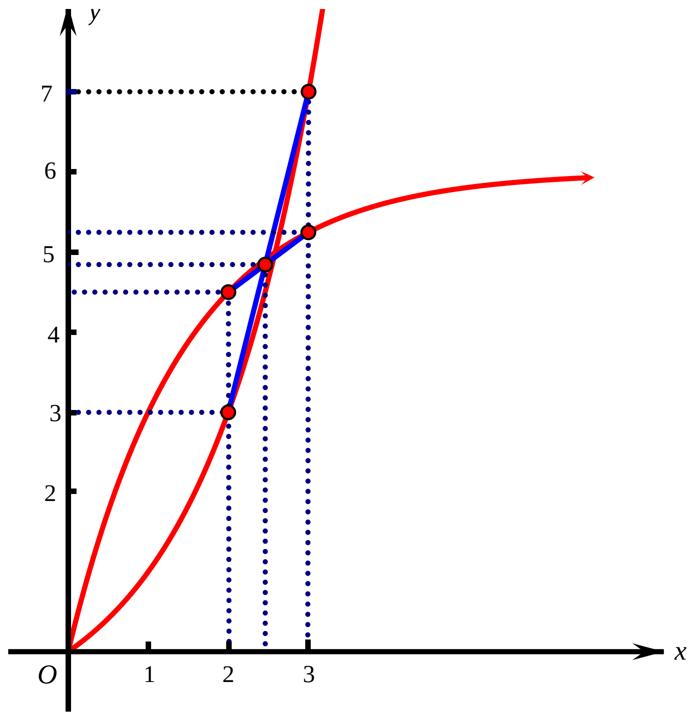


图 2 “蒲莞相遇”问题的分析

3 分数指数幂的产生

14 世纪，法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）在《比例算法》中用当时的记号表达了方根与分数指数幂之间的关系。16 世纪，德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）在《整数算术》（1544 年）中，将幂指数从非负整数推广到负整数，建立了如表 1 所示的指数和幂之间的对应关系[8]。

表 1 指数与幂的对应关系

指数	…	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	…
幂	…	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	…

1614 年，英国数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）通过构造首项为10^7、公比为$10^7\left(1-10^{-7}\right)$的等比数列而发明了对数；紧接着，通过与纳皮尔的交流，数学家布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）将纳皮尔的对数进行改进，发明了常用对数。其基本思想是：先建立表 2 所示的双数列对应关系，然后通过在等比数列相邻项之间插入等比中项，等到相应的对数，

表 2　作为常用对数基础的双数列

指数	0	1	2	3	4	5	6	7	…
幂	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	…

不断进行插值，就能得到给定数的对数。例如，要求 2 的常用对数（精确到 7 位小数），在 1 和 10 之间插入等比中项$10^{\frac{1}{2}} \approx 3.1622777$，其对数为 0.5；接着，在 1 和$10^{\frac{1}{2}}$之间插入等比中项$10^{\frac{1}{4}} \approx 3.7782794$，其对数为 0.25；然后，在$10^{\frac{1}{4}}$和$10^{\frac{1}{2}}$之间插入等比中项$10^{\frac{3}{8}} \approx 2.3713737$，其对数为 0.375，等等，最终算出 2 的常用对数为 0.3010302。常用对数的诞生，促进了人们对分数指数幂的认识。

1637 年，法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）在《几何学》中发明了幂的记号，但只使用了正整数次幂。之后，英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）、牛顿（I. Newton, 1643-1727）等将笛卡儿的记号应用于负数指数幂、分数指数幂等，从而将整数指数幂扩充到了任意有理数指数幂。

18 世纪，欧拉在《代数学基础》中通过类比的方法得出分数指数幂与根式之间的关系[10]：依次求$a^2,a^4,a^6,\cdots,a^{2n}$的平方根（欧拉只考虑算术根），得到$a,a^2,a^3,\cdots,a^n$由此可知：一个幂的平方根是指数折半的同底数的幂。因此$a,a^3,a^5,\cdots,a^{2n-1}$的平方根依次为$a^{\frac{1}{2}},a^{\frac{3}{2}},a^{\frac{5}{2}},\cdots,a^{\frac{2n-1}{2}}$。类似地，可得$a^m$的 n 次方根等于$a^{\frac{m}{n}}$。

4 指数曲线的发现

然而，指数函数概念的发展并非仅仅源于指数符号的创用和指数的扩充，还有很重要的一个环节是对有关指数规律的几何研究[11]。1644 年，意大利数学家托里拆利（E. Torricelli, 1608-1647）在进行对数计算时，发现了一种全新的曲线，其解析式用今天的符号来表达，就是$y = ae^{-cx}\left(x \geq 0\right)$[12]。托里拆利证明，该曲线上每个点的纵坐标与该点处的斜率之比是一个常数。当时，托里拆利为这个函数取了两个名称：半双曲线（hemihyperbola）和反对数曲线（logarithmica）[11]，但这一发现在当时并未发表。

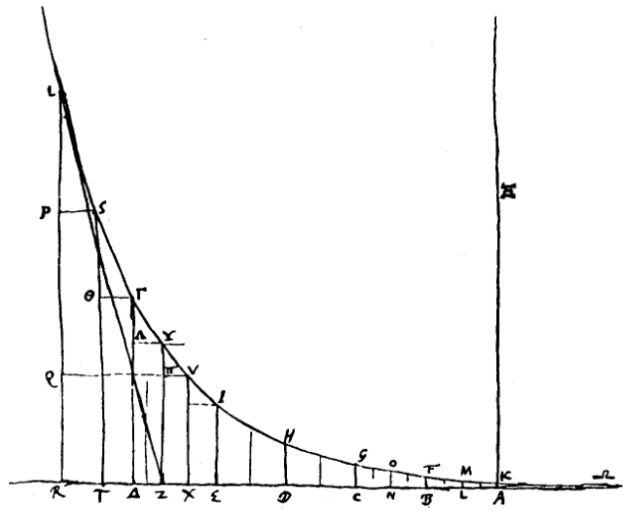


图 3 惠更斯 1661 年手稿中的指数曲线

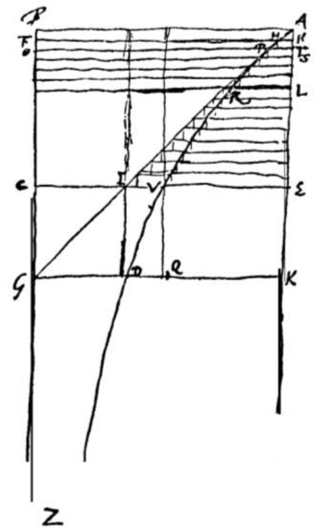


图 4 落体运动的加速度曲线

之后，荷兰数学家惠更斯（C. Huygens, 1629-1695）推广并发表了托里拆利的发现，并于 1661 年绘制了一条指数曲线。如图 3，相等线段 *AB*、*BC*、*CD* 等沿着横坐标设置，对应的 *AK*、*BF*、*CG* 等线段长度倍增。惠更斯重新证明了它的几何性质。7 年后，他发现，当物体在某种媒质中由静止开始下落时，这种媒质会施加与物体下落速度成正比的阻力。他将物体加速度随时间变化的规律绘制成图像，进而发现该图像是一条指数曲线，如图 4 所示，其中 *BZ* 方向为时间轴正方向，*BA* 方向为加速度正方向。事实上，设物体的质量为 m，阻力与速度的比例系数为 k，加速度函数为$a(t)$，则由牛顿第二定律以及速度和加速度的关系，可得：

$$mg-k\int_0^t a(t)\,dt=ma(t)$$

两边关于 t 求导得

$$a'(t)=-\frac{k}{m}a(t)$$

故得加速度函数 $a(t)=ge^{-ct}$，其中 $g=a(0)$ 为重力加速度，$c=\dfrac{k}{m}$，与托里拆利发现的曲线完全相同。

尽管托里切利和惠更斯证明了指数曲线上点的纵坐标可以由横坐标的反对数表示，但当时还缺乏根据给定横坐标计算纵坐标或根据给定纵坐标计算横坐标的幂级数方法。1664-1665 年，牛顿将二项式定理推广到有理数指数的情形，从而获得一系列函数的幂级数展开式。于是，求

一个数的对数问题便迎刃而解了。之后，牛顿和莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）创立微积分，为指数函数概念的进一步发展开辟了道路。

5 指数函数概念的形成

1727 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）引入e作为自然对数的底，于是符号e^x正式出现。1748 年，欧拉在著作《无穷分析引论》中定义指数函数如下：

“指数函数，可以是指数为变数，底数为常数，如a^z；也可以是底数和指数均为变数，如y^z；指数本身也可以是指数函数，如$a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}$。”[7]

显然，欧拉所定义的指数函数与今天数学教科书所定义的指数函数大相径庭，他所说的第二种情形是我们今天所说的“幂指函数”；第三种情形则是指数函数与指数函数、指数函数与幂指函数、幂函数与指数函数、幂函数与幂指函数的复合函数。

关于“指数为变数、底数为常数”的情形，也就是我们今天熟悉的指数函数，欧拉就底数a的特殊取值进行了讨论：当$a=0$或a取负值时，a^z的值是跳跃的；当$a=1$时，a^z的值恒为 1。这也就是为什么今天教科书在定义指数函数时规定$a>0$且$a\neq 1$的原因。此外，欧拉还定义了对数函数，并揭示了两种函数之间的联系。他在《无穷分析引论》中写道：

“给定了数a，那么对每一个z值，我们都能求得一个y值，使得$y=a^z$。现在倒过来，对每一个y值，要我们求出一个 z 值，使得$a^z=y$，也即把z看成是y的函数。此时称z为y的对数。”[7]

欧拉还推导了后人以他的名字命名的公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，将指数推广到了复数。由此，指数函数概念基本形成。

18 世纪之后，数学家和科学家发现了更多可用指数函数来刻画的物理现象。1729 年，法国数学家、地球物理学家布格（P. Bougue, 1698-1758）在研究半透明材料的光衰减时发现，当半透明材料的厚度以算术级数增加时，光线会以几何级数递减。1760 年，德国数学家朗伯（J. H. Lambert, 1728-1777）用更准确的数学方法表达了吸光度与吸收介质厚度之间的关系；1852 年，

德国数学家、物理学家比尔（A. Beer, 1825-1863）发现吸光度与吸光物质的浓度也具有类似的关系，两者结合就得到了光吸收的基本定律——朗伯-比尔定律。

19 世纪中叶，德国物理学家韦伯（W. E. Weber, 1804-1891）和德国物理学家、实验心理学家费希纳（G. T. Fechner, 1801-1887）用指数型函数表达了物理量和心理量之间的关系。1940 年代，美国化学家利比（W. F. Libby, 1908-1980）创用了放射性碳定年法，该方法被广泛用于考古学、地质学、地球物理学等学科。

5 结 语

由以上考察可见，指数函数概念的形成与发展有着十分悠久的历史。指数函数最开始源于等比数列，涉及的幂指数为自然数；古代利息问题、植物生长问题等现实生活中的问题以及 17 世纪用于简化计算的常用对数表的编制，促使幂指数向任意实数的扩展；幂的记号的发明、指数曲线的发现促进了指数函数概念的诞生；欧拉之后，现代指数函数的概念登上了近代数学历史的舞台，而科学领域有关规律的发现促进了指数函数概念的发展。

指数函数的历史为今日课堂教学提供了许多启示。

一是知识之谐。指数函数概念的发展可大致分为四个阶段，分别是底数为具体数值，指数为整数阶段；底数为具体数值，指数为实数阶段；指数函数概念的形成阶段以及指数函数概念的完善阶段，这四个阶段为教师开展重构式教学提供了参照。

二是探究之乐。教师可以设计探究活动，引导学生经历指数函数的形成和完善过程，体会数学的研究方法，积累数学活动经验。

三是能力之助。教师通过课堂问题（如利息问题）的设置，可以有目的地训练学生的数学建模能力；同时，从多个问题的具体背景中抽象出指数函数的一般概念和结构，也有助于学生数学抽象素养的培养。

四是文化之魅。古巴比伦、古印度、古代中国以及近现代欧洲数学文献中一直都记载有指数函数的相关内容，这些内容可以让学生体会数学的悠久历史以及数学文化的多元性。除此之外，指数函数的广泛应用揭示了数学与其他学科之间的密切联系。

五是德育之效。教师通过介绍指数函数概念形成和发展的历史，让学生理解数学的演进性，体会数学家勤学不怠、百折不挠的品质，感受数学背后的人文精神。同时，对生活中指数函数

应用的介绍，可以帮助学生体会数学与现实生活之间的普遍联系，获得良好的数学体验，增强学好数学的认同感，树立正确的数学观。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(02): 1-5.

[2] Friberg, J. *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*[M]. Singapore: World Scientific, 2005, 1-24.

[3] 汪晓勤. 纸草书上的数列问题[J]. 数学教学, 2010(01): 29-31.

[4] 斐波那契. 纪志刚等译. 计算之书[M]. 北京: 科学出版社, 2007:526.

[5] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol.2)[M]. Boston: Ginn & Company, 1925.

[6] 郭书春, 刘钝校点. 孙子算经[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998.

[7] 欧拉. 无穷分析引论[M]. 太原: 山西教育出版社, 1997.

[8] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[9] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社, 2004.

[10] Euler, L. *Elements of Algebra* [M]. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co., 1822: 56-58.

[11] Curtis, L. J. Concept of the exponential law prior to 1900[J]. *American Journal of Physics*, 1978, 46(9): 896-906.

[12] 张东年. HPM 视角下指数函数及其性质的教学案例研究[J]. 数学通讯, 2020(22): 14-17+30.

美国早期代数教科书中的分式方程

杨孝曼

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引 言

在初中数学教学中，方程是一条重要的主线。分式方程作为方程模型的一种，在现实生活中具有广泛应用，是初中阶段数学学习的重要内容之一，也是难点之一。课堂教学中，教师需要引导学生回答以下问题：什么是分式方程？为什么要学习分式方程？为什么会产生增根？为什么不用通分而要用去分母的方法解分式方程？在提倡学科育人的今天，教师还需要思考：如何实现分式方程的育人价值？

回溯历史，我们发现关于分式方程的问题也困扰过一代又一代的数学家，人们对分式方程的认识经历了从不完善到完善的过程，经过几代数学家的不懈努力，才形成了今天的严谨认识。因此，分式方程的历史既为教学提供了思想启迪，也为教学提供了丰富的素材。

目前，虽然已有少数教师从 HPM 的视角开展过分式方程的教学实践[1][2][3]，但他们只是利用了斐波那契《计算之书》中的问题以及涉及增根的部分史料，数学史的运用方式局限于复制式和附加式，未能采用重构式。究其原因，HPM 专业学习共同体对于分式方程的历史还缺乏深入的研究。鉴于此，本文聚焦分式方程的定义、解法、增根及验根的方法，对美国早期代数教科书进行考察，以期为分式方程的教学提供更多的参考。

2 教科书的选取

本文以分式方程为关键词，对有关数据库中出版于 19 世纪至 20 世纪中叶的 247 种美英代数教科书进行检索，发现仅有 73 种教科书中涉及分式方程，且都出版于美国。这 73 种教科书的时间分布如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无明显变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

分式方程主题所在章节大致可以分为“分式方程”、“分式方程与字母方程”、“简单方

程”、“一元方程”、“方程的求解”和其他(如“线性方程”、“分数有理函数”、“变量与函数”等)。具体分布见表 1。其中，“分式方程”章的占比最高，但直到 1880 年之后才开始出现分式方程独立成章的情况。

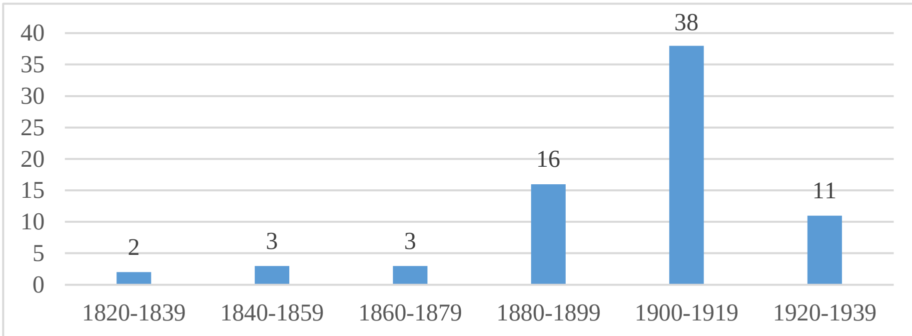


图 1 73 种教科书的时间分布

表 1 分式方程概念在 73 种代数教科书中的章节分布

章名	分式方程	分式方程与字母方程	简单方程	一元方程	方程的求解	其他
数量	25	12	13	9	4	10
比例	34.25%	16.44%	17.81%	12.33%	5.48%	13.70%

3 分式方程的定义

虽然 13 世纪初意大利数学家斐波那契在《计算之书》中已涉及分式方程问题，18 世纪英国数学家桑德森在《代数基础》中已讨论了分式方程的解法，但分式方程的定义却出现得很晚。在 1893 年出版的一本教科书中，我们首次发现分式方程的明确定义，而在此之前的教科书则往往将分式方程和分数系数方程混为一谈。

73 种教科书中，共有 29 种给出了分式方程的定义，表 2 列出了其中一些典型例子。

表 2 早期教科书中分式方程的定义

教科书	定义
Taylor(1893)	有一个或多个关于未知字母的分式项的方程称为分式方程。[4]
Milne(1901)	分母中含有未知数的方程。[5]
Wells(1904)	将方程化为 $\frac{A}{B}=0$ 的形式，其中 A 和 B 都是整式，且不包含公因子，若 B 中含

	有未知数 x，则原方程就称为分式方程。[6]
Comstock(1907)	一旦一个变量出现在方程的任何分式的分母中，这个方程就被称为分式方程。[7]
Wheeler(1907)	一个方程称为某个特定字母的分式方程，如果这个字母出现在该方程某个分式的分母上。[8]
Wilczynski(1916)	如果方程中至少有一项是分式函数，则该方程是分式方程。[9]

在今天看来，Taylor（1893）的定义并不准确，而今日课堂上的学生也会持有类似的错误认识，体现了学生学习困难的历史相似性。Comstock（1907）的定义反映了当时人们对变量与未知数的混淆。Milne（1901）的定义也是国内现行教科书中采用的方式，此种定义严谨、准确且简洁。但也正因为过于凝练，会给学生的理解带来一定的挑战。例如，针对方程 $\frac{x+1}{a}=6$ 是否是分式方程的问题，学生仍存在疑惑，针对这一问题，Wheeler（1907）在给出定义后，进一步举例说明方程 $\frac{2x}{3x+2}+\frac{5}{x-1}=7$ 是关于 x 的分式方程，而 $\frac{3x}{a+b}-\frac{4x}{2a}=\frac{b}{a-b}$ 既是关于 x 的整式方程，也是关于 a 和 b 的分式方程，以此加深学生对分式方程本质的理解。总之，直到 20 世纪上半叶，关于分式方程的定义仍未达成统一共识。

4 分式方程的解法

73 种教科书中共出现了分式方程的三类解法，分别为“通分法”、“去分母法”和“技巧法”——针对不同特点的分式方程采用不同的技巧。其中，有 56 种教科书介绍 1 种解法，15 种介绍 2 种解法, 2 种介绍 3 种解法。

4.1 通分法

关于“通分法”，共有 4 种教科书给出详细介绍。“通分法”的每一步都是同解变形，故无需验根。例如，Fisher（1898）将原方程的所有项移到方程左边，通分并化简，记为

$$\frac{N}{D}=0 \tag{1}$$

其中 N 与 D 是两个互质的多项式。上述化简过程只涉及移项、通分和约分的运算。显然，移项和通分是同解变形，而分子分母约去公因式并不会影响分式方程的根。所以，方程(1)与原方程是同解方程。对方程(1)去分母可得

$$N=0 \tag{2}$$

易知，方程(1)的解定会满足方程(2)，因此也是方程(2)的解，也就是说，在方程的变形过程中没有失根的情况。同时，由于 N 与 D 互质，两者不包含公因子，因此不存在 x 使得 N 和 D 同时为 0。所以，方程(2)的根均为方程(1)的根，也就是说，方程变形过程中没有产生新根。因此，方程(2)与方程(1)是同解方程，与原方程也是同解方程[10]。

