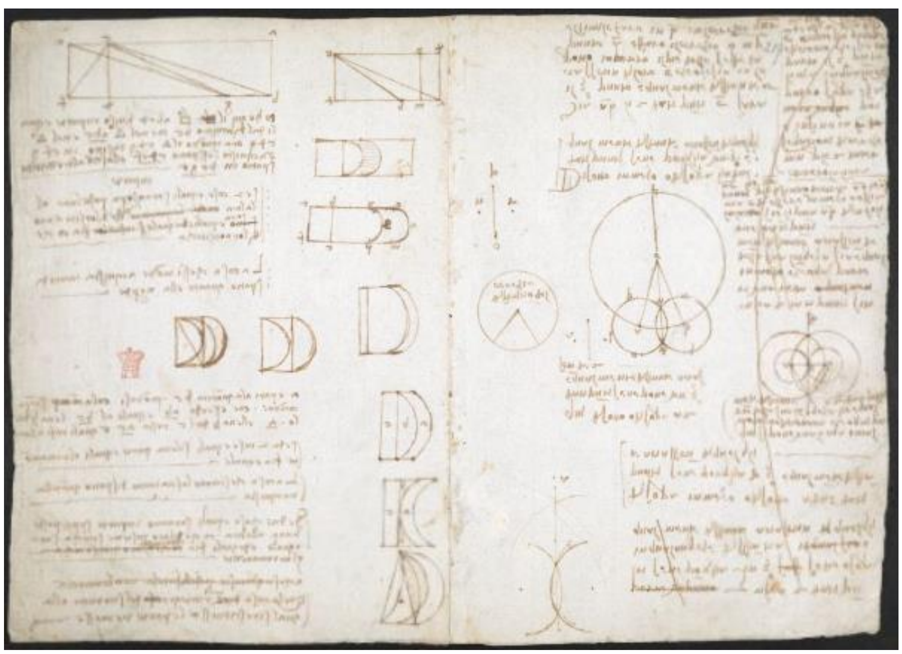
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2020 年第 9 卷第 6 期



达芬奇笔记本书影（大英图书馆藏）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

以 HPM 网络研修促教师专业发展：优势与挑战

孙丹丹

（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

“教师专业成长是学校教学改革的中心，并将最终成为一个国家的教育改革与发展之核心”。20 世纪 50 年代以来，努力提高教师队伍的整体素质一直是我国各级教育行政部门和学校关心的问题，特别是 2010 年旨在提高中小学教师，特别是农村教师队伍整体素质的“国培计划”全面实施，开启了全力促进教师专业发展的新篇章。教师专业发展的研究兴起于 20 世纪 60 年代末的美国，兴盛于 70-80 年代的欧美，90 年代开始我国明确提出教师专业发展问题并加以介绍和研究，数学教师专业发展则从 21 世纪初期开始逐渐得到我国研究者重视。近年来，数学教育研究者一直致力于探索数学教师专业发展的有效方式，数学史与数学教育（HPM）引起了研究者关注。已有研究者借助名师工作室及校本研修带动教师小团体进行 HPM 课例研究，研究发现，HPM 可以对教师观念、知识、能力等方面的专业发展起到积极推动作用，但如何扩大培训范围和辐射作用需要进一步研究。

在信息与通信技术日益成熟的今天，网络研修与教师专业发展的融合成为时代的呼唤。网络研修是随着信息技术教育应用逐渐深化而出现的一种跨时空的远程教研形式，是借助现代信息技术对传统教研的突破与重构。近些年教育部积极推进网络研修，2014 年 3 月，教育部教师工作司印发《网络研修与校本研修整合培训实施指南》，倡导创新教师网络研修模式，促进教师专业发展，2018 年 3 月，教育部等五部门联合印发《教师教育振兴行动计划（2018-2022 年）》，指出在教师培训方面，我国将启动实施“互联网+教师教育”创新行动。在这样的背景下，以 HPM 为内容，以网络研修为形式的教师教育模式应运而生，成为促进数学教师专业发展的新途径。

1. HPM 网络研修的潜在优势

HPM 网络研修的第一个优势是可以增强 HPM 引领者的辐射范围，扩大参与教师数量。以 HPM 促进教师专业发展的基础是“吃透”数学史，但理解数学史对教师来说并不容易，即便“吃透”数学史，如何基于数学史进行教学设计也是教师面对的难题，因此，以 HPM 促进教师专业发展的实践往往需要高校科研团队或 HPM 经验丰富的专家教师支持引领，有

了这种引领，教师便可以极大丰富专业知识，调整专业信念，促进专业发展。对高校或专家教师的依赖造成以 HPM 促进教师专业发展的实践局限于以高校或专家教师为中心，带动当地教师小团队运作，但高校 HPM 科研团队和一线 HPM 专家教师数量完全不足以满足广大一线教师对数学史与数学教育的诉求。HPM 网络研修可以在一定程度上缓和这个问题，因为网络可以极大地提高高校 HPM 科研团队和一线 HPM 专家教师辐射范围，打破区域壁垒，将其影响力延展到全国各省市一线教师群体中，包括因经费不足等原因很难得到继续教育机会的偏远农村地区，这种辐射范围的扩大有利于更多教师有机会利用数学史促进自身专业发展。

HPM 网络研修的另一个潜在优势是降低参与成本，弹性化参与时机。以高校 HPM 科研团队和一线 HPM 专家教师为核心的 HPM 共同体线下研修常需要较大的时间成本，因为共同体内成员往往不在一个学校，有时还比较分散，以上海华东师范大学 HPM 工作室为例，奉贤区的老师从所在学校到普陀区华东师范大学往返需要大概 3 个小时的时间，而一次研讨总时长可能也就 3 小时左右，这意味着教师把大量时间浪费在了路程上，高时间成本在一定程度上导致教师研修参与率降低，尤其在教师教学事务繁忙、空闲时间紧张的情况下。教师空闲时间紧张还常直接导致教师无法在指定时间参与教研活动，进一步加剧研修缺席。HPM 网络研修可以在一定程度上解决这个问题，因为网路研修能够克服时间和空间的限制，降低教师参与研讨的时间和精力成本，原来需要几个小时的舟车劳顿现在花几秒钟动动手指就可以进入教研现场，无法实时参与研讨的老师还可以事后观看教研录像，教师可以根据自己的教学日程更灵活地做出研修安排。

HPM 网络研修促使 HPM 网络共同体的形成，这种 HPM 网络共同体的优势之一是教研是联系这些教师的唯一纽带，虽然这在一定程度上使得线上共同体关系较线下共同体更为疏远，但从另一个角度看，这种单纯由教研关系建立起来的共同体使得教师更能自由交流自己的教育教学想法而不太受线下其他人际关系的束缚。HPM 网络共同体还有一个显著特点是异质，参与教师面增大使得工作背景具有明显差异的老师凝聚在一起，有些老师来自一线城市，有些老师来自乡村地区，教师专业知识背景差距较大，教育理念也非常多元，这为共同体内教师带来一种天然的学习契机，学习同行的数学及教学知识，审视自己的教学信念。这样的 HPM 共同体对于乡村教师来说尤为有利，这些老师在教师教育资源方面往往处于劣势，教育部近年来不断强调加强乡村教师队伍培养培训，HPM 网络研修便可以在助力乡村教师专业发展方面起到积极的作用。

2. HPM 网络研修的潜在挑战

网络研修是近十几年才逐渐兴起的教师专业发展模式，虽然教育部积极推进在职教师培训信息化管理，建设教师专业发展“学分银行”，但系统落实尚需要时间，目前没有系统教研制度支撑网络研修，研修也无法得到继续教育学分认证，所以教师网络研修没有外在驱动力，几乎全靠自我学习热情。在关系较为疏散的网络共同体中，如何保证教师参与的积极性是 HPM 网络研修首先需要关注的核心问题，毕竟积极参与研修活动是获得自身专业发展的基本前提。

解决以上问题的方法之一是提高研修项目本身的吸引力，让教师保持专业发展的获得感，基于内在需求学习是教师研修的最好状态，但这对 HPM 网络研修项目设计提出了非常高的要求。如何设计项目才能让教师真正学有所获，以此提高其学习热情和参与度是 HPM 网络研修需要重视的问题。研修项目设计的不好，很有可能造成参与研修的教师“一盘散沙”，网络共同体名存实亡，很多教师会游走在研修边缘，自身专业发展收效甚微。

群体动力理论指出，一个人的行为是个体内在需要和环境外力相互作用的结果，因此发挥外力推动作用也是促进教师研修参与的重要方法，其中研修评价机制是值得关注的外力之一，及时给教师研修参与反馈可以让教师有“被关注感”，进而积极投入研修活动。但研修评价一直是网络研修的难题，参与网络研修的教师位于虚拟的交互环境中，因此比起线下研修，了解教师是否真正参与及在何种程度上参与网络研修的难度要大得多。

