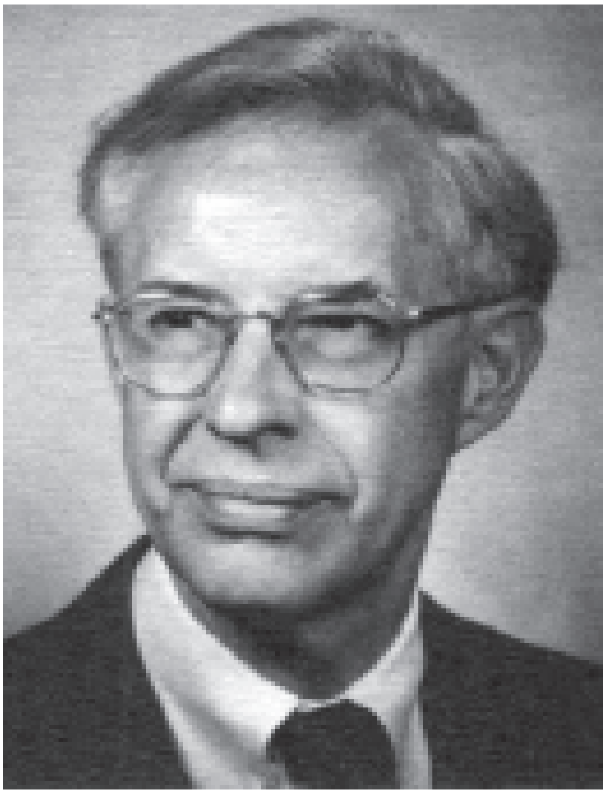
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2015 年第 4 卷第 1 期



菲利浦·琼斯

（P. S. Jones, 1912-2002）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

目 录

Content

刊首语

本期封面人物是美国数学史家、HPM 的创始人之一琼斯（P. S. Jones, 1912-2002）。

琼斯于 1933 年和 1935 年先后获得密歇根大学数学学士和硕士学位。在大、中学任教 10 年后，他回到母校继续深造，师从数学史家卡宾斯基（L. C. Karpinski, 1878-1956），于 1948 年获得博士学位。他的博士论文是《线性透视理论的发展及其与射影几何和画法几何之间的关系》。此前，他于 1947 年成为密歇根大学的讲师，1958 年晋升为数学系教授。

1940 年代，他开始思考数学教师教育与数学史之间的关系。1948 年，琼斯在“密歇根大学未来数学教师培养方案”中，建议使用史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）、卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）和阿奇巴尔德（R. C. Archibald, 1875-1955）数学史著作。

1950 年代，琼斯发表了 14 篇论文，内容涉及教育取向的数学史、数学史与数学教育之间的关系等。其中比较重要的有“复数：数学发展中不断重现的主题”、“作为教学工具的数学史”、“电影与电视在大学数学教育中的地位与未来”、“儿童数学思想的发展”等。琼斯的主要 HPM 观点是：

- 数学史能激发学生的学习兴趣，并让他们欣赏和热爱数学；
- 数学史为教师提供丰富的教学素材；
- 数学史是教师改进教学的工具；
- 数学史提供新课引入的话题以及帮助学生“发现”新概念或新思想的方法；
- 数学概念漫长而曲折的历史，让学生获得心理安慰，不会因自己的不理解而担忧；
- 数学史能够澄清数学的意义，揭示数学的本质，加深学生对数学的理解。

1960 年代，琼斯发表了 6 篇论文，涉及教师教育、数学教育史、数学史与数学教育之间的关系。1970 年，他与 A. F. Coxford 合作编辑了第 32 本 NCTM 年鉴，对美国和加拿大的数学教育史进行了系统研究，激发了人们对数学教育史研究的兴趣，琼斯因此成为该领域的重要先驱者。1976 年，他与 L. N. H. Bunt 等人合作出版了《初等数学的历史根源》一书。

1972 年，在第二届 ICME 上，琼斯与英国学者罗杰斯（L. Rogers）等组织“数学历史与教学之间的关系”国际研究小组（HPM）。四年后，在第三届 ICME 上，HPM 正式隶属于 ICMI，琼斯担任主席。

琼斯是密歇根数学教师理事会的创始人，先后担任美国数学协会理事、美国数学协会“用于课堂教学的电影”委员会、NRC 电影评估委员会和数学影视分委员会主席、美国数学教学委员会委员、NCTM 理事、副理事长、理事长。

琼斯对 HPM 的贡献值得我们进一步深入研究。

理论探讨

数学史与小学数学教学 *

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

奥地利著名物理学家和哲学家马赫（E. Mach, 1838-1916）曾经说过：“没有任何科学教育可以不重视科学的历史与哲学。”这一观点同样适用于数学教育。也许有人会说：我对数学史一无所知，不也把数学教得很好吗？诚然，在我们今天这个以分数论英雄的时代，这话或许并没有错。但是，如何解决“分数可观、情感消极”、“解题无数、理解缺失”等矛盾呢？如何在课堂上营造“知识之谐”、展示“方法之美”、实现“情感之悦”，从而让儿童接受更美好的数学教育呢？数学史融入数学教学，是值得我们探索的一条理想途径。

实际上，早在 20 世纪 70 年代，数学史与数学教育之间的关系（HPM）就已经成了数学教育的一个研究领域。走进小学数学的世界，我们赫然发现，有关 HPM 研究的主题竟如此丰富多彩，引人入胜。限于篇幅，本文讨论其中的四个主题。

1 教育取向的数学史

数学史是一座巨大的宝藏，其中包含有大量的教学素材。数学史之所以有着“高评价、低应用”的境遇，原因固然很多，但数学教师手头缺乏实用的数学史素材，是最主要的原因之一。另一方面，对小学数学教学中许多问题的探讨，如小数和分数孰先孰后、简易方程的必要性等等，都需要以数学史为参照。因此，教育取向的数学史研究是 HPM 领域不可或缺的基础性工作。

教育取向的数学史料浩如烟海，我们大致可以按照其作用来分类。以下我们举两类例子。

1.1 “情感”取向的历史素材

科学史家萨顿（G. Sarton, 1884～1956）曾经说过，在科学和人文之间只有一座桥梁，

* 本文为《江苏教育》约稿。

那就是科学史；建造这座桥梁是我们这个时代的主要文化需要。据此，我们同样可以说，在数学和人文之间只有一座桥梁，那就是数学史；建造这座桥梁是我们这个时代数学教育的需要。

小学数学在培养学生数学思维、让学生掌握基本的知识和技能的同时，还应该传递数学背后的人文精神，为塑造学生的人格品质提供正能量。数学是人类的文化活动，不同时空的数学家都对数学的发展做出过贡献，他们的勤奋、执着、坚韧、担当，他们对真、善、美的不懈追求，无不是宝贵的精神财富。

古希腊数学家泰勒斯（Thales，公元前 6 世纪）他勤于天文观测，坚持不懈，风雨无阻，一次竟不慎掉入水沟，他通过拼图发现了三角形内角和定理。中国南北朝时期的数学家祖暅（祖冲之之子, 公元 5 世纪）在思考问题时专心致志，天打响雷都听不见，走路时竟撞上仆射徐勉，徐勉叫唤后才醒悟过来，他最终解决了球体积的难题。17 世纪德国数学家开普勒（J. Kepler, 1571～1630）40 岁那年失去妻儿，但他没有因生活中的巨大不幸而沉沦，而是依然专注于他的天文学和数学研究，在第二次婚姻的婚礼上，他想出了圆面积公式的一种精彩的推导方法。17 世纪英国哲学家霍布斯（T. Hobbes, 1588～1679）四十岁开始学习数学，最终成为数学家。19 世纪苏格兰数学家华里司（W. Wallace, 1768～1843）逆境成才，从一名书籍装帧的学徒工到爱丁堡大学数学教授，写下了人生的传奇。

沟通数学与人文，也就更全面地发挥出数学的育人价值了。但是，在小学课堂上，我们太缺乏数学故事了，需要不断从数学史文献中去发掘、整理和加工。

1.2 “方法”取向的历史素材

每一个公式和法则都有其历史，无论是其背后的思想方法，还是从不完善到完善的演进过程，都能为教学提供借鉴。以分数除法为例。成书于关于 1 世纪的《九章算术》采用通分法：

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\div\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ad};$$

而印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta, 7 世纪）和婆什迦罗（Bhāskara, 1114～1185?）采用我们熟悉的颠倒除数分子分母法：

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$$

但这种方法在 15-16 世纪的欧洲却鲜为人知。欧洲人除了采用《九章算术》中的通分法，还

采用了很流行的交叉相乘法[1]：

$$\frac{b}{a} \qquad \frac{d}{c} = \frac{bc}{ad}$$

直到 17 世纪，颠倒除数分子分母法才逐渐被人们广泛采用。

从教材中我们可能只能看见一棵树，而从历史中我们却可能看到一片林。下文中我们还会看到圆面积公式的例子。

2 历史相似性

所谓历史相似性，是指学生对数学的理解过程与数学的历史发展过程具有一定的平行性，这是数学史融入数学教学的理论基础。但是，儿童对某个数学概念的理解是否真的存在历史相似性，需要我们做深入细致的实证研究。例如，儿童对代数字母的理解、对分数和小数的理解、对负数的理解，等等。如果历史相似性得到印证，那么，数学史就成了一面镜子，通过这面镜子，教师可以预测儿童对有关知识点的认知困难，从而可以制订合理的教学策略。

一个例子是学生对“除以零”的理解。数学上为什么要做这样的规定？事实上，历史上数学家在这个问题上多有困惑。古代印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta, 598～670）认为$0 \div 0 = 0$；摩诃毗罗（Mahāvīra , 9 世纪）认为$a \div 0 = a$（$a \neq 0$）；释律帕提（Scripati, 11 世纪）认为$a \div 0 = 0$（$a \neq 0$）。而婆什迦罗虽然用相当于我们今天的∞的专有名词来表示$a \div 0$的结果，但他认为$\left(a \times 0\right) \div 0 = a$。

Reys & Grouws (1975) 对中学生进行访谈[2]，一位八年级学生认为$0 \div 0 = 0$，并解释说：一无所有除以一无所有，什么都得不到。Wheeler & Feghali (1983) 对 52 名职前小学教师的研究发现[3]，职前小学教师在“除以零”的理解上存在困难，67%的职前教师认为$0 \div 0 = 0$。Ball (1990) 对 19 名职前中小学教师进行访谈[4]，发现很少有人合理解释为什么 0 不能为除数。Even and Tirosh (1995) 对 33 名以色列中学数学教师进行调查，发现很多教师对于“为何$4 \div 0$无意义”的解释是“一种规定”[5]。Crespo & Nicol (2006) 在教学中发现[6]，小学生和职前小学教师普遍认为$5 \div 0 = 0$。上述研究表明，今天学生对于“除以零”的困惑或误解确实具有历史相似性。

另一个例子是学生对角概念的理解。角的概念具有多面性。古希腊数学家从质、量和关系三个角度来理解角，在《几何原本》中，欧几里得虽然通过边的关系来定义角，但众多

命题又同时涉及角的度量（如角可以平分）。Keiser (2004)通过课堂观察和访谈发现 [7]，6 年级学生对角的理解也同样涉及古希腊人的三个方面，因而在角的理解上存在历史相似性。

3 教学实践

要让小学教师充分认识和普遍接受 HPM，首先就需要让他们看到成功的教学案例。HPM 视角下的数学教学，不是生硬地为历史而历史，而必须兼顾知识点的历史发生发展顺序、逻辑顺序以及儿童的心理发生发展顺序。数学史的运用方式也并不是单一的，而是含有附加式、复制式、顺应式和重构式，视课堂需求而定。以下我们举例加以说明。

附加式是指在课堂上讲述数学故事、人物生平、历史背景等。例如，在引入“大数的认识”时，讲述古希腊数学家阿基米德数沙的故事；在讲授三角形内角和时，讲述帕斯卡少年时代通过折纸发现三角形内角和定理的故事；在讲授字母表示数时，讲述“未知数为什么用 x 来表示”的故事，在引入众数概念时，讲述古希腊伯罗奔尼撒战争中普拉提亚人数城墙砖块的故事，等等。

复制式是指教学中直接使用历史上的数学问题。例如，人教版数学六上“数学广角”单元即含有两个古代数学名题：一是《孙子算经》中的“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何。”一是《算法统宗》中的“僧分馒头”问题：“一百馒头一百僧，大和三个更无争。小和三人分一个，大小和尚得几丁？”

人教版数学五上“简易方程”单元的“乒乓球和羽毛球”问题实际上是盈亏问题，中国古代称为“盈不足”。沪教版小学数学五下还编制了一个更直接的盈不足问题：“一盒糖果平均分给几个小朋友，如果每人分 6 颗，那么还剩下 14 颗；如果每人分 8 颗，那么正好分完。一共有几个小朋友？这盒糖果有多少颗？”

《九章算术》第 7 章专门讨论这类问题。例如：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问：人数、物价各几何？”“今有共买犬，人出五，不足九十；人出五十，适足。问：人数、犬价各几何？”刘徽用“以一人之差约众人之差”来解释《九章算术》给出的解法。

在《唐阙史》中记载一个唐代的选拔官吏的面试题：一位行人傍晚经过一个树林，忽听得林间有人在说话，细听方知是一群窃贼在讨论分赃之事。只听得窃贼说：“每人 6 匹，则多出 5 匹；每人 7 匹，则又少了 8 匹。”问：共有几个窃贼，几匹赃物？程大位在《算法统宗》中以“浪淘沙”为词牌名设题：“昨日独看瓜，因事来家。牧童盗去眼昏花。信步庙东

墙外过，听得争差。十三俱分咱，十五增加。每人十六少十八。借问人瓜各有几，已会先答。”古代数学名题犹如陈年佳酿，必能在课堂上散发醇香。

顺应式是指将数学史上的数学问题进行改编，或利用数学史材料编制数学问题，以顺应今日教学的需要。例如，欧几里得《几何原本》第 1 卷命题 37 为：“同底且位于相同的两条平行线之间的三角形（面积）相等。”[8]利用该命题，可编制如下问题（人教版数学 5 上）：图 1 中有几对面积相等的三角形？（阴影部分的一对三角形被称为“欧几里得蝴蝶”。）利用中国古代的七巧板，编制如下分数问题（人教版数学 5 下）：图 2 中的每个图形的面积占整个正方形面积的几分之几？图形 7 和 4 共占几分之几？图形 3、4、5 共占几分之几？