“通分法”没有发生失根或增根的情况，因此不需要验根。但同时，作者也进一步指出，此种方法有时并不是首选解法，因为它在求解某些类型的分式方程时，工作量比较大。

4.2 去分母法

有 72 种教科书采用了“去分母法”，这也是我们目前最常使用的方法。例如，Slaught（1912）：“在求解分式方程时，通常先去分母，将它转化为一个不含分式的同解方程。但是在方程两边同乘最简公分母后，可能会也可能不会引入新根。”[11]如求解方程

$$\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}=2$$

$$2(x-3)+x-2=2(x-2)(x-3)$$

$$2x^2-13x+20=0$$

$$(x-4)(2x-5)=0$$

$$x=4, x=\frac{5}{2}$$

得到的两解都满足原方程，因此在去分母时没有引入新根。又如方程

$$\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}=1$$

$$4x-(x+1)^2=x^2-1$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$x=0, x=1$$

经检验，$x=0$ 满足原方程，而 $x=1$ 代入原方程使得分母为 0，因此，$x=1$ 是引入的新根。作者接着总结了求解分式方程的步骤：

- 将所有分式约分到最简形式；
- 方程两边同乘所有分母的最简公分母；
- 拒绝任何使原方程分母为 0 的根，剩下的根就是原方程的解。

部分教科书中还论述了分式方程与去分母后的新整式方程之间的关系。例如，Comstock（1922）指出，去分母后得到的整式方程可以是线性方程、二次方程或更高次的方程。原方程的所有解都是新整式方程的解，但反之则不一定正确，所以有必要对所有的根进行检验。作者还通过表格和图像进一步说明两者的联系和区别[12]。以方程$\frac{3}{x}+\frac{9}{2}=0$为例，去分母后得到的整式方程为$6+9x=0$。两者关系见表 3 和图 2。在表 3 中，当 x 取 0 时，$\frac{3}{x}+\frac{9}{2}$无意义，而$6+9x$等于 6，由此可知，整式方程中未知数的取值范围扩大了。

在图 2 中，点 A 的横坐标是$-\frac{2}{3}$，同时也是两个方程共同的解。对于两个方程的关系，

表 3 分式方程和整式方程的关系

	–5	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0,5**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\frac{3}{x}+\frac{9}{2}$	3.9	3.8	3.5	3	1.5	-1.5		7.5	6	5.5	5.3	5.1
$6+9x$	39	30	-21	-12	-3	1.5	6	15	24	33	42	51

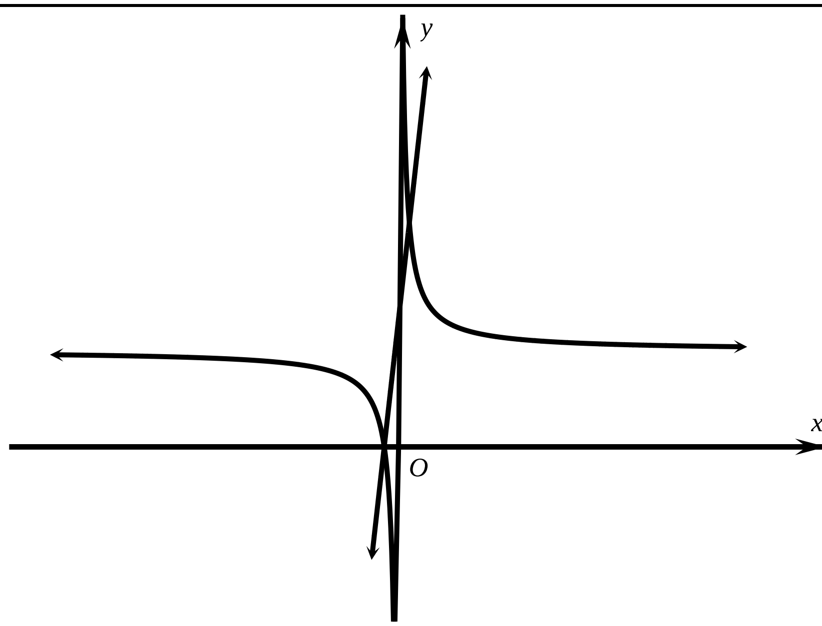


图 2 分式方程和整式方程的图像

Fisher(1898)指出，原分式方程和得到的整式方程是否同解取决于：如果包含一个未知数的分式方程的两边同乘一个整式，这个整式不包含对去分母来说多余的因子，那么得到的整式方程与原分式方程同解。[10]

关于“去分母法”，部分数学家认为，只要在去分母时乘最简公分母，就不会引入新根。

如 Smail(1931)称:“在去分母时，方程两边乘所有分母的最简公分母可以避免引入新根”[13]。这个结论在今天看来显然是错误的，但当时的数学家们在去分母时，追求每一步都同解，即先将分式方程化简到理想的最简形式，再确定最简公分母。但后来他们也开始发现，很难直观地去判断一个分式方程是否已化简到位，也就无法确保所乘整式中不包含“多余因子”。因此，Durell(1914)也指出，当可以化简的分式比较隐晦或者比较分散时，最好的解法是直接去分母，再通过检验来拒绝不满足原方程的根。[14]

4.3 技巧法

针对不同类型的分式方程，采取不同的求解技巧，称为“技巧法”。有 16 种教科书提到此种方法。以下列出了早期教科书中常见的三种类型。

4.3.1 类型一

如果在一个给定的方程中，某些分式的分母是单项式，另一些是多项式，这种情况下去分母可以分为两步来进行：(1)先去单项式分母，并尽可能化简；(2)再去多项式分母。例

$$\frac{8x+23}{20}-\frac{5x+2}{3x+4}=\frac{2x+3}{5}-1$$

方程两边同乘 20

$$8x+23-\frac{20(5x+2)}{3x+4}=8x+12-20$$

移项并合并同类型

$$31=\frac{20(5x+2)}{3x+4}$$

两边同乘 $3x+4$

$$93x+124=20(5x+2)$$

最后解得 $x=12$。[15]

4.3.2 类型二

第二类在去分母前，需要先将部分分式进行通分，例

$$\frac{x-8}{x-10}-\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-7}{x-9}-\frac{x-4}{x-6}$$

方程两边分别通分

$$\frac{(x-8)(x-7)-(x-5)(x-10)}{(x-10)(x-7)}=\frac{(x-7)(x-6)-(x-4)(x-9)}{(x-9)(x-6)}$$

分子化简

$$\frac{6}{(x-10)(x-7)}=\frac{6}{(x-9)(x-6)}$$

由分子相同，可得分母相同

$$(x-10)(x-7)=(x-9)(x-6)$$

最后解得 $x=8$。[15]显然，若第一步就直接乘方程的最简公分母，会带来非常大的计算量。

4.3.3 类型三

在某些情况下，若分式方程中包含假分式，应先将其化为整式和真分式的和。例

$$\frac{x-2}{x-4}+\frac{x-3}{x-5}=2$$

将假分式化简

$$1+\frac{2}{x-4}+1+\frac{2}{x-5}=2$$

进一步化简得

$$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$$

去分母

$$x-5+x-4=0$$

最后解得 $x=\frac{9}{2}$。[10]

“技巧法”本质上还是要去分母，只是在去分母时会使用一些适合于给定方程特点的特殊方法或技巧，以此来减少解方程的工作量。

4.4 解法的演变

图 3 给出了三种解法的时间分布情况。由图可知，“去分母法”一直是主流方法。“通分法”仅存在于 19 世纪末和 20 世纪初，且数量不多。“技巧法”从 19 世纪末出现以后，一直占有一定比例。

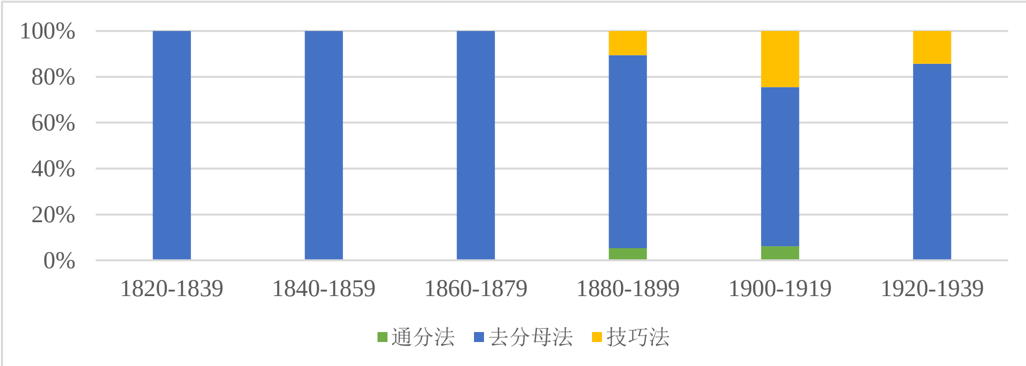


图 3 三种分式方程解法的时间分布

5 增根

将分式方程转化为整式方程后，若整式方程的根不能使分式方程成立，这个根就叫做原分式方程的增根，英文中通常称之为“extraneous root”，在 73 种早期教科书中仅有 6 种教科书使用了该名称。此外，还有 2 种教科书使用“additional root”。Aley(1904)最早给出增根的说明：“在去分母时引入的新根叫做增根”[16] 而 Durell(1914)并不局限在分式方程范围内讨论增根，他给出的定义为“增根是在求解方程的过程中（通常是无意中）引入方程的根。”同时，他还指出：“产生增根最简单的方法是在整式方程的等号两边同乘一个包含未知数的表达式。而更常见(也更难检测)的方法是，在去分母前未将原分式方程中的分式化简到最简形式。”[14]

5.1 产生增根的原因

共 12 种教科书讨论了增根产生的原因。其中，多数教科书认为，去分母时所乘公分母的次数比最简公分母高，最终导致了增根的出现。根据 Fisher(1898)的说法，也就是在方程两边同乘了多余的因式(unnecessary factor)。[10]例如

$$\frac{2x}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}+4,$$

在不做任何变形的情况下，去分母时所乘的“最简公分母”为 (x^2-9)，此时解得 $x=3$，$x=-\frac{11}{4}$。经检验，$x=3$ 是原方程的增根。但早期教科书持有不同观点，认为应先将方程中包含的分式化成最简形式，即先移项、通分，再约去分子和分母的公因式，得

$$\frac{1}{x+3}=4,$$

因此，对于原分式方程来说，“最简公分母”是 $(x-3)$，而不是 (x^2-9)。此处，$(x+3)$ 就是多余因式。

部分教科书在给出上述原因之前，首先说明在整式方程两边同乘含有未知数的整式，会产生增根[4]。因此，在乘“最简公分母”后，分式方程已经转化为整式方程，上文所说的多余因式本质上就是在得到的新整式方程两边又同乘了含有未知数的整式，从而产生增根。

Jocelyn(1902)则给出以下解释：“设分式方程为 $m=n$，L 为最简公分母，方程两边同乘最简公分母，得到整式方程为 $Lm=Ln$, 或者 $Lm-Ln=0$。但由于 $m=n$ 是分式方程，L 包含未知数，因此可能存在 $L=0$ 的解满足 $Lm-Ln=0$，却不满足 $m=n$。”[17]

此外，Slaught(1912)认为：“若原分式方程的两个或更多的分母包含一些公因子，如 $(x-a)$，那么 $x=a$ 可能会也可能不会成为原方程的增根，但无论如何，这是产生增根的唯一途径。”[11]

5.2 验根

34 种教科书强调解分式方程时需要检验。图 4 为这些教科书的时间分布情况。由图可知，1880 年之后才开始有教科书强调要检验，之后越来越多的教科书认识到验根的重要性。究其原因，19 世纪的教科书在求解分式方程时追求每一步变形都要等价，因而不必进行验根。但经过反复探究，数学家们也发现在使用“去分母法”时，无法确保去分母后得到的新方程与原分式方程同解。因此，1920 年之后，几乎所有教科书都强调解分式方程时需要将得到的所有根代入原方程检验，进而确定符合原方程的解。

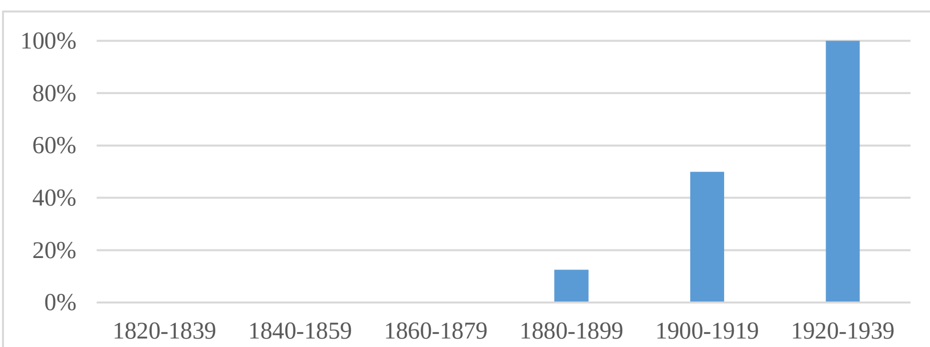


图 4 强调验根的教科书的时间分布

早期教科书中验根的方法与今天也略有不同。据统计，共有 32 种教科书采用将解代入原方程的做法，此时的检验包含两个方面，一是检验所得的解是否使得原方程左右两边相等，二是检验整式方程的解是否使原方程的分母为零。此外，有 2 种教科书仅代入原方程的分母进行检

验，只需看是否使原分式方程的分母等于零即可。如 Fite（1913）强调在解完整式方程后，必须检验是否存在解使得原方程的分母为零。同时 Fite（1913）还证明了如下定理：

定理 若新方程的某些根不是原方程的根，则用其代替未知数 x 时，一定会使原方程的某些分母为零。

证明过程如下，将原方程所有项都移到等号左边，记为

$$P=0 \tag{3}$$

这里 P 代表一些分式。若 D 是 P 中所有分式的最简公分母，方程两边同乘 D，得到的新方程为

$$PD=0 \tag{4}$$

PD 是关于 x 的多项式。如果存在 x 的值使(4)成立，而此时 D 不等于零，那么它一定会满足(3)。也就是说，它是原方程的根。因此，若存在(4)的根不满足(3)，这个根就一定会使 D 等于零。[18]

6 结论与启示

通过以上考察，我们可以看出 19 世纪到 20 世纪中叶的美国早期代数教科书中关于分式方程的认识仍处于探索阶段，其中不乏一些错误认识。早期教科书为今日教学提供了许多启示。

其一，课堂中教师应加强学生对分式方程本质的理解。由上述讨论可知，在很长一段时间里，人们并不区分分式方程和分数系数方程，对分式方程的定义也出现过错误。我们有理由相信，学生在辨析分式方程时会产生困难。笔者曾有幸在上海市某中学观摩“可化为一元一次方程的分式方程”一课。课上，教师为了让学生掌握分式方程的定义，特别指出方程 $\frac{x-1}{a}=0$ 不是分式方程。笔者认为教师的这一做法存在不合理之处，根据 Wheeler（1907）的说明，上述方程一方面是关于未知数 x 的整式方程，另一方面，若将 a 看作未知数，该方程也是关于 a 的分式方程。教师应向学生讲解清楚，避免进一步加深学生的困惑。

其二，关于分式方程的解法，教师在课堂中应给予学生自主探究的机会，避免灌输式教学。目前很多教师认为该课题的重点就是让学生掌握用去分母法解分式方程，并记得要验根即可。因此，在课堂上，学生并没有机会去体验探究新知的乐趣。教师可以借鉴并改编早期教科书中的例题，引导学生用不同的方法去求解。同时，可以挑选一些特殊形式的分式方程，让学生自

主选择最合适的方法，并互相交流，比较不同方法在求解过程中工作量的大小，进而体会“去分母法”的优劣，解决“为什么不用通分而要用去分母的方法解分式方程？”的问题。

其三，分式方程课题的教学难点之一是理解产生增根的原因。关于增根，国内现行教材都只在分式方程范围内给出定义。但据 Durell(1914)的观点，只要在方程的求解过程中引入的新根都是增根，这一定义更有利于学生掌握增根的本质。此外，在解释分式方程产生增根的原因时，目前主要存在以下两种观点，一是在变形前后，未知数的定义域扩大了；二是在方程两边同乘一个等式时，该等式的值为零，使本不相等的两边相等了。这两种说法本身都没有问题，但对初中学生来说却过于抽象。教师可以借鉴早期教科书中的解释，也可参考 Comstock(1922)的做法，通过列表和数形结合，让学生直观感受原分式方程与整式方程的联系与区别，深入理解产生增根的原因，加深对验根的印象。

其四，教师在进行 HPM 教学设计时，应充分挖掘史料的德育价值，充实分式方程教学的人文内涵。具体来说，可以通过展示分式方程曲折的发展过程，介绍数学家们走过的弯路和犯过的错误，鼓励学生积极地去探索和发现，树立学习数学的信心和勇气，养成坚持不懈的优秀品质。

参考文献

[1] 栗小妮,贾彬. HPM 视角下“可化为一元一次方程的分式方程”的教学[J]. 数学教学, 2019(03): 13-17.

[2]王倩,沈中宇,洪燕君. HPM 视角下可化为一元二次方程的分式方程教学[J]. 数学教学, 2017(07): 23-26+37.

[3]张奕一,王敬进,洪燕君. HPM 视角下可化为一元二次方程的分式方程教学[J]. 上海中学数学, 2017(05): 22-25.

[4] Taylor, J. M. *An Academic Algebra*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1893, 174.

[5] Milne, W. J. *Academic Algebra*[M]. New York: American Book Company, 1901, 163.

[6] Wells, W. *Advanced Course in Algebra*[M]. Boston: D.C. Heath & Co., 1904, 122.

[7] Comstock, C. E. *Elementry algebra* [M]. Peoria: C. E. Comstock. 1907, 185.

[8] Wheeler, A. H. *First Course in Algebra: with mental exercises*[M]. Boston: Little, Brown, and

Company, 1907, 298.

[9] Wilczynski, E. J., Slaught, H. E. *College Algebra: with Applications*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1916, 241.

[10] Fisher, G. Egbert., Schwatt, I. J. *Text-book of Algebra*[M]. Philadelphia: Fisher and Schwatt, 1898, 311-315.

[11] Slaught, H. E., Lennes, N. Johann., Lennes, N. J. *First Principles of Algebra*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1912: 409-411.

[12] Comstock, C. E. Sykes, M. *Beginners' algebra*[M]. Chicago: Rand McNally, 1922, 246-247.

[13] Smail, L. Leroy. *College Algebra*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1931, 210

[14] Durell, F. *Durell's Algebra*[M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1914, 201-205.

[15] Hall, H. S., Sevenoak, F. L., Knight, S. R., Knight, S. R., Sevenoak, F. L. *Elementary Algebra*[M]. New York: Macmillan, 1895, 126-127.

[16] Aley, R. J., Rothrock, D. A. *The Essentials of Algebra for Secondary Schools*[M]. New York: Silver, Burdett and Company, 1904, 142.

[17] Jocelyn, L. Parker. *An Algebra for High Schools and Academies*[M]. Philadelphia: Butler, Sheldon & Company, 1902, 216.

[18] Fite, W. Benjamin. *College algebra*[M]. Boston: D.C. Heath & co., 1913, 97-98.