综上，HPM 网络研修具有很多独特的潜在优势，也面临一些不容忽视的挑战，如何抓住机遇迎接挑战，落实及优化 HPM 网络研修这种新模式对于教师专业发展的促进作用是“互联网+”时代需要关注的重要议题。

目　录

CONTENT

实证研究

关于中学生函数概念意象的调查研究*

刘思璐[1]，沈中宇[2]

（1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

1 引言

除了极少数基本的数学概念，绝大多数数学概念都有其正式定义，它们会在学生学习数学的过程中相继被引入[1]。但是概念是如何在学习者头脑中存储、表征和起作用，除了概念的定义，概念的意象也发挥着重要作用[2]。1981 年，Tall 和 Vinner 正式对“概念意象”和“概念定义”进行了区分。他们使用概念意象来描述与概念相关的整个认知结构 [3]。之后 Vinner 把一个概念在人脑中的心理图像（mental pictures）及相关性质的集合称为该概念的概念意象[4]。一个人关于某个概念的意象是在他在表征过程中对该概念所形成的一个替代物，是与该概念相联系的所有心理图像[5]。可见，概念意象的建立过程是数学对象的内化过程[6]。

学生在解决任务过程中，往往会诉诸自己的概念意象而非正式定义，而这些概念意象往往和其早期学习过程中的例子有关[7-8]。揭示学生的概念意象对学生行为和课堂教学具有重要意义，它可以使研究者更好地了解学生，即知道是什么导致学生的行为以及为什么会导致这些行为，从而为概念教学中避免错误概念意象的形成提供参考[4][9-10]。

国内外有关数学概念意象的研究可分成以下几类：（1）概念意象与概念定义[3-4]、概念表征[5][11]等的关系；（2）针对具体的知识点，对学生[3-4][12-15]或教师[1][16]概念意象的调查研究；（3）对概念意象本质的探讨[2][17]；（4）概念意象和数学学习之间的关系[6][10][18-22]。以调查研究为例，Vinner 曾于 1983 年使用“判别例子是否为函数”的测试题对以色列某高中 146 名学生进行调查，结果发现了六种函数概念意象[4]。但不同国家在课程标准、数学教材、课堂教学上的差异是否会导致学生函数概念意象的差异，以及学生如何使用自己的

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人研究”（A8）系列论文之一。

函数概念意象解决任务，这些问题都有待于进一步研究。

本文以函数概念为载体，研究高中生数学概念意象及其使用情况，希望从中获得函数概念的教学启示。具体研究问题是：高一学生的函数概念意象有哪些？在判别具体的函数时会使用哪些函数概念意象？所使用的函数概念意象与函数判别正确性之间有何关系？

2 研究方法

2.1 研究对象

本研究的对象为浙江省某市普通高中一年级学生。实施测试时，学生刚刚学完人教版高中课本函数单元的内容。研究者委托学校教师在高一年级学生的自习课上发放测试卷，进行 20 分钟的当堂测试，共回收 478 份有效问卷。

2.2 研究工具

本研究的测试卷是跟据 Vinner 提出概念意象和概念定义的关系模型中的直觉反应关系（图 1）和相互作用关系（如图 2）、参考已有的概念意象测试题[4][12-13]以及函数测试题[1][4][23-24]编制而成的。

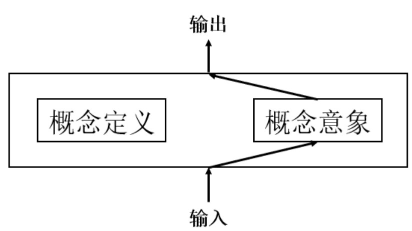


图 1 直觉反应关系

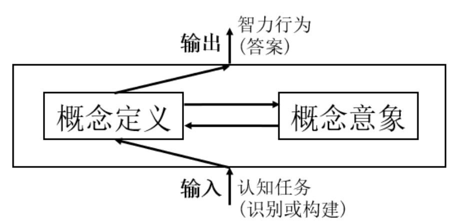


图 2 相互作用关系

调查问卷共含 8 个问题，分成两类。第一类的 1 题依据直接反应关系模型测试学生可能有哪些函数概念意象。第二类的 2-8 题依据相互作用关系模型测试学生面对特定例子判别函数时会使用哪些概念意象。

2.3 数据处理

定性内容分析法是文本分析中的一种混合研究方法，包括两步：第一，定性的解释步骤，为文本内容分配类别；第二，对类别的频率进行定量分析。第 1 题为开放式问题，故采用定性内容分析法处理数据，并参考其“归纳类别形成”（Inductive Category Formation）的分析方式[25]。处理过程如图 3，第一位研究者先分析其中 100 份学生问卷，再由第二位研究者检验，对

分类不一致的答案和已有类别进行讨论与修正，直至达成共识。接着重新统计所有问卷，两位研究者各一半，对新答案进行再次讨论与分类，并补充类别。分类的原则为全覆盖、不重复，即学生答案可以全部放到且只能放到所建立类别中的一类。对整理的类别进行研究团队内部的同行评议，形成最终的分类框架，然后进行概念意象类别分析、类别频率统计和解释。

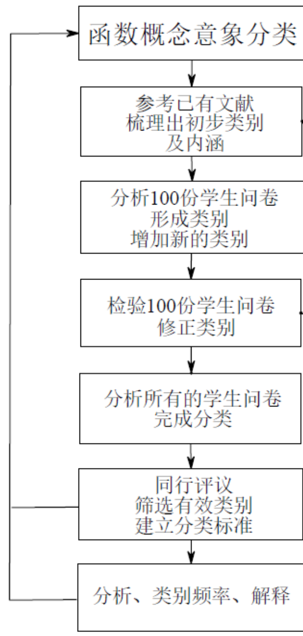


图 3 函数概念意象分类过程

对于第 2-8 题，研究者按照由第 1 题得到的分类结果，统计学生答案中判断理由的类别及其正误情况。使用 SPSS 25 对数据进行描述性统计、一般对数线性分析模型等分析。

3 研究结果

3.1 函数概念意象的类别

对于第 1 题，因样本量大、开放度强，故学生答案呈现出的函数概念意象极其多样，因此本研究参考了 Vinner 对函数概念意象的分类[4]后，在建立类别时更多地考虑放到课程标准和教材知识模块[26-27]下，同时参考了已有研究[12]将有关情感态度的答案分成一类。根据定性内容分析法对答案类别进行修改和讨论，最终确定了如表 1 所示的分类。

表 1 函数概念意象的分类

类别	具体内涵	学生典型答案
定义类	对高中函数定义要点的描述，包括对应关系、函数三要素和符号表示。	每一个 x 都有唯一对应的 y、多对一、定义域、值域、映射、$f(x)$、$y=f(x)$
表征类	函数的表征，包括解析式、图像和表格。	函数解析式、函数图像、函数表格
实例类	函数类型的具体名称。	一次函数、对勾函数、指数函数
性质类	具体的函数性质。	单调性、奇偶性、增减函数、周期性
关联类	看到函数联想到的其他知识，比如代数、变量、方程等。	未知数、元、x、y、自变量、因变量、方程、数列、y 随 x 的变化而变化
应用类	函数在数学和生活中的应用。	动点问题、过山车、股票、波浪、爱心
思想方法类	数学思想或方法。	数形结合、分类讨论、参变分离、配方法
情感态度类	看到函数的情感态度，包括积极的、消极的。	难、考试重点、分值大、变化多端、不会做、可以预知未来看到过去
其他类	其他的函数意象，但是不能归到上述类型。	解函数、好像不是数、可以是一段值

从表 1 知，学生答案可以分为 9 类：定义类、表征类、实例类、性质类、关联类、应用类、思想方法类、情感态度类和其他类。学生共给出 2903 条回答，人均 6.07 条，其中最少的写出 1 条，最多的写出 20 条，两种情况均只有一人。接下来对每类函数概念意象进行描述。

（1）定义类

在教科书[27]中，函数被定义为：设 A，B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作

$$y=f(x),\ x\in A.$$

按照以上描述，函数被定义为某种确定的对应关系，函数的三要素分别为定义域、对应关系和值域，同时，规定了函数的符号为 f。故定义类概念意象包括某种确定的对应关系、函数三要素和函数符号表示。

定义类有 261 条。其中，有 23 条回答涉及某种确定的对应关系，86 条回答涉及函数三要素，152 条回答涉及函数符号表示。可见学生对于函数的定义较为印象深刻的为函数的符号，其

次是函数的三要素，而对于某种确定的对应关系认识较少。某种确定的对应关系相关的典型答案为每一个 x 都有唯一对应的 y，函数的三要素相关的典型答案有值域、定义域，函数的符号相关的典型答案为 $f(x)$。

（2）表征类

在教科书中，函数的常用表示法有解析法、列表法和图象法。故将这三种情况的答案归为表征类概念意象。

表征类有 661 条。其中，有 318 条回答涉及解析式，76 条回答涉及列表，267 条回答涉及图象。可见学生对于函数的解析式表征印象深刻，其次为函数的图象表征，而对于函数的列表表征则较为陌生。其中函数解析式的典型答案为 $y=\dfrac{k}{x}$，函数图象的典型答案为一次函数或二次函数的图象，函数列表相关的典型回答为：