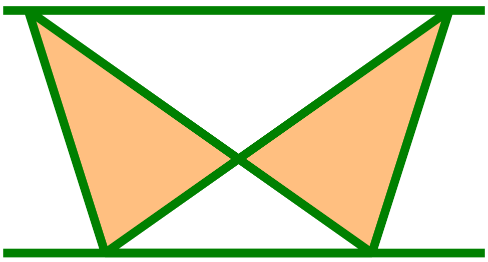


图 1 欧几里得蝴蝶

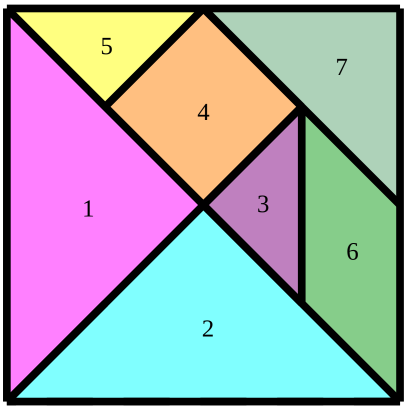


图 2 七巧板问题

人教版数学五下关于分数运算的“有趣的三角”（图 3）也是根据中国北宋时期数学家贾宪的“开方作法本原图”（今称“贾宪三角”）改编而成，是数学史的顺应式运用。

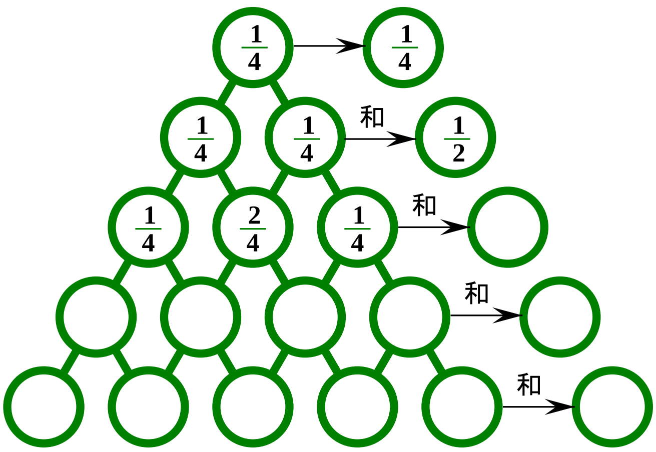


图 3 分数贾宪三角

古希腊哲学家西塞罗曾经说过：“如果我们把自然看作向导，那么自然是不会让我们误入歧途的。”在很多大教育家的著作中，我们不难看到一个关键词——“自然”。“自然”，是

数学教学追求的境界之一。要教好一个知识点，首先需要将该知识点建立在学生已有的认知基础或生活经验基础之上，然后再突出知识的必要性，从而激发学生的学习动机。

很多概念如果直接按照历史进行教学，可能并不自然，因而需要对历史进行重构。以负数为例。我们知道，中国古代数学家因为解方程的需要而率先使用负数。《九章算术》方程章第 3 题所解的三元一次方程组问题是

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ 4z+x=1 \end{cases}$$

在第三个方程两边乘以 2，与第一个方程相减，出现正数不够用的情形：y 的系数等于 $0-1$。“正负术”说：“正无人负之”。刘徽在注释“正负术”时说：“今两算得失相反，要令正负以名之。”在西方，13 世纪意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 1170?～1250?）认为，方程 x+36=33 没有根，除非第一个人（x）欠债 3 个钱币。16 世纪德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487～1567）指出，零减去一个大于零的数所得结果“小于一无所有”，是“荒谬的数”。17 世纪法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623～1662）则认为：0 减去 4 纯属无稽之谈。18 世纪，仍有数学家感到困惑：世界上还有什么东西会“小于一无所有”？直到 19 世纪，还有数学家不接受负数。

显然，我们不能直接通过一元一次方程或二元一次方程组来引入负数，而历史又告诉我们，学生对于“直接从零中减去一个正数”这样的运算会感到困惑，因此，也不能用后者来引入负数。故只能通过重构式了。蔡宏圣老师已经做过精彩的设计。

4 HPM 与教师专业发展

数学教师专业发展的目标包括知识、信念、能力等方面，其中，教师的知识可以用美国数学教育家鲍尔提出了 MKT 理论来刻画。所谓 MKT，指的是“完成数学教学工作所需要的数学知识”，其组成成分如图 4 所示 [9]。

“一般内容知识”是指除教学外，在其他背景下也使用的数学知识和技能；“专门内容知识”是指教学所特有的数学知识和技能；“水平内容知识”是指对整个数学课程中数学主题之间的联系的了解；“内容与学生知识”是指对学生的了解和对数学的了解相结合的知识；“内容与教授知识”是指对如何教授的了解和对数学的了解相结合的知识；“内容与课程知识”是指对课程大纲、课程标准有关要求以及有关教学材料的了解。

这里，我们简单地讨论一下SCK、HCK和KCS与数学史之间的联系。

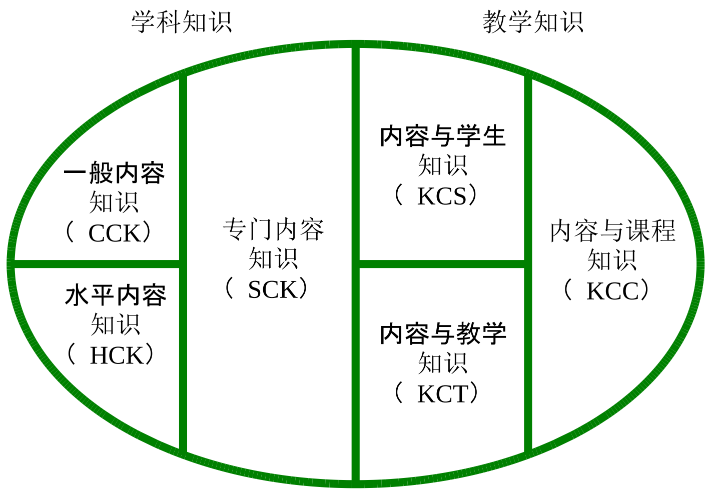


图 4 数学教师 MKT 的结构

4.1 SCK 与数学史

就一个知识点（概念、公式、法则等）而言，一般内容知识与专门内容知识的区别是，前者属于“知其然”，而后者则属于“知其所以然”。韩愈云：“师者，传道、授业、解惑也”。“解惑”，就是回答学生的各种“为什么”，是数学教师每天要做的事，这就需要教师拥有专门内容知识。但在数学教学中，我们常常会遇到不同的两类“为什么”，一类是“逻辑上的为什么”，另一类则是“历史上的为什么”。

已知一个三角形的底边和高，对于一个非数学教师而言，他只需知道利用公式来计算该三角形的面积，公式本身属于“一般内容知识”。但对于数学教师而言，他还需要知道公式是如何得出的，其背后所蕴含的数学思想方法，即回答“逻辑上的为什么”。以三角形面积为例。我国汉代数学典籍《九章算术》已记载了三角形面积公式，三国时代数学家刘徽采用“以盈补虚”的方法对公式进行证明，如图5所示。

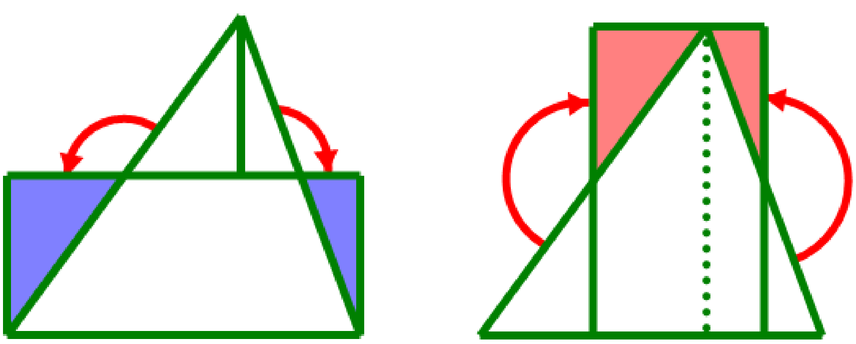


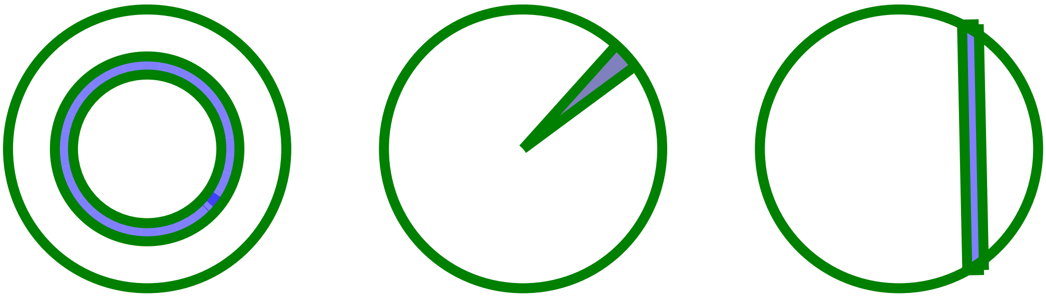
图5 三角形面积公式的证明

这种方法背后的依据就是今天数学家所总结的“出入相补原理”：将一个平面图形进行分割，分割后的各部分之和等于原来的图形面积；移动平面图形后面积不变。所以，以长方形面积为出发点，利用上述原理就可以解决平行四边形、梯形以及所有其他多边形面积了。

但一些与数学名词相关的问题往往属于“历史上的为什么”。以“小数”为例。对于非数学教师而言，我们只要知道小数是什么即可，无需追究这个名称的来历。但数学教师则会面对这样的问题：小数是很小的数吗？如果不是，为何有“小数”之名？这不是通过什么数学原理就能作出解释的。“小数”当然不一定是“很小的数”，如 10000.01，但为什么会取此名？其实，刘徽在注解《九章算术》中的“开方术”时，提出“微数”的概念：“**微数**无名者以为分子，其一退以十为分母，再退以百为母，退之弥下，其分弥细。”这就是世界上最早的十进小数概念，“微数”在我们今天看来就是纯小数，与整数部分相比，自然很“微小”。晚晴数学家李善兰在翻译英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806～1871）的《代数学》时，将“decimal fractions”译为“小数”。李善兰的译名本于刘徽的“微数”，但其内涵有了变化，不仅仅包含纯小数，也包含了带小数。数学上有很多这样的“旧瓶装新酒”之例。如果我们没有历史知识，就会陷入望文生义的尴尬。

4.2 HCK 与数学史

小学数学课程中，知识点的前后联系可以通过数学史来建立。以圆面积公式为例。历史上，古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 公元前 287～212）最早给出圆面积的准确公式：“圆面积等于一条直角边长为圆半径、另一条直角边长为圆周长的直角三角形面积。”[1]这里，阿基米德将圆“转化”为更简单的三角形，从而得出了圆面积公式。



方案 1　　方案 2　　方案 3

图 6 圆面积的不同微元

虽然阿基米德最终借助穷竭法来证明关于圆面积的命题，但他一开始是如何将圆和三角

形建立联系的呢？从微积分的角度看，圆面积的不同解决方法取决于“微元”的不同选择，如图 6 所示。

阿基米德可能使用了第一种方案。如图7，想象圆由一些长短不同的细绳围成，将圆“剪开”，并将各绳“拉直”，一端对齐，得到一个直角三角形，其长直角边等于圆的周长，短直角边等于圆的半径。

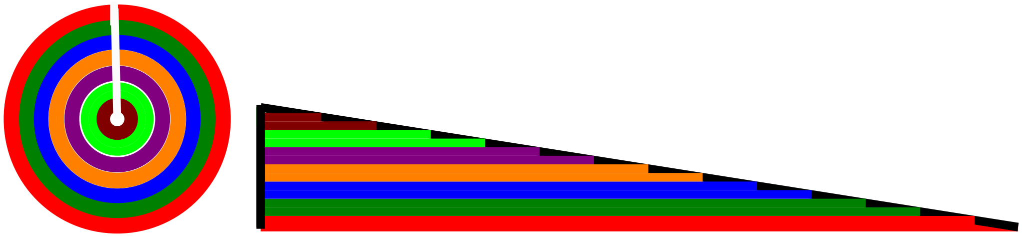


图7 将圆“变形”为三角形

开普勒则选择第二种方案建立起圆与三角形之间的联系：将圆分割成无数个顶点在圆心、高为半径的小“三角形”（实为小扇形，但将圆分得越细，小扇形越接近三角形）。将这些小“三角形”都转变成等底等高的三角形，最后，它们构成了一个直角三角形，如图8所示。

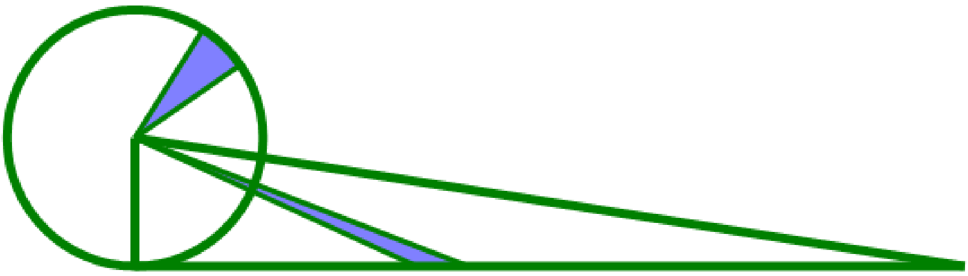


图 8 开普勒求圆面积的方法

4.3 KCS 与数学史

数学认知的历史相似性使得内容与学生知识与数学史具有密切的关系。以代数中的字母符号为例。历史上，初等代数学的发展经历了三个阶段：修辞代数、缩略代数和符号代数。在毕达哥拉斯所生活的时代，人们无法回答下列问题：怎样表示任意一个奇数？任意一个偶数？任意一个正方形数（即平方数）？在斐波那契所生活的时代，人们要解一个一元一次问题，只能用算术方法并全部用文字来表达；要解一个一元二次问题，从头到尾只能用文字来叙述。虽然公元3世纪数学家丢番图用字母来表示未知数，但他并不会用字母来表示一类数或任意数。直到16世纪，法国数学家韦达（F. Viete, 1540～1603）才用字母来表示一类数或

任意数。因此，用字母来表示数在历史上经历了漫长的过程。调查研究表明，即使到了初中，修辞、缩略和符号三种方法在学生中依然并存。因此，我们完全可以预测，学生在学习字母表示数时，一定存在困难，从算术思维到代数思维的过渡必是一个缓慢的过程，不可能一蹴而就。

另一个例子是负数的大小比较。历史上，笛卡儿、牛顿、欧拉、波尔查诺、阿贝尔等数学家都有不同于今天的理解，他们的观点都可以归结为“数轴上离原点越远的数越大”或“绝对值越大，数越大”[10]。据此有 $-4>-1$。数学家们的错误理解也提示我们：学生在负数大小比较上很可能会有困惑、障碍或出现错误。

4 结语

数学史有助于营造“知识之谐”，展现“方法之美”，成就“情感之悦”，实为数学教育所不可或缺。“数学史与小学数学之间的关系”博大精深，足以成为小学数学教育中的一个前景无限广阔的研究领域。然而，无论是文献研究还是实证研究，目前我们所见到的有价值的成果还是很有限的。虽然蔡宏圣老师和他所带的团队筚路蓝缕，取得引人注目的成绩，但一个“小学 HPM 学术共同体”还有待于建立。我们热切期待有更多的小学数学教育研究者和一线教师关注 HPM、走进 HPM、研究 HPM 和实践 HPM。

参考文献

[1] Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics* (Vol.2). Boston: Ginn & Company, 1925. 226-227

[2] Reys, R. E. & Grouws, D. A. (1975). Division involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children. *School Science and Mathematics*, 75(7): 593-605

[3] Wheeler, M. M. & Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(3): 147-155

[4] Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers’ understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21:132-144

[5] Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29: 1-20.