西方早期几何教科书中的圆面积公式

狄 迈

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

圆面积是历史最悠久的数学课题之一，在古代东西方不同文明的数学文献中都有记载。公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得（Euclid，前 330-前 275）用穷竭法证明了圆面积之比等于直径平方之比；阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）利用穷竭法证明了圆面积等于直角边长分别等于圆周长和半径的直角三角形的面积。公元 3 世纪，中国数学家刘徽（3 世纪）利用割圆术证明了圆面积等于半周与半径之积。17 世纪，德国数学家开普勒（J. Kepler, 1571-1630）利用无穷小方法，将圆转化为直角边长分别等于周长和半径的直角三角形[1]。微积分诞生后，人们采用极限的方法来求圆面积。

《义务教育数学课程标准》指出，要求学生通过操作，探索并掌握“圆面积”公式，并能解决简单的实际问题。现行六年级数学教科书中，人教版与沪教版将圆分割成小扇形，通过等积变形拼成近似平行四边形来推导圆面积，北师大版除了平行四边形的拼接，还介绍了多边形逼近、同心圆堆积等方法。但考虑到学生的认知基础，教科书无法采用严谨的极限方法，学生往往误以为圆面积公式只是个近似公式；而在大学微积分教学中，教师往往又因为简单而忽略了该公式。如何在“近似”与“精确”之间架设一座桥梁，是今日教学的难点。

鉴于此，本文聚焦圆面积公式的推导与证明，对西方早期几何教科书进行考察，以期为今日数学教学提供思想启迪。

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库中选取 120 种西方早期几何教科书为研究对象，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

120 种几何教科书中，圆面积主要位于“正多边形”、“正多边形与圆”、“圆”、“面积”、“度量”等章节。其中圆面积大多归于“正多边形与圆”一章之中，可见早期教科书多利用正多边形这一直边图形去研究圆。

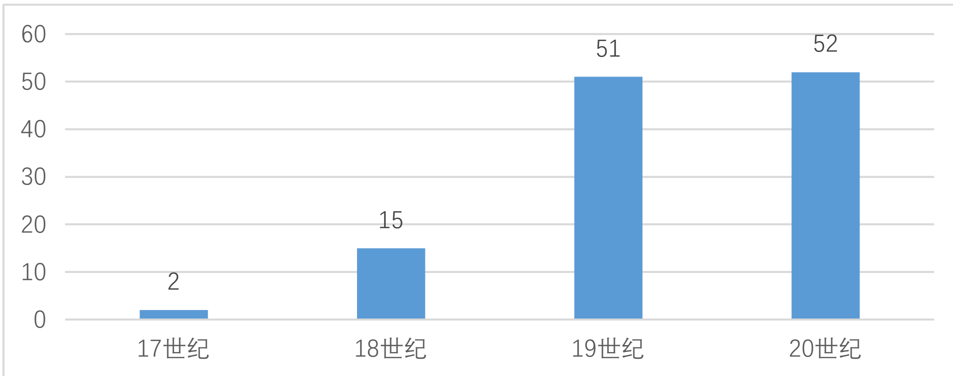


图 1 120 种几何教科书的时间分布

3 圆面积公式的证明

在 120 种几何教科书中，关于圆面积公式的推导或证明方法可分为穷竭法、类比法、等积变形法、极限法四类。

3.1 穷竭法

9 种采用了古希腊的穷竭法。17 世纪法国数学家巴蒂（I. G. Pardies, 1636-1673）在其《几何基础》中首先证明正多边形面积为以周长为底、边心距为高的直角三角形面积，然后用穷竭法证明圆面积等于直角边长分别等于圆周长和半径的直角三角形的面积[2]。

苏格兰数学家普莱费尔（J. Playfair, 1748-1819）在《几何基础》（1795）中利用穷竭法证明[3]

定理 1：对于一个给定的圆，可以找到两个相似的内接与外切正多边形，使其面积与圆面积之差任意小。

定理 2：若图形 B 的面积大于圆 A 的任一内接正多边形的面积，并且小于圆 A 的任一外切正多边形的面积，则 B 的面积等于圆 A 的面积。

然后证明

定理 3：圆的面积等于以圆周长为底、半径为高的直角三角形的面积。

如图 2，ABC 是圆心为 D 的半圆，AC 为直径；延长 AC 至点 H，使 AH 等于圆的半周长，即 ABC 的长度，则需证明：圆 D 的面积等于 $AD \cdot AH$。

延长 AC 至点 K 和 L，使 AK 与 AL 分别等于以弦 AB 与切线段 EF 为边的内接、外切正多边形的半周长，$AK<AH<AL$。易知 $S_{\Delta EDF}=EG\cdot DG$，因此，整个外切正多边形的面积等于 $AD\cdot AL$。因为 $AL>AH$，故 $AD \cdot AH<AD \cdot AL$，因此 $AD \cdot AH$ 小于所有外切正多边形的

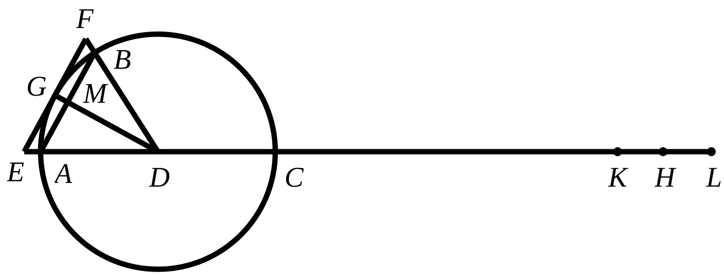


图 2 普莱费尔对圆面积公式的证明

面积。同理，$AD \cdot AH$ 大于所有内接正多边形的面积。由定理 2 知，$AD \cdot AH$ 等于圆面积，即圆面积等于半径与半周长的乘积。John（1822）等沿用了上述证明[4]。

也有教科书[5]直接采用了阿基米德的证明[6]。如图 3，RtΔABC 的短直角边 AC 为圆的半径，长直角边 AB 等于圆周长。假设圆 C 的面积 $S>S_{\Delta ABC}$。设 $S=\frac{1}{2}CA\times AD$，$AD>AB$。由上述定理 1，必有圆外切正多边形周长小于 AD，而外切正多边形的面积等于其边心距与周长乘积之半，因此该外切正多边形面积小于 S，矛盾。同理，假设 $S<S_{\Delta ABC}$，也会得出矛盾结论。因此，$S=S_{\Delta ABC}$。

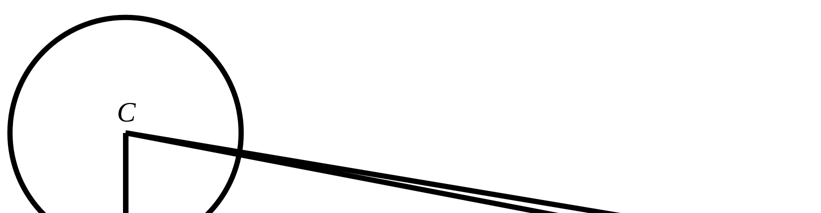


图 3 Morton（1830）对圆面积公式的证明

由于古希腊数学家不接受实无穷而采用繁琐的穷竭法，但该方法始终是一个有限的过程，与当今所说的极限还有一定的距离，依靠该方法也难以发现新的结论。

3.2 类比法

所谓类比法，就是先证明正多边形的面积等于周长与边心距的乘积之半，然后将圆视为“正无穷边形”，从而得到圆面积为其周长与半径的乘积之半。19 种教科书采用了该方法。例如，17 世纪法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640-1717）在《实用几何学》[7]（1684）中通过将正多边形转化为三角形（图 4），证明其面积等于底边长等于周长、高等于边心距的三角形面积，然后将圆看作“正无穷边形”，直接得出圆面积公式。

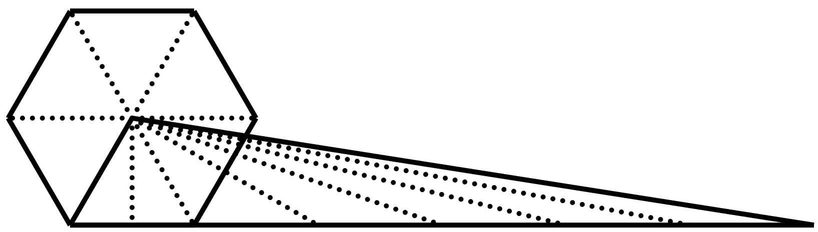


图 4 正多边形的等积变形

18 世纪法国数学家拉梅（B. Lamy, 1640-1715）在其《几何基础》[8]（1731）中、布尔格尼（L. de Bourgogne）在其《几何基础》[9]（1735）中、瓦里尼翁（P. Varignon）在其《数学基础》[10]（1734）中、克莱罗（A. C. Clairaut, 1713-1765）在其《几何基础》[11]（1753）中、英国数学家米勒（J. Muller, 1699-1784）在《新数学基础》[12]（1773）中都采用了这种方法。

“正无穷边形”一说源于微积分发明者之一莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）的切线定义。18 世纪，微积分尚未严密化，极限概念还不清晰，这种说法为数学家所普遍采用。

3.3 极限法

79 种教科书利用“极限”工具来推导面积公式。有些教科书证明：当圆内接或外切正多边形边数 n 趋向无穷时，其周长（分别用 p_n 和 P_n 表示）和面积（分别用 s_n 和 S_n 表示）的极限分别是圆周长 C 和圆面积 S；有些教科书则不加证明地直接利用了上述结论。不同教科书推导或证明圆面积公式的方法有以下几种情形。

（1）利用圆外切正 n 边形。因边心距为圆半径 R，故圆外切正 n 边形的面积为 $S_n=\dfrac{1}{2}P_nR$，于是有[13]

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}P_nR=\frac{1}{2}CR$$

（2）利用圆内接正 n 边形。设边心距为 r_n，则圆内接正 n 边形的面积为 $s_n=\frac{1}{2}p_n\times r_n$，故有[14]

$$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}p_n\times r_n=\frac{1}{2}CR\text{。}$$

（3）同时利用圆内接和外切正 n 边形[15]。作圆内接和外切正 n 边形，其边心距分别为设 r_n 和 R，则有 $\frac{1}{2}p_nr_n<S<\frac{1}{2}P_nR$，因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}p_nr_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}P_nR=\frac{1}{2}CR,$$

由数列极限的夹逼定理得 $S=\frac{1}{2}CR$。

65.8%的教科书采用了极限方法。该方法比穷竭法简单，又比类比法更严谨。但是，没有一种教科书采用刘徽的方法，即由 $s_{2n}=\frac{1}{2}p_nR$ 取极限得出圆面积。

3.4 等积变形法

3.4.1 三角形法

有 2 种教科书选择了开普勒的方法[1]。如 18 世纪英国数学家爱默生（W. Emerson, 1701-1782）在其《几何基础》（1794）中将圆分割成无数以半径为高、弧长为底的等腰三角形[16]（图 5），分别将这些小三角形面积等积变形，组合成一个直角三角形，于是得 $S=\frac{1}{2}CR$。

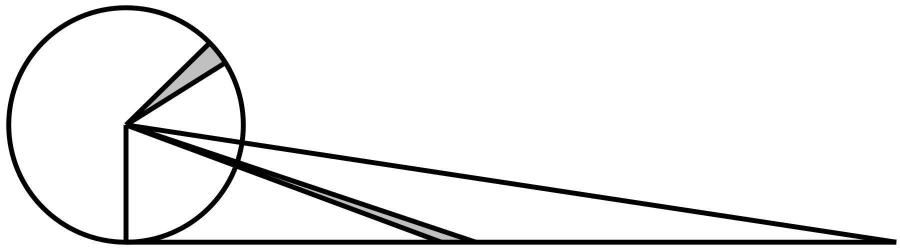


图 5 开普勒圆面积公式推导

18 世纪法国数学家布尔格尼除了将圆视为“正无穷边形”外，还将圆视为“由无穷多个同心圆构成的图形”，把每一个圆周“拉直”，圆就转化成了直角边长分别等于圆周长和圆半径的直角三角形。这种方法源于 17 世纪意大利数学家卡瓦列里（B. Cavalieri, 1598-1647）的“不可分量法”，其基本思想是：线由点构成，面由线构成，体由面构成。如图 6，过半径 OA 的端点 A 作圆的切线，取点 B，使 AB 的长度等于圆周长，联结 OB。过 OA 上任意一点 C 所作 OA 的垂线，交 OB 于 D。易证：CD 等于以 OC 为半径的圆的周长。因此，圆 O 的面积等于 RtΔOAB 的面积[9]。里瓦尔德（F. Rivard, 1697-1778）在其《几何基础》（1739）和《数学基础》（1752）中也采用了同样的方法。[17-18]

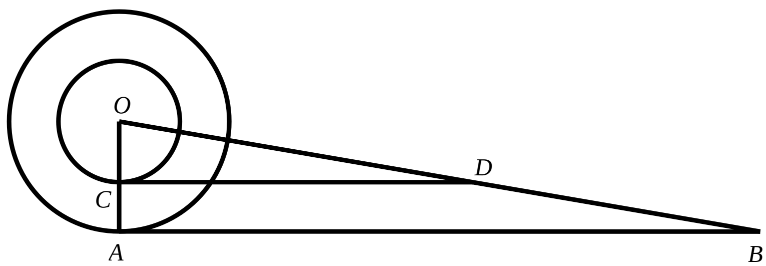


图 6 同心圆方法

Slaught（1911）则不通过等积变形，而直接将无穷多个小三角形的面积相加得到圆面积公式[19]，如图 7 所示。

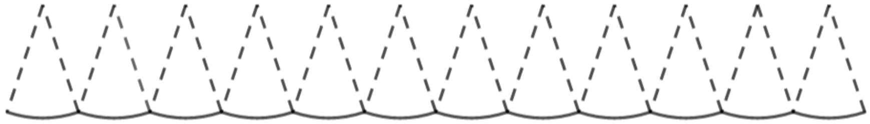


图 7 Slaught(1911)对圆面积公式的推导

3.3.2 平行四边形法

3 种教科书采用了平行四边形法。Lardner（1840）采用了该方法。以圆心为顶点，将圆划

分为数个全等的扇形，相应数量的相等扇区之和便是圆的面积。无限划分扇形，沿某一扇形半径展开，将每个小扇形弧边上两个点相接，把两个如此操作的圆拼在一起时可以更直观的得到一个圆的面积等于其周长与半径乘积之半（见图 8）。[20]

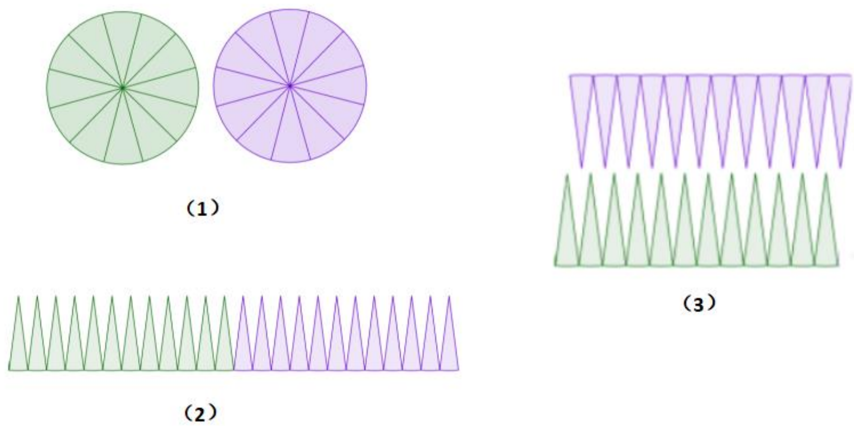


图 8 Lardner（1840）中平行四边形拼接

Schoch（1904）将圆内接正 n 边形中的 n 个等腰三角形移到同一直线上，且相邻两个三角形有一个公共顶点，将图形补成一个矩形如图 9 所示，易见，圆内接正 n 边形的面积等于矩形面积之半，即正 n 边形边长与边心距乘积之半。

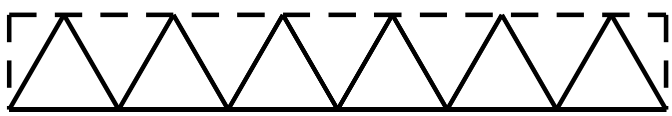


图 9 圆内接中 n 边形的面积

类似地，如图 10 所示，将圆分割成许多小扇形，将小扇形移到一排，其中相邻两个扇形有一个公共点；将其补成一个近似的长方形，得到圆面积等于周长与半径乘积之半。[21]

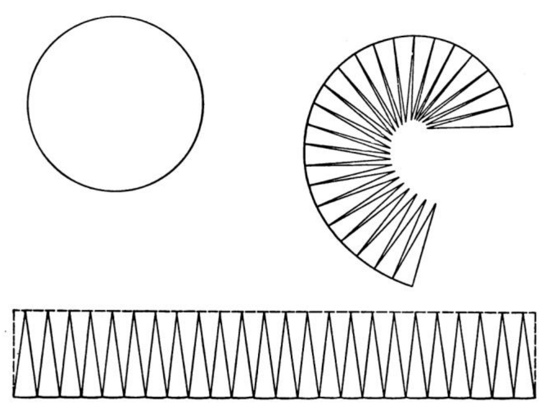


图 10 Schoch(1904)中的圆面积求法

Willis（1922）则将圆等分割成许多小扇形，然后将它们拼成近似平行四边形（图 11（2））。作者设问：需要将圆分成几部分才能拼成图 11（3）的样子？该矩形的底与高各是多少？由此可得圆面积吗？[22] 显然，矩形的底是圆的半周长，矩形的高是圆的半径。因此，当分割的份数无限大时，圆面积等于矩形面积。

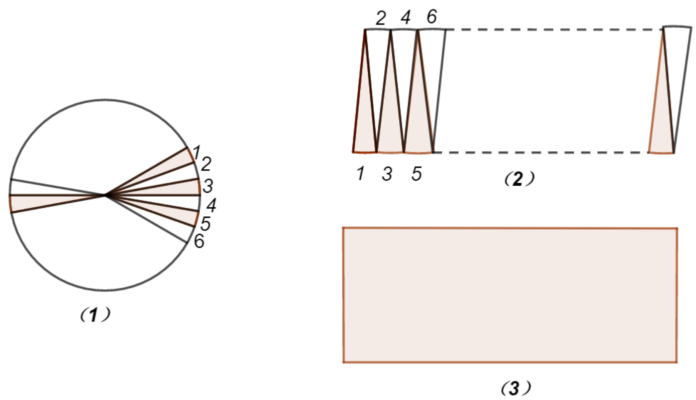


图 11 Willis（1922）关于圆面积公式的证明

该方法较之仅仅将圆分割成三角形割开来算更加直观，对比起“极限法”来说更便于理解，也是当今教科书多采用的方式。但是在早期教科书中出现较晚且次数寥寥，究其原因，其一，在早期，人们在证明方式与思想上受阿基米德的影响，运用正多边形逼近圆并追求严谨的证明过程；其二，20 世纪之初，“培利运动”促使数学教育注重几何直观，主张学生更多地自主探求数学中的规律而非教师引导下进行空洞的逻辑推理，此时教科书才开始将学生的认知基础作为知识的发生点，运用直观的等积变形进行几何知识的教授。

4 证明方式的演变

以世纪为单位，图 12 给出了各个方法的时间分布。圆面积推导方法的演变呈现出由单一走向多元，最终回归单一的趋势。

穷竭法源于古希腊，是当时数学家在“患”上“无穷恐惧症”、不接受实无穷的情况下所设计的方法。受古希腊数学的深刻影响，穷竭法在 17-19 世纪不绝如缕，少数教科书运用它以避开“无穷”概念。随着微积分的创立与发展，人们逐渐接受“无穷”概念，穷竭法逐渐被抛弃，类比法和等积变形法登上了历史舞台；而随着 19 世纪微积分的严密化和极限概念的完善，