X	1	2	3
Y	3	1	2

（3）性质类

在教科书中，函数的基本性质有单调性、最值、奇偶性与周期性等。故将和性质有关的学生答案归为性质类概念意象。

性质类有 211 条。其中包括学生对函数单调性、最值、奇偶性和周期性的描述。典型回答为函数的单调性、 $f(x)=f(-x)$ 。

（4）实例类

在教科书中，具体的函数类型包括一次函数、二次函数、反比例函数、幂函数、指数函数、对数函数和三角函数等。故将函数类型的答案归为实例类概念意象。

实例类有 526 条，学生有关函数类型的概念意象包括了一次函数、对勾函数、指数函数、分段函数等。可见学生心目中的函数类型与课本中的基本一致，此外还包括对勾函数和分段函数这类的非基本初等函数。

（5）关联类

关联类指的是看到函数后联想到的其他知识，包括高中函数概念之前学的方程、代数、变量和 y 随 x 的变化而变化等相关知识，还包括之后学的数列、不等式、三角等相关知识。这里

要说明在同行评议中引起讨论的两点，第一将“x”，“y”这种答案归为此类是因为研究者认为 x 和 y 是一种代数符号，第二将“y 随 x 的变化而变化”归为此类是因为研究者认为这点不能体现高中教材定义中函数对应关系的本质。

关联类有 1069 条，答案涉及变量、代数、方程、未知数、数列、三角学等方面。其中 208 条回答涉及变量，228 条回答涉及代数，633 条回答涉及了方程、未知数、数列和三角学等。可见，学生心目中与函数联系最紧密的知识为方程、数列和三角学的相关知识，其次为变量和代数的知识。其中有关方程、数列和三角学知识的典型回答为方程、等差数列、等比数列等，有关变量知识的典型回答为自变量、因变量，有关代数知识的典型回答为未知数、元。

（6）应用类

教科书中提到，一次函数、二次函数、幂函数等都和现实世界有紧密联系，可以利用这些函数模型解决实际问题。故将函数在数学和生活中应用的例子归为此类。

应用类有 44 条。学生的典型回答有平抛运动、波浪、过山车、股票等。此类概念意象条数较少，可见学生应用函数的情况较少，应用意识较弱。

（7）思想方法类

思想方法类有 28 条，此类指的是学生答案中提到的数学思想或方法，包括数形结合、分类讨论、参变分离、配方法等。这些思想方法被广泛的应用于和函数有关的问题解决中，但是此类概念意象较少，学生有关函数思想方法的意识还比较欠缺。

（8）情感态度类

情感态度类有 62 条，此类指的是学生答案中对函数的情感态度，包括积极的情感和消极的情感，其中积极情感的学生答案为考试重点、分值大、可以预知未来看到过去。消极情感的学生答案为难、变化多端、不会做。从中可见积极的情感主要与函数在考试中的重要程度有关，消极的情感则与函数有关题目的难度较大有关。

（9）其他类

其他类有 41 条，此类指的是不能归到以上类别的其他答案。学生的典型回答为解函数、好像不是数、可以是一段值。从中可以看出学生对于函数的一些迷思概念，如从“好像不是数”这个答案中，可看出该学生可能将函数与一般的数相混淆，“可以是一段值”的回答可以看出学生将函数与函数值混淆了。

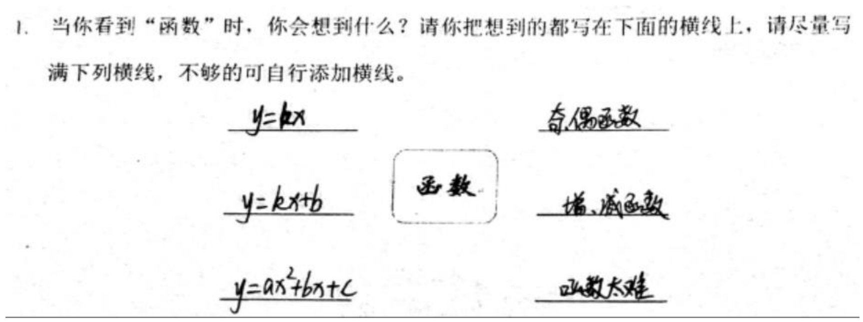


图 4 学生答卷的扫描件 1

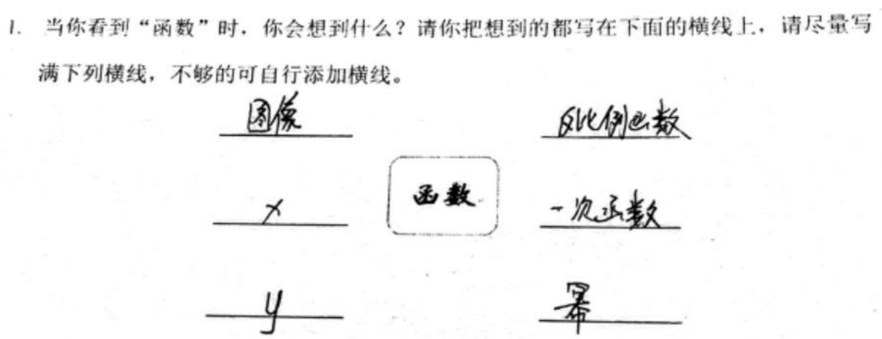


图 5 学生答卷的扫描件 2

图 6 为各类函数概念意象的频率分布，由此可知学生一见到“函数”，更偏向于想到与函数有联系的数学知识（关联类）、其次依次为函数表征（表征类）、函数名称（实例类），接着才和函数定义（定义类）、函数性质（性质类）有关。

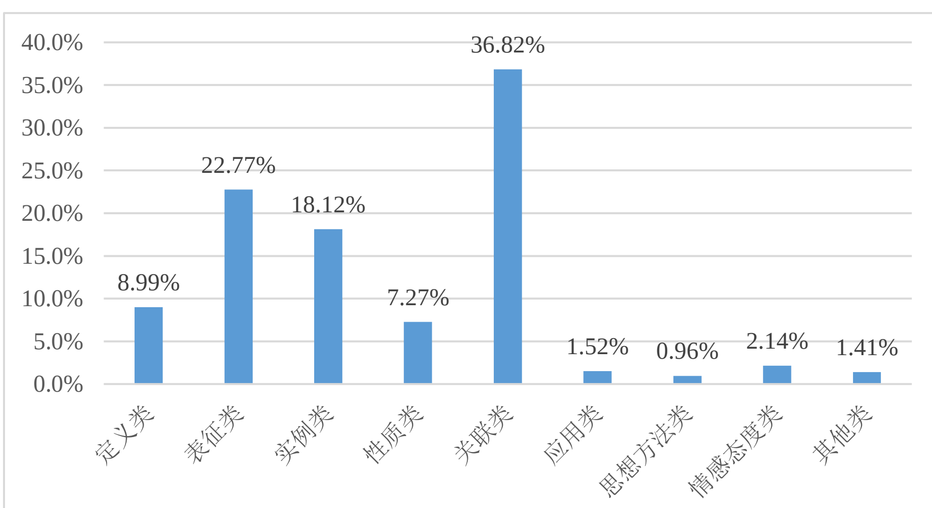


图 6 函数概念意象类别的频率分布

学生看到“函数”，所产生的概念意象多达 9 类，看起来似乎比较丰富，但这和样本量有

类。为进一步研究概念意象的丰富程度，根据分类框架，重新统计每个学生对函数概念意象的类别数量，图 7 为函数概念意象的类别数分布。其中同一类型的答案只算 1 类，人均 2.11 类，最少的给出了 1 类，最多的给出了 6 类。从学生概念意象类别的平均数和分布来看，单个学生函数概念意象的丰富程度并不高，大多数学生函数概念意象的类别数只有 1 类、2 类或 3 类，函数概念意象涉及了 6 类的学生只有 3 位。

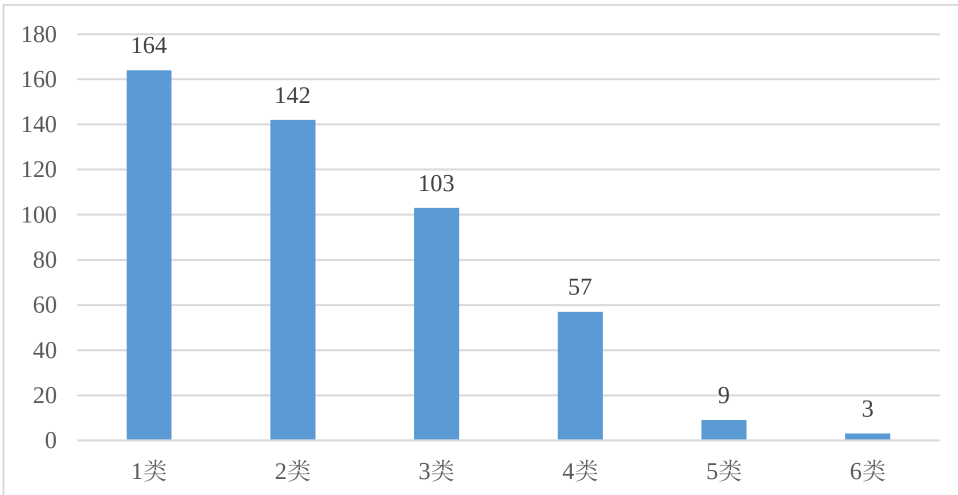


图 7 函数概念意象的类别数分布

3.2 函数概念意象的使用

根据题 1 所得的函数概念意象类别，对第 2-8 道题中学生判断理由进行分类，其类别分布频率及正确率见表 2。其中无效理由是指空白理由或“感觉是函数”这种无法归类的理由。