[6] Crespo, S., Nicol, C. (2006). Challenging preservice teachers' mathematical understanding: the case of division by zero. *School Science and Mathematics*, 106(2): 84-97

[7] Keiser, J. M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: comparing sixth-grade students' discourse to the history of angle concept. *Mathematical Thinking and Learning,* **6** (3): 285-306

[8] Heath, T. L.(1968). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 1). Cambridge: The University Press. 332

[9] Ball, D. L. et. al. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, 59: 389-407

[10] Thomaidis, Y., Tzanakis, C. The notion of "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 66: 165-183

20 世纪中叶以前的余弦定理历史 *

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

近年来，将数学史融入数学教学的实践与案例开发已成为 HPM 领域的中心课题之一。然而，数学史资源的匮乏是导致中学 HPM 实践难以开展的主要因素之一。随机选择一个中学数学课题，考虑从 HPM 的视角进行教学设计，结果，教师往往会发现，这个知识点的历史其实是个盲点。在与中学教师研讨余弦定理的 HPM 教学设计时，我们首先需要解决的就是历史这个盲点。

另一方面，在高中数学教材即将开始修订之际，“数学史融入数学教材”成了人们关注的研究课题。就余弦定理而言，需要先解决“融入什么”，才能解决“如何融入”的问题。

基于上述原因，我们对 17-20 世纪 142 种三角学文献进行考察（限于篇幅，其中绝大部分文献未在参考文献中列出），试图回答：20 世纪中叶以前，余弦定理是如何演变的？有哪些推导方法？余弦定理的历史对今日教学有何启示？

为便于表述，我们将余弦定理分成几何和三角两种形式，前者不含余弦函数，后者即为我们熟知的三个含余弦函数的等式。

1 从欧几里得到毕蒂克斯

余弦定理是作为勾股定理的推广而诞生的。公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》卷二分别给出钝角三角形和锐角三角形三边之间的关系 [1]：

命题 II.12：在钝角三角形中，钝角对边上的正方形面积大于两锐角对边上的正方形面积之和，其差为一矩形的两倍，该矩形由一锐角的对边和从该锐角（顶点）向对边延长线作垂线，垂足到钝角（顶点）之间的一段所构成。

命题 II.13：在锐角三角形中，锐角对边上的正方形面积小于该锐角两边上的正方形面积之和，其差为一矩形的两倍，该矩形由另一锐角的对边和从该锐角（顶点）向对边作垂线，

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一。

垂足到原锐角（顶点）之间的一段所构成。

命题 II.12 相当于说，在图 1 所示钝角三角形ΔABC中，

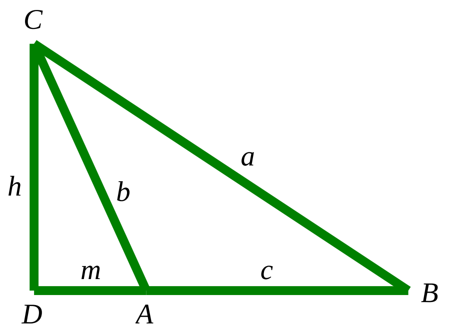


图 1

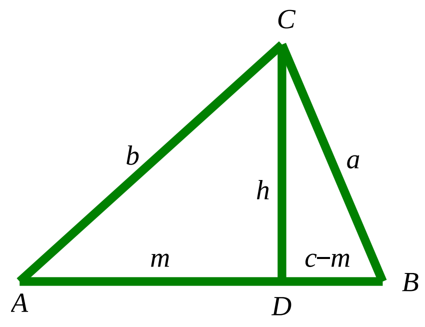


图 2

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \text{（}a\text{ 为钝角对边）} \quad (1)$$

命题 II.13 相当于说，在图 2 所示锐角三角形ΔABC中，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad \text{（}a\text{ 为锐角对边）} \quad (2)$$

其中等式（2）对于钝角三角形中的锐角对边也是成立的。

欧几里得利用勾股定理对上述命题进行证明。如图 1 和 2，由勾股定理分别得，

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = h^2 + m^2 + c^2 + 2cm = b^2 + c^2 + 2cm\text{，}$$

$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 = h^2 + m^2 + c^2 - 2cm = b^2 + c^2 - 2cm\text{。}$$

在第一种情形，$m = -b\cos A$，在第二种情形，$m = b\cos A$，代入相应等式，即得我们熟悉的三角形式的余弦定理：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (3)$$

公元 2 世纪，古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy）在其《天文大成》中利用欧几里得的几何命题解决了“已知三角形三边求角”的问题，但他并未明确提出余弦定理。另一方面，利用托勒密定理，我们的确能轻易证明余弦定理，如图 3 所示。

1593 年，法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）首次将欧几里得的几何命题写成三角形式[2]。在图 2 中，根据（2）有$2cm = b^2 + c^2 - a^2$，故有

$$1 : \sin(90° - A) = b : m = 2bc : 2cm = 2bc : (b^2 + c^2 - a^2) \quad (4)$$

而在图 1 中，根据（1）有$2cm = a^2 - b^2 - c^2$，故有

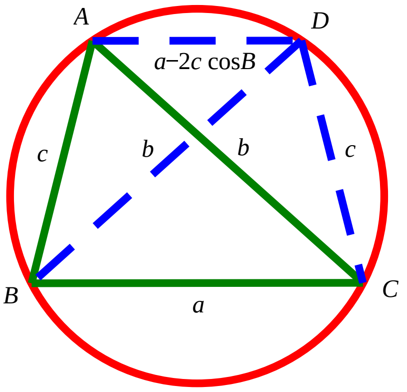


图 3

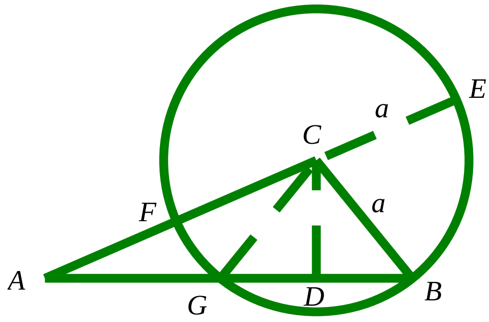


图 4

$$1:\sin\left(A-90^\circ\right)=b:m=2bc:2cm=2bc:\left(a^2-b^2-c^2\right) \quad (5)$$

由（4）和（5）均可得到等式（3）。

稍后，德国数学家毕蒂克斯（B. Pitiscus, 1561-1613）在其《三角学》（1595）[3]中用几何方法来解不等边三角形的“边边边”问题。如图 4，在ΔABC 中，$AB>AC>BC$，以 C 为圆心、以短腰 CB 为半径作圆，交 AC 及其延长线于 F、E，交 AB 与 G。由几何知识易知：

$$AF\times AE=AG\times AB=AB\times\left(AD-DB\right)=AB\times\left(AB-2DB\right) \quad (6)$$

故得

$$DB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c} \quad (7)$$

从而也可求得线段 AD。尽管毕蒂克斯并没有明确给出余弦定理，但他对该定理是了然于心的，因为他知道 $DB=a\sin\left(90^\circ-B\right)$，$AD=b\sin\left(90^\circ-A\right)$，并据此来$\angle A$ 和$\angle B$。需要指出，毕蒂克斯以及后来的 17 世纪数学家在解直角三角形时，喜欢用正弦而不用余弦。若将 $DB=a\cos B$ 代入（6）或（7），即得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad (8)$$

顺便指出，毕蒂克斯是历史上第一个将“三角学”作为书名的数学家。

2 几何主导下的 17-18 世纪

在我们所考察的 17-18 世纪的 26 种三角学著作中，只有荷兰数学家斯内尔（W. Snell, 1591-1626）的《三角形论》[4]、意大利数学家卡瓦列里（B. Cavalieri, 1598-1647）的《平面与球面三角学》[5]、英国数学家爱默生（W. Emerson, 1701-1782）的《三角学基础》[6]和意

大利数学家卡诺里（M. Cagnoli, 1743-1816）的《平面与球面三角形》[7]给出了三角形式的余弦定理。其中，斯内尔、卡瓦列里、爱默生和韦达一样，直接根据欧几里得的几何命题导出比例式（2），而卡诺里则利用欧几里得的证法得到我们今天的形式。斯内尔还给出余弦定理的另一个比例式：

$$1:\left[1-\sin\left(90^\circ-A\right)\right]=2bc:\left[a^2-\left(c-b\right)^2\right] \tag{9}$$

爱默生在的《三角学基础》仅给出三角形式的余弦定理而未涉及几何形式，其余 25 种三角学著作均含有几何形式的余弦定理。将毕蒂克斯的（6）改写成：

$$AB:\left(AC+BC\right)=\left(AC-BC\right):\left(AD-DB\right) \tag{10}$$

就成了如下几何命题：“三角形底边与两腰之和的比等于两腰之差与底边被高线所分的两条线段之比。”我们称之为毕蒂克斯定理。斯内尔将其表述为：“三角形两腰之和与两腰之差的乘积除以底边，等于底边被高线所分的线段之差。”[4]

在 17-18 世纪，毕蒂克斯定理仅仅局限于底边上高线的垂足位于底边上的情形，即对于钝角三角形而言，必须选择钝角的对边作为底边；而对于锐角三角形而言，底边可以是任意一个角的对边。

毕蒂克斯在证明（6）或（10）时，仅以短腰为半径作辅助圆。卡瓦列里、西班牙数学家萨拉戈萨（J. Zaragoza）[8]、法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640-1717）[9]等均沿用同样的证法。但斯内尔在其《三角形论》中却以长腰为半径作辅助圆，同样证明了毕蒂克斯定理[4]：如图 5，在ΔABC 中，$AB>BC>AC$，以 C 为圆心、以 CB 为半径作圆，交 AC 的延长线于 E、F，交 BA 的延长线于 G。由几何知识易知：$FA\times AE=GA\times AB$，或即$(BC-AC)\times$

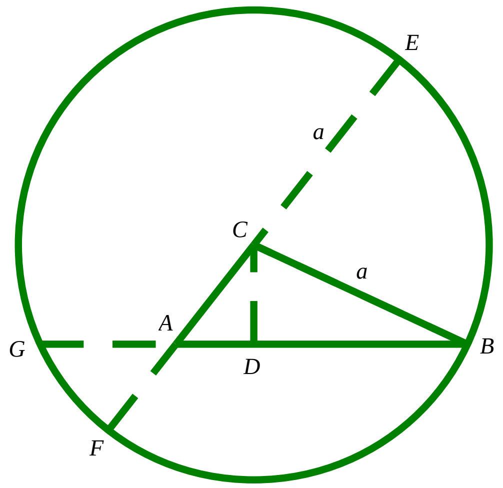


图 5

$(BC+AC)=AB\times(DB-AD)$ ，故有

$$AB:\left(BC+AC\right)=\left(BC-AC\right):\left(DB-AD\right) \tag{11}$$

之后，荷兰数学家弗拉克（A. Vlacq, 1600-1667）在《平面与球面三角学》[10]中、英国数学家海恩斯（S. Heynes）在《三角学》[11]中也采用了斯内尔的方法。英国数学家马塞雷（F. Maseres, 1731-1824）在其《平面三角学基础》则同时采用了两种方法[12]。

与毕蒂克斯的《三角学》一样，25 种三角学著作都详细讨论了各种三角形求解问题。表 1 给出了卡瓦列里的分类讨论情况。其中，“已知三边求各角”问题的方法是：先运用毕蒂克斯定理求得底边被高线所分成的两条线段，然后根据直角三角形边角关系求出原三角形的底角。

表 1 卡瓦列里所讨论的解三角形问题

序	已知项	所求项	定理
1	两边和其中一边所对角	另一边的对角	正弦定理
2	两角和其中一角所对边	另一角的对边	正弦定理
3	两边及其夹角	另两个角	正切定理
4	两边及其夹角	第三边	余弦定理（三角形式）
5	三边	三个角	毕蒂克斯定理

在 17-18 世纪的多数三角学著作中，由于不含三角形式的余弦定理，因而“已知两边及其夹角求第三边”问题也是通过正切定理来解决的。如，已知 a，b 和$\angle C$，则由

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}} \tag{12}$$

因$\dfrac{A+B}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}$已知，故可求得$\dfrac{A-B}{2}$，从而求得$\angle A$ 和$\angle B$。再利用正弦定理，即可求得第三边 c。

图 6 给出 25 种三角学著作中的毕蒂克斯定理证明方法的分布情况。从中可见，毕蒂克斯《三角学》对 17-18 世纪三角学著作产生了很深的影响，绝大多数作者沿用了辅助圆方法。