极限法后来居上，最终成为主流方法。

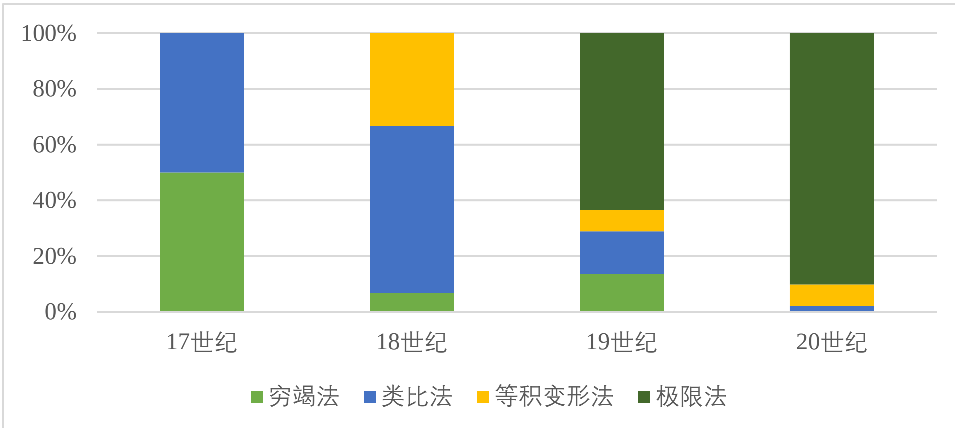


图 12 四种证明方式的时间分布

18 世纪到 20 世纪之间，直观性较强的“等积变形法”一直有一席之地，它是最符合低学段学生的方法，并且体现了数学研究“数形结合”的特点。

5 教学启示

以上我们看到，圆面积公式大致经历了从穷竭法到类比法、再到等积变形法、最终到极限法的历史发展过程，体现了极限概念从无到有、不完善到完善的演进过程。圆面积公式的历史为我们提供了若干教学启示。

（1）运用类比，发现结论。首先让学生观察正多边形随着边数越来越多，形状越来越像圆；接着，通过等积变形，将圆内接正多边形转化为三角形（图 4），得到正多边形面积公式；最后，通过类比，猜想圆可以转化为三角形（图 5），进而得到圆面积公式。或者，首先让学生观察：两组同样的三角形（每一组含 1 个、2 个、3 个、4 个等等）可拼成平行四边形；接着，将同样两个圆的内接正多边形中的各个等腰三角形剪下来，拼成平行四边形；最后，通过类比，猜想得到两个圆可以转化为一个平行四边形，进而得到一个圆的面积。

（2）通过技术，实现转化。同心圆方法源于 17 世纪卡瓦列里的“不可分量法”，在今天看来并不严密，通过技术（如利用 Geogebra 软件），可以让无穷小方法可视化：向将圆分割成一系列同心圆环，依次将这些圆环“拉直”，拼成近似三角形，然后让诸圆环不断变细、从

而得到相应的图形越来越接近真实的三角形。

（3）关注方法，联系古今。历史上出现了圆面积公式的许多推导或证明方法，教师可以设计探究活动，让学生分享自己的方法，并通过“古今联系”的策略进行评价，让学生穿越时空与数学家对话，成为课堂的主人。

参考文献

[1] Struik, D. J. *A Source Book in Mathematics: 1200-1800*[M].Princeton University Press,1986.

[2] Pardies, I. G. *Elemens de Geometrie*[M]. Paris: Sebastien Mabre-Cramoisy, 1673. 42-49.

[3] Playfair, J. *Elements of Geometry*. Edinburgh: Bell & Bradfute, 1795. 257-259.

[4] John, P. *Elements of Geometry* [M]. Edinburgh: Bell & Bradfute, 1822:227-231.

[5] Morton, P. G. *Plane, Solid, and Spherical* [M]. London: Baldwin and Cradock, 1830: 95-96.

[6] Heath.T. L ,*The Works of Archimedes*[M].Cambridge:at the university press,1987.

[7] Ozanam, J. *La Géométrie Pratique*[M]. Paris: L’Auteur, Estienne, Michallet, 1684, 189-192

[8] Lamy, B. *Les Elemens de Geometrie*[M]. Paris: La Veuve Delaulni, 1731. 126-127.

[9] de Bourgogne, *L. Elemens de Geometrie*[M]. París: Veuve Ganeau, 1735. 133-135.

[10] Varignon, P. *Elemens de Mathematique*[M]. Amsterdam: François Changuion, 1734. 72-73.

[11] Clairaut, A. C. *Élémens de Géométrie*[M]. Paris: Durand, 1753. 107-108

[12] Muller. J. *New Elements of Mathematics*[M]. London: T. Cadell, 1773: 27

[13] Sanders, A, *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1903: 233-234.

[14] Wells, W. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: D. C. Heath, 1916: 242.

[15] Thomas, M, G. *Plane Geometry* [M]. Exeter: Edwards Brothers, 1946: 143-144.

[16] Emerson, W. *Elements of Geometry*[M]. London: F. Wingrave, 1794. 70-71.

[17] Rivard, F. *Élémens de Géométrie*[M]. Paris: Clousier, Boedelet, Savoye, 1739. 103-104.

[18] Rivard, F. *Élémens de Mathématiques*[M]. Paris: J. Besaint & C. Saillant, 1752. 128-129.

[19] Slaught, H. E, *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1911: 194.

[20] D. Lardner. *A Treatise on Geometry And Its Application In the Arts*[M]. London: Printed for Longman, Orme, Brown, Green, & Longmans [etc.], 1840:100-101.

[21] Schoch, W. *Introduction to Geometry: A Manual of Exercises for Beginning*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904.

[22] Willis, C, A. *Plane Geometry*[M]. Philadelphia: B. Blakiston's Son & Co., 1922: 264.

英美早期教科书中的一元二次方程的解法

司睿

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

作为初中数学的重要内容，一元二次方程以一元一次方程、开平方、算术平方根、多项式、因式分解、乘法公式等为基础，又与一元二次不等式、可化为一元二次方程的分式方程、高次方程、二次函数等密切相关，因而在代数学习中扮演着承上启下的角色，且有助于学生提升运算能力、构建模型思想、培养应用意识。国内现行教科书都设有一元二次方程的独立章节，按照概念、解法、应用的顺序编排，方程的解法包含“直接开方法”、“配方法”、“因式分解法”、“公式法”四种，不同版本教科书中解法的顺序互有不同，一是“直接开方法因式分解法配方法公式法”，二是“直接开方法配方法公式法因式分解法”，后者与历史序一致。迄今已有一些教师尝试从 HPM 的视角开展一元二次方程解法的教学实践，但主要涉及历史上的几何解法，并未呈现更多历史上的解法，也没有解释各种解法之间的区别与联系，对于不同解法教学顺序的安排也缺乏合理的参照。

一元二次方程有着十分悠久的历史，从两河流域的数学泥版到古埃及的纸草书，从古希腊欧几里得的《几何原本》到丢番图的《算术》，从古代中国的《九章算术》到古印度的“求根公式”，在浩瀚的历史长河中数学家们从未间断过对一元二次方程的研究。M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）曾指出，历史是教学的指南。鉴于此，本文聚焦一元二次方程的求解，对出版于 19 初期至 20 世纪中叶的英、美代数教科书进行考察，试图回答以下问题：早期教科书中包含了一元二次方程的哪些解法？所呈现的不同解法的顺序有何差异？对今日的教学有何启示？

2 教科书的选取

选取 1800-1959 年间出版的 205 种英美早期教科书为研究对象，以 20 年为一个时间段划分，教科书的时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变

化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

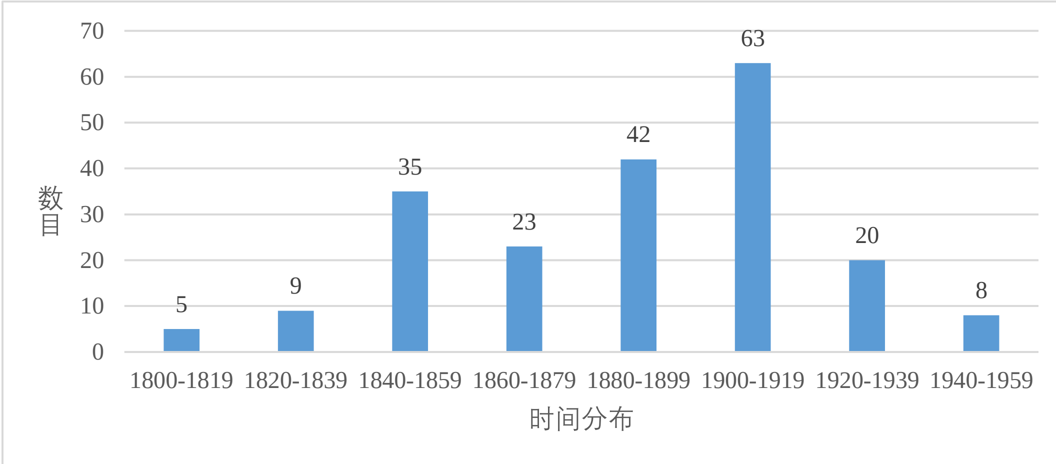


图 1 205 种英美早期代数教科书的出版时间分布

早期教科书中一元二次方程相关内容的分布略有差异，主要涉及“二次方程”、“代数在几何求解问题中的应用”、“代数方程及其解法”、“只有一个变量的二次方程”、“产生二次方程的问题”、“图像解法”、“二次方程的理论”等章节，基本上都包含定义、解法、相关理论以及应用，本文主要聚焦一元二次方程的不同解法。

3 一元二次方程的分类

早期教科书中对“一元二次方程”的称谓主要有“Quadratic Equation”和“Equation of the Second Degree”两种，定义是“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的方程”。由于负数概念的缺失，9 世纪阿拉伯数学家花拉子米（Khowarizmi）将一元二次方程分成 $ax^2=b$，$ax^2=bx$，$ax^2+bx=c$，$ax^2=bx+c$ 和 $ax^2+c=bx$ 五类。早期教科书则将方程分为两类：形如 $ax^2=c$ 的方程称为“纯二次方程”（Pure Quadratic Equation），也称为“不完整二次方程”；形如 $ax^2+bx=c$ 的方程叫做“一般二次方程”，也称为“完整二次方程”。虽然早在 1631 年，英国数学家哈里奥特（T. Harriot, 1560-1621）已将一元二次方程写成一边为 0 的形式，但 19 世纪上半叶的教科书大多保留了传统的常数项在方程右边的形式。

有些教科书中将“$x^{\frac{2}{3}}=4, x^{\frac{4}{10}}=16$”这样的方程以及含有两个未知量但未知量指数和的最大值为 2 的方程“$xy=a, xy-x-y=c$”也称为“二次方程”。[1]

随着时间的推移，一般二次方程的分类也在不断演变。一些教科书中忽略了负根，因为当时欧洲还有很多人并不接受负数。有几种教科书将一元二次方程分为如下三类：$x^2+2ax=b$，$x^2-2ax=b$ 和 $x^2-2ax=-b$，其中 a 和 b 均为正数，且方程至少有一个正根。考虑负根的教科书则将一元二次方程分为 $x^2\pm 2ax=b$ 和 $x^2\pm 2ax=-b$ 四类。直到 1849 年出版的教科书中才出现 $Ax^2+Bx+C=0$ 这一今天人们熟悉的形式。[2]

4 一元二次方程的解法

早期教科书中出现的一元二次方程的解法有十余种，除了今天常用的解法外，还有一些教科书另辟蹊径，采用了新的方法。

4.1 直接开方

纯二次方程的解法是“直接开方”。对于一元二次方程 $ax^2+c=d$，大多数教科书中给出的步骤如下：（1）移项，含有未知数的项移到等式的一边，常数项移到另一边，则 $ax^2=d-c$；（2）二次项系数化为 1，方程两边同时除以系数 a，$x^2=\dfrac{d-c}{a}$；（3）开方，方程两边同时开平方，$x=\pm\sqrt{\dfrac{d-c}{a}}$。[3]

还有几种教科书采用因式分解的方法，如 $x^2=a^2$，将方程表示为 $x^2-a^2=0$，由因式分解 $(x-a)(x+a)=0$，则 $x=\pm a$。[4]

4.2 配方法

关于配方法，早期教科书中出现最多的是以下三种，本文分别称之为“第一种配方”、“第二种配方”和“第三种配方”。

19 世纪前期，教科书使用的方程形式通常为 $x^2+px=q$，第一种配方法的步骤如下：（1）通过移项、合并同类项，将方程化为上述一般形式；（2）如果二次项系数不为 1，两边同时除以 x^2 的系数；（3）方程两边同加上一次项系数一半的平方，将左边配成一个完全平方式

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4};$$

（4）方程两边开方，得到 $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$。[5]

对于二次项系数不为 1 的方程 $ax^2+bx=c$，部分教科书在方程两边同除以 a，将二次项系数转化为 1，再用第一种配方法求解。还有教科书采用第二种配方法：方程两边同时乘以 $4a$，得到 $4a^2x^2+4abx=4ac$；接着在方程两边同加上 b^2，得

$$4a^2x^2+4abx+b^2=4ac+b^2;$$

于是得 $2ax+b=\pm\sqrt{4ac+b^2}$ 从而得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a}$。[6]这种方法是 12 世纪印度数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114-1185）给出的。

第三种配方法的具体步骤如下：方程两边同乘以二次项系数，得 $a^2x^2+abx=ac$；两边同时加一次项系数一半的平方，得

$$a^2x^2+abx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

开方得 $ax+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{ac+\frac{b^2}{4}}$，从而得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a}$ 。[7]

有 29 种教科书中同时介绍了上述三种配方法，其中有 6 种教科书不仅提到了上述方法，还针对具体的方程给出其他更为灵活的配方法。例如，对于方程 $8x^2+3x=26$，为了使得二次项为一个平方项，只需将其系数扩大 2 倍，于是有 $16x^2+6x=52$；然后通过增加常数项将等式左边配成一个完全平方式

$$16x^2+6x+\frac{9}{16}=52+\frac{9}{16}=\frac{841}{16}$$

开方得 $4x+\frac{3}{4}=\pm\frac{29}{4}$，$x=\frac{13}{8},-2$。[8]因为当二次项系数较大时，乘以 $4a$ 后，由于系数的扩大求解过程会复杂，比如上述例子中系数会扩大为 256。因此教科书提到根据系数的实际情况选择适当的因数相乘，只要将方程左边配成一个完全平方式即可。

有 3 种教科书在介绍代数的配方法求解方程时给出了几何解释[9]（见图 3）：将方程含有未

知数的项配成一个完全平方式，其实就是将一个矩尺形补成一个正方形。

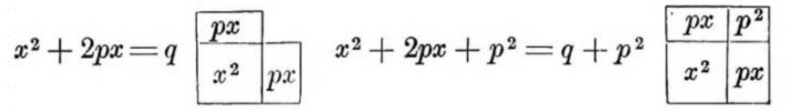


图 3 教科书中对“配方法”的几何解释

4.3 方程两边配方

关于配方法，几版教科书还出现了另一种特殊的解法，将方程两边都配成完全平方式。如，对于方程$3x^2+10x+8=0$，将两边同时加 1，使得左边的常数项化为平方数，得$3x^2+10x+9=1$；方程左右两边再同时加 x^2，使得第一项化为一个平方项，即$4x^2+10x+9=x^2+1$；通过观察发现，若把左边配成一个完全平方式，一次项应该为 $12x$，所以左右两边加 $2x$；于是两边都配成了完全平方式

$$4x^2+12x+9=x^2+2x+1；$$

开方后得到$2x+3=\pm(x+1)$，于是$x=-2,-1\frac{1}{3}$。[10]

4.4 换元法

换元法由 16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）所创用，其实质是通过变量代换将方程化简为能够直接开方的形式。对于一元二次方程$x^2+px=q$，设$x=y-\frac{p}{2}$，则原方程转化为关于 y 的纯二次方程$y^2=\frac{p^2}{4}+q$，于是得$y=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$，因此$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$。

4.5 降次法

通过降次，将二次方程转化为二元一次方程组来求解，也是一种比较特殊的解法。将方程$ax^2+bx=c$化为$ax^2-c=-bx$；两边同时除以 x，得到

$$ax-\frac{c}{x}=-b \tag{1}$$

将方程两边同时平方得

$$(ax)^2-2ac+\left(\frac{c}{x}\right)^2=b^2$$

方程两边同时加上 $4ac$，得

$$(ax)^2+2ac+\left(\frac{c}{x}\right)^2=b^2+4ac$$

两边同时开方得

$$ax+\frac{c}{x}=\pm\sqrt{b^2+4ac} \tag{2}$$

（1）+（2）得

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2+4ac}，\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$[11]。

4.6 公式法

1842 年以后，有 100 种教科书中提出直接使用求根公式解一元二次方程。不过由于书中所给出的方程一般形式不同，公式的表达也略有不同。在方程未写成一边等于 0 的表达方式前，对于 $x^2+px=q$，求根公式为 $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$；而对于 $ax^2+bx=c$，求根公式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a}$。当一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 逐渐走向历史舞台后，求根公式的形式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。根据方程的不同形式，分别代入相应系数 a、b、c 的值即可求出 x。由此可见，随着时间的推移，求根公式的形式也在发生变化，最终成了今天人们耳熟能详的固定形式。

4.7 因式分解法

哈里奥特是第一个将方程写成一边为 0 的形式，也是第一个将方程左边进行因式分解的数学家。19 世纪中叶以后的教科书才逐渐出现因式分解的方法，在所考察的 205 种教科书中有近半数介绍了这种解法。Aley（1904）以方程 $x^2-5x+6=0$ 为例介绍了因式分解法：将方程写成 $(x-3)(x-2)=0$，如果乘积 $(x-3)(x-2)$ 的任意一个因式为 0，即 $x=3$ 或 $x=2$，则乘积为 0。Aley 将其称为“因式等于零”。根是使得方程左右两边相等的未知数的值，因此上述方程中 3 和 2 都是根，故 $x^2-5x+6=0$ 有两个根。所有可以分解为一次因式相乘的方程都可以通过这种方法来求解，且根的数目和方程的阶数相等。[12]

对于一般方程 $x^2+px+q=0$，通过因式分解将其化为 $\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=0$，令两个因式分别为 0，即可求得方程的两个根。

4.8 和差法

Milne（1901）通过两个具体例子介绍了一种新的方法，其实就是古巴比伦人解决“已知两个数的和与乘积，求这两个数”这类问题所采用的“和差术”。[13]该书在“多项式乘法”一节讨论含有公共因子的两个多项式的乘积的规律 $\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+\left(a+b\right)x+ab$。以一元二次方程 $x^2+100x+2491=0$ 为例，对于二次三项式 $x^2+100x+2491$ 可以看作 $a+b=100$，$ab=2491$，欲求 a 和 b 的值，设其分别为 $50+p$ 和 $50-p$，则有 $\left(50+p\right)\left(50-p\right)=2491$。

由平方差公式得 $2500-p^2=2491$，于是得 $p^2=9$，$p=\pm 3$，故得 $50+p=53$，$50-p=47$。由多项式相乘系数对应的规律可得 $x^2+100x+2491=\left(x+53\right)\left(x+47\right)=0$，因此 $x=-53$ 或 $x=-47$。[14]

4.9 设根法

有 2 种教科书呈现了 19 世纪苏格兰数学家华里司（W. Wallace, 1768-1842）应用韦达定理推导求根公式的方法，利用设而不求的思想，通过联立两根之和与两根之差求解[15]。若一元二次方程 $x^2+px=q$ 的两个根为 α 和 β，则方程可表示为 $\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)=0$，展开后得

$$x^2-\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta=0$$

与一般式进行比较，得 $a+b=-p$，$ab=-q$。因 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=p^2+4q$，故得 $a-b=\pm\sqrt{p^2+4q}$，从而得方程的两个根

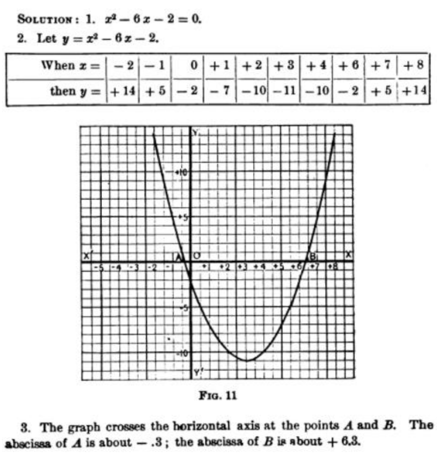
$$a=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2},\quad b=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

4.10 图像法

二次函数的图像是一条抛物线，利用二次函数与一元二次方程的关系，可以借助图像求解

方程，教科书中主要涉及两种解法。第一种方法是通过抛物线与 x 轴的交点确定方程的根。以下是 Wells & Hart（1912）给出的一个具体例子（图 4）[16]：（1）尽可能简化方程式；（2）将所有项移到方程左边；（3）用 y 表示步骤（2）中的表达式；（4）根据选定的变量 x 的值，找出对应的 y 值；（5）使用步骤（4）中获得的成对值作为点的坐标，在平面直角坐标系中描点、绘制图形；（6）图像与 x 轴交点的横坐标即为方程的根。

第二种方法是通过抛物线与直线的交点来求方程的根。例如，Aley & Rothrock（1904）将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 转化为等价的方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ ay+bx+c=0 \end{cases}$。如图 5，$y=x^2$ 的图像是一条过原点的抛物线，当系数 a，b，c 的值给定时，直线 $ay+bx+c=0$ 是唯一确定的，抛物线与直线交点的横坐标即为方程的解。[17]



SOLUTION: 1. $x^2-6x-2=0$.