表 2 学生使用函数概念意象类别的频率分布及正确率

题目	定义类	表征类	实例类	关联类	无效理由	正确率
Q2	63.0%	4.0%	1.7%	12.3%	19.0%	80.3%
Q3	86.0%	8.4%	1.5%	1.0%	3.1%	92.5%
Q4	70.7%	12.1%	1.3%	3.6%	12.3%	78.2%
Q5	92.9%	4.4%	0.2%	0.4%	2.1%	95.0%
Q6	56.3%	31.6%	1.0%	0.4%	10.7%	56.1%
Q7	81.2%	3.8%	1.5%	1.9%	11.7%	93.9%
Q8	47.1%	28.9%	5.9%	0.6%	17.6%	52.7%

由表 2 知，学生主要使用定义类、表征类、实例类和关联类这 4 类函数概念意象，有意思的是这 4 类概念意象正是第 1 题中出现频率最高的概念意象类别。这从另一方面说明由第 1 题所得到概念意象的类别是有效的。从总体上来看，学生在判别函数时，更倾向于使用定义类的概念意象。从正确率来看，Q5 的正确率最高，其次是 Q7，而 Q8 的正确率最低，其次是 Q6。

学生在 Q2-Q8 诸题上的概念意象类别分布和正误分布的交叉列表中，各类概念意象在类别分布内的正确率是不一样的，其中定义类意象在类别分布内的正确率依次为 88.4%、97.1%、84.9%、97.3%、78.8%、96.4%、72.4%，定义类占总计百分比的正确率依次是 55.6%、83.5%、60.0%、90.4%、44.4%、78.2%、34.1%，且定义类在各类别占总计百分比正确率最高。表 3 是显示了学生在 Q2-Q8 中，使用函数概念意象类别和回答正误之间相关性的水平。

表 3 Q3-Q8 的意象类别和回答正误之间相关水平

题目	F（4，478）	V（1,478）
Q2	47.313***	0.328***
Q3	67.338***	0.479***
Q4	31.618***	0.269***
Q5	43.293***	0.461***
Q6	152.433***	0.549***
Q7	23.309***	0.272***
Q8	77.752***	0.393***

注：F 为修正后的似然卡方值，***表示 $P<0.001$，下同

综合表 2 和表 3 中的数据，学生在面对 Q2-Q8 时，定义类意象在各理由中占总计百分比的正确率均是最高的，使用的函数概念意象类别和回答正误之间均存在相关性。其中两变量之间关系较大题目是 Q6，关系一般的是 Q3、Q5 和 Q8，关系较小的是 Q4 和 Q7。

使用一般对数线性分析模型对 Q2-Q8 建立饱和模型。拟合效度检验结果为模型对数据完全拟合。交互效应检验和主效应检验的卡方值比均产生了较大变化，且 P 值均小于 0.001，故两变量的交互效应和主效应对频率分布均有显著影响。单项效应检验中各题参数评估中类别效应情况见表 4，其中第 5 个参数关联类的 Z 值可由总效应和为 0 推算。根据表 4，每道题中第 2 类别（定义类）的效应均显著，且都是正向的，在各类别中的正效应值也最大。

表 4 Q2-Q8 的答案类别效应

效果	参数	Z	效果	参数	Z
Q2	1（无效理由）	4.473***	Q6	1（无效理由）	2.903**
类别分布	2（定义类）	9.567***	类别分布	2（定义类）	10.721***
	3（表征类）	-3.011**		3（表征类）	7.373***
	4（实例类）	-3.734***		4（实例类）	-4.082***
Q3	1（无效理由）	-1.084	Q7	1（无效理由）	2.728**
类别分布	2（定义类）	9.685***	类别分布	2（定义类）	9.709***
	3（表征类）	3.713***		3（表征类）	-0.660
	4（实例类）	-2.522*		4（实例类）	-2.814**
Q4	1（无效理由）	2.485*	Q8	1（无效理由）	3.788***
类别分布	2（定义类）	14.695***	类别分布	2（定义类）	9.118***
	3（表征类）	2.801**		3（表征类）	6.466***
	4（实例类）	-5.077***		4（实例类）	-2.539*
Q5	1（无效理由）	-2.69			
类别分布	2（定义类）	10.018***			
	3（表征类）	2.403*			
	4（实例类）	-2.616**			

注：**表示 P<0.01，*表示 P<0.05

从 Q2-Q8 的总体结果来看，学生所使用的函数概念意象会影响他们函数判别的正确性。且当学生使用定义类时，更有助于帮助他们正确判断一个例子是否是函数。

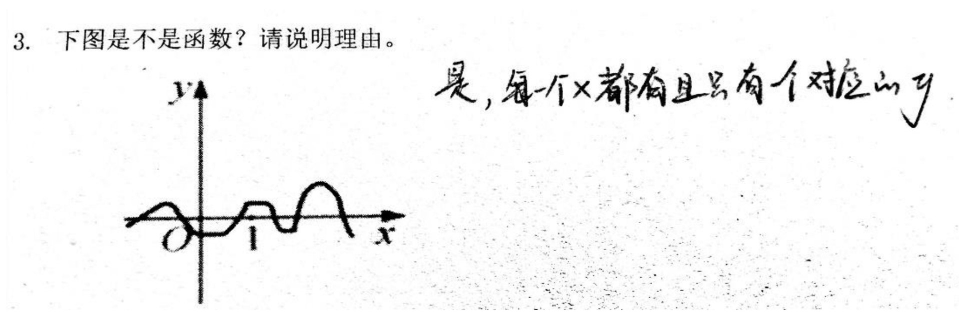


图 8 学生答卷的扫描件 3

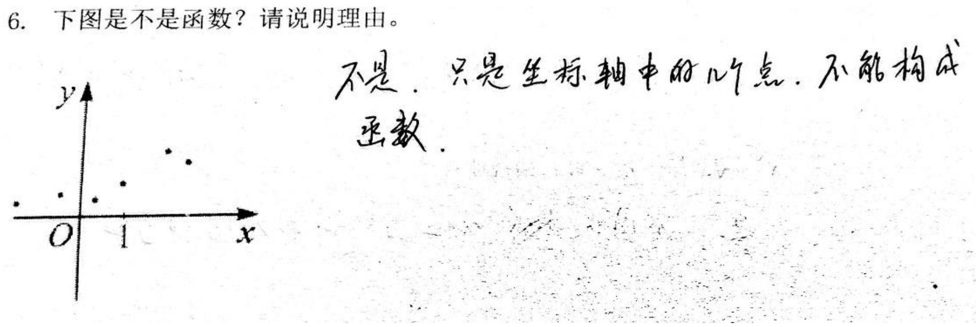


图 9 学生答卷的扫描件 4

4 讨论

4.1 函数概念意象的分类

与 Vinner 的研究结果[4]相比，本研究所得函数概念意象结果更广泛，且基本上包含了他的研究结果，比如“函数的图形应该是‘合理的’”[4]属于本研究的表征类，还有“一对一之间的对应”属于定义类，但是他所调查的学生还提到一类函数概念意象是“被给定的规则（rule）”[4]，并没有出现在本文的研究对象答案中，查阅两国教材中的定义[4][27]，也并没有出现“规则”一词，或许这和当时以色列学校的教学内容有关。

从函数概念意象的类别结果来看：第一，在面对开放的题目时，学生的函数概念意象总体上说是丰富的，涉及知识、能力和情感三个方面，反映了学生对于函数的认识。这样的认识取决于很多因素，可进一步去研究。当然图 5 也反映了单个学生的函数概念意象丰富度并不高，值得反思。第二，学生的某些概念意象或许折射出了他们在学习函数过程中的一些理解错误，比如有的学生提到“未知数”，说明其对于变量和未知数可能是混淆的。第三，从这些学生的函数概念意象中，可以看到他们在学习函数内容一段时间后的认知结构，比如函数概念、函数表征、函数类型、函数应用、解决函数问题的数学思想方法以及对函数的情感等。