3 承前启后的 19 世纪

在我们所考察的 19 世纪 68 种三角学著作中，有 51 种仅给出三角形式的余弦定理而不

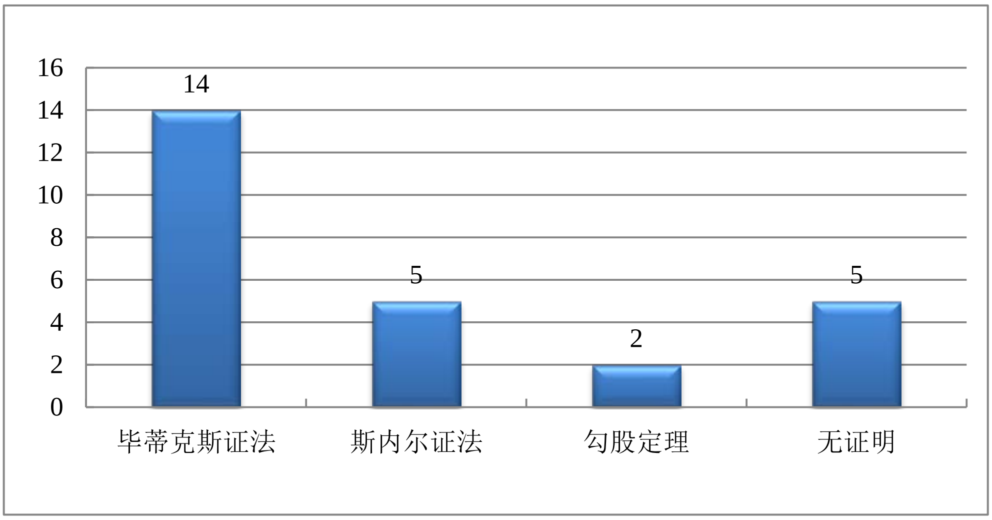


图 6

涉及几何形式；8 种仅采用毕蒂克斯定理，另 9 种同时使用了两种形式。

在给出三角形式的 60 种著作中，定理的推导方法共有以下四种。

方法 1：直接利用《几何原本》命题 II.12 和 II.13；

方法 2：利用欧几里得证法，即两次运用勾股定理。美国数学家哈斯勒（F. R. Hassler）在其《解析平面与球面三角学基础》（1826）中对欧氏方法进行简化 [13]，即根据图 1 和 2 得

$$a^2=\left(b\sin A\right)^2+\left(c-b\cos A\right)^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

方法 3：利用射影公式。又分成三种方法。

（1）由 $a=b\cos C+c\cos B$， $b=c\cos A+a\cos C$， $c=a\cos B+b\cos A$ 可得

$$a^2=ab\cos C+ac\cos B,\quad b^2=bc\cos A+ab\cos C,\quad c^2=ac\cos B+bc\cos A,$$

从而得到 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$， $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$， $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$。

英国数学家杨（J. R. Young, 1799-1885）的《平面与球面三角学基础》是最早采用该方法的三角学教材之一 [14]。

（2）由 $a=b\cos C+c\cos B$ 得 $c\cos B=a-b\cos C$，两边平方得：

$$c^2\cos^2 B=a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C \qquad (13)$$

又由 $c\sin B=b\sin C$ 得

$$c^2\sin^2 B=b^2\sin^2 C \qquad (14)$$

（13）+（14）得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \qquad (15)$$

同理可得另外两个等式（1）和（4）。

美国数学家肖弗内（W. Chauvenet, 1820-1870）的《平面与球面三角学》是最早采用该法的三角学教材之一[15]。

（3）将射影公式写成关于 $\cos B$ 和 $\cos C$ 的方程组

$$\begin{cases} c\cdot\cos B+b\cdot\cos C-a=0 \\ 0\cdot\cos B+a\cdot\cos C-\left(b-c\cos A\right)=0 \\ a\cdot\cos B+0\cdot\cos C-\left(c-b\cos A\right)=0 \end{cases}$$

则显然有

$$\begin{vmatrix} c & b & -a \\ 0 & a & c\cos A-b \\ a & 0 & b\cos A-c \end{vmatrix}=0$$

展开即得（3）。英国数学家尼克松（R. C. J. Nixon）在《初等平面三角学》中采用此法[16]。

方法 4：利用和角公式与正弦定理。在ΔABC 中，我们有

$$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

两边平方得

$$\sin^2 C=\sin^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos A\cos B$$

$$=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin^2 A\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos A\cos B,$$

$$=\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos\left(A+B\right)$$

$$=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C$$

由正弦定理即得等式（15）。英国数学家德摩根（A. de Morgan, 1806-1871）在其《三角学基础》中采用此法[17]。

法国数学家塞雷（J. A. Serret, 1819-1885）在其《三角学》中详细讨论了正弦定理、余弦定理和射影公式之间的关系[18]：

（1）和角公式+正弦定理⇒射影公式：

$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B\Rightarrow c=a\cos B+b\cos A$，同理可得其他等式；

（2）射影公式⇒余弦定理，如上文介绍；

（3）余弦定理⇒射影公式：将等式（3）、（8）和（15）两两相加即得；

（4）余弦定理⇒正弦定理：由余弦定理得

$$\sin^2 A = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 B = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2c^2},$$

$$\sin^2 C = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2b^2},$$

故得

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$$

从而得到正弦定理。

图 7 给出了 60 种三角学著作中四种方法的分布情况。

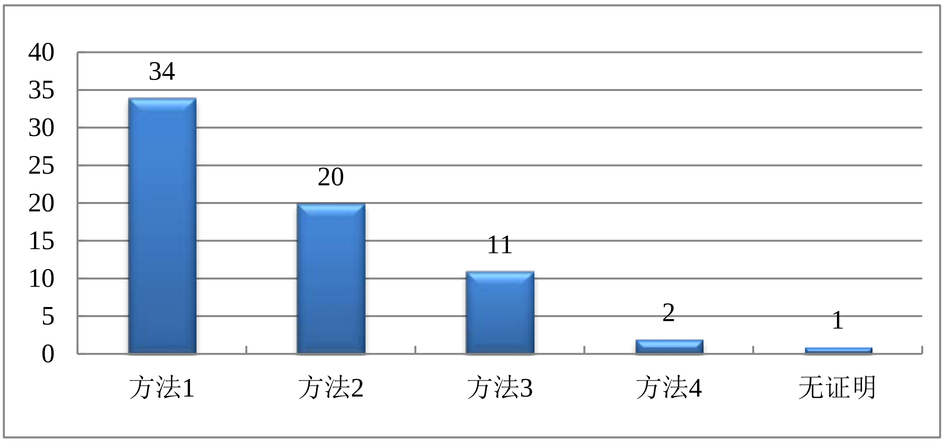


图 7

可见，虽然毕蒂克斯定理在 19 世纪逐渐退出历史舞台，三角形式的余弦定理逐渐一统天下，但利用欧几里得命题或欧几里得的几何方法来推导后者，依然是 19 世纪绝大多数三角学教材的选择。

在采用毕蒂克斯定理解“边边边”问题的 17 种著作中，5 种采用了毕蒂克斯证法，5 种采用了斯内尔证法，6 种采用了勾股定理，1 种未给出证明。

值得一提的是，19 世纪数学家补充了 18 世纪三角学著作中未曾涉及的情形，从而推广了毕蒂克斯定理。如英国数学家格雷戈里（O. Gregory, 1774-1841）在其《平面和球面三角形基础》（1816）中利用图 8[19]、美国数学家佩尔斯（B. Peirce, 1809-1880）在其《平面三角学基础》（1835）中利用图 9[20]各得到：

$$AB:(AC+BC)=(AC-BC):(AD+DB)$$（$\angle B$为钝角）。

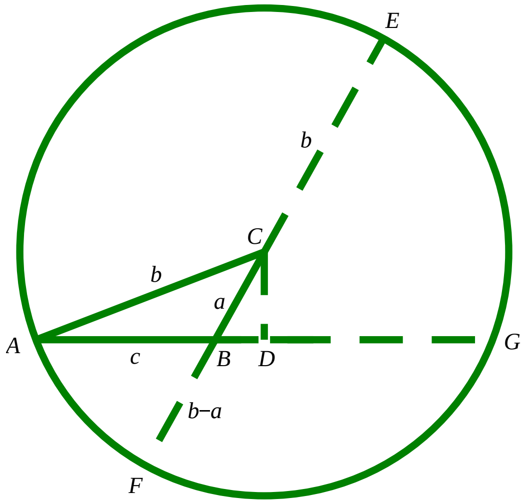


图 8

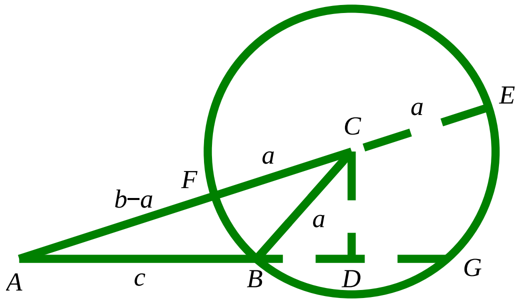


图 9

4 平凡的 20 世纪上半叶

在我们所考察的 1900-1955 年间出版的 48 种教材中，已完全看不到毕蒂克斯定理的影子。

诸教材中推导余弦定理的方法共有四种：其中方法 1-3 分别与 19 世纪的方法 1-3 相同，为直接利用欧几里得命题 II.12 和 II.13、欧氏勾股定理证法和射影公式法。方法 4 为解析几何方法，利用两点之间的距离公式，该方法也为今日教材所采用。

图 10 给出各种方法的分布情况。

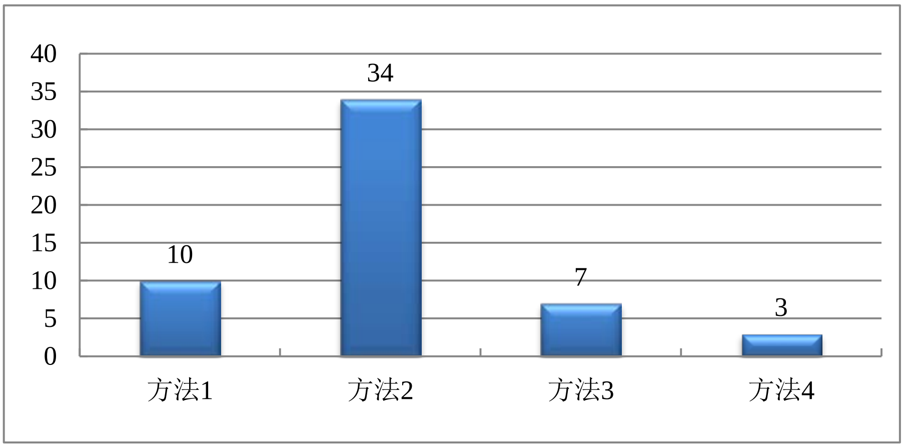


图 10

与 19 世纪相比，直接利用欧几里得命题的教材明显减少，欧几里得的几何证法一枝独

秀，备受青睐。尽管美国数学家库尔提斯（D. R. Curtiss）在 1942 年出版的《三角学及其应用》中开始利用直角坐标系来推导余弦定理 [21]，但所用方法其实仍是欧几里得的方法。就余弦定理而言，20 世纪前 50 年是因循守旧、平淡无奇的时期。直到 1951 年，美国数学家荷尔莫斯（C. T. Holmes）在其《三角学》中才开始真正采用解析几何方法 [22]。至于向量方法的出现，更是晚近的事了。

5 结语

余弦定理是作为勾股定理的推广而诞生的，在诞生之初，它只是以几何定理的身份出现；直到 16 世纪，才出现三角形式。17-18 世纪，尽管三角形式偶有出现，但人们主要运用毕蒂克斯定理来解“已知三边求各角”问题，用正切定理来解“已知两边及其夹角求第三边”问题。19 世纪，毕蒂克斯定理逐渐被抛弃，三角形式的余弦定理逐渐占上风。到了 20 世纪，毕蒂克斯定理销声匿迹，三角形式的余弦定理一统天下。

16 世纪以降，人们普遍采用欧几里得的几何方法或直接从欧几里得的几何命题 II.12 和 II.13 出发来推导三角形式的余弦定理；19 世纪之后，也有部分作者采用射影公式或从正弦定理与和角公式出发来推导该定理；直到 20 世纪 50 年代才出现解析几何的方法。毕蒂克斯或斯内尔的辅助圆方法只是用来证明毕蒂克斯定理，而在推导三角形式的余弦定理时，并没有人使用这种方法，但今天所谓的“无字证明”不过是用毕蒂克斯或斯内尔的辅助圆方法来推导三角形式的余弦定理而已，这应验了《圣经》传道书中的一句话——太阳底下无新事！

历史告诉我们，余弦定理深深根植于几何的土壤之中，为几何而生，由几何而证，因几何而美。一切抛开几何背景和几何方法的余弦定理教学，都不可能符合学生的认知规律，都不可能完美无缺。历史还告诉我们，余弦定理不仅以几何定理为前身，而且和其他三角学定理之间也有密切的联系，在课堂教学中揭示这样的联系，无疑可以加深学生对定理的理解。

参考文献

[1] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 1)[M]. Cambridge: The University Press, 1968. 403-409

[2] Smith, D. E. *A Source Book in Mathematics* (Vol.2) [M]. New York: Dover Publications, 1959. 434-435

[3] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol.2) [M]. Boston: Ginn & Company, 1925. 631

[4] Snell, W. *Doctrinae Triangulorum Canonicae*. Lugduni Batavorum: Ioannis Maire, 1627.

70-74

[5] Cavalieri, B. *Trigonometria Plana et Sphaerica*. Bononiae: Haercdis Victorij Benatij, 1643. 17-21

[6] Zaragoza, J. *Trigonometria Hispana: Resolutio Triangulorum plani & Sphaerici*. Valentiae: Hyerommum de Villagrafia, 1673. 59-72

[7] Ozanam, J. *La Geometrie Pratique*. Paris: Chez L'Auteur & Estienne Michallet, 1684. 110-129.

[8] Emerson, W. T*he Elements of Trigonometry*. London: W. Innys, 1749. 96-97

[9] Cagnoli, M. *Traité de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique*. Paris: Didot, 1786. 115-116

[10] Vlacq, A. *La Trigonométrie Rectiligne et Sphérique*. Paris: Claude Jombert, 1720. 56-57

[11] Heynes, S. *A Treatise of Trigonometry, Plane and Spherical, Theoretical & Practical*. London: Town Hill, 1716. 20-28

[12] Maseres, F. *Elements of Plane Trigonometry*. London: T. Parker, 1760. 49-50

[13] Hassler, F. R. *Elements of Analytic Trigonometry*, Plane & Spherical. New York: James Bloomfield, 1826. 85.

[14] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: John Souter, 1833. 18-19

[15] Chauvenet, W. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry.* Philadelphia: Hogan, Perkins & Co., 1851. 58-59.

[16] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*. Oxford: The Clarendon Press, 1892. 202-206.