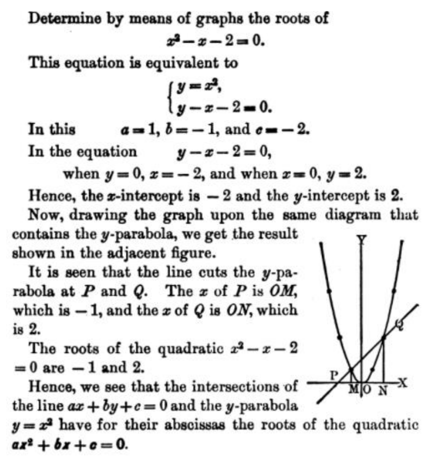
2. Let $y=x^2-6x-2$.

When $x=$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+6$	$+7$	$+8$
then $y=$	$+14$	$+5$	-2	-7	-10	-11	-10	-2	$+5$	$+14$

FIG. 11

3. The graph crosses the horizontal axis at the points A and B. The abscissa of A is about $-.3$; the abscissa of B is about $+6.3$.

图 4 第一种图像法



Determine by means of graphs the roots of

$$x^2-x-2=0.$$

This equation is equivalent to

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y-x-2=0. \end{cases}$$

In this $a=1$, $b=-1$, and $c=-2$.

In the equation $y-x-2=0$,

when $y=0$, $x=-2$, and when $x=0$, $y=2$.

Hence, the x-intercept is -2 and the y-intercept is 2.

Now, drawing the graph upon the same diagram that contains the y-parabola, we get the result shown in the adjacent figure.

It is seen that the line cuts the y-parabola at P and Q. The x of P is OM, which is -1, and the x of Q is ON, which is 2.

The roots of the quadratic $x^2-x-2=0$ are -1 and 2.

Hence, we see that the intersections of the line $ax+by+c=0$ and the y-parabola $y=x^2$ have for their abscissas the roots of the quadratic $ax^2+bx+c=0$.

图 5 第二种图像法

如果二次方程的根是整数，则比较容易得到精确值，但是如果是分数或者无理数，则通过图像观察和试根只能得到粗略的近似值。

5 一元二次方程解法的演变

各种方法的具体分布如图 6 所示。关于只含二次项的方程，所有教科书中都采用了“直接开方”的解法，其他的方法交错分布在不同版本的教科书中。出现较多的方法有“配方法”、“公式法”以及“因式分解法”，和今日教科书一致。“换元法”、“降次法”、“和差法”与“设根法”等非常规的解法，只在少数教科书中出现。

图 7 给出了各种解法在不同时间段的分布情况。由图 7 可见，所有种类教科书中都提到了“直接开方法”和“第一种配方法”。19 世纪中叶开始，一元二次方程的解法逐渐丰富，除了常规方法外，出现了“换元法”、“设根法”、“降次法”、“和差法”等特殊解法。到了

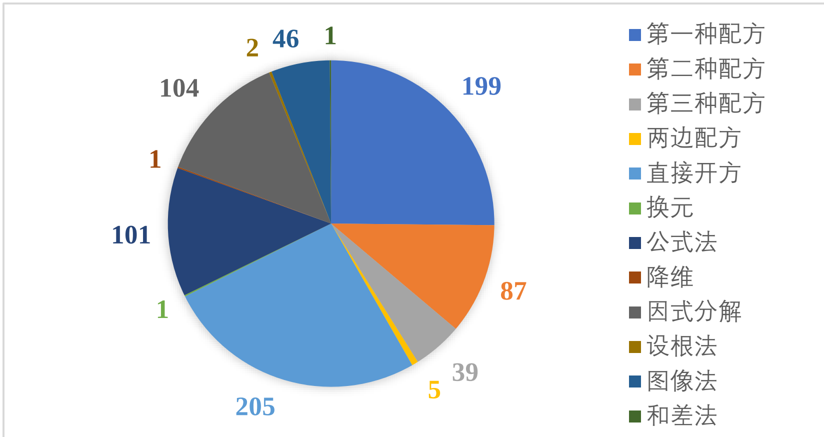


图 6 解法出现的数目分布

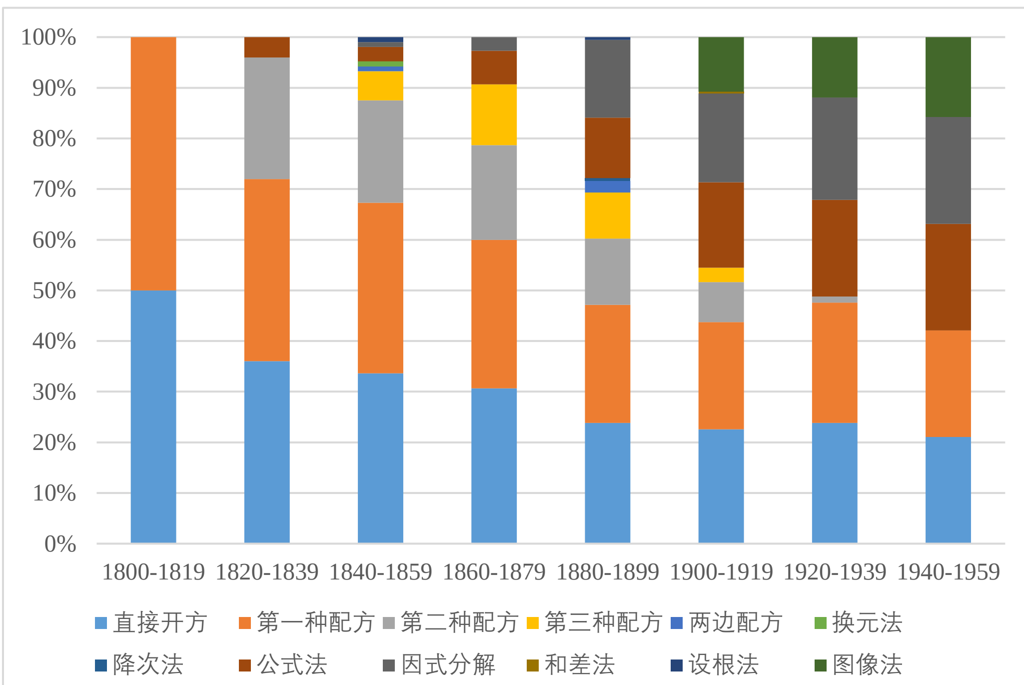


图 7 不同时间段的解法分布

19 世纪末，“公式法”和“因式分解法”逐渐占据重要地位。“图像法”到了 20 世纪初才缓慢登场，是出现最晚的一种方法。因为 20 世纪之前，函数并非代数教科书中的核心概念，到了 20 世纪初，函数成了中学数学课程的核心概念，因而“图像法”也应运而生。

关于解法的顺序，教科书中的安排也有所不同。通过统计分析发现，在同时介绍“因式分解法”与“配方法”的 92 种教科书中，约 35%的教科书是按照一元二次方程解法的历史发展顺序，先介绍“配方法”；而 65%的书则选择先讲解“因式分解法”，是依据从特殊到一般的数学思想。

有的教科书在介绍不同解法后进行了总结，以帮助学生根据具体例子选择恰当的解法。对于给定的一个一元二次方程，通过观察，如果可以进行因式分解，那最好是通过因式分解来求解；如果不能分解，则使用配方法。而在选择配方法时，如果二次项系数为 1，则选择第一种；如果二次项系数不为 1 且是一个奇数，则选择第二种；如果二次项系数为偶数，则可以选择第三种或者更为灵活的配方法。当学生熟练掌握上述配方法后，可以使用求根公式来解方程，以节省时间。

6 结论与启示

由以上统计和分析可见，关于一元二次方程，美英早期代数教科书给出了十分丰富的解法，除了我们今天熟悉的“直接开方法”、“配方法”、“因式分解法”和“公式法”，还有“换元法”、“降次法”、“和差法”、“设根法”、“图像法”等多种方法；根据不同形式的方程，配方法也存在不同的做法。这些解法以及解法的编排顺序为今日教学提供了许多思想的启迪。

其一，就配方法而言，除了众所周知的第一种配方外，还有多种更为灵活的方法。将方程两边同时乘一个因数可以避免分数的出现以简化计算，等式两边都配方可以避免无理式的出现更适于含有字母系数的方程的求解。教师可以设计探究活动，引导学生探究不同的配方法，感受方法之美。

其二，换元法与和差法的本质都是通过一个中间变量的代换将方程转化为可直接开方的形式，以达到降次目的。降次法与设根法其实都是运用乘法公式的相互转换获得两个二元一次方程来求解。此外，设根法利用根与系数的关系，是对韦达定理的应用，教师可以借鉴数学史，引导学生探究非常规的解法，拓宽思维，体验探究之乐。

其三，图像法可以帮助学生直观理解根的意义，判断根的大小和正负。图像法的第一种形式实质上是高中函数与方程的内容，第二种形式则是解析几何中求抛物线与直线的交点。教师

可以借助信息技术作图，以直观的方式让学生认识方程与图像之间的联系，培养直观想象素养，实现能力之助。

其四，早期教科书延续并改进花拉子米对方程的分类，还有一些书忽略负数根，与今天学生在求解二次方程时所出现的错误类似，通过古今联系、中西比较能体现历史相似性，展现文化之魅。

其五，几千年来古代数学家一直孜孜不倦地研究二次方程的相关问题，近代以来数学家们也并未故步自封，而是继续探索并寻找不同的解法，这种对科学与真理坚持不懈地探索精神，可以鼓励学生追求创新，体会数学的理性精神，达成德育之效。

其六，历史上，配方法源于几何，而因式分解法出现于方程一般形式（一边为零）出现之后，因此，今日数学教学无需拘泥于历史顺序。早期教科书大多倾向于先通过因式分解法求解特殊的方程，再引入配方法求解所有类型的方程，进而推导求根公式。借鉴早期教科书的编排顺序，可以帮助教师构建知识之谐。

有理由相信，有关一元二次方程求解的历史素材，必将在今日课堂上大放光彩。

参考文献

[1] Ray, J., Kemper, D. *Elements of Algebra*[M]. Cincinnati: Van Antwerp, Bragg & Co., 1866.
[2] Chase, S. *A treatise on Algebra*[M]. New York: Appleton, 1849.
[3] Bonnycastle, J. *An Introduction to Algebra*[M]. Philadelphia: Joseph Crukshank, 1806.
[4] Docharty, G. B. *The Institutes of Algebra*[M]. New York: Harper & Brothers, 1852.
[5] Wood, J. *The Elements of Algebra*[M]. Cambridge: J. Smith, 1815.
[6] Bridge, B. *A Treatise on the Elements of Algebra*[M]. Philadelphia: Key, Mielke, & Biddle,1832.
[7] Greenleaf, B. *New Elementary Algebra*[M]. Boston: Robert S. Davis & Co. ,1862.
[8] Durell, F., Robbins, E. R *A School Algebra Complete*[M]. New York: Maynard, Merrill & Co.,1897.
[9] Schuyler, A. *A Complete Algebra for Schools and Colleges*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle,1870.
[10] Stoddard, J. F., Henkle, W. D. *An Algebra Designed for the Use of High Schools, Academies, and Colleges*[M]. New York: Sheldon, Blakeman & Co.,1857.
[11] Smith, G. W. *A Complete Algebra*[M]. New York: American Book Co.,1870.
[12] Aley, R. J. Rothrock, D. A. *The Essentials of Algebra*[M]. New York: Silver, Burdett,1904.
[13] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社，2017:53.
[14] Milne, W. J. *Academic Algebra*[M]. New York: American Book Company, 1901.

[15] Hackley, C. W. *A Treatise on Algebra*[M]. New York: Harper & Brothers, 1846.

[16] Wells, W., Hart, W. W. *New High School Algebra*[M]. Boston: D. C. Heath, 1912.

[17] Aley, R. J., Rothrock, D. A. *The Essentials of Algebra*[M]. New York: Silver, Burdett, 1904.

教学实践

从椭圆到双曲线：基于数学史的类比教学

蔡东山[1] 张佳淳[2] 秦语真[2]

（1.华东师范大学第二附属中学，上海，201203；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

圆锥曲线是高中数学中的重点与难点，一方面，知识点众多；另一方面，教师鲜少说明三类圆锥曲线的由来。随着教学的思考与研究的深入，截面定义越来越受到重视，既作为对知识之源的追溯，也是解答许多问题的重要工具。已有研究发现不少立体几何试题以圆锥为背景，要求学生判断平面截圆锥所得截面曲线的形状[1]。与之相关的平面截圆锥模型均在沪教版与人教版教科书中出现，人教版教材还包括椭圆旦德林双球模型。然而，高二学生还没有系统学习立体几何知识，难以理解模型的原理，所以相关模型更适合作为高三复习课的教学材料。同时，高三圆锥曲线复习课还可以借助旦德林双球模型等数学史材料综合平面几何、立体几何、函数、方程、极限等内容，强化解析几何的思想方法，培养问题分析与问题解决能力。

另一方面，椭圆与双曲线作为圆锥曲线的起始内容，不仅所涉及的许多知识点之间既有共性又有特性，史料也是如此，倘若基于数学史，运用类比思想组织教学，有利于加强单元认知结构的整体性与系统性，提高学生类比推理和自主探究能力。

为此，本节课是在前一节 HPM 复习课“椭圆的前世今生”的基础上，继续以 HPM 为研究视角，引领高三学生重新认识双曲线，建构圆锥曲线板块的知识体系，认识数学史上各阶段思想方法的价值，同时培养学生数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养与严谨求实的理性精神。

2 教学准备

2.1 学情分析

本节课的学习主体为高三理科班的学生，在此之前已经完成“曲线和方程”、“椭圆的标

准方程和性质”等内容的学习，并且通过前一节课学习了椭圆的原始定义，掌握了用旦德林双球模型推导椭圆第一定义的方法；同时熟知反比例函数的图像是双曲线、坐标轴是其渐近线，以及推导渐近线方程所需借助的极限知识。

为了了解学生的认知需求，课前我们对 51 名学生进行了调查，对于“双曲线为什么叫圆锥曲线”，88%的学生能类比椭圆回答“截圆锥所得”，其中有 11 位同学画出平面截对顶圆锥示意图，但没有人画出旦德林双球示意图。对于“高二学习双曲线时，有何困惑？”，学生回答大致可分四类：“双曲线是如何被发现的”、“双曲线与椭圆有何联系”、“双曲线方程如何推导”以及“双曲线在生活中有何应用”。可见即使是高三学生，对双曲线仍存在诸多疑惑，而这些问题都可以在数学史中寻得答案。

2.2 数学史料

2.2.1 圆锥曲线及其截面定义的诞生

古希腊著名评注家普罗科拉斯（Proclus，公元前 5 世纪）告诉我们，柏拉图学派的梅内克缪斯（Menaechmus，公元前 4 世纪）是圆锥曲线的发现者，如图 1 所示，他用垂直于圆锥母线的平面去截三种不同的圆锥，得到了不同的圆锥曲线，又称“梅内克缪斯三线”[2]。

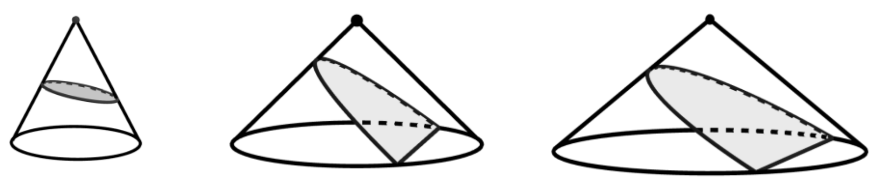


图 1 梅内克缪斯三线

后来，数学家亚里士塔欧（Aristaeus，公元前 4 世纪）又将其分别命名为锐角圆锥曲线、直角圆锥曲线和钝角圆锥曲线，对应我们今天的椭圆、双曲线和抛物线。随后，阿波罗尼奥斯（Apollonius，约公元前 262~190 年）分别用不同位置的平面去截同一个对顶圆锥，也得到了三种圆锥曲线，如图 2 所示。

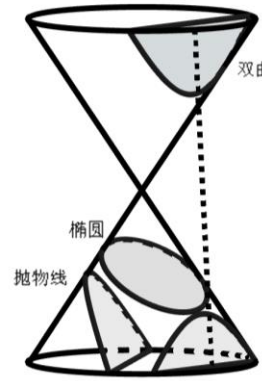


图 2 阿波罗尼奥斯截圆锥

2.2.2 椭圆和双曲线第一定义（轨迹定义）的诞生

法国数学家拉希尔（P. de Lahire，1640-1719）在《圆锥曲线新基础》（1679）一书中给出了椭圆和双曲线的第一定义，这是有关文献记载中第一定义的首次出现[2]。

1822 年，比利时数学家旦德林在一篇论文中利用圆锥的两个内切球，在圆锥上推导出椭圆和双曲线的第一定义，从而填平了古希腊阿波罗尼奥斯的圆锥曲线定义（截面定义）和 17 世纪拉希尔的第一定义之间的鸿沟[3]。

2.2.3 椭圆与双曲线方程的推导

17 世纪法国数学家洛必达（G. de L'Hospital, 1661-1704）在《圆锥曲线分析》（1707）一书中利用第一定义和“和差术”成功推导出椭圆与双曲线的标准方程[4]。如图 3 所示，对于双曲线方程，由第一定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，故设 $|PF_1|=u+a,|PF_2|=u-a$，其中 u 为待定参数。根据两点间距离公式可分别得到：

$$|PF_1|^2=(u+a)^2=(x+c)^2+y^2 \tag{1}$$

$$|PF_2|^2=(u-a)^2=(x-c)^2+y^2 \tag{2}$$

两式相减得 $u=\dfrac{cx}{a}$，两式相加得：$a^2+u^2=y^2+c^2+x^2$ 将前式带入后式，并令 $c^2-a^2=b^2$ 可得：$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$，同理可得椭圆方程。