4.2 函数概念意象的使用

当给定的任务是函数判别问题时，按照图 2 所示的相互作用关系模式，学生在回答问题时会努力调动自己和定义有关的概念意象来进行判断，且定义类意象占比最高。然而有一些学生使用了表征类、实例类和关联类概念意象，或只做判断未给出理由。无论学生使用哪种概念意象来进行判断，研究者都发现了一种新的概念定义与概念意象之间“意象主导”模式来解释学

生的心路历程，如图 10 所示。正如图 10 所示的过程，如果将对概念定义的心理图像也看作函数概念意象的一类，那么学生在面临特定认知任务时，可能会诉诸自己熟悉的函数概念意象来支持自己的答案。

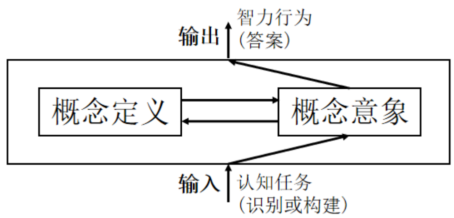


图 10 意象主导关系

由上可见，学生使用函数概念意象的类别和回答的正确率是相关的。学生在解决问题时，定义类概念意象的使用率和正确率是最高的，也能够更好地帮助学生判别函数例子。学生作出错误判别的原因，可用概念形成过程中的两种认知机制来分析，一个机制是识别相似物，比如孩子的大脑在识别一把椅子时依据的是它和过去自己见过的椅子相似，另一个机制是区别差异物，比如大脑区分出某个物体和自己过去见到的椅子不一样，故而不认同是椅子[8]。因此，学生在判别函数时相应地也有两种错因。第一，当学生判别一个例子是否函数时，因为和他们之前见过的函数例子或者相关认知（表征类、实例类等概念意象）相似，如对于第 5 题，有学生认为该图很有规律，故该图是函数。第二，因为例子与脑海中的函数例子或者相关认知（表征类、实例类等概念意象）不一样，如对于第 6 题，有学生认为该图是不连续的点，故该图不是函数。学生之所以产生错误，归根结底是对函数概念本身的理解不到位。

5 结论与启示

基于以上的研究结果和讨论，发现高一学生学完高中函数概念的两个月后，积累和产生的函数概念意象分别是定义类、表征类、性质类、实例类、关联类、应用类、思想方法类、情感态度类和其他类。在学生判别函数时，主要会使用定义类概念意象，其次是表征类、实例类和关联类概念意象。学生使用的函数概念意象和函数判别的正确性之间有一定的相关性，其中定义类概念意象有助于学生正确判别函数。

从理论上来看，无论是给学生直觉反应关系模型还是相互作用关系模型的题目，学生在回答问题时的心理过程都可以用“意象主导关系”进行描述。可见，研究概念意象有助于了解学

生的概念理解和概念学习情况。教学中，教师要注意学生头脑中那些被唤起的各种概念意象[12]。

从实践上来看，从本研究中可获得如下教学启示：

首先，学生有关函数定义的心理图像不够准确。在日常教学过程中，教师应注重准确使用数学语言描述函数定义，并培养学生准确使用数学语言的习惯，减少口语化语言。另外还要培养学生面对任务时调用定义类概念意象的习惯，形成概念性理解而非程序性过程，这有助于学生更好地解决问题。

其次，表征类和实例类的概念意象代表着学生对函数具象例子的心理图像。学生在日常学习函数时，最常见到便是具体的函数例子及其某种表征。教师应该善于利用学生从初中就已经熟悉的函数表征和例子，抓住函数概念的本质，以此为起点进行高中函数概念的教学。还要引导学生从定义出发解读函数的三种表征，并掌握表征之间的相互转化。

再次，教师要善于抓住关联类的概念意象，帮助学生建构自己的概念图。同时，“未知数”等关联类答案也呈现了学生的一些迷思概念，教师应在教学中加以辨析。而“方程”等关联类答案也只能说明，学生认为函数与方程有关联，但是是何种关联仍待探究。

最后，应用类、思想方法类、情感态度类等代表了一小部分学生的心声。教师应在日常教学中更多地引导学生发现数学知识的应用价值，这对于揭示数学知识的必要性、增加学习驱动力是很重要的。情感态度类意象表明，很多学生觉得“函数”很难学；即使少数学生持有积极的情感态度，但几乎未见有“函数很有趣”、“很喜欢函数”之类的观点。对于教师而言，函数概念的教学还存在进一步完善的空间。

参考文献

[1] Vinner S , Dreyfus T . Images and definitions for the concept of function[J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1989, 20(4): 356-366.

[2] 李善良. 关于数学概念意象的研究[J]. 数学教育学报, 2004, 13(03): 13-15.

[3] Tall, D., Vinner, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12(2): 151-169.

[4] Vinner, S. Concept definition, concept image and the notion of function[J]. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1983, 14(3): 293-305.

[5] 罗新兵, 罗增儒. 数学概念表征的初步研究[J]. 数学教育学报, 2003, 12(02): 21-23.

[6] 周友士. 基于建构主义的数学概念转变学习[J]. 数学教育学报, 2004, 13(03):19-22.

[7] Vinner, S. Concept Formation in Mathematics: Concept Definition and Concept Image. In: Vinner, S. *Mathematics, Education, and Other Endangered Species. Mathematics in Mind*[M]. Cham: Springer, 2018: 19-21.

[8] Vinner, S. Concept Development in Mathematics Education. In: Lerman, S. *Encyclopedia of Mathematics Education*[M]. Dordrecht: Springer, 2014: 91-95.

[9] Dahl, B. First-year Non-STEM majors' use of definitions to solve calculus tasks: Benefits of using concept image over concept definition?[J]. *International Journal of Science & Mathematics Education*, 2017, 15: 1303–1322.

[10] 李善良. 数学概念学习中的错误分析[J]. 数学教育学报, 2002, 11(03):6-11.

[11] 吴增生. 数学概念及其表征[J]. 数学通报, 2008, 47(03): 26-30.

[12] Nordlander, M. C., Nordlander, E. On the concept image of complex numbers[J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2012, 43(5): 627-641.

[13] 沈中宇, 沈金兴. 高一学生关于平面概念的意象[J]. 数学通报, 2017, 56(12): 21-26.

[14] Wawro, M., Sweeney, G.F., Rabin, J.M. Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2011, 78: 1–19.

[15] 曹荣荣. 学生数列极限概念表象再探[J]. 数学教育学报, 2011, 20(01): 61-63.

[16] Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. et al. Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders[J]. *ZDM Mathematics Education*, 2015, 47: 497–509 .

[17] Semadeni, Z. Deep intuition as a level in the development of the concept image[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2008, 68: 1–17.

[18] Vinner S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking*[M]. Dordrecht: Springer, 2002: 65-81.

[19] Zhang, X., Clements, M.A., Ellerton, N.F. Enriching student concept images: Teaching and learning fractions through a multiple-embodiment approach[J]. *Mathematics Educatian Research Journal*,

2015, 27: 201–231.

[20] Moore-Russo, D., Conner, A., Rugg, K.I. Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2011, 76: 3–21.

[21] 郑翔.数学概念学习过程中的心理障碍分析[J]. 中国成人教育, 2005(04):78-79.

[22] 曾国光. 中学生函数概念认知发展研究[J]. 数学教育学报, 2002, 11(02): 99-102.

[23] Tabach, M., Nachlieli, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2015, 90: 163–187.

[24] Dubinsky, E., Wilson, R. T. High school students' understanding of the function concept[J]. *Journal of Mathematical Behavior*, 2013, 32(1):83–101.

[25] Mayring, P. Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods[M]. Dordrecht: Springer, 2015: 366-376.

[26] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017:18-24.

[27] (中国) 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 数学 必修 1 A 版[M]. 北京：人民教育出版社, 2019.06: 59-186.