[17] de Morgan, A. *Elements of Trigonometry and Trigonometrical Analysis* [M]. London: Taylor & Walton, 1837. 63-64

[18] Serret, J. A. *Traité de Trigonométrie*. Paris: Bachelier, 1850. 103-106

[19] Gregory, O. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*. London: Baldwin, Cradock & Joy, 1816. 19-20

[20] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry.* Cambridge & Boston: James Munroe & Co., 1835. 42-44

[21] Curtiss, D. R., Moulton, E. J. *Essentials of Trigonometry with Applications*. Boston: D. C. Heath & Co., 1942. 100-101

[22] Holmes, C.T. *Trigonometry*. New York: Mcgraw-Hill Book Company, 1951. 87-88

HPM 视角下的余弦定理复习课的教学 *

顾彦琼[1] 汪晓勤[2]

（1.上海市上海南汇中学,上海, 201399; 2.华东师范大学数学系,上海, 200241）

数学复习课是数学教学中不可或缺的重要环节，它具有重复性、概括性、系统性和综合性等特点，数学复习课在重复和概括的基础上要进行梳理，使数学知识和数学思想方法系统化。[1]在复习课中如何兼顾知识的巩固提高又不失教学的新鲜活力，乃是一线教师孜孜以求的目标；尤其在课业负担繁重且有考试压力的中学数学教学中，追求在协调教学进度的同时又能让复习课有文化内涵，使学生在数学中探奇寻乐已然成为中学教师遥不可及的天涯海角。

“余弦定理”是沪教版高中数学教材高一第二学期第五章第三节“解斜三角形”的第一个课时，主要教学任务是余弦定理的内容及其证明，以及运用余弦定理解决“边角边”和“边边边”问题，这是余弦定理作为新授课的教学目标。

在高二的一节拓展课上，当笔者提出“用什么方法可以证明余弦定理”这一问题时，学生先是沉默，接着有学生提出在单位圆上利用两点之间距离公式。当笔者追问时，学生发现自己错误联想到了和角余弦公式的证明。当笔者肯定距离公式的方法时，就有学生想到教材上的解析几何方法；但绝大多数学生都想不起证明的细节。

受台湾陈敏晧老师的余弦定理教学设计 [2]的启发，笔者尝试将数学史运用于余弦定理的复习课中，以体现知识的综合性，不同于新授课，复习课中因已经学过余弦定理及其他相关内容，对于数学史的运用会更广泛更系统。

1 历史与学情分析

1.1 历史分析

余弦定理作为勾股定理的推广，最早出现于欧几里得的《几何原本》中。该书卷二分别

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一。

给出钝角三角形和锐角三角形三边之间的关系[3]：

命题 12：在钝角三角形中，钝角对边上的正方形面积大于两锐角对边上的正方形面积之和，其差为一矩形的两倍，该矩形由一锐角的对边和从该锐角（顶点）向对边延长线作垂线，垂足到钝角（顶点）之间的一段所构成。

命题 13：在锐角三角形中，锐角对边上的正方形面积小于该锐角两边上的正方形面积之和，其差为一矩形的两倍，该矩形由另一锐角的对边和从该锐角（顶点）向对边作垂线，垂足到原锐角（顶点）之间的一段所构成。

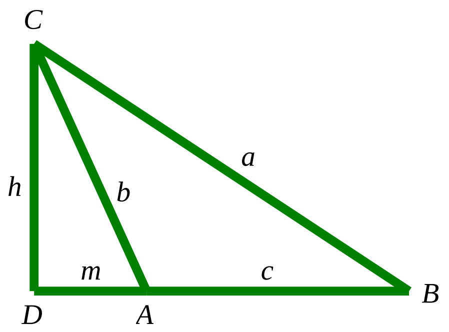


图 1

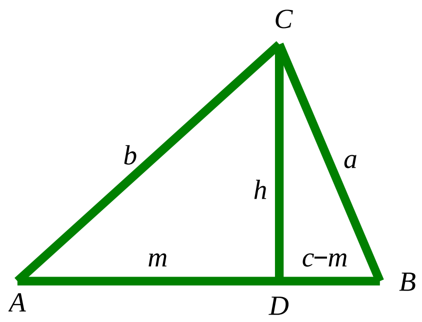


图 2

命题 12 相当于说，在钝角三角形ΔABC 中，$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$，如图 1 所示；命题 13 相当于说，在锐角三角形ΔABC 中，$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$，如图 2 所示。欧几里得利用勾股定理对上述命题进行证明。

公元 2 世纪，托勒密（C. Ptolemy）在其《天文大成》中利用上述命题解决了“已知三角形三边求角”的问题，但他并未明确提出余弦定理。不过，利用托勒密定理，我们的确能轻易证明余弦定理。

16 世纪，德国数学家毕蒂克斯（B. Pitiscus, 1561-1613）在其《三角学》中用几何方法求出了图 2 中的 m（其中$\angle C$ 为三角形ΔABC 的最大角，可以是钝角）[4]：$m = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$，毕蒂克斯的方法成了今日“无字证明”的蓝本。之后，法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）明确给出余弦定理的比例形式[5]：

$$2ab : \left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 1 : \sin\left(90° - C\right)。$$

20 世纪中叶以前，西方大多数三角学教材沿用欧几里得的方法来证明余弦定理，也有一些教材采用毕蒂克斯的几何方法，或以一组射影公式 $a = b\cos C + c\cos B$，

$b = c\cos A + a\cos C$，$c = a\cos B + b\cos A$为出发点。英国数学家德摩根（A. de Morgan, 1806-1871）在其《三角形基础》中则别出心裁地利用和角公式和正弦定理来推导余弦定理[6]。到了 20 世纪 50 年代，一些教材开始采用解析几何的方法；而向量方法的出现已经是相当晚近的事了。

数学史告诉我们，余弦定理是作为勾股定理的推广而诞生的，18-19 世纪的许多三角学著作中，它只是以几何定理的身份出现；从欧几里得时代直到 20 世纪上叶的两千余年间，人们普遍采用几何方法对其进行推导；正是包括今天所谓“无字证明”在内的那些几何方法，才使该定理展现出了迷人的魅力。

以勾股定理为教学起点，用不同的几何方法来推导余弦定理，弥补新授课中解析几何方法的不足，是历史带来的教学启示。

1.2 学生的认知现状

课前，笔者通过问卷，对所教两个班级共 84 名学生进行调查，问题是：（1）请写出余弦定理；（2）请说明余弦定理用来解决哪些解斜三角形的问题；（3）证明余弦定理；对于前两个问题，84 名学生中 82 名都能正确答出，而第三个问题证明余弦定理却少有同学能正确给出完整的证明，其中 41 名学生直接回答不知道、不会、不清楚，11 名学生记得用平面向量的方法证明，但是只有 4 名学生能证明得到，13 名学生记得用两点之间距离公式证明，其中有 5 名学生联想到了单位圆，通过访谈了解到，这是由于受到了和角余弦公式证明的影响。其中 3 名学生能完整正确证明，其余学生的证明都不着边际。

调查表明：（1）学生对余弦定理的解析几何证明方法印象不深；（2）学生有轻过程重结论的倾向，只求“鱼”而不得“渔”。

以下是笔者对数学成绩排名一直位于年级前十（年级学生总数 586 人）的一名男生的访谈片段：

师：你还记得余弦定理吗？

生：让我想一下，是用来解斜三角形的那个东西吗？

师：是的，你还记得是什么吗？

生：（用纸笔写下来了）

师：你能证明一下吗？

生：哦，我不记得了老师，一点也不记得了。

师：真的吗？请你再想一想。

生：好像是要建立平面直角坐标系的。

师：那你可以把证明写下来给我看一下吗？

生：哦，那太难了。老师你为什么要问我这样的问题！

师：因为我早上做了问卷，本来以为他们会用比较淳朴的方法做，没想到都没做出来。

生：哦，老师，你要理解他们，在这种应试教育下，能背出公式来，已经很不容易了。

师：可是我觉得最近才刚学过一个新工具（平面向量）啊，印象应该会深刻一点。

他尝试坐下来写了一会，数十分钟后，未能证明。

对学生的访谈表明，数学成绩优秀生对已学过的余弦定理的证明同样无从入手。

2 教学设计与实施

根据复习课特点，在 HPM 视角下，余弦定理复习课的教学设计由 6 个环节组成：（1）提出问题，激发兴趣；（2）以史开道，回归起点；（3）对话先哲，推陈出新；（4）汲取养料，拓宽思维；（5）温故知新，查缺补漏；（6）集思广益，取其精华。

2.1 提出问题，激发兴趣

我们在高一第二学期学习了余弦定理，但课前的问卷调查却表明，同学们普遍知道余弦定理是什么，用来解决什么样的问题，却不知道怎样去证明余弦定理。

高二第一学期即将结束，与高一相比，我们已经储备了更丰富的数学知识，证明余弦定理的方法也更多样，依托余弦定理证明为线索，融入数学史，可以展开更为精彩的复习教学，促使学生在学习过程中养成追根溯源、自觉形成知识网络的习惯。在本节课，就让我们一起来回答以下两个问题：

问题 1：我们可以用什么方法来证明余弦定理？

问题 2：比较各种方法，我们更喜欢哪一种？

2.2 以史开道，回归起点

上课伊始，笔者开门见山要求学生回忆勾股定理的证明，除了细碎的一些声音说模糊地记得，很多学生表示，初中时老师也只是一笔带过直接给出结论而并不作具体证明。于是，

笔者先展示勾股定理的欧几里得证明。如图 3，分别在直角三角形 ABC 的三边上作正方形 $ACDE$、$BCHI$ 和 $AGFB$，作 $CL \perp GF$，垂足为 L。连接 BE 和 CG。则正方形 $ACDE$ 的面积等于ΔAEB 的两倍，长方形 AL 的面积等于ΔACG 的两倍，但$\Delta AEB \cong \Delta ACG$，故知正方形 $ACDE$ 和长方形 AL 的面积相等。同理可得正方形 $BCHI$ 与长方形 BL 的面积相等。述证法被阿拉伯人称为“新娘的座椅”。

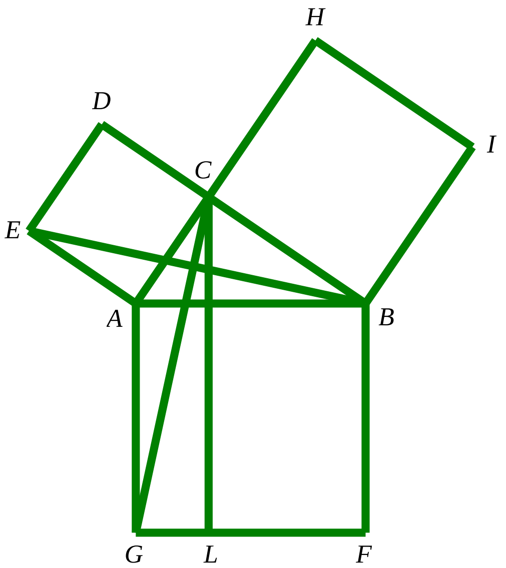


图 3

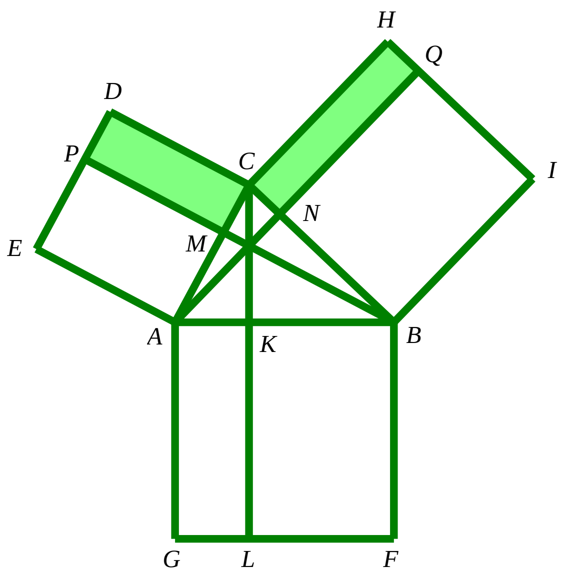


图 4

如果ΔABC 是斜三角形，那么其三边又有怎样的大小关系呢？欧几里得在《几何原本》卷 2 中将勾股定理进行了推广，给出钝角和锐角三角形的余弦定理（参阅 1.1 节）。

如图 1 和 2，由勾股定理分别得，

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = h^2 + m^2 + c^2 + 2cm = b^2 + c^2 + 2cm$$

$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 = h^2 + m^2 + c^2 - 2cm = b^2 + c^2 - 2cm$$

在第一种情形，$m = -b\cos A$，在第二种情形，$m = b\cos A$，代入，即得余弦定理：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{1}$$

我们可以将欧几里得的证明稍加改进。在图 1 和 2 中，均有 $h = b\sin A$，$BD = c - b\cos A$，故由勾股定理可得

$$(b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 = a^2$$

整理得（1）。同理可得其余等式。

2.3 对话先哲，推陈出新

欧几里得只是利用勾股定理来证明余弦定理。但是，我们能否用他证明勾股定理的面积方法来推导余弦定理呢？学生们跃跃欲试，师生共同完成以下证明。

如图 4 所示。ΔABC 为锐角三角形，仿照欧几里得的做法，在三边外侧分别作正方形 $AGFB$、$BCHI$ 和 $ACDE$。分别从三个顶点向对边作垂线，垂足分别为 K、N 和 M，交正方形另一边与 L、Q 和 P。于是，

$$\square AMPE=\square AGLK,\quad \square BNQI=\square KLFB$$

因此：

$$c^2=\square AMPE+\square BNQI=a^2+b^2-\left(\square MCDP+\square NCHQ\right)$$

但

$$\square MCDP=b\left(a\cos C\right)=ab\cos C,$$

$$\square NCHQ=a\left(b\cos C\right)=ab\cos C,$$

故得（1）。让学生课外完成钝角三角形的情形。

2.4 汲取养料，拓宽思维

通过数学史引导启发学生，从勾股定理到余弦定理的证明自然深入、逐步推广，如果初中教学时对勾股定理进行过严格证明，也起到了初高中教学衔接的作用。笔者再次要求学生回顾正弦定理扩充定理新授课时的证明方法，学生立刻回想到可以引入辅助圆来进行余弦定理的证明，笔者便要求学生进行小组讨论，学生在证明过程中遇到困惑。

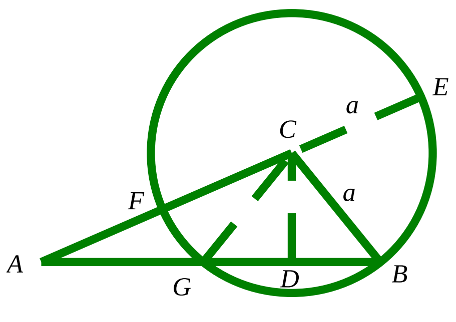


图 5

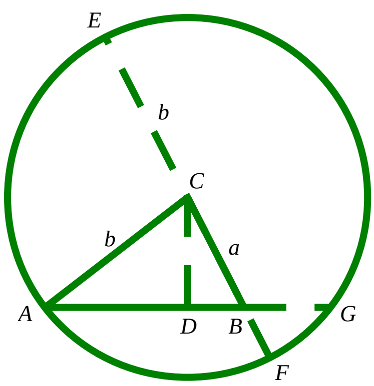


图 6

笔者顺势解惑，引出历史上也有类似的几何证明方法，是 16 世纪德国数学家毕蒂克斯给出来的。正是这位数学家，于 1595 年首次将“三角学”（trigonometry）作为书名。如图 5，在三角形 ABC 中，$AC > BC$，以 C 为圆心、以 CB 为半径作圆，交 AC 及其延长线于 F、E，交 AB 与 G。由几何知识，$AF \times AE = AG \times AB$，此即 $(b-a)(b+a) = c(c-2a\cos B)$，整理得