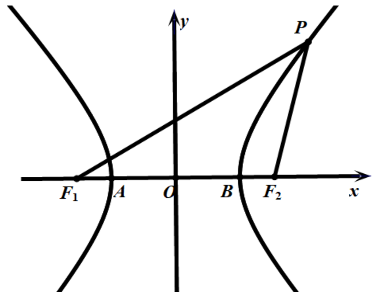


图 3 基于第一定义的双曲线方程推导

19 世纪英国数学家赖特（J. M. F. Wright）在《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》（1836）中给出了新的推导方法，又称“平方差法”[5]。相较于洛必达法不引入中间参数“u”，赖特直接用$|PF_1|$和$|PF_2|$距离的平方作差得：$|PF_1|^2-|PF_2|^2=\left(|PF_1|+|PF_2|\right)\left(|PF_1|-|PF_2|\right)=4cx$，由双曲线定义$|PF_1|-|PF_2|=2a$可得：$|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{2cx}{a}$，联立前后两式可得焦半径公式：$|PF_1|=\dfrac{cx}{a}+a,|PF_2|=\dfrac{cx}{a}-a$，再将其代入（1）式或（2）式中，即可得双曲线标准方程，同理可得椭圆方程。

2.2.4 圆锥曲线的现实应用

首先，圆锥曲线在天文学上应用广泛。Kells（1949）认为圆锥曲线是最受自然青睐的曲线，开普勒通过观测数据，提出了行星在太阳引力下运动的曲线是椭圆，并以太阳为其中一个焦点，假如行星的速度增大，则可能会沿着抛物线或双曲线运行，最终脱离太阳系。圆锥曲线构成了宇宙运动的基本形式，而利用解析几何，可以帮助我们解决天文观测的问题，这也是解析几何发展的初衷[6]。

其次，椭圆、双曲线具有相似的光学性质，并在生活中有着广泛的应用。从椭圆一个焦点发出的光线或声波在经过椭圆周上反射后，都汇聚于椭圆的另外一个焦点。在生活中的应用有回声走廊，即利用椭圆的声学性质，当游客站在一个焦点时，可以听到另一个焦点上的人的谈话。神话故事杰尼西亚的耳朵和现代的电影放映机也就是利用了这个原理[7]。同样地，从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上[8]。因此，可以利用双曲线的光学性质来制作望远镜。

最后，双曲线还有建筑学应用。双曲线在图形学上叫做贝塞尔曲线(Bezier curve)，它是最利于流体流动的一种曲线。热电站、核电站的冷却塔都采用双曲线的结构，利用循环水自然通风

冷却，以使得冷却器中排出的热水在其中冷却后可重复使用[9]。

2.2.5 双曲线的渐近线

在一些早期英美教科书中，采用了以下方法来解释双曲线的渐近线。

首先，可以通过解析式法，利用双曲线的标准方程进行推导，由双曲线的解析式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得：$y=\pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$，当 x 趋向于无穷大时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^2}{x^2}=0$，可知双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{bx}{a}$[10]。

其次，可以通过作差法，利用渐近线的定义“与双曲线无限接近”，验证 $y=\pm\frac{bx}{a}$ 是双曲线的渐近线，如图 4 所示，$PM=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$，$QM=\frac{b}{a}x$，则

$$PQ=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

故当 x 趋向于无穷大时，PQ 长趋向于无穷小，同理可得 $y=-\frac{b}{a}x$ 为双曲线的渐近线[11]。

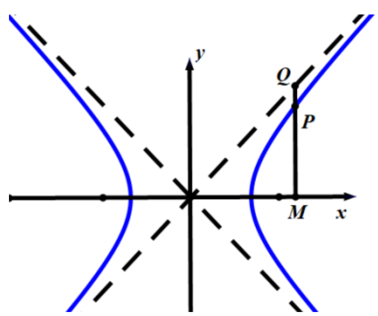


图 4 作差法

3 教学过程

3.1 再探模型

教师引导学生思考“圆锥曲线”名称的由来，并回顾上节课的“椭圆旦德林双球模型”。

师：为何高二学习的椭圆、双曲线和抛物线被统称为“圆锥曲线”？“圆锥”二字何来？

生 1：我觉得就像椭圆一样，应该是因为这些曲线都是可以用一个截面去截圆锥得到的图

形。

师：是的，上节课我们讲到平面截圆锥，两个面的交线是椭圆，同样道理，不同方法截圆锥也会得到双曲线和抛物线。公元前 3 世纪阿波罗尼奥斯正是通过截圆锥发现圆锥曲线，这就是圆锥曲线名称的由来，也是三种圆锥曲线的原始定义。

师：上节课我们通过圆柱模型（如图 5）和圆锥模型（如图 6），证明了椭圆截面定义和第一定义的联系，圆柱更容易找到几何性质，圆锥则是阿波罗尼奥斯用来得到不同圆锥曲线的工具。谁能大概描述一下圆锥模型的原理？

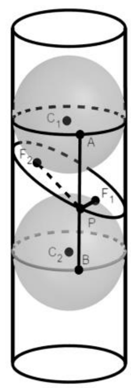


图 5 椭圆旦德林双球圆柱模型

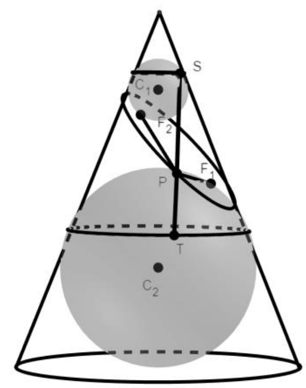


图 6 椭圆旦德林双球圆锥模型

生 2：一个圆锥，然后在圆锥中的椭圆面上方和下方各放一个相切的球，球体与椭圆所在平面的切点就是焦点，椭圆上的某一点到焦点的距离可以转换成点到球上一个点的距离，通过几何上线段长度相加可以得到一个定值，就证明了椭圆上的点到两个焦点的距离之和为一个定值。

师：很好，那么在证明之前，我们首先需要知道关于切线长问题的结论，还记得吗？平面内，过圆外一定点作定圆的切线，问：有几条切线？切线长关系如何？

生：2 条，切线长相等。

师：类比得到“空间内的切线长问题”呢？即空间内，过球外一定点作定球的切线，问：有几条切线？切线长关系如何？

生：无数条。还是相等关系。

师：为什么还是相等关系呢？

生 3：过一点做球的无穷多条切线，这些切线实际上可以组成一个圆锥面，那切线相当于圆锥上的母线，所以长度都相等。

生 4：看其中的任意两条切线，两个切点在同一个圆上，根据平面切线长问题，所以切线长相等。

师：为什么两个切点在同一个圆上？

生 4：（思考。）

师：球外的定点和两个切点可以组成一个平面，平面与球的交线就是？

生 4：圆。

师：非常好，所以经过类比，我们可以将切线长定理推广到空间中。那同样基于这个定理，大家想想，双曲线能不能也用圆锥模型证明截面定义与第一定义之间的关系呢？

生：（陷入思考。）

师：首先，斜截一个圆锥就可以得到椭圆，但是因为双曲线有两支，所以画一个圆锥能不能得到双曲线？

生：不能。

师：那怎么办？

生 5：从圆锥顶点出发再画一个对顶圆锥。

师：好的，类比对顶角再画一个对顶圆锥，那相切球应该怎么放呢？大家能不能类比椭圆的旦德林双球模型，想象双曲线模型的示意图怎么画？

生 6：首先跟前面（椭圆）类比，球心应该在圆锥中心的轴线上，然后上面放一个下面放一个，球同时与圆锥和截得的双曲线相切。

（教师要求生 6 到黑板画出示意图，如图 7 所示，可知生 6 深受椭圆旦德林双球

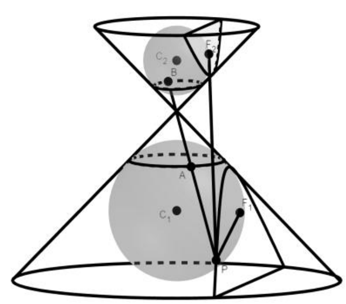


图 7 旦德林双球之双曲线模型

模型的影响，也用了一大一小两个球。）

师：与椭圆的模型一样，这里两个球与双曲线所在的平面同样也只有一个交点，这两个点

其实是？

生：焦点。

师：下面大家找找几何关系，如何证明点 P 到 F_1,F_2 的距离之差等于定值呢？

生 6：类比椭圆，要先在这个图中，找到与 PF_1,PF_2 有相等关系的线段。

师：很好，那类比椭圆的模型，比如，和 PF_2 相等且以点 P 为一个端点的这条线段要在圆锥的表面沿着母线的走向和球 C_2 相切，那么它会经过哪个点？

生：圆锥顶点。

师：通过对顶圆锥的顶点，然后在球 C_2 后面那一侧交于 B 点，再根据空间切线长结论检验，PF_2 和 PB 相等吗？

生：相等。

师：同理 $PF_1 = PA$，所以 $PF_2 - PF_1$ 等于什么？

生：$PB - PA$。

师：$PB - PA$ 也就等于 AB。这个 AB 的长大家能描述吗？是不是这两个小圆锥母线的长度之和呢？

生：是。

接着教师通过 GeoGebra 动画再次演示了旦德林双球的动态演示过程，并介绍比利时数学家旦德林的开创性工作。

3.2 推导方程

师：但是旦德林双球模型只能说明双曲线上的点满足到两个焦点距离之差为定值，无法说明满足条件的点在双曲线上，所以通过截面与纯几何方法研究椭圆、双曲线会存在局限性。直到 17 世纪初，费马和笛卡尔通过引入直角坐标系创立了解析几何，数学家开始利用解析几何的方法研究圆锥曲线。大家可以理解什么叫“解析几何”吗？

生：（思考）。

师：高二时，大家遇到过一个问题，问“解析几何的本质是什么？”，好多人答不出。什么叫解析几何？是指通过代数方法去研究几何问题，中国的汉字是很讲究的，“解析”是代数

化，所以“解析几何”的本质是使得几何问题代数化。从那以后，数学家开始用代数方法研究圆锥曲线相关问题。

接着教师让学生根据双曲线第一定义尝试推导双曲线的标准方程，并让两名学生上台书写。由于双曲线与椭圆的方程推导过程类似，都需要先表示出点到两定点的距离，两名学生都沿用了椭圆方程的推导方法，分别使用了两次平方法和洛必达法；在巡视过程中，教师还发现有学生利用了分子有理化的方法，而这一方法与平方差法的思想类似。

3.3 深挖性质

教师呈现性质归纳表格，要求学生类比椭圆完成双曲线的相关性质，包括范围、对称性、顶点、实轴和虚轴。接着，教师提问以下问题串，引导学生深入探究渐近线。

问题 1 如何较为准确地画出双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的图象呢？考虑第一象限的图象。

师： 椭圆与双曲线纵使很相近，但也无法完全类比，由双曲线的范围我们可以看出，它是一个无界的图形，为了比较准确地画出它的图形，我们对其无限延伸的趋势应该有一个了解。联想初中所学知识，反比例函数$y=\frac{1}{x}$的图像，在第一象限中当x趋近于无穷时，两边无限靠近坐标轴，所以它的渐近线是？

生： 坐标轴。

师： 是的，渐近线的严格定义是“对于曲线 C，当曲线上的点无限远离原点时，该点到一条定直线的距离无限趋近于 0，那么这条定直线称为曲线 C 的渐近线”。所以渐近线是画双曲线的关键，那如何求渐近线方程呢？

问题 2 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在第一象限中$y$与$x$有何函数关系？

生： $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$。

问题 3 根据问题 2 的结论，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在第一象限中会无限接近哪条直线？怎么从代数角度解释一条直线是曲线的渐近线？

生 7： 应该是曲线无限趋近于直线$y=\frac{b}{a}x$。

师： 你怎么想到的？

生 7： 当$x\to+\infty$的时候，根号里面的$-a^2$可以忽略不计，相当于$y\to\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\frac{b}{a}x$。

师：所以我们猜想 $y=\frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(x>0,y>0)$ 的渐近线，但是怎么严格证明呢？

生：（思考）。

师：我们可以根据渐近线的严格定义，作差看曲线与直线的距离。

接着教师板书证明过程，之后呈现以下问题。

问题 4 在第一象限内，$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-k}(k>0)$ 的双曲线，它们的渐近线又是什么？

生 8：应该还是 $y=\frac{b}{a}x$。

师：原因是什么？

生 8：当 $x\to+\infty$ 的时候，k 还是可以忽略不计。

接着教师对 $k>0$ 和 $k<0$ 分类讨论，均展示严格证明过程。得到 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-k}$（$k\neq0$）在第一象限的渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$。接着，教师通过问题 5 引出“双曲线系”的渐近线。

问题 5 将曲线扩展到整个坐标系的四个象限，即 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-k)$（$k\neq0$），又得到什么情况？

教师边板书边引导学生得到结果，过程如下：

由于 $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-k}{a^2}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{a^2}$，令 $\frac{k}{a^2}=\lambda(\lambda\neq0)$，则 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$，因此，

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$ 表示一组共渐近线的双曲线，其渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，也可以写为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$；

(2)对于已知渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的双曲线，可以设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$，当 $\lambda>0$ 时，双曲线焦点在 x 轴上，当 $\lambda<0$ 时，双曲线焦点在 y 轴上。

最后，教师呈现以下问题 6，并引导学生利用“双曲线系”的结论进行求解。

问题 6 已知双曲线过点 $P(4,3)$，它的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，求双曲线的标准方程。

3.4 总结课堂

师： 本节课通过类比椭圆，再次探索了旦德林双球模型，建立了双曲线原始定义与第一定义的联系，并且得到了双曲线的方程和性质，既有存在共性的对称性、范围、顶点，又有双曲线所特有的渐近线，最后要明白解析几何这一工具的重要性。

接着，教师回溯圆锥曲线的发展史，并讲述椭圆与双曲线的现实应用，强调天文观测问题是解析几何发展的初衷，并联系沪教版教材 12.6 节中的例 2，说明火电厂的边缘曲线是双曲线并展示双曲线的工程学应用。最后通过问题 7，聚焦数学史上思想方法的回顾与运用。

问题 7 如图 8，在圆锥 PO 中，已知高 $PO=2$，底面圆的半径为 4，M 为母线 PB 的中点，根据圆锥曲线的定义，下列四个图中的截面边界曲线分别为圆、椭圆、双曲线及抛物线，下面四个命题，正确的个数为多少？

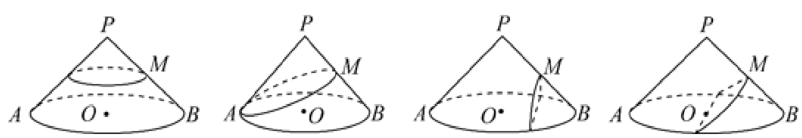


图 8

①圆的面积为 4π；②椭圆的长轴长为 $\sqrt{37}$；③双曲线两渐近线的夹角的正弦值为 $\frac{3}{5}$；

④抛物线中焦点到准线的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

师： 这道题是我们在两个月前错误率较高的一道周测题。首先，根据阿波罗尼奥斯截圆锥的思想，容易知道不同情况下曲线的形状以及截面与圆锥的关系。命题①和命题②是好判断的，可以用平面几何中的什么知识来解？

生： 相似三角形、勾股定理。

师： 命题③和命题④，涉及方程推导、较复杂的几何性质的内容，就需要用费马、笛卡尔的解析几何思想，建系进行求解，当时最难的就是命题③。注意命题③的截面是垂直于圆锥底

面，很多同学说命题③所示的图中只知道一个点的坐标，缺条件。那这节课之后，是不是能彻底理解了？怎么做？

生：上面再画一个对顶圆锥，过点 P 做垂直于截面的直线，垂直就是双曲线的对称中心，建系就是坐标原点。

师：建系完成后可以算什么的值？

生：a。然后知道一个点的坐标代进去可以算 b 的值。

4 结论与启示

本节课锐意创新之处在于利用类比，将具有相似性的椭圆、双曲线充分比对，让学生既看到共性又看到特性，同时，充分发挥数学史在串联中学数学知识上的价值。

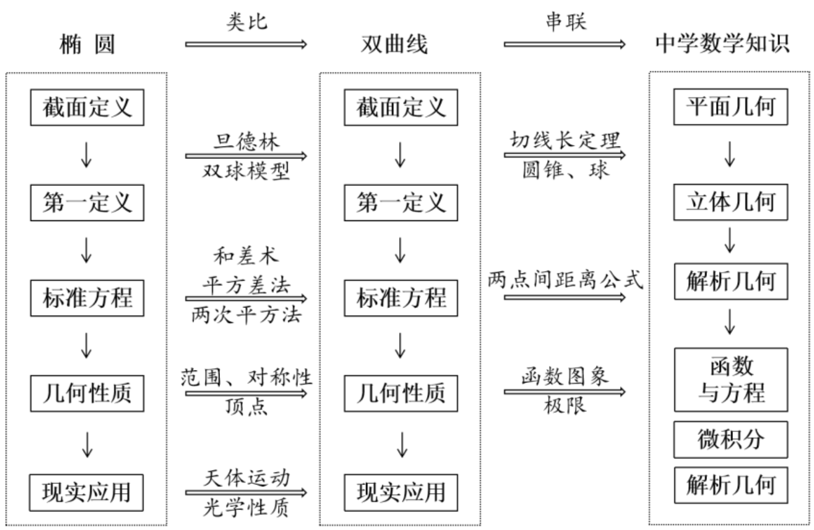


图 9 本节课类比思想的运用

如图 9 所示，教师首先借旦德林双球模型的历史素材，设计了类比椭圆统一双曲线截面定义和第一定义的探究活动，探究过程中既从平面切线长定理类比得到空间切线长定理，又回顾圆锥与球的结构特征，最终通过问题解决培养学生的直观想象素养和逻辑推理素养；其次，基于和差术、平方差法、两次平方法，彰显平方差公式等代数方法在推导二次曲线方程上的通用之美与多样化之美；再次，渐近线方程的猜想与证明，运用了双曲线函数图象的无界性与极限的无穷性；最终，通过标准方程的推导、几何性质的深挖、平面截圆锥问题的攻破，理解古希腊时期的论证几何是圆锥曲线的开端，而 17 世纪解析几何的诞生具有跨时代的意义，它为圆锥

曲线的发展开辟了新天地，是数学学科的重要工具，解析几何思想随之升华。

总之，教师尝试基于数学史的类比推理教学方式，既注重知识综合，又指向思想提升。值得注意的是，类比需要尝试，并不是所有的类比都是有效的，正如椭圆的实轴、短轴，迁移到双曲线却是实轴、虚轴，无法完全类比，并且渐近线并不是通过实轴与虚轴构建，而是双曲线由于自身开放性与无限延伸性而具有的特质，教师需要说明类比的或然性。总之，教师的任务是帮助学生培养一种对待问题的态度，鼓励他们寻找类比，并使他们对那些可能产生有趣的新问题的类比产生敏感性[12]。

参考文献

[1] 李建标. 从考题中看动态立体几何中的圆锥情结[J]. 数学通报, 2016, 55(07): 40-42+48.

[2] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的?[J]. 中学数学月刊, 2017(06): 28-31.

[3] Smith E S. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1954: 52-55; 96-102.

[4] L' Hospital M. De. *Traité Analytique des Sections Coniques*[M]. Paris: Montalant, 1720: 22-25.

[5] Wright J M F. *An Algebraic System of Conic Sections & Other Curves*[M]. London: Black & Amstrong, 1836:94-95.

[6] Kells L M. *Analytic geometry* [M]. New York: Prentice-Hall, 1949:150-152.

[7] Osgood W F. *Plane and solid analytic geometry*[M]. New York, The Macmillan company, 1921:124-128.

[8] Claudel J. *Handbook of Mathematics for Engineers and Engineering Students*[M]. New York: McGraw Publishing Company, 1906: 511-514.

[9] Kaltenborn H S. *Meaningful Mathematics*[M]. New York: Prentice-Hall, 1951: 293-300.

[10] Young J R. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. London: John Souter, 1830: 151.

[11] Todhunter I. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry as Applied to the Straight Line and the Conic Sections*[M]. London: Macmillan & Co., 1862: 201.

[12] Kilpareick J. *Problem formulating: where do good problems come from*[M] // Schoenfeld A H. (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hills dale, Hill date, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987: 123-147.