网络研修

基于网络研修的“有理数乘法课例”生成

左培培[1]　邵爱娣[2]　孙丹丹[3]

（1.上海市浦东模范中学东校，上海 201209；2.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；3.华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

1 引 言

信息时代背景下，网络教研已成为具有时代特色的教师专业发展新模式[1]。网络教研活动不受时空的限制，教师可根据需要随时随地的进行研讨交流，共享教育信息与资源[2]。第一届初中教师 HPM 网络研修即是在这种背景下产生的一种以数学史与数学教育（简称 HPM）为抓手的教师线上研修模式，具体而言，教师在线专业学习共同体由两个子团体构成，一是全国各地六十余位一线初中数学教师，二是高校教师、硕博士和若干 HPM 实践专家型一线教师，研修活动持续约一年时间，主要围绕 9 个初中教学主题展开，教师线上阅读学习相关历史素材、借助视频会议平台研讨基于历史的教学设计、线下实施课例、线上分享学生反馈及教学体会，共同体成员在网络互动中学习、交流、反思。

“有理数的乘法”是 HPM 网络研修班的研修课例研究之一，研修围绕分析与准备、设计与改进、实施与反馈、整理与写作四个环节展开，其中，在设计与改进环节，研修班依次组织了在线小组讨论、研修班教师集体讨论、高校研讨以不断完善设计最终形成 HPM 课例。已经有研究详细呈现了基于数学史的有理数乘法教学设计[3]，完成了的课例成品可以为教学提供参考，HPM 课例生成的过程也同样值得研究[4]，这个过程可以体现运用数学史进行“有理数乘法”教学设计可能存在的问题、改进的方法、改进的缘由等等，最后生成的课例也是对已有课例的丰富和完善。鉴于此，本文将呈现有理数乘法 HPM 课例生成的过程及生成过程中的思考，以期给初中 HPM 视角下的有理数教学以启示。

2 分析与准备

2.1 问题分析

“有理数的乘法”在沪教版初中数学六年级下册第五章“有理数”第六节第一课时，它既是有理数加减法的深入，也是有理数除法、有理数乘方等运算的基础。沪教版有理数乘法一节的教材首先在思考 1 中呈现了四个问题：$2\times1=?$；$(-2)\times1=?$；$2\times(-1)=?$；$(-2)\times(-1)=?$ 而后提示，$2\times1=2$，$(-2)\times1=-2$，一个数乘以 1 等于这个数本身。$2\times(-1)=(-1)+(-1)=-2$，一个正数乘以(-1)等于这个数的相反数。进而抛出问题：$(-2)\times(-1)=?$，进一步思考$(-4)\times3=?$，$(-4)\times(-3)=?$之后在思考 2 中给出汽车行驶的现实情境，规定向东行驶为正，向西行驶为负；几小时后为正，几小时前为负，得出四个算式 $2\times80=160$，$2\times(-80)=-160$，$(-2)\times80=-160$，$(-2)\times(-80)=160$，从而总结正负数乘法的运算法则，最后归纳 0 和正负数的乘法运算，得到有理数乘法法则。

实际教学中，学生往往已经知道正负数相乘法则，加之思考 1“一个数乘以 1 等于这个数本身，一个正数乘以-1 等于这个数的相反数”的引导，学生基本可以说出$(-4)\times3=-12$，$(-4)\times(-3)=12$。所以，接下来的思考 2 主要是运动情境解释这个法则，由于运动情境较为复杂，教师一般先帮助学生规定好“向东行驶为正，几小时后为正”，然后通过行驶过程中速度、时间和路程的关系，得到四个算式，让学生尝试归纳两数相乘的符号法则，最后通过练习强化学生运用有理数乘法法则进行运算的能力。

这节课的教学往往存在如下几个问题：（1）很多学生正式学习前已经了解过这个法则，有理数乘法的学习动机不足；（2）思考 1 如果只是为了引出课题显得有些冗余，其中承载的很多信息没有充分运用；（3）运动情境有一定难度，实际教学往往只是“走过场”解释一下，把整节课绝大部分时间都放到了运用法则进行计算上。相关调查也显示，不超过 11.5%的学生可以对“负负得正”法则给出合理的解释[5]。因此，在教学实践中如何激发学生的学习动机，引导学生理解“负负得正”法则的合理性是教师面对的难题。

2.2 史料学习

“有理数乘法”的相关历史由网络研修班专用微信小程序推送，共包含 6 则素材，素材一主要介绍名人对“负负得正”缘由的困惑，19 世纪法国著名作家司汤达（Stendhal, 1783-1843）、法国著名昆虫学家和文学家法布尔（H. Fabre, 1823-1915）、我国著名“杂交水稻之父”袁隆平

等都曾对“负负得正”产生过疑问，试图寻求解释[6][7]。例如司汤达小时候很喜欢数学，但迪皮伊先生教到“负负得正”这个运算法则时，司汤达不理解法则背后的缘由，他希望老师能对此作出解释。面对司汤达的提问，迪皮伊先生“只是不屑一顾地莞尔一笑”，补习学校的夏贝尔先生也只得不断重复课程内容，说负数如同欠债，可一个人该怎样把 10000 法朗的债与 500 法朗的债乘起来，才能得到 5000000 法朗的收入呢？司汤达被“负负得正”困扰了很久，最后只能无奈接受了它。

素材二主要用负债、运动、水箱、热气球、好人进城等生活模型解释有理数乘法合理性。美国数学家和数学史家 M・克莱因（M. Kline, 1908~1992）认为，“如果借助物理意义，负数运算以及负数和正数混合运算是很容易理解的。”他最早用债务解释“负负得正”：假定某人每天欠债 5 美元，可记为−5，在给定日期他身无分文，记为 0 美元，那么在给定日期 3 天前（记为−3），他有财产 15 美元，用数学表达式描述即$(-3)\times(-5)=+15$[8]。除了负债，还有其他情境，比如，一个大水箱底部接着一根排水管，现在水箱装有若干升水，假设排水管以每小时 6 升的速度排水，记为−6，则 8 小时前（记为−8），水箱的水比现在多 48 升，记为+48，用数学表达式描述即$(-6)\times(-8)=+48$[9]。当前沪教版教科书呈现的运动情境也是历史上常用模型之一。一个与前面情境略有不同的是所谓“好人进城”模型。在一个城镇中居住着许多居民，如果规定好人为正，则坏人为负，进城为正，则出城为负，好事为正，则坏事为负，则坏人（−）出了城（−），对于城镇来说是好事（+），用数学语言表示即“负负得正”[8]。

素材三主要用乘法意义拓广、公式拓广、相反数、归纳、分配律等数学模型解释有理数乘法合理性。如早期教科书中出现的乘法意义拓广的解释：两数相乘，乘数为正时，连加被乘数；乘数为负时，连减被乘数，由此得到“负负得正”。

$$(+4)\times(+3)=+(+4)+(+4)+(+4)=+12\ ;$$

$$(-4)\times(+3)=+(-4)+(-4)+(-4)=-12\ ;$$

$$(+4)\times(-3)=-(+4)-(+4)-(+4)=-12\ ;$$

$$(-4)\times(-3)=-(-4)-(-4)-(-4)=+12$$ [10]。

Benedict（1877）的归纳法，取等差数列＋4，＋3，＋2，＋1，0，−1，−2，−3，−4，先将各项分别乘以＋3，观察所得等差数列的规律，得出“负正得负”，再将数列各项分别乘以−3，

观察新数列的规律，得出“负负得正”[11]。所谓相反数法，则是将$\left(-a\right)\times b$和$\left(-a\right)\times\left(-b\right)$看作一对相反数，若已知前者为负，则后者必为正。欧拉在《代数基础》（1821）中先通过债务的倍数来说明正负得负：将$-a$视为债务，取 3 次，则债务必变成 3 倍，故$\left(-a\right)\times 3=-3a$，一般地，有$\left(-a\right)\times b=-ab$ （$a>0,b>0$），故“正负得负”。由于$\left(-a\right)\times\left(-b\right)$要么等于 ab，要么等于$-ab$，但已证$\left(-a\right)\times b=-ab$，故$\left(-a\right)\times\left(-b\right)=ab$[12]。有些“负负得正”的解释方法运用（或逆用）了乘法分配律，F • 克莱因称之为“半逻辑证明”，例如：

$$\left(a-a\right)\times d=\left[a+\left(-a\right)\right]\times d=ad+\left(-a\right)\times d=0\text{，故}\left(-a\right)\times d=-ad\text{；}$$

$$\left(a-a\right)\times\left(-d\right)=a\times\left(-d\right)+\left(-a\right)\times\left(-d\right)=-ad+\left(-a\right)\times\left(-d\right)=0\text{，故}\left(-a\right)\times\left(-d\right)=ad$$ [13]。

素材四介绍了以上现实情境及数学情境都只是对“负负得正”的合理性做解释，并非严格意义的逻辑证明。19 世纪德国数学家汉克尔（H.Hankel, 1839-1873）早就告诉我们：在形式化的算术中，“负负得正”是不能证明的。数学家 F • 克莱因也提出忠告：“我请求你们不要把不可能的证明讲得似乎成立”[14]。“负负得正”只是一种规定，规定的合理性可以通过多种模型解释，更为本质的一个原因是数系扩充所遵循的原则之一是运算律的无矛盾性，虽然我们可以规定“负负得负”，但那意味着我们至少要放弃正整数集所满足的其中一个运算律。

素材五和六分别介绍了东西方文明中的负数与负负得正。在东方，13 世纪我国数学家朱世杰明确提出负数的乘除法运算法则，7 世纪印度数学婆罗摩笈多规定了负数加减乘除法则[15]。在西方，负数和正负数运算法则进展相对更加艰难，自 13 世纪负数及其运算传入西方，历经几百年排斥和矛盾，直至 19 世纪才被比较普遍地接受[16]。

3 设计与改进

3.1 初步设计

基于研修班提供的相关历史素材，结合自身实践经验，笔者初步完成了教学设计（I），见表 1。

表 1 “有理数的乘法”教学设计(I)