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad （2）$$

若以 CA 为半径作圆（图 6），则由 $BE \times BF = AB \times BG$，同样可得（2）。17 世纪荷兰数学家斯内尔（W. Snell, 1591～1626）最早采用了这后一方法。请学生课后用类似方法证明其他等式。

2.5 温故知新，查缺补漏

学生们自己想到的证明余弦定理的方法，是解析几何法（利用两点之间的距离公式）与平面向量法（数量积），为增强学生的参与度，笔者让学生到黑板上加以证明，结果错误层出不穷。对于第一种方法，一些学生不恰当地选择了原点，增加了计算的难度，这印证了学生对“适当建立坐标系”依然存在认知缺陷；对于第二种方法，一名学生将向量与实数混为一谈，得到

$$\left|\vec{c}\right|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

这印证了有关实证研究所发现的学生在学习向量知识时出现的典型错误。

最后，笔者简单介绍 19 世纪英国数学家德摩根的方法。让学生回顾ΔABC 中的和角公式 $\sin(A+B) = \sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$，两边平方得

$$\begin{aligned}\sin^2 C &= \sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + 2\sin A\sin B\cos A\cos B \\ &= \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin^2 A\sin^2 B + 2\sin A\sin B\cos A\cos B, \\ &= \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A\sin B\cos(A+B) \\ &= \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C\end{aligned}$$

由正弦定理即得

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad （3）$$

2.6 集思广益，取其精华

整节复习课临近尾声时，学生们对于证明方法的探索仍意犹未尽，笔者布置了回家作业：（1）是否仍有其他方法来证明余弦定理？参考资料：http://betterexplained.com/articles/law-of-cosines/；（2）请列表比较证明余弦方法的几种方法的特点。

3 结语

本节复习课中，我们主要采用了六种方法来推导余弦定理，其中三种方法为欧氏几何方法，另外三种分属平面三角、向量几何和解析几何方法，充分体现了知识的综合性，如图 7 所示。

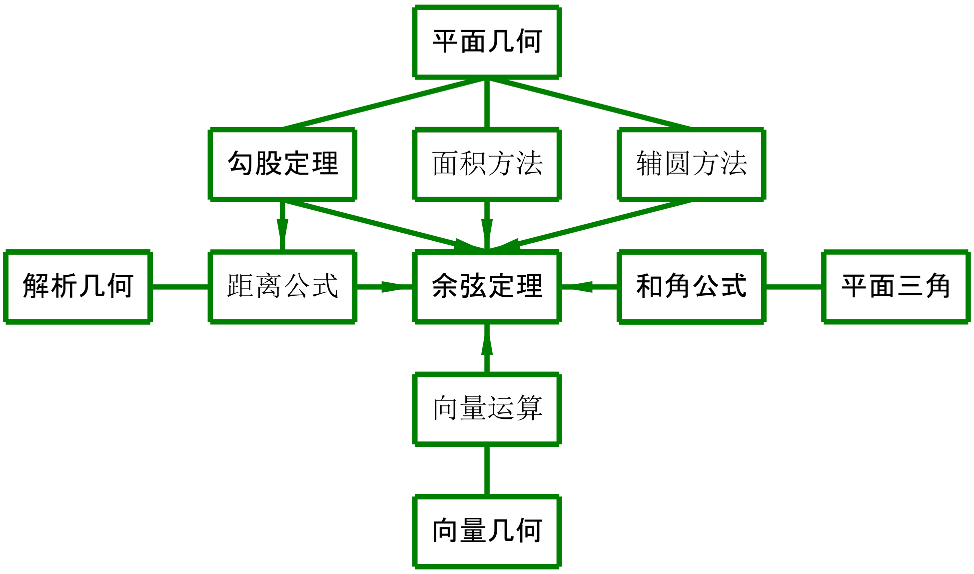


图 7

新授课中教学起点和欧氏几何方法的缺失使得余弦定理成了无源之水、无本之木，从而导致学生对余弦定理只知其然而不知所以然。复习课之后的问卷调查表明：超过 80%的学生对欧几里得的面积方法以及毕蒂克斯的辅助圆方法印象深刻，他们认为这些方法"太新奇了"、"没想到还会有这样的证明方法"。

从欧几里得开始，余弦定理经历了两千多的年历史，不同时空众多数学家贡献了自己的聪明才智。将数学史融入余弦定理复习课的教学，使学生经历数学的惊奇，感受数学的魅力，既为数学复习课染上了人文的色彩，也凸显了数学背后的探索和发现的精神，展现了精彩纷呈的思想方法。

如何将数学史融入数学教学，更好地开发 HPM 课例，本节课对笔者也有颇多启示：（1）数学史是数学教学设计的丰富资源，而对数学史的获取仅凭一己之力确实会力不从心且举步维艰，正如开采玉石、雕琢玉器、出售玉饰又怎是一人可以包揽下来的浩大工程，而跨越这层障碍的最佳方式无疑是去推行一种模式 [7]：由大学教师完成相关主题的历史研究，获得历史材料，然后由大学与中学教师合作，根据需要对材料进行加工，使之适合于教学。（2）在数学教学中使用数学史大可不必拘泥于单一的课型，新授课、复习课、试卷讲评课中都可以体现其教育价值，同样，通过本节课的教学显然可见复习课也会因数学史元素的融入更为新鲜有趣。（3）笔者在课后与学生的交谈中，获知学生除了对数学史表示有浓厚的兴趣，他们也希望能在课堂上体现数学与现实的关系，这无疑也为 HPM 教学设计提出更符合学生学习动机的模式：从数学概念定理的在历史上的来源发展与内容，到于现实中的应用领域及前景，如此“一站式教学”，将来源与发展、内容与运用、用途与前景汇于课堂，更好地让学生感受到数学有用有趣的真实所在。

参考文献

[1] 奚定华. 数学教学设计[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001. 196-197.

[2] 陈敏晧. 余弦定理证明[J]. HPM 通讯, 2010, 13(11): 6-9.

[3] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 1)[M]. Cambridge: The University Press, 1968. 403-409

[4] Smith, D. E. *A Source Book in Mathematics* (Vol.2) [M]. New York: Dover Publications, 1959. 434-435

[5] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol.2) [M]. Boston: Ginn & Company, 1925. 631

[6] de Morgan, A. *Elements of Trigonometry and Trigonometrical Analysis* [M]. London: Taylor & Walton, 1837. 63-64

[7] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012, (2): 1-4

HPM 视角下“可化为一元一次方程的分式方程”的教学 *

洪燕君 [1]　顾海萍 [2]

（1.华东师范大学数学系,上海, 200241; 2.上海师范大学附属经纬实验学校, 上海, 200444）

众所周知，数学史对于数学教学具有重要意义。数学史可以为教师提供新课引入的话题以及帮助学生“发现”新概念或新思想的方法 [1]，同时，也丰富了教师的知识储备，包括数学问题及其解法 [2]等等。

“可化为一元一次方程的分式方程”是沪教版七年级上册的数学内容，之前学生已学习过一元一次方程、分式以及分式的运算等内容。这节课的教学目标是理解分式方程的概念，掌握可以化成一元一次方程的分式方程的解法；知道解分式方程时可能产生增根的原因，并掌握验根方法。其中，掌握分式方程的解法及转化为整式方程的思想和方法是教学重点，理解产生增根的原因及如何验根是教学的难点。

在本节课，我们希望通过融入数学史来帮助学生学会数学地思维，从而突破教学的重、难点，有效达成三维目标。

1 历史材料的选择与加工

1.1 《计算之书》中的分式方程问题

从已有数学文献来看，斐波那契（Leonardo Fibonacci,约 1170～1250）是最早解分式方程的欧洲数学家。他在《计算之书》第 15 章中提出了大量分式方程的问题 [3]。其中，绝大多数问题是“分 10 问题”，即：将 10 分成两部分，已知两部分满足某条件，求两部分的大小。如,“将 10 分为两部分，第一部分除第二部分，第二部分除以第一部分，两商之差乘以第一部分，得 5，求第一部分是多少”。此外，还有一些关于“分钱”的问题，大意是：若干人分一笔钱，每人得若干；加上若干人，分另一笔钱，每人所得较第一次少了或多了若干，求第一次分钱人数。如，“若干人平分 10 第纳尔，每人得若干。若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同，求第一次分钱人数”。

对《计算之书》中的分式方程及其解法的考察表明，斐波纳契通过“分 10 问题”和“分钱问题”，比较系统地编制出了一整套分式方程问题，并且给出了丰富多彩的解法，展示了

*本文发表在《教育研究与评论》，2015,1: 42-46.

其出色的代数技巧和灵活的数学思维，对我们的现代教学很有借鉴和启发。

1.2 增根的历史

《计算之书》中的所有分式方程在化整后都没有出现增根现象。之后虽然许多西方代数书中也出现了分式方程，但作者们对增根视而不见。

“零能否做除数”是分式方程是否产生增根的一个重要原因。古代印度数学家曾给出“一个非零数除以零”的不同错误结果。1880年左右，分析的严密化运动促使数学家重新讨论这个问题。德国数学家李普希斯（R. Lipschitz, 1831-1903）、奥地利数学家斯托尔茨（O. Stolz, 1842-1905）等相继指出零不能作除数。这次大讨论在一定程度上促进了分式方程的发展。

1882 年，美国康乃尔大学的奥里佛（J. E. Oliver）、威特（L. A. Wait）和琼斯（ G. W. Jones）在他们编写的《代数》中讨论了分式方程的解法 [4]。他们以及同时代其他许多数学家都相信：在分式方程两边乘以分母的最小公倍式，所导出的多项式方程与原方程是同解的 [5]。然而，这个结论是不正确的。

1899 年，美国宾西法尼亚大学的费舍（G. E. Fisher）和施瓦特（I. J. Schwatt）在 1899 年出版的《代数基础》[6]中，给出了分式方程的一般解法：先通过移项使得分式方程的一边化为零，然后进行通分、化简，再令分式的分子等于零来求解，用这种方法解分式方程不会产生增根。

分式方程的增根问题从发现到解决经历了1 个世纪的漫长历程，分式方程的历史为我们正确认识数学活动的本质，树立数学学习的自信心提供了很好的借鉴。

1.3 历史材料的选取

我们在趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性五项原则 [7]的指导下来设计本节课。在引入部分，讲述中世纪数学家斐波那契的故事，附加式运用数学史，通过加入人的元素，激发学生的兴趣，体现了趣味性原则。接着，对《计算之书》中的原题进行改编来引入分式方程概念，顺应式运用数学史。关注学生的认知起点，通过一元一次方程问题的过渡，激发学生的学习动机，以满足科学性、可学性、有效性原则。学生对遇到的增根现象感到疑惑时，我们附加式介绍增根的发生、发展过程，让学生了解数学活动的本质——数学是人类的文化活动，数学家也会犯错误，历史上，数学问题的解决方法往往是不断演进、不断完善的。最后，在课堂总结环节，我们设计了一个“穿越时空”的古今对话，凸显新颖性。

2 教学设计与实施

2.1 引入

教师以图文并茂的形式开门见山地介绍了意大利数学家斐波那契的生平，讲到他早年随父亲经商时，遇到了如下问题：两次雇佣工人搬运货物，详细账目见表 1-2，请学生自己填表；若工人的人均所得相等，要求学生列出方程。

表 1 斐波那契遇到的问题（1）

（1）	工人人数（人）	人均所得（第纳尔/人）	总金额（第纳尔）
第一天雇人	2		y
第二天雇人	8		y+30

表 2 斐波那契遇到的问题（2）

（2）	工人人数（人）	人均所得（第纳尔/人）	总金额（第纳尔）
第一天雇人	x		10
第二天雇人	x+6		40

这道题是根据《计算之书》中的问题改编的，添加了更适应现在学生理解的背景，并通过表格的形式，简化理解难度。考察学生的建模能力、符号意识和推理能力等数学素养的同时，为探索分式方程概念及解法做了准备。

教师引导学生审题、找等量关系，学生们很快列出了方程$\frac{y}{2}=\frac{y+30}{8}$和$\frac{10}{x}=\frac{40}{x+6}$。

2.2 分式方程的定义

让学生观察方程$\frac{y}{2}=\frac{y+30}{8}$和$\frac{10}{x}=\frac{40}{x+6}$的区别，由学生归纳出分式方程的如下特点：（1）含有分式；（2）分母中含有未知数。然后教师先就此给出分式方程的定义，再趁热打铁给出了一组分式方程的判断题，让学生们进一步热身练习，加强理解。

在这个让学生先观察再口头叙述的教学过程里，不仅锻炼了他们数学表达和交流合作的

能力，还有助于教师快速了解学生们的数学理解程度。

2.3 分式方程的解法

接下来，教师着重讲解分式方程的解法、剖析增根产生的原因。以下是教学片断。

师：刚才我们列出了$\frac{y}{2}=\frac{y+30}{8}$和$\frac{10}{x}=\frac{40}{x+6}$这两个方程，你们看看怎么解？现在动手做，做完的同学请举手。

生 1（很快举手）：第一个是整式方程，（方程两边）乘以 8 约去分母。第二个方程也可以这样做吧。

（过了一会儿，有几个学生举手。）

生 2： 他说得对，我做出来了，$x=2$，第二个方程两边乘以$x(x+6)$可以化为整式方程就解出来了。

师：是的，他做对了，其他同学呢，也是这样做的吗，有什么问题？

生 3（迟疑）：是不是所有分式方程都可以这么做啊？

师：这个问题问得很好！现在，我们来做做这道题：$\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$，看能不能解决这个疑惑？