“辨析”为跨越历史，“经历”促素养生根

——HPM 视角下“周期函数”概念的教学

李晓郁[1]，韩粟[2]

(1.上海市行知中学，上海 201900；2.华东师范大学教师教育学院，上海 200062)

1 引言

新一轮基础教育课程改革引领着数学教育的变革，其中一大挑战便是教学评价从传统三维目标到数学核心素养的转向。在六大数学核心素养中，数学抽象位列首席，这一素养是指：通过对现实世界中数量关系和空间形式的抽象，得到数学的研究对象，如数学概念及概念之间的关系等[1]。数学概念教学是培养学生数学抽象素养的“落地”点之一，打磨一批核心素养统领下的教学案例凸显了数学教育的实践品格[2]。

曾有调查显示：周期函数被教师和学生共同列为高中数学中最难的概念之一，主要原因是这一概念具有的高度抽象性，如符号语言的运用、最小正周期的判别等[3]。实际教学中周期函数多与三角函数的周期性编排在同一课时，学生对周期函数的认识常被局限于三角函数这类典型模型中，缺乏必要的数学抽象[4]。周期性是函数的重要性质之一，专列一节周期函数的概念课更有利于学生正确掌握和深入理解这一概念。

反观数学史，数学家们对周期函数的认识也经历了由直观的描述性定义到抽象的形式化定义的发展[5]。如果教师能运用恰当的史料，引导学生辨析周期函数历史，经历概念发生过程，学生便有机会逐步跨越历史，加深概念理解，从而提升数学抽象素养。此外，周期函数有着巨大的应用价值，在物理学、天文学、医学等领域中更是发挥着关键作用，所以这一主题也是体现学科联系、渗透数学文化的重要素材。

2 周期函数定义的历史演变

“东升西落照苍穹，影短影长角不同。昼夜循环潮起伏，冬春更替草枯荣”。自然世界的周期现象往往与时间有关。经考据，周期一词最早出现在宋元数学四大家之一——李治（1192-1279）

所著的《敬斋古今黈》一书中，表周年之意。

1748 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707-1783）在《无穷分析引论》中将函数确立为分析学中的基本对象。19 世纪末期，周期函数（periodic function）之名诞生并开始出现在西方早期三角学教科书中，其中一些代表性的定义如表 1 所示。

表 1 西方早期教科书中周期函数定义的演变

阶段	年份	教科书作者	周期函数定义
描述性定义	1900	杜尔斐	当自变量或幅角增加时重复自身的函数称为周期函数[6]。
	1915	莫里兹	每隔一个确定区间重复自身的曲线称为周期曲线（periodic curve），这种曲线所表示的函数即为周期函数，发生重复的区间称为周期[7]。
不完善的形式化定义	1899	穆雷	若 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+k)$，其中 x 取任意值，k 为常数，则称 $f(x)$ 为周期函数。满足该等式的最小的（正）数 k 称为该函数的周期[8]。
	1937	罗森巴赫	$f(x)$ 是变量 x 的函数，若存在一个数 p，使得 $f(x+p)=f(x)$ 对于 x 的所有值都成立，则称函数 $f(x)$ 为以 p 为周期的周期函数。周期函数的周期的任意（整数）倍也是周期[9]。
	1955	怀利	若存在一个非零数 p，使得对于 t 的所有值，均有 $f(t+p)=f(t)$，则称 $f(t)$ 为周期函数。若 p 是满足上述等式的最小（正）值，则称 p 为 $f(t)$ 的周期[10]。
较完善的形式化定义	1958	夏普	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，k 为非零实数，当 x 在 D 中时，$x\pm k$ 也在 D 中。若对于 D 中 x 的每一个值，均有 $f(x)=f(x+k)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，数 k 称为 $f(x)$ 的一个周期[11]。

起初，一些数学家用“重复自身”的自然语言给出了周期函数的描述性定义，并相应地定义周期是“发生重复的区间”。这种定义多基于几何直观和过往的研究经验，抽象程度较低，

也未能准确地界定周期函数和周期的概念。穆雷最早用函数的符号语言给出了形式化的定义，但不甚完善。尔后，罗森巴赫和怀利等数学家分别从周期的数量和取值等方面进行了补充，但此时期中最小正周期和周期被混为一谈，没有数学家意识到定义中的最小正值的存在性，也忽略了指出周期函数的定义域。直到 1958 年，数学家夏普才给出了比较完善的形式化定义。他不仅指明了周期函数定义域的无界性[1]，还以常值函数为反例说明了周期函数的最小正周期不一定存在。

综上所述，周期函数的定义在前后六十年间经历了由直观到抽象，由不完善到完善的演变过程，这为进行重构式教学提供了良好的史料支撑。

3 教学设计与实施

- **教学目标：**

（1）正确理解周期函数的概念，会运用周期函数的定义判断函数的周期性；

（2）通过对具体周期函数图像共性特征的研究，在从具体到一般、从定量到定性的研究过程中提升数学抽象素养；

（3）经历周期函数概念的发生过程，认识数学的严谨性，感悟数学的应用价值和文化价值.

- **课前作业：**

（1）请举出 1-2 个生活中具有周期往复特征的现象；

（2）作出下列函数① $f(x)=(-1)^{[x]}$；② $f(x)=x-[x]$的图像并思考它们的共同特征.

3.1 温故知新，探源周期

师：我们已经学习了函数的奇偶性、单调性等性质。今天我们继续来探索函数的性质。在课前作业中，大多数同学都正确地画出了这两个函数的图像。请同学们思考，这两个函数图像有什么共同特征？

生 1：图像都是一段一段的。

[1] 夏普定义较接近当前分析教材中的定义，即周期函数的定义域为双边无界，而高中教材采取的定义则认为周期函数的定义域至少单边无界即可，参见：（1）史嘉，陆学政，韦兴洲. 评析问题 223[J]. 数学通讯, 2013(7): 35-36.（2）潘劲松，童丽娟. 关于周期函数定义的研究[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2012, 35(01): 21-26.

生 2：图像都是有规律的。

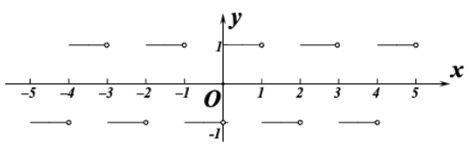


图 **1** 函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$图像

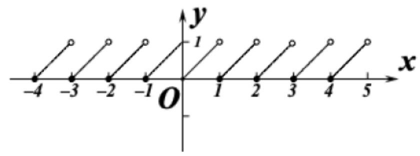


图 **2** 函数 $f(x)=x-[x]$图像

师：我们将函数的这一共同特征称作函数的周期性。人类对周期现象的研究起源于天文学，如英国数学家波尼卡斯特（Bonnycastle）定义月份是月亮重新回到刚开始升起时那一点所需经历的周期。同学们在课前作业中也举出了许多生活中的周期现象。

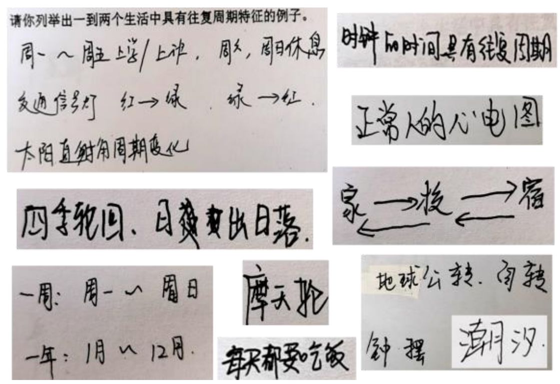


图 3 学生在课前作业中提到的周期现象

师：有同学提出，心电图不一定具有周期特征。我们不妨来看下面这张心电图，医生在此标注了“房早”二字。在这一处之前，这个人的心跳都是正常的，而到这一处，他的心脏多跳了一小下，这样“不正常”的心电图还具有周期特征吗？

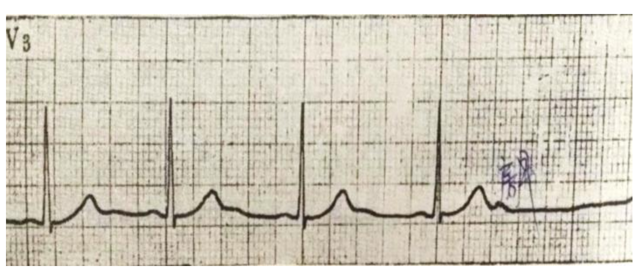


图 4 房性早博的心电图

生：不具有，因为这一段图像和前面有规律地重复出现的图像不一样。

师：很好。从古人研究的天象，到今人研究的心电图，还有同学们写下的种种现象，都与周期息息相关。课前学习单中的两个函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$ 和 $f(x)=x-[x]$，它们的函数图像都具有周期性，因此又称之为周期函数。

【设计意图】从观察预习作业中的周期函数图像，到介绍天文学中的周期现象，再到展示学生提出的生活中具有往复规律的实例，都旨在说明周而复始的现象不仅出现在数学世界，也发生在现实生活中，足见函数周期性学习的必要性。

3.2 辨析历史，抽象定义

在充分认识到学习函数周期性的必要性，引导学生思考：如何定义周期函数？

生：后一段函数图像与前一段函数一模一样的函数称为周期函数。

师：下图中（图 5）的函数，它显然满足这一定义，但它是我们想要表达的周期函数吗？

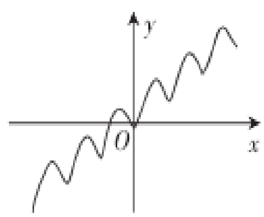


图 5 函数图像

生：不是。

师：那能不能像奇偶性一样，用数学的符号语言给周期函数下一个更精准的定义？

生：满足 $f(x+T)=f(x)$ 的函数 $f(x)$ 称为周期函数，T 是周期。

【设计意图】通过一个典型的反例图像，让学生感知用自然语言定义周期函数的不足，促使学生重新思考并尝试运用符号语言来刻画周期函数的，自然地引领学生步入周期函数的形式化定义阶段。

师：1899 年，美国数学家穆雷首次用符号语言给出了周期函数的定义。对于这一定义，你觉得还有可以改进之处吗？

若函数 $f(x)$ 具有性质 $f(x)=f(x+k)$，其中 x 可取任意值，k 为常数，则称 $f(x)$ 为周期函数，而满足该等式的最小的数 k 称为该函数的周期（穆雷，1899）。

生：周期不能为零。如果周期可以为零，那么定义中的加零等同于没加，则任意的函数都将是周期函数。

师：这位同学几乎没有间隔地便发现了周期的非零性，而真正的历史则长达五十余年。美国数学家怀利首次在周期函数定义中明确了常数不为零的条件。这位同学穿越时空，一下子就完成了历史性的突破。

若存在一个非零数 p，使得对于 x 的所有值，函数 $f(x)$ 均满足 $f(x)=f(x+p)$，则称 $f(x)$ 为周期函数。若 p 是满足上述等式的最小的值，则称 p 为 $f(x)$ 的周期（怀利，1955）。

师：怀利提出的这一定义完全正确吗？

生 1：如果 $f(x)$ 是常值函数，则按照周期函数的定义，常值函数就是周期函数,但它的周期可以趋近无穷小，取不到最小的 p 值。

生 2:若 p 是周期函数的周期，则 $2p,3p,\cdots$ 都是它的周期。

生 3:当 x 在函数定义域内时，$x+p$ 也不能超出函数的定义域。

师：同学们的智慧是无穷无尽的！历史上有一位数学家，跟同学们的想法几乎一样。因此他将周期函数的定义又往前推进了一步，而这一次的历史跨越只用了 3 年的时间。

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，k 为非零实数，当 x 在 D 中时，$x\pm k$ 也在 D 中。若对于 D 中 x 的每一个值，均有 $f(x)=f(x+k)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，数 k 称为 $f(x)$ 的一个周期。（夏普，1958）

师：这一定义中提到，当 $x\in D$，应有 $x\pm k\in D$，即 $x+k$ 和 $x-k$ 都要在定义域内。同学们认为一定要说明 $x-k$ 在定义域内吗？

生：不需要，因为周期 k 为非零实数，它可正可负，只要说明 $x+k$ 在定义域内就可以。

师：很好。这样我们便得到了今天教科书中的周期函数定义。

一般地，对于 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域 D 内的任意值时，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 成立，那么函数 $y=f(x)$ 就叫做周期函数，不为零的常数 T 叫做这个函数的周期。

师：按照同学们的说法，若 T 是周期函数的周期，则 T 的任意整数倍也是这一函数的周期，那我们称所有周期中的最小正数为函数的最小正周期。同学们觉得还有问题吗？

生：最小正周期不一定存在，比如常值函数就没有最小正周期。

师：同学们和数学家夏普提出了完全相同的意见。所以，我们又得到了今天教科书中对最小正周期的定义。

对于一个周期函数 $y=f(x)$，如果在它所有周期中存在一个最小正数，那么，这个最小正数就叫做函数 $y=f(x)$ 的最小正周期。

师：经历了一系列的探索后，我们终于得到了比较完善的周期函数定义，但对历史的辨析告诉我们，这一定义未来还有可能被修正。这也启示我们要学会辩证地看待问题。

【设计意图】以周期函数定义发展的历史脉络为课堂主线，重构式地将历史上三个关键的定义融入到教学之中，让学生在辨析历史上错误定义的过程中，认识并解决周期函数概念中周期 T 的非零性、最小正周期的存在性等问题，最终获得较完善的周期函数定义。

3.3 练习巩固，概念深化

例 1 讨论函数 $y=7+(-1)^n, n\in N$ 是否为周期函数，如果是，请指出它的周期。

例 2 函数 $f(x)=x^2$ 满足 $f(-3+6)=f(-3)$，那么，它是以 6 为周期的函数吗？

例 3 这是一位同学在课前作业中画的两个具有周期性的函数图像，仔细观察，再结合周期函数的定义思考，你有什么新的发现

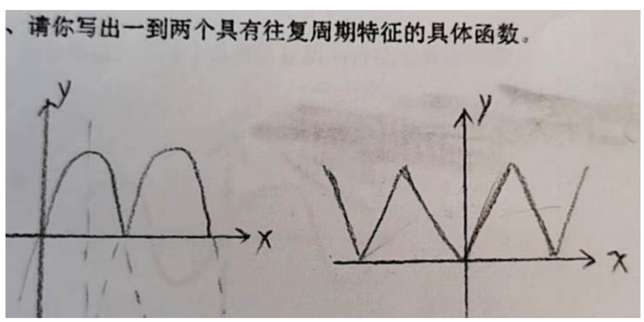


图 6 两函数图像

【设计意图】例 1 和例 2 旨在进一步巩固学生对周期函数概念的理解，例 3 则设计通过观察课前作业中的函数图像，让学生进一步体悟周期函数的定义域至少单边无界的特征。

3.4 联系实际，浸润德育

师：经过今天对周期函数的学习，同学们对周期有没有新的理解？

生：周而复始，遥遥无期。

师：老师认为“周而复始，可以预期”更为妥当。医学上利用心脏跳动具有周期性的特点发明了心脏起搏器，用来治疗心律失常等疾病。课前作业中的周期函数 是在物理中有着广泛应用的“锯齿波函数”，它将我们带入了彩色屏幕的时代。以上都是人类利用周期现象发明新科技、创设新生活的实例。老师希望，同学们“蒸蒸日上，未来可期”，未来也能够利用数学知识改造世界，造福人类。

【设计意图】展示周期函数在医学、物理等领域的应用，让学生体会学习周期函数的现实意义，彰显数学的应用价值。

4 学生反馈与思考

课后，我们以反思单的形式收集到全班 35 名学生的反馈信息。69%的学生能够从 6 个函数图像中完全正确地辨别出周期函数的图像，未能正确作答的学生主要是在选择正确答案后还错选了干扰项。学生对周期函数这一概念形成的主要表征，按频率由高到低依次为“ ”，“图像有规律”，“循环往复（周而复始）等，表明多数学生形成了以符号语言为主、抽象化水平更高的周期函数概念表征，但仍有学生对这一概念的理解还停留在几何直观上。85%的学生能够认识到周期函数的周期有无数个，但最小正周期不一定存在，说明绝大多数学生能够正确地区分周期和最小正周期，并通过例证突破了最小正周期存在性这一认知障碍。

在问及对本节课记忆深刻的地方时，不少学生提到了见证了周期函数定义不断更新的过程，还有一位学生非常惊讶地表示“老师居然能预测到我们的回答”，这在一定程度上显示了根据历史相似性进行教学的意义。

所有学生都表示愿意了解和学习更多的数学史，给出的理由中不仅有“敢于批判，大胆质疑，小心求证”等名人名言，更有“不要总钻在书里的概念，也要从宏观上纵览概念发展过程”等学生自创的金句，体现了数学史的德育价值。

5 结语

本节课首先引导学生联系生活实际，并从特殊函数的图像中感悟函数周期特征，然后引导学生运用符号语言表示并完善周期函数的定义。从特殊到一般，再从一般到特殊是数学抽象素

养培养的有效方法，在之后的教学中，我们可以要求学生运用本节课所学的一般周期函数知识再来研究三角函数的周期性，逐级逐步渗透数学抽象素养的培养。

在本节课试讲时，我们发现学生对周期函数的理解多停留在图像循环往复的描述性定义，故在课前精心设计了作为反例的函数图像，让学生认识到描述性定义的不足之处，促使他们寻找更符合数学严谨性和抽象性的形式化定义。课前作业被用来明确学生已有的知识储备，为精准实施教学提供参考依据，结果表明，这一设计大大提高了课堂生成的有效性。

本节课的最大亮点为数学史的深度融入。借鉴周期函数发展的历史脉络，重构式地将历史上 3 个代表性的定义融入到课堂教学中，让学生在辨析历史的过程中跨越历史，在概念形成的经历中提升数学素养，历史与探究的耦合培养了学生的质疑精神和理性精神，实现了数学史融入数学教学的德育之效。正如一位学生课后所说“学习和研究数学都是需要时间积累、沉淀的，要不断地试错纠错才能得到成果”，让学生适度、适量、适时地在课堂内经历同数学家一样“做数学”的过程，既是 HPM 一直以来的研究特色，也是核心素养视角下概念教学的可行之路。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 章建跃. 核心素养统领下的数学教育变革[J]. 数学通报, 2017, 56(04): 1-4.

[3] 阮晓明, 王琴. 高中数学十大难点概念的调查研究[J]. 数学教育学报, 2012, 21(05): 29-33.

[4] 陈君煜. 高中生对于周期函数理解的调查研究——以上海市 J 中学为例[D]. 华东师范大学.

[5] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.

[6] Durfee, W. P. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1900.

[7] Moritz, R. É. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915.

[8] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges and Secondary Schools*[M]. New York: Longmans, Green & Company, 1899.

[9] Rosenbach, J. B., Whitman, E. A., Moskovitz, D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1937.

[10] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

[11] Sharp, H. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1958.