教学环节	教学过程	数学史素材
问题引入	尝试回答教材中的思考 1 并说明理由。	
探索新知	（1）讲解教材中的思考 2，得出两数相乘的符号法则。 （2）讲解教材中的思考 3，归纳有理数的乘法法则。 （3）学生举实际例子解释“负负得正”法则的合理性。	
深化认识	司汤达学习“负负得正”的历史故事，M·克莱因的债务模型。	司汤达的故事、债务模型
例题讲解	讲解练习，归纳有理数乘法的注意事项。	
课堂练习	按照例题分析的要求完成计算题。	
课堂小结	总结有理数的乘法法则的内容和注意点。	

教学目标：

①通过现实情境，理解有理数乘法的实际意义，归纳有理数的乘法法则，初步感受有理数乘法法则的合理性；

②掌握有理数乘法的符号法则，并能熟练地进行有理数乘法运算；

③通过具体算式归纳一般法则，提高归纳概括能力。了解数学家的相关故事，感悟质疑的精神，培养科学求真的态度。

教学重点：掌握有理数的乘法法则，并能熟练进行有理数的乘法运算。

教学难点：理解有理数乘法法则的合理性。

3.2 集体研讨与改进

3.2.1 集体研讨

初步设计完成后，先在小组内进行了分享交流，之后研修班的所有老师针对教学设计各个环节展开线上视频讨论。经过讨论，笔者意识到初步教学设计并没有体现数学史的深度融入，对历史材料的解读只是停留在讲述故事和补充模型的层面上，没有给予学生思考模型和讨论的机会。具体来说，讨论达成的共识及笔者反思如下：

（1）对教材中思考 1 的处理，教材提到“一个数乘以 1 等于这个数本身，一个正数乘以（–1）等于这个数的相反数”，这两句话都不是基本事实，只是猜想。乘法的意义目前只适用于正数，不能在有负数参与的乘法运算中，贸然采用非负数的乘法运算律。

（2）学生对于“负负得正”的理解无疑是困难的，此时教师不要直接给学生讲解模型，而是恰好把历史名人司汤达的故事抛出，让他们来想办法帮助司汤达解释困惑。这样可以一下子锁住学生的目光，激发学生内心的求知欲，产生解决这一问题的内心驱动力，调动学生主动思考的积极性。

（3）教学重点应该落实在为什么“负负得正”上。因为学生利用法则进行计算并不难，难的是为什么负数乘以负数结果反而变成了正数，而如果不弄清楚法则规定的合理性，学生会认为数学是“不讲理”的，在后续的学习中便不会主动去探求其他数学规则的合理性。

（4）提出挑战性的问题，让学生以小组合作的方式对司汤达的困惑进行探讨，思考有理数乘法的实际意义，尝试解释有理数乘法法则的合理性，呈现学生的创新思维，还可以和历史上古人的方法产生思想的交汇。

3.2.2 修正后的教学设计

反思研讨的相关议题及修改建议后，笔者对教学目标、重难点和教学过程做了修正。其中教学目标①和②不变，教学目标③改为“通过法国著名作家司汤达的历史小故事，培养学生的探究质疑精神，感受数学和生活的联系”。教学难点不变，教学重点改为“用合理的模型解释负负得正”。

修正后的教学设计见表 2。

表 2 “有理数的乘法”教学设计（II）

教学环节	教学过程	数学史素材
复习引入	（1）回顾小学乘法运算法则，及有理数的一种分类：正数、0、负数。 （2）引导学生说出两个有理数相乘的所有情形并举例，如：$(+4)\times(+3)$，$(+4)\times(-3)$，$(+4)\times0$，$(-4)\times(+3)$，$(-4)\times(-3)$，$(-4)\times0$，$0\times(+3)$，$0\times(-3)$，0×0。 （3）问根据目前知识，你能确定哪些算式的结果？ （4）追问未解决的三个式子$(-4)\times(+3)$，$(+4)\times(-3)$，$(-4)\times(-3)$有什么特点？	—
探索新知，得出猜想	问题①：猜想上述三个含有负数的有理数乘法的结果。 问题②：你能举生活中的例子来解释$(-4)\times(+3)=-12$吗？$(+4)\times(-3)$，$(-4)\times(-3)$呢？	—
介绍历史、提出方案	预设关于$(+4)\times(-3)$，$(-4)\times(-3)$学生解释不清楚。而后给出司汤达和袁隆平的故事。学生举例帮司汤达和袁隆平解释困惑。小组合作，展示评价。	司汤达和袁隆平的故事
建立模型、验证猜想。	（1）预设 6 种模型：运动模型、好人进城模型、气温变化模型、债务模型、相反数模型、分配律法，根据学生的回答进行类比。 （2）重点讲解课本中的运动模型，其他模型学生表述，教师利用投影展演，并让学生课后书写出具体方案作为课堂的延续。归纳有理数乘法法则。	运动模型；相反数模型；分配律法；债务模型
知识应用	同教学设计（I）	—
课堂小结	（1）总结有理数乘法法则和步骤； （2）体会数学建模思想； （3）司汤达故事的启示。	—

3.3 高校研讨与改进

3.3.1 高校研讨

在高校研讨中，设计者首先介绍了教学设计与困惑，高校研究者和资深的 HPM 教学实践者对教学设计提出了改进建议。讨论达成的共识及笔者反思如下：

（1）复习引入部分，对学生预设的问题进行适当调整。原设计预设的是学生能回答九个算式中的 6 个，含负数的 3 个算式回答不出，但实际上学生很有可能全部回答出来，这时候可以紧接着提出问题为什么“负数乘以负数会等于正数呢”？并顺势将司汤达等名人的故事前置，这样一开始就可以聚焦问题的核心。

（2）在用现实情境解释有理数乘法法则的过程中，举两个负数相乘的例子是难的。为了启发学生通过现实模型说明法则合理性，可以从复习负数的本质或实际意义入手，引导学生开放思维，寻找多样的具有相反意义的量，再上升到二维的负数乘以负数。

（3）本节课涉及的模型较多，模型的选择上不要求全，而要易于学生理解。模型太多会导致课时容量过大，无法讲完既定内容，上课节奏过快也会使得学生无法真正理解每个模型本质，因此需要精简课上呈现的模型数量。

（4）现实模型是教师或学生在数学课堂中常常使用的解释方式之一，从数学本身入手是解释法则合理性的重要角度，有必要让学生了解保持运算律也是数学中引入法则的主要依据之一。可以在结尾用微视频的方式给予数学解释，课下给学生相关数学解释的阅读材料体会合理性。

（5）设计开放性的课后作业，让学生思考更多的解释方式。这样的课后探究性作业，使得有限的课堂得以延续，为学生提供更多的探究机会，为学生的个性发展提供了充分的空间，使学生有不同的数学发展，学生的开放性想法可以相互补充启发。

3.3.2 修正后的教学设计

结合高校研讨中的修改建议及自我反思，笔者对教学设计（II）作了修正，见表 3。

教学目标①和②不变，教学目标③改为：“通过介绍法国著名作家司汤达的历史小故事，培养学生的探究质疑精神，建立数学和生活的联系；通过小组合作讨论，感受方法之美，探究之乐，提高学生的数学建模能力。”

教学重难点仍采用集体研讨后的修正版。

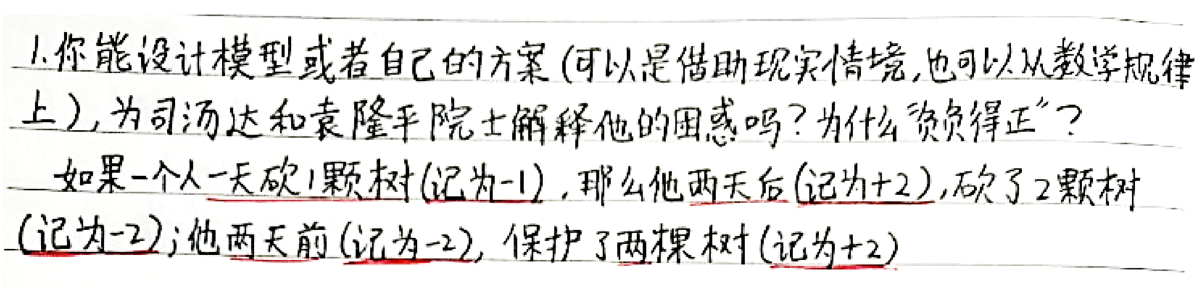
表 3 “有理数的乘法”教学设计（III）

教学环节	教学过程	数学史素材
知识回顾，新课引入	（1）同教学设计（II）； （2）同教学设计（II）； （3）请学生把算式按熟悉到陌生的顺序排列并一一计算，预设有部分学生能够全部算出来，追问学生为什么会认为(–4)×(+3)=12，(+4)×(–3)= –12，(–4)×(–3)=12? （4）预设关于(+4)×(–3)，(–4)×(–3)学生说不清楚，提出问题为什么“负数乘以负数等于正数”，引出袁隆平院士和司汤达的故事。	袁隆平院士和司汤达的故事
负数的实际意义	问题①：研究负数的乘法前，请思考一下负数的意义是什么？ 问题②：你能举出一些生活中的例子说明负数的意义吗？	—
小组讨论、建立模型、解释猜想	（1）小组讨论，为司汤达和袁隆平院士解决困惑，小组代表展示例子。 （2）预先准备好以下模型：运动模型、债务模型、相反数模型等，根据学生回答进行类比。	运动模型;债务模型;相反数模型
归纳有理数乘法法则	引导学生归纳总结有理数乘法法则。	—
数学解释	微视频介绍分配律法，让学生感知数系扩充要保证运算律的无矛盾性，即原有的正数范围内的运算律在有理数范围内成立，所以负负只能得正。	分配律法
运用新知	同教学设计（II）	—
课堂小结	同教学设计（II）	—
课后作业	让学生思考更多的解释方式。	—