生 3：这个方法可以的，$x=1$。

众生：不对，分母不（能）为零，$x=1$不是解。

生 3：那，方程就无解了。

师：是的，这种情况下的根是在分式方程变形时产生的，并不适合方程，我们称它是分式方程的“增根”。请大家把书打开，理解定义，我们一起把定义来叙述一遍。

（师生一起叙述，由教师在黑板上板书“增根”的定义。）

师：下面我们再来练习一道题$\frac{x}{x-3}-2=\frac{3}{x-3}$，大家可以互相讨论。

有的学生拿到题就去分母，还有个别学生先移项、通分、再化简。

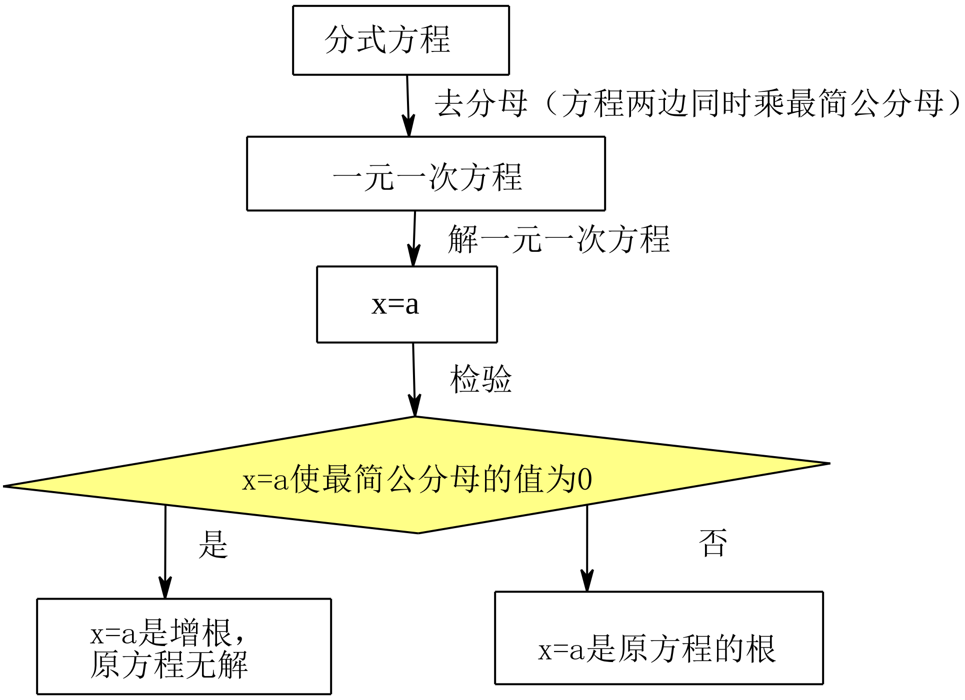
然后，教师结合课件给学生讲解了分式方程增根的历史，并指出这两种使用方法的注意事项，再次强调现阶段的学习中，方程两边同乘以分母的最小公倍式，一定要进行验根。最后师生一起归纳了可化为一元一次方程的分式方程的解题步骤。

教学过程中，学生学会了“转化”思想，把待解决的问题化归到已经解决或比较容易解

决的问题中去，最终使问题得到了解决；而且，教师通过引导学生进行比较、探究，并进行充分的讨论，鼓励学生自己找到分式方程可能无解的原因，增强了学生的学习自信心；另外，数学历史的补充，增强了学生的学习兴趣，并成为贯穿教学的一条线索，顺理成章的突出了教学重点，突破了教学难点。

2.4 总结与拓展

教师先是鼓励学生对本节课的学习内容进行自我总结，然后师生一起补充，最终把知识点串成了如下流程图。



临近下课，看着学生们释然的目光，老师又抛出了这样一个问题：“如果你可以穿越时空，见到斐波那契，你想对他说什么？”，我们看到，这个环节学生发言非常热烈，大部分同学都表示很佩服斐波那契为分式方程所做的贡献。以下是部分学生的回答。

生 1：谢谢你，让数学的历史前进了一大步，你真厉害！

生 2（自信）：你好聪明啊，以后我一定要超过你。

生 3：现在我们已经完善了你的分式方程。

生 4：我们知道有增根，希望你能了解。

生 5：我来教你验根吧。

生 6：《计算之书》是如何完成的？

拓展的这个教学环节通过呼应开头的斐波那契这条历史线索，更能激发学生的感恩意识，在锻炼学生语言表达能力的同时，让他们心中能够感受、理解和欣赏数学思想的美，逐步具备科学态度和精神。

3 学生反馈

本节课是由工作两年的青年老师（本文第二作者）执教，上课较有激情，通过白板、课件的配合顺利完成了教学内容。课后针对 33 名学生的随堂问卷调查及访谈中，对于问题“你喜欢数学的历史吗”，95.3%同学都表示“喜欢”；对于知识点的理解“解分式方程一定需要验根吗”，84.6%的同学选择了“需要”，剩下的 15.4%同学选择“看具体情况”。

针对主观题“这节课你印象最深的是什么，为什么”，以下是学生们的代表性回答：

生 1：对增根的概念印象最深，因为这是新知识。

生 2：关于增根与根的知识印象深，因为这与整式方程有很大不同。

生 3：对分式方程的定义印象深。因为我知道了怎样解分式方程。

生 4：对斐波那契印象深，因为他研究了分式方程。

生 5；数学历史让我印象深刻，因为数学历史更让我加深了对方程的理解。

生 6：对古代数学题印象深。很有意思，记忆深刻。

学生对这节课的印象归纳起来有以下三方面：（1）对新的知识点印象最深；（2）对数学人物印象最深；（3）对数学历史印象最深。

课后我们还随意抽取了 6 名学生，给出了一道拓展题：已知方程 $\frac{x}{x-1}+1=\frac{k}{x-1}$ 有增根，求 k 的值。很短的时间内，有 3 名学生经过较严谨的推理后做出了正确答案。

4 结 语

从学生们简单而质朴的回答以及相关学习反应中，我们看到，学生的良好表现不是仅仅停留在知识（与技能）的掌握这样一个层面，数学史的融入还使绝大多数学生在感受数学悠久的历史、古人的智慧以及数学知识传承的同时，对古代数学问题及数学家产生了浓厚的兴趣，确实将“冰冷的美丽”转化成了“火热的思考”，有效地促进了“知识与技能”、“过程与方法”和“情感、态度与价值观”教学目标的达成。

参考文献

[1] Tzanakis, C. & Arcavi, A. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*[M], Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2000. 201-240.

[2] Jones, P. S. The history of mathematics as a teaching tool[J]. *Mathematics Teacher*, 1957, **50**(1): 59-64.

[3] Siegler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*[M]. New York : Springer-Verlag, 2002

[4] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. *A Treatise on Algebra*. Ithaca: Dudley F. Finch, 1887.

[5] 张小明，汪晓勤. 关于增根问题的历史[J]. 中学教研,2005,8:48-50.

[6] Fisher, G. E., Schwatt, I. J. *Elements of Algebra*. Philadelphia: Fisher & Schwatt, 1899

[7]汪晓勤. HPM 视角下的角平分线教学. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2014, (5): 29-32;

第二届 HPM 教学研讨会纪要

沈中宇 李玲

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

2015 年 1 月 16 日，第二届 HPM 教学研讨会在华东师范大学数学楼 102 报告厅成功举行。本次会议围绕 3 个主要议题展开：

- HPM 课例开发；
- HPM 微课实践与探索；
- HPM 视角下的教材研究。

会议由汪晓勤教授带领的华东师大 HPM 研究小组承办。来自华东师大与沪太路教育发展区合作项目成员、上海市王华数学特级教师工作室成员、浙江省诸暨市张小明 HPM 研究工作坊成员、参与 HPM 课例开发的教师以及多位感兴趣的中学教师和研究者等共计 80 余人参加了会议。华东师大数学系邹佳晨博士主持会议。

会议议程如下：

时间	主题	报告人
14:00-14:15	数学史融入初中数学教学的实践探索	上海市市西初级中学　王进敬
14:15-14:30	七年级 HPM 教学设计与实施	上海师大附属经纬实验学校　顾海萍
14:30-14:45	数学复习课中的数学史元素——以余弦定理为例	上海南汇中学　顾彦琼
14:45-15:00	数学史融入椭圆方程推导教学	上海市民星中学　伍杨超
15:00-15:15	初中 HPM 微课实践初探	浙江省温州市第二十五中学　侯小敏
15:15-15:30	微课：数学文化传播的新方式	华东师大数学系　彭　刚
15:30-15:45	美国中学数学教学中的数学文化活动	华东师大数学系　林佳乐
15:45-16:00	休息、合影	
16:00-16:15	美国早期代数教材中的数列知识	华东师大数学系　李　玲
16:15-16:30	美国百年几何教材中的棱柱定义	华东师大数学系　洪燕君

16:30-16:45	HPM 课堂教学八年实践	浙江省桐乡市凤鸣高级中学 沈金兴
16:45-17:00	对 HPM 实践研究的几点思考	浙江省诸暨中学　张小明
17:00-17:15	问题之解何处来——基于数学史的角度	华中师大数学与统计学院 徐章韬
17:15-17:30	2014 年 HPM 研究回眸	华东师大数学系　汪晓勤
17:30-18:00	交流讨论	

主题一：　HPM 课例开发

上海市市西初级中学王进敬老师在报告中，首先以十字相乘法的教学案例讲述了数学史如何让她和学生们知其然，也知其所以然的意义；接下来，她以毕达哥拉斯的形数、π 等为例叙说如何使用创新的历史文化引领创新教学模式、激发学生求知欲；最后王老师指出用数学史的人文故事可以滋养学生心灵。王进敬老师精彩的报告赢得了大家的热烈掌声，她为本次会议开了个好头。

上海师大附属经纬实验学校顾海萍老师给大家分享了"字母表示数"、"同底数幂的乘法"、"平方差公式"和"可化为一元一次方程的分式方程"的教学案例。

上海市南汇中学顾彦琼老师以"余弦定理复习课"为例，述说使用数学史中的毕氏定理的欧氏证法、解析几何、平面向量、平面几何等不同方法的过程。她还提出 HPM 视角下的教学设计可以分为课型、分支、多元的观点；并谈到自己的 HPM 教学心得：改变，从教学实践开始，从课堂语言开始。

上海市民星中学伍杨超老师介绍了自己执教的"椭圆方程的发展史"拓展课。她十分注重学生对重要历史事件和对数学家的感性认识，她认为数学史在教学中具有"直接提供素材的作用，间接的教学作用，社会文化的传播价值"的作用。

主题二: HPM 微课实践与探索

温州第二十五中学侯小敏老师首先展示了自己制作的"尺规作图"微课视频，然后以欧拉智改羊圈、比例线段—黄金分割、圆内接多边形、数学史人物励志故事讲演为例介绍了 HPM 微课在课前、课中、课后以及学生活动教学中的应用，最后谈到数学史融入教学对教师和学生的改变，并对自己的进一步发展提出了思考。

华东师大数学系彭刚博士首先对"微课是数学文化传播的新方式"这一观点作了肯定，然后分析为什么能传播数学文化的原因以及怎么进行数学文化传播，最后他给大家展示了自制的"毕达哥拉斯"微视频，并对微课的发展提出了自己的期望。

华东师大数学系硕士生林佳乐以 2007 到 2012 年间美国《数学教师杂志》140 多篇数学文化的文章，从数学与自然科学、数学与文学、数学与艺术、数学与社会科学、数学与建筑、数学与生活、数学与游戏、数学与体育等八个方面总结了美国数学文化活动的特点，并和大家分享在数学文化本身的研究、数学文化活动的创设、活动的呈现形式以及合作研究模式的建立方面得到的启示。

主题三：HPM 视角下的教材研究

华东师大数学系硕士生李玲在“美国早期代数教材中的数列知识”报告中，首先追溯美国数学教材数列的演进历史以及数列的重要性，然后介绍教材中的数列知识，并指出实际应用问题越来越被重视这一趋势，最后就数列的历史把美国早期教材与我国现行教材作了对比，得出我国人教版教材更偏重现实生活问题，时代烙印更为明显的结论。

华东师大数学系洪燕君博士在“美国百年几何教材中的棱柱定义”报告中，首先对几何原本中的欧氏定义做了阐述，指出其不足之处，并对国内五种现行教材中的定义做了分析；接下来介绍美国早期 70 种几何教材中的棱柱定义：欧氏定义、改进的欧氏定义、基于棱锥的定义、基于棱的定义、基于棱柱面的定义、基于棱柱空间的定义；最后结合对各类定义统计分析，建议教材编写者要有国际视野、批判精神以及要有历史感，提出教育工作者在教学中可以借鉴棱柱定义从不完善到完善的演变过程，运用重构历史的方式来设计棱柱概念的教学以及可以将棱柱的历史加工为教学素材等启示。

此外，浙江省桐乡市凤鸣高级中学沈金兴老师与大家分享了自己的“HPM 课堂教学八年实践”。以具体案例介绍运用“附加式”（前三年）和“复制式”（近五年）的方式。近三年中，他已经实现从应用已开发出来的学习单（数学期望学习单）到自己开发适合本校学生程度的学习单（函数概念学习单、平均数学习单）的转变。接下来他展示了近六年来自己的校本课程实践以及取得的成绩。最后沈老师还提到自己对开发 HPM 微课程的关注和努力，如录制了《“火热的思考”——还原数学家们的方法》系列（共 5 节）。

浙江省诸暨中学张小明老师在“对 HPM 实践研究的几点思考”报告中，首先总结了 HPM 研究十年的变化：（1）广大研究者的工作更加注重实证和实践；（2）HPM 研究逐步走向深入，HPM 研究方向的硕士论文、博士论文从无到有，内容不断丰富；（3）HPM 研究队伍不断壮大；（4）中国的 HPM 研究已经走出国门。然后总结十年来“如何将数学史融入数学教学”的成功经验：（1）就研究方法而言，行动研究是恰当的；（2）明确了数学史融入数学教学的基本工作流程；（3）对历史融入数学教学的方式进行了合理的分类；（4）HPM 研

究必须立足于课堂实践。接下来他介绍自己在教学实践过程中形成的一些基本认识：（1）历史、教材、学生认知三维度分析是融入数学史的决定性因素；（2）融入数学史首先要考虑学生在认知方面的需求；（3）无论哪一种方法，都要对历史材料进行必要的加工和剪裁；（4）在融入历史的课堂教学中，利用学习工作是一种非常有效的手段。最后，他对 HPM 的后续研究提出了思考和愿景：（1）虽然 HPM 研究有了快速的发展，但是 HPM 的基本理念真的广为人知吗？我们不但应该系统研究数学概念的历史并利用各种平台发表成果，还要关注“教材”这一研究对象，重视教材解读，而且在开发 HPM 案例、发表课例的同时，注重课例点评的环节；（2）“翻转课堂”的兴起为 HPM 研究带来了什么？要深入考虑翻转课堂背景下的 HPM 研究、关于微课的制作、从“微课”到“慕课”、HPM 研究如何助益知识拓展类选修课的开发等问题。同时希望，“在数学教学中考虑历史的维度”成为数学教师的一种习惯。