活动讯息

HPM 工作室第一期结业典礼暨第二期学术沙龙纪要

蔡春梦，韩粟
（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2021 年 1 月 14 日下午，数学史与数学教育（HPM）工作室第一期结业典礼暨第二期学术沙龙于华东师范大学第二附属中学张江校区科学楼五楼电视台举行。本次活动由华东师范大学第二附属中学、华东师范大学教师教育学院以及上海市立德树人数学教育教学研究基地共同举办，来自上海不同区域、不同学段的两期 HPM 工作室学员，以及华东师范大学 HPM 研究团队的诸位成员首次齐聚一堂，共襄学术盛举。

本次活动由华东师范大学数学科学学院沈中宇博士主持。活动伊始，华东师范大学第二附属中学李志聪校长上台致欢迎辞。李校长结合教育时政指出了当前数学学习的重要性，其中数学史更是促进学生发展的有力推手。他向 HPM 工作室第一期顺利结业及第二期顺利开班表示衷心地祝贺，更对 HPM 工作室今后的活动表达了高度期许。

图 1 沈中宇博士主持

图 2 李志聪校长发言

本次活动共分为 4 个部分：HPM 工作室第一期成员学术报告，HPM 工作室第二期成员课例分享，HPM 工作室年度总结、专家报告以及 HPM 工作室第一期结业典礼。

首先是第一期学员做学术报告。其中，华东师范大学第二附属中学紫竹校区赵玉梅老师作了主题为“思维引领，智慧发展——HPM 实践驱动下的专业发展”的学术报告。她从“HPM 是教学研究的助推器、问题探源的挖掘机、学科育人的孵化场及教学特色的冷凝塔”4 个方面分享了加入 HPM 专业学习共同体后自身的专业成长之路。

华东师范大学第二附属中学张江校区蔡东山老师作了主题为“HPM 视角下的高中数学教学：

回顾与反思”的学术报告。他通过回顾加入 HPM 工作室以来开展的 5 个课例生成过程，结合一系列实证数据，深刻反思了数学史融入数学教学的方式选择与价值实现。

图 3 赵玉梅老师报告

图 4 蔡东山老师报告

上海中学东校牛德军老师作了主题为“遇见 HPM:不一样的初中数学课堂”的学术报告。他分享了自己从初次遇见 HPM 到熟练运用 HPM 中间经历的曲折探索，以及加入 HPM 工作室后以来在数学教师专业发展之路上的累累收获。

上海市新杨中学李德虎老师作了主题为“信息技术支持下的 HPM 课例研究”的学术报告。他提出将 HPM 与信息技术融合能够有效推动数学课堂的深度改革，为数学教育的未来寻找一个可融入的接口。

图 5 牛德军老师报告

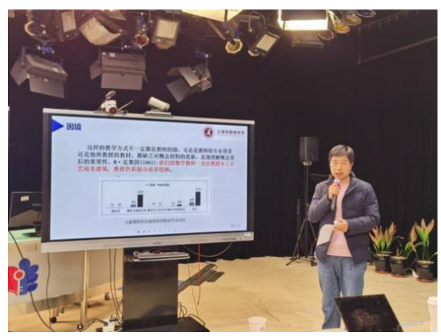


图 6 李德虎老师报告

之后，HPM 工作室第二期学员，来自上海市回民中学的徐洁岚老师及上海市实验学校南校的蒋来老师分别作主题为“数史贯古今，学问思辨行——HPM 视角下‘函数周期性’的教学设计与实施”及“HPM 视角下‘一元二次方程根与系数关系’的教学”的课例报告，由上海市长宁区教育学院高中数学教研员栗小妮博士进行点评，她指出数学史对学生个性品质形成具有重要影响，勉励各位老师在 HPM 工作室中一同成长，做有趣的数学教育研究。

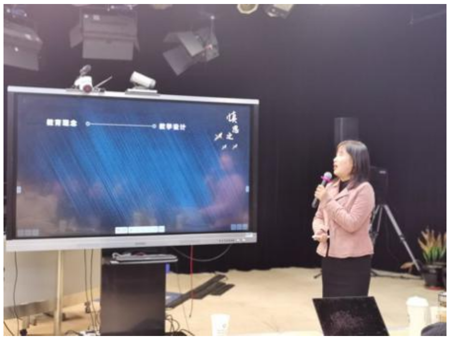


图 7 徐洁岚老师报告

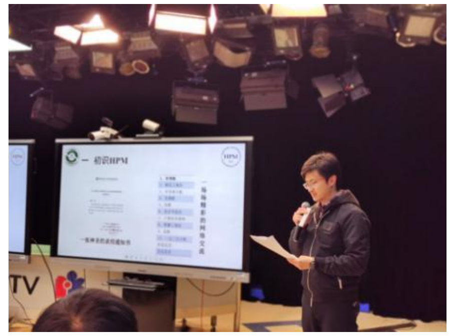


图 8 蒋来老师报告

图 9 栗小妮老师点评

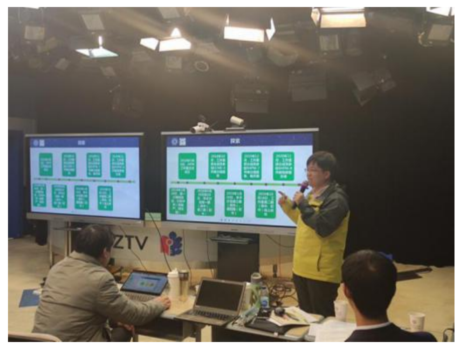


图 10 邹佳晨老师发言

随后，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师对 HPM 工作室进行了综述报告。邹老师将 HPM 工作室的发展分为“缘起”、“创立”、“探索”、“展望”四个阶段，梳理了 HPM 工作室自 2018 年 3 月 6 日成立至今近三年时间的发展历程，肯定了一期学员在参与专题研修、提供教学观摩、发表课例论文等方面付出的辛勤努力，尤其是疫情期间，学员们仍坚持相聚云端，线上研讨，体现了各位学员对数学史与数学教育的赤诚热爱。邹老师还介绍了 HPM 工作室二期课例研究的形式及要求，并鼓励二期学员积极参与到丰富多彩的 HPM 研修活动中。

最后，华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师就“HPM 与教师专业发展”主题作学术报告。汪老师首先介绍了数学史与数学教育之间的关系、HPM 工作室的专业发展模式、课例研究的流程与 HPM 课例文章的结构，然后从 MKT 的六个维度出发，结合相关课例，阐述了数学史促进教师知识增长的关键作用，汪老师还指出了 HPM 课例研究应该聚焦的若干问题，分析了 HPM 领域的学术前沿趋势。最后，汪老师以“不断学习，不断教书，不断写作，其乐无穷”为结语，祝愿各位老师能够在 HPM 学习中实现自身专业发展。

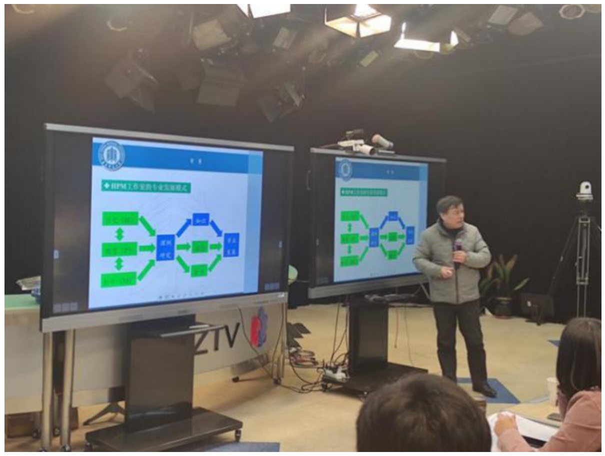


图 11 汪晓勤老师讲座

活动尾声，汪晓勤老师向 HPM 工作室第一期顺利结业的成员颁发荣誉证书，并合影留念。

图 12 一期学员（高中）结业仪式

图 13 一期学员（初中）结业仪式

至此，数学史与数学教育（HPM）工作室第一期结业典礼暨第二期学术沙龙圆满闭幕。新的一年，HPM 工作室将承前启后，继往开来，在提升教师专业素养、培育学生核心素养、丰富数学教育理论与实践成果等方面作出卓越贡献。

图 14 合影留念

重构概念发展史，关注定义合理性

——上海市行知中学、上海市建平中学 HPM 教学观摩与研讨活动

韩嘉业[1]　雷沛瑶[2]

（1 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2 华东师范大学 数学科学学院，上海 200241）

2021 年 3 月 8 日，数学史与数学教育（HPM）工作室高中课例研究活动暨华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学联盟第九次集中研修活动在线下线上同步举行。本次课例研究活动的主题是“二面角”，两位 HPM 工作室学员分别进行了教学展示。3 月 8 日上午，上海市行知中学的高振严老师进行了一节“二面角”公开课展示；3 月 8 日下午，上海市建平中学的李传峰老师进行了一节“二面角及其平面角”公开课展示。华东师范大学 HPM 研究团队成员及部分 HPM 工作室学员赴现场参加了教学观摩与研讨活动，HPM 工作室的其余学员与高中数学联盟成员校教师线上观摩了公开课教学。

上午在行知中学的公开课上，高老师先是用书本、平板电脑、教室的墙面与天花板之间的关系来引入两个平面之间的位置关系，进而让学生自然地抽象出数学问题：求两个平面之间的夹角。这与欧几里得对面面倾角的定义是类似的，但这样的数学模型不能够刻画开合程度比较大的二面角，所以高老师提示同学们这里需要用到半平面的概念。很快，同学们自然地想到了如何用两个半平面来定义二面角。借下来，高老师让学生完成了一个折纸构造二面角模型，并用量角器测量二面角大小的数学活动。在活动的过程中，学生们给出了不同的折叠方法和测量方法，共性的是，同学们都想到用平面角来刻画空间角的大小，并且同学们都选择测量被折叠的纸的边缘。高老师问同学们，为什么不选择边缘与棱不垂直的情况来度量二面角。经过一番思考与讨论，学生们从特殊情况入手，排除了不合理的度量方式。紧接着，高老师提出我们需要进一步说明垂直于棱的情况是合理的，并且用三块三角形的蛋糕来演示了二面角度量的合理性。为了度量不规则情况下的二面角，高老师让学生思考顶点的移动，是否会影响二面角平面角的大小。通过简单的证明，学生得到结论：不论顶点取在何处，都不影响平面角的大小。此时，高老师让学生用自己的语言总结二面角平面角的定义。在总结的过程中，有一位同学创新地提出了用异面直线来刻画二面角的大小。在例题练习环节，高老师设计了两道典型的画二面角的问题，并对二面角的画法进行了总结。课堂小结中，高老师希望大家要用理性的眼光、批

判性的思维来看待数学中的各个问题。

图 1　高老师用平板电脑演示二面角

图 2　在折纸活动后教师与学生交流

下午在建平中学的公开课上，李老师在课堂伊始用异面直线之间所成的角和不在平面内的直线与平面所成的角作为引入，提出我们在研究空间内角度关系的时候，都是用平面角来刻画。随后，李老师让学生回忆预习课本时看到的二面角定义，并让学生辨析定义中的关键词。接着，李老师带领学生回顾初中所学的角的定义，引导学生从类比的角度来思考二面角，将它看作平面中角的模型在立体几何中的推广，并强调了二面角定义中的各个元素。在明确二面角的定义后，李老师提出问题，为什么不用“两平面相交所形成的四个角中较小的角是两平面所夹的二面角”作为定义。有同学认为这个定义不明确，因为此时还不知道二面角大小是什么，所以不能比大小；还有同学认为，这样作图不方便，所以只取一半。关于二面角大小如何度量的问题，李老师首先请同学们观看了一段 HPM 微视频，微视频讲述了塞克斯和康斯托克在一本英美早期教科书中给出的测量二面角大小的数学活动。随后，李老师问大家，这样测量的依据是什么。在同学们陷入沉思一段时间以后，李老师提示同学们考虑过程定义、关系定义、模型定义中的过程定义，从旋转中寻找二面角平面角定义的依据。然后李老师从几个特殊例子出发，讲解了二面角平面角定义的唯一性、一般性、典型性。针对如何画二面角，李老师通过板书演示，并用“假作真时真亦假，真作假时假亦真”来总结立体几何画图的特点。在例题练习环节，李老师通过一道求二面角大小的习题和三道判断题，让学生学会二面角大小怎么求以及帮助学生辨析概念。最后，李老师总结道，今天的课堂中我们经历了二面角定义的发展过程，并且探索了二面角定义的合理性。

图 3 李老师的课堂教学

图 4 李老师与学生交流

在上午的课后简短研讨中，高老师首先介绍了自己教学设计形成和修改的心路历程，并且分析了自己设计中重点关注的两个问题，一是区分二面角和两个平面夹角的区别，二是通过折纸活动来探索二面角大小如何合理地度量。华东师范大学邹佳晨老师认为，这节课中用到了若干特殊情况来说明非垂直情况下的度量是不合理的，这一点非常好。华东师范大学汪晓勤老师认为，这节课对二面角度量合理性的讲解很成功。同时，汪老师也提出，希望用分组活动的方式来给学生提供更多的学习机会和交流机会。

在下午的课后研讨中，李老师首先介绍了授课班级的基本情况、自己教学设计的思路以及教材和高考中对二面角的要求，李老师认为自己这节课在问题的设置上还有进步空间。上海市行知中学高振严老师认为这节课的结构清晰、逻辑很强，多处渗透类比推理的思想，对概念的辨析很有层次感。华东师大一附中方倩老师表示李老师的教学基本功非常扎实，值得学习，这节课在帮助学生建立直观理解上下了很大的功夫。上海市风华中学苏燕老师提到这节课是一节探究式的 HPM 课，问题的设置层层递进，让学生的思维逐步拔高。上海市建平中学张厚品老师认为这节课的亮点是情境的引入、类比的思想、模型的运用、视频的辅助，同时张老师也分享了自己是如何设计与实施二面角概念的教学。华东师范大学的诸位博士、硕士研究生也对李老师的课堂教学发表了自己的看法。线下交流非常热烈，两个小时的时间一晃而过，而通过线上直播观摩教学的老师，也在微信群中发表了自己的感想。最后，华东师范大学汪晓勤老师总结，这节课的学术性很强，类比的思想贯穿始终，古今联系，让学生经历数学概念从不完善到完善的动态发展过程，这对学生建立正确的数学观、数学信念很有帮助。

图 5 课后研讨交流 1

图 6　课后研讨交流 2

作为本学期 HPM 工作室的第一次高中课例观摩活动，两位老师基于同一个课题“二面角”，呈现了两场精彩的展示课堂。通过前期的线下研讨，两位老师从历史素材中汲取了设计灵感，通过重构式地运用数学史，重点关注了数学定义的合理性。在“新课程、新教材”实施的大背景下，立体几何的育人价值将进一步被挖掘。本次课例研究活动借助现代信息技术打破了空间壁垒，线上直播使得 HPM 工作室的学员能够在云端观摩教学。期待未来能有更多 HPM 工作室的学员设计出关注数学学科本质以及学生学习机会的精彩课例。

数学史与数学教育（HPM）工作室初中课例研讨会纪要

狄迈，司睿，闫欣，杨孝曼

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2021 年 3 月 10 日下午，数学史与数学教育（HPM）工作室初中课例研讨会在华东师大二附中附属初中举行。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师、华东师大二附中附属初中数学教研组长柯新立老师，HPM 工作室初中教师、华东师大二附中附属初中数学组教师以及华东师大 HPM 方向研究生 30 余人参加了本次课例研讨活动。本次活动由 HPM 工作室初中学段负责人余庆纯博士主持，分别对三节不同的数学史融入初中数学课堂教学的课例进行研究与探讨：

（1）方程的概念；

（2）平行线的性质；

（3）平面直角坐标系。

“方程的概念”执教教师分别是上海市进才实验中学的林徐劢老师、上海中学东校的牛德军老师和上海市市西初级中学的王进敬老师；“平行线的性质”执教教师是同济大学附属实验中学的孙虎老师和上海市延河中学的孙洲老师；“平面直角坐标系”的执教教师是华东师范大学第二附属中学附属初级中学的陈慧老师。

1 方程的概念

针对“方程的概念”主题，林徐劢老师由生活情景引入，引导学生通过“算术方法”与“引入未知数”这两种方法解决问题，并将两种方法分别形容为“摸石头过河取宝石”与“拴绳取宝石”，帮助学生认识“算术”与“方程”的异同，体会“方程”的优越性。接着从形式与本质两方面揭示了方程的意义。学习完“方程的概念”后，通过古代历史趣味题，如“丢番图的墓志铭”，让学生更好地掌握方程的意义，理解方程是沟通“已知与未知的桥梁”。

牛德军老师与王进敬老师因工作原因无法到现场，采取“云汇报”的形式，提前录制视频，由现场老师播放汇报。牛老师由现下中学里开展的初三社会实践活动引入，引导学生通过参加活动人数问题列出方程，初识方程的概念。通过几个问题——“方程”这一概念是“舶来品”

吗？为何命名为“方程”？未知数为什么又叫“元”？展开教学活动。最后通过微视频：“方程”概念的前生今世，带学生体会方程概念背后的数学文化底蕴。王老师通过家中电表缴费问题引导学生建立已知量与未知量之间的等量关系，用“算术”与“方程”解决学生宿舍安排问题，讲解其间的异同后，对方程概念进行讲解，最后通过历史相关方程进行巩固。

三位老师汇报完成后，与会教师与研究生对此课题展开了积极的讨论，指出三位老师都从实际问题引入方程，既贴近生活又符合学生的认知；都选择了历史名题，是此课例教学的亮点。邹佳晨老师提出，不必过度纠结于“含有未知数的等式”这个定义本身，如让学生辨析“x=1 是否为方程”，这样的讨论，可能对理解方程的思想方法并无裨益，教材上的这个定义是重形式轻本质的；这堂课除了让学生理解方程的形式，还要让学生知道其是求解未知数的工具。张奠宙先生曾经提出，可以这样描述方程的定义：“方程，是为了求未知数，在已知数和未知数之间建立起来的一组等式关系”。汪晓勤老师建议，可以引导学生列方程，尝试自己给方程下定义，发现方程的概念到底是什么，从而加深对方程的理解。

图 1 林偿劢老师展示教学设计

图 2 老师们针对“方程的概念”展开研讨

2 平行线的性质

对于“平行线的性质”主题，孙虎老师与孙洲老师进行了教学设计的汇报。

孙虎老师设计了操作环节：练习簿内中的横线互相平行，学生任意画一条直线去截这些平行线得到“三线八角”图，观察、测量其中一对同旁内角的关系，进一步通过几何画板进行验证。此时，引入《几何原本》公设 5，推理平行线的性质和平行线的传递性，帮助学生体会逻辑推理、几何论述的严谨性。最后，通过埃拉托色尼测量地球的周长的故事，进一步展现平行线性质的实际应用。

孙洲老师则从复习“平行线的判定”引入，提出思考问题：两直线平行，同位角、内错角、同旁内角有什么关系？学生讨论，自行完成操作验证、说理论证。此时重现史料，引入《几何原本》公设 5 进行解读，并基于第 5 公设推理得到平行线的性质。

图 3 孙虎老师展示教学设计

图 4 孙洲老师展示教学设计

与会老师们交流后指出，教师在设计 HPM 课例时，应当梳理知识的脉络后，寻找适合教育对象的一种方式，重新呈现知识的产生和发展的过程。欧几里得所设的“不证自明”的公理可以不在课堂之上出现，学生有兴趣时再进行讲解。

图 5 老师们针对“平行线的性质”展示研讨

3 平面直角坐标系

针对“平面直角坐标系”主题，陈慧老师将平面直角坐标系的历史发展分为三个阶段：第一阶段是费马和笛卡尔建立初步的单轴，第二阶段是英国数学家沃里斯引入负坐标，第三阶段是几何学家建立平面直角坐标系。在实际课堂教学中，已有的课堂引入方式有：笛卡尔利用数

字表示苍蝇所在的位置，莱茵河畔的士兵向上级报告部队所在位置。陈老师以实数与数轴上的点一一对应为认知基础，组织学生讨论给出平面上的点的表示方法，并与历史上的表示方法进行对照，引导学生将直观的图形和抽象的代数方程结合起来。

图 6 陈慧老师展示教学设计

汇报完成后，与会老师就这一主题进行了研讨。汪晓勤老师对解析几何的早期历史作了简要的介绍。他指出，解析几何的创始人、17 世纪法国数学家笛卡儿和费马都采用了单轴（横轴），只局限于正坐标。本节课可以重构历史，运用发生教学法，设计问题串，让学生经历从一维到二维、从单轴到双轴、从正坐标到负坐标、从一个象限到四个象限的过程，从而达成对直角坐标系的深刻理解，为未来解析几何的学习打下坚实的基础。

本次初中课例研讨活动作为本学期 HPM 工作室初中教师的第一次集中研修活动，与华东师大二附中附属初中数学组联合举办，采取“线上-线下”相融合的模式，为后疫情时代基于数学史的课例开发提供了新的参考，创造了新的机遇！