华中师范大学徐章韬博士在报告“问题之解何处来—从数学史中获取灵感”中提到从汪晓勤老师的文章、数学史教学专栏、数学通报、大学数学教育高考试题中的数学史料以及历史数学名题赏析等方面获得的启发与思考。他认为真正做好竞赛数学，离不开对课程内容的教学解读，并以复数为例，阐述了复数的教育意义、复数的历史、方程的思想、复数的特征、多元表征、复数的应用：化虚为实、以实探虚等，印证上述主张。最后，对“从理解数学到理解教学，再到理解学生”进行了分析与讨论。

会议最后，华东师大数学系汪晓勤教授做了“2014 年 HPM 研究回眸”的总结报告，就 HPM 的八个研究内容，从学术活动、实践交流以及成果（教育取向的数学史研究，HPM 实践与课例开发，美国早期数学教材的研究，HPM 实证研究）等方面对 2014 年 HPM 的研究进展作了介绍。最后汪老师提出“大家携手来将 HPM 推向中华大地！”的期望，将会议的气氛再次推向高潮。

在会议的交流讨论阶段，浙江萧山中学王芳老师谈到此次会议对自己的数学史选修课教学带来了启发；华东师大数学系刘攀老师提出数学的故事说不完、数学的重要性等感慨，并对本会议日期进行了有趣的诠释；上海市浦东教育发展研究院教研员曾文洁老师强调将数学史精神带到日常生活中来，会给老师和学生带来新的视野；上海市长宁区教育学院穆晓东老师将 HPM 的精神总结为：以史为鉴，以人为鉴，并阐述了其中的寓意。

会议结束后，大家意犹未尽。浓浓夜色中，部分与会者主动留下来与华师大HPM小组成员就后续的研究和学习继续探讨，场面亲切而感人。

总之，这是高校研究者与对 HPM 有着浓厚兴趣的中学一线教师的一次完美交流，是理论与实践的一次精彩结合。让我们继续为 HPM 的美好明天共同努力！

图 1　大会发言者的风采

图 2 第二届 HPM 教学研讨会合影留念

HPM，让课堂更美好

——第二届 HPM 研讨会所言所思

顾彦琼

（上海市上海南汇中学,上海, 201399）

2015 年 1 月 16 日，笔者在华东师大数学系参加了第二届上海 HPM 研讨会，参加过第一届的教师表示相比第一届而言，与会者人员大幅增加，HPM 正以它的教育价值和发展前景吸引各界教育人士加入。

在研讨会中，作为小报告的一员，笔者做了简短的 15 分钟的报告，在 HPM 领域中虽是初出茅庐，但去交流和分享关于 HPM 的想法本身也是锻炼和学习；此外，作为参与者聆听其他教师及华东师大 HPM 研发团队人员的报告，也让笔者从多角度收获经验得到启发。现整理如下。

1 报告中，笔者的主要观点

1.1 HPM 视角下的教学设计

1.1.1 课型

在我们所能收集、学习到的关于 HPM 视角下的教学设计的文献中，大多属于新授课。其中的概念课，投导数的概念、椭圆的定义与方程、角平分线等，命题课有全等三角形、相似三角形等。中学数学课的常见课型有：新授课、复习课、试卷讲评课等，笔者的想法是虽然新授课中引入数学史，将数学史予以重构，一气呵成是一个“大工程”，只是也不需要拘泥于一种课型，大可放开手脚将数学史融入复习课以及试卷讲评课中，这样同样可以让数学史使得其他课型内容更丰富多彩，一个教学设计多个教育角度，让学生的收获更多。笔者以余弦定理的复习课为例，用《几何原本》中的证明方法、平面向量、解析几何（教科书上的证明方法)、平面几何等方法进行证明，更系统地巩固各知识模块，同样对于试卷讲评课中的等比数列与等差数列的类比问题，也稍作设计，附加式使用数学史——就纳皮尔发现对数的小故事进行尝试性引入讲解。

1.1.2 分支

在国际数学教育领域中颇为成熟且卓有成效的分支，诸如数学教学心理学（PME），数学哲学，数学社会学以及数学史与数学教育（HPM）等，我们亦应以兼容并包的态度去融合各种分支的思想与态度，比如我们一直强调也认可在数学课堂上适当融入数学史，能引起学生的学习动机，也能让他们对学习数学的热情更持久，使得数学学习更有效，探究兴趣更浓厚，那么是否也可以与数学教学心理学相结合，共同实验，从积极乐观的态度相联合让数学课真正面向学生面向未来。与此类似的，是笔者在 TED 演讲中所学习到的哈佛大学社会学的研究人员通过实验得到，虽然心理会影响身体，比如如果你心情糟糕抑郁会影响你，导致你失眠、脱发、皮肤病、胃痛等等不良的症状发生，而反之，肢体的舒展也会让你的心理有所改变，因此要学会每天 2 分钟舒展你的肢体来带给你更积极乐观的每一天，而我们的数学史的积极作用也需要通过这样的实验来进行更科学的验证。

1.1.3 多元

关于 HPM 视角下的教学设计，从课型的丰富，到分支的融合，我们同样可以在不同的领域找到线索，让数学教学设计更具有历史感，也与现实有关联。比如笔者通过在上海教育出版社高二第二学期的数学教参中，有关于椭圆应用的简短介绍，“声学工程师利用反射原理设计音乐厅，使得声波不因为墙壁、座位、天花板和地板的漫射而有所损毁，在许多博物馆和其他建筑中，有一间房其顶部的墙或天花板设计成半个椭球面”，由此，笔者联想到在一部关于建筑的纪录片中，有提及到在我国传统剧院中，由于当时并没有先进的扩音设备，于是他们在剧院中埋下几口水缸，以起到扩音的作用。基于此，笔者想到可以以“水缸”作为线索贯穿整堂数学课，设计一节更有趣且“包罗万象”的课，例如可以从“司马光砸缸（文学）→水缸与中国园林文化（建筑）→传统剧院中水缸的扩音功能与椭圆的性质（数学）→手机放置于缸中借助混响起到扩音功效（物理）”的多角度的设计，这样的教学设计理念也与我们的“通识教育”意识相符。

1.2 HPM 课例开发的数学教师

HPM 对于大部分中小学数学教师而言是“新天地”，新鲜且陌生。驾车的人都有一个共识，当你买了新车时，总会有一个磨合的过程，你要去适应它驾驭它，而不知不觉地在某一天会恍然发现它对你而言不再陌生，甚至到了“人车合一”的境界。在各种学习的新体系中，其实也有类似的体验，HPM 之于你，是新领域新知识，有冲击有收获也有改变的痛苦，你之于 HPM，是新成员新血液，有吸收有吐纳也有增进的欢愉。总之，都是一个互动的过程，一如作用力与反作用力一般。每个人都有自己的故事，每条路的风景也不尽相同，笔者从邂

逅 HPM，到略有所知，有如下的体会。

1.2.1 改变，从教学实践开始

2014 年 4 月，在华师大二附中进行的汪晓勤教授关于数学史与中学数学的讲座中，第一次接触到 HPM，知道了它是什么，了解了我们为什么需要在教学中融入数学史。汪老师渊博的学识以及其信手拈来的 HPM 生动案例，佐之其独特的汪氏幽默，感染了同去的所有老师们——包括笔者。2014 年 8 月，由于笔者参加华东师大数学学科在职研究生学习的缘故，在中山北路的华师大校区进行了为期一个月的学习，其中四天学习是汪老师所授的数学史与数学教育课程。四天上午下午排满的课程，让笔者再一次与 HPM 亲密接触，汪老师布置了一系列关于 HPM 教学设计的作业。2014 年 12 月，随同着汪老师 HPM 团队在上海市民立中学观摩了钟萍老师的一堂对数概念的 HPM 课，钟老师是笔者的在职研究生同学，同一起点的同学也已迈开步伐，笔者也颇受鼓舞。于是，12 月末，笔者在学校数学拓展课中开了一节融入数学史的余弦定理复习课。短短几个月，HPM 带给笔者的是一番自我超越的体验：想做不敢做（没有勇气）→想做要我做（布置任务）→想做就去做（勇于实践）。

1.2.2 改变，从课堂语言开始

萧文强教授在他的文章中曾叙述总结过他接触、研究 HPM 以来的经验感想，其中提到的一点给我留下深刻印象：学习数学史与数学教育的人心态总是更平和豁达些。

萧先生的说法对是亲历过的人确有真切体会。尤其当笔者回想起来，在汪老师的课堂上，不同于我们其他教师（之前笔者自己上课也是如此），我们经常会在讲解完一个知识点或者分析结束一个例题时，询问学生“你们听懂了吗？你们会了吗？”不经意间把这样的责任包袱抛给了学生，而汪老师却不这样，他会问“我讲明白了吗？我讲清楚了吗？”他把责任包袱丢给自己。只是细节，却让学生有更多温馨，对师生关系之融洽也大有裨益。所以，从课堂语言开始，从这样的细节做起，我们也可以更豁达平和地对待学生。

1.3 HPM 研究与实践的教学共同体

在网络上的心灵鸡汤的小文章中，经常有这样一句话“好的爱情，是你通过一个人看到整个世界；坏的爱情，是你为了一个人舍弃整个世界”，这句话把“爱情”改成“教育”，也是通用。一个中学数学教师，若自身提高知识素养，对数学概念定义来龙去脉了然于心，在数学教学课堂上和课外师生交流上，必然会更添自信，也泰然自若一些。而学生通过这样的一个教师，能看到的是更广阔的世界，而不是只知其一不知其二，不只为刷题考试而放弃其他缤纷色彩，不只学着抽象的数学思想却不见生动具体的数学家影子。华东师大 HPM 团队所提倡的一种模式：大学教师提供数学史素材，中学教师针对数学课堂对素材进行改编，进

行课堂实践再反思总结写课例，循环往复便使得教育取向的数学史研究使用更接地气，更受欢迎。

2 研讨后，笔者的主要体会

2.1 收获

2.1.1 与时俱进，新技术与 HPM 齐飞

时下正热的微课与翻转课堂，在研讨会的小报告中都有所涉及，从第一届中提出并展望把 HPM 与教育技术结合到一起到在第二届就有具体成果呈现，效率之高让人不禁对第二届中的展望也有更多期待。传承与创新一直是各行各业的永恒主题，在 HPM 领域里，也并不例外。

2.1.2 开拓进取，新方式借 HPM 神力

从台湾《HPM 通讯》中的学习单到报告中伍杨超老师就汪晓勤教授的《椭圆方程之旅》进行改编，设计出适合高中学生学习的数学史阅读分析作业，启发我们可以设计这样别具一格的作业，让学生提前做、上网查、互分享，既提高了学生的自主学习能力，也开创了使用数学史的新方式，尤其是对于各报刊杂志上刊登的关于 HPM 视角下的教学设计等文献材料，对广大数学教师而言有了一个更好的呈现方式带入课堂，当然这样的方式与当下各个学校流行的校本课程，导学案等形式类似、目标一致。、

2.1.3 求实创造，新实践赐 HPM 生机

从浙江沈金兴老师 HPM 的八年实践到汪晓勤教授 2014 年 HPM 研究回眸中的硕果累累，从个人到团队，从研究到实践，从高校到中小学，2014 年的实践经验都在更新增多，从初中教师王进敬的案例陈述到浙江张小明老师在十年 HPM 研究开发后对后续 HPM 研究的思考，都无不透露着 HPM 团队的勃勃生机，也再次凝聚出 HPM 之精神：领悟，协作，勤奋，高效。

2.2 交流

在笔者做完小报告后，可能出于中国人之一贯的“中庸”之风，与会者在被要求提出问题时总是沉默寡言，如同我们在课堂上要学生举手时就会出现鸦雀无声的状况，而从小学到大学，举手发言的人数状况总是愈发让人感到悲观，谁之错？教育纲领之错？教师教导之错？父母教养之错？社会氛围之错？无从考证，不得而知。而在茶歇的时候，与坐在笔者旁边的几位老师对话，谈及了我们此次会议的主题，因为笔者的疏忽并没有询问他们的姓名，凭着记忆，整理对话如下：

与会者 1：你讲的余弦定理的毕达哥拉斯定理的欧氏证法不是上新课的时候已经用过？

笔者：哦，我在新授课中并没有引入数学史证明余弦定理，对 HPM 也还没有接触，当时并不知道。

与会者 1：是吗？你那时候还不知道？

笔者：是的，不过我觉得其实作为复习课贯穿，理出一条线来，巩固知识也让学生重新认识也是可以的，因为我在课前做问卷调查的时候，学生早就都忘记了。

与会者 2：你们在讲把数学史融入数学课堂时，说了有四种形式：附加式、复制式、顺应式还有重构式，有老师说重构式很难？

笔者：就我本人的观点来说，是这样的。

与会者 2：我还不是很了解，什么算是重构式？为什么会觉得它难呢？

笔者：汪老师提出的重构式是基于历史，借鉴或重构知识的发生发展历史，间接运用数学史。而我理解的重构式，是以数学课堂为主，为了更好的教育学生，所以把数学史进行适当地改编，进行教学设计，进行重构吧。说它难是因为挺难实现的。

与会者 2：可以举例说明吗？

笔者：比如说我曾经想做 HPM 视角下的平面向量的教学设计，但是发现它是哈密顿通过发明四元数再到平面向量的出现的，而高中阶段对四元数并不作教学要求，而且难度对高中生来说也有些高，这样绕过去就有困难。

3 结语

在 HPM 课例开发的过程中，与同行中学数学教师们聊起时，所谈所言必定也不是一路赞歌，其中夹杂怀疑的声音“学习压力已经够大，会做数学题不就可以了？”“即便偶尔上一节数学史融入课堂的课又如何，还是改变不了要以考试分数为依据的主流校园价值观，那又为什么要挣扎？”有时不免会奉送上一句话“在怀疑的时代，依然要有信仰”。

诚然，HPM 在这样的大环境下似乎并非“主流”，我们也不敢贸然去说“无限风光在险峰”。但是不得不提那些震撼人心的“非主流”，香奈儿品牌（CHANEL）创始人嘉柏丽尔•香奈儿在女士以紧致服装为潮流的时代，设计出宽松简洁的服装，成为现代女性美学的风向标；九十年代乐坛以硬汉形象示人的歌词歌曲大行其道，但李宗盛先生却以他截然不同的李氏风格打造出自己乐坛教父的地位。可见，“主流”并非是全部，也不会一成不变。HPM 亦是教育大方向的契机，有文化内涵有育人价值。我们相信 HPM 发展的每一步，会是“星星之火，可以燎原”，而在 HPM 的这一领域中，必是“广阔天地，大有作为”。