4 实施与反馈

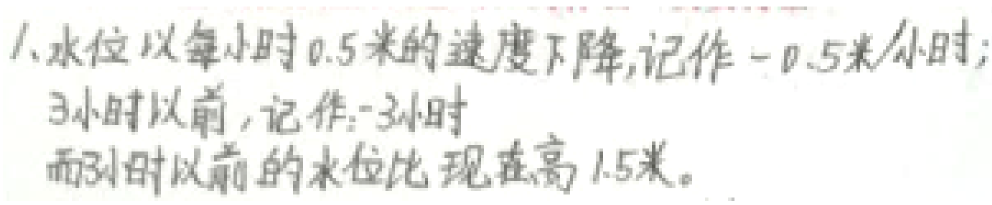
受疫情影响，上海市中小学实行线上教学，模式是空中课堂结合线上直播互动教学。有理数的乘法这节课空中课堂 21 分钟，直播互动教学 15 分钟。由于直播课时间有限，笔者实施了教学设计（III）片段。首先通过举生活实例回顾说明负数的意义，接着讨论了司汤达的历史故事和美国数学家 M·克莱因的债务模型。课后对两个任教班级 76 名学生进行了问卷调查，收回问卷 75 份。调查显示，约 84% 的学生可以理解负数的意义，约 76%的学生能正确进行有理数的乘法计算，清楚说出有理数乘法法则并做出解释。约 94.6% 的学生认为，“负负得正”不难，很有趣，历史解释有助于理解“负负得正”的合理性。

在开放性的课后作业中，学生对“负负得正”给出了很多解释。可以归为两类，一类围绕生活情境展开，如有学生提到砍树问题和排水问题，见图 1 和图 2。有学生把得到记为正，失去记为负，把支票记为正，欠条记为负，那么你失去了一张欠条是好事，所以“负负得正”。有些学生的解释反映出学生可能混淆了负负相乘得正和正数相反数的相反数得正，这需要教师在以后教学中引起足够重视。如有学生想到体育课中的四面转体动作，一个负号可理解为向后转 180 度，另一个负号可理解为又向后转 180 度，此时又转回了原来的方向。也有学生用语文学科中的双重否定表示肯定来解释，“负”可理解为否定，“负负”可理解为双重否定，而正可理解为肯定。


1.你能设计模型或者自己的方案(可以是借助现实情境,也可以从数学规律上),为司汤达和袁隆平院士解释他的困惑吗?为什么"负负得正"?

如果一个人一天砍1颗树(记为-1),那么他两天后(记为+2),砍了2颗树(记为-2);他两天前(记为-2),保护了两棵树(记为+2)

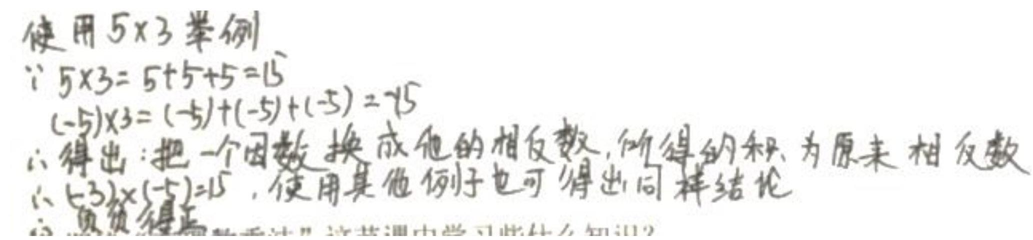
图 1



1. 水位以每小时0.5米的速度下降，记作－0.5米/小时；
3小时以前，记作：－3小时
而3小时以前的水位比现在高1.5米。

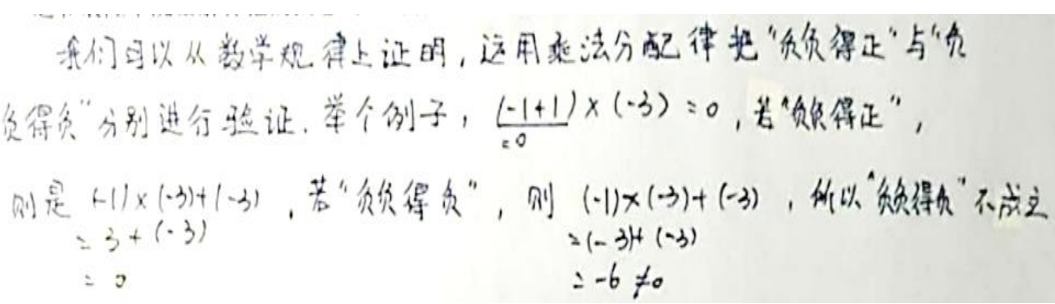
图 2

另一类借助数学内部规律展开，有学生想到了相反数模型，两个有理数相乘，如果改变其中一个因数的符号，积的符号也会随之改变，见图 3。有学生利用数轴进行了解释：除了 0 以外，所有的有理数乘以一个负数，相当于先把这个数所对应的点，在数轴上绕原点旋转 180 度（相当于乘以–1），再扩大或者缩小相应的倍数。有学生以乘法对加法的分配律为前提，通过具体数字运算说明负负要得正，否则会出现矛盾，也有学生直接把正数范围内的运算律扩充到有理数集得到“负负得正”，见图 4-5。还有学生使用乘法意义拓广法，忽略 $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$ 中 $a>b, c>d$ 的条件，得到“负负得正”，见图 6。



使用5×3举例
∵ $5\times3=5+5+5=15$
$(-5)\times3=(-5)+(-5)+(-5)=-15$
∴ 得出：把一个因数换成他的相反数，所得的积为原来相反数
∴ $(-3)\times(-5)=15$，使用其他例子也可得出同样结论
∴ 负负得正

图 3



我们可以从数学规律上证明，运用乘法分配律把“负负得正”与“负负得负”分别进行验证，举个例子，$\underbrace{(-1+1)}_{=0}\times(-3)=0$，若“负负得正”，
则是 $(-1)\times(-3)+(-3)$ $=3+(-3)$ $=0$，若“负负得负”，则 $(-1)\times(-3)+(-3)$ $=(-3)+(-3)$ $=-6\neq0$，所以“负负得负”不成立。

图 4

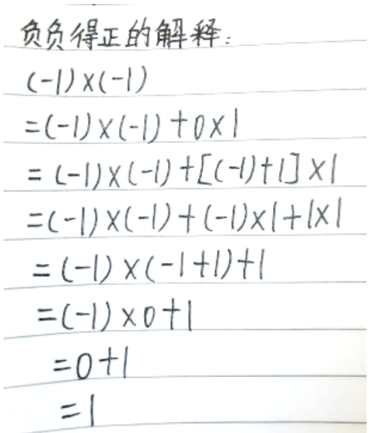


图 5

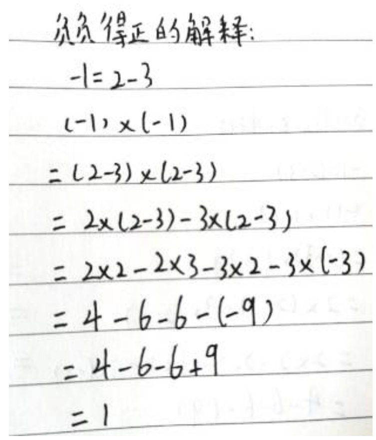


图 6

5 反思与启示

基于本次“有理数的乘法”课例研究，教师反思了整个过程，得到以下启示。

（1）精读数学发展史，促进学生深层理解。实际学习过程中，有的学生表面接受“负负得正”，但并没有真正理解。因而研究数学知识的历史本源，对教师认识数学知识的难点和重点是十分有利的。以“有理数乘法”为例，不仅要教会学生计算“负负得正”，更重要的是选择适切的数学史料，合理地解释“负负得正”，让学生真正对数学概念有深刻的认识，这种理解是刷题无法产生的效应。

（2）给学生探索空间，调动学生积极性。教师不能强加给学生固定的思维方式，剥夺学生探索机会。有理数乘法是一个非常开放的主题，有十分多样的解释方法，如果限定教材上的运动模型，并且规定好运动方向和时间正负，就封锁了学生发挥的空间，限制了学生思考，进而造成学生的被动学习。在这节课的教学中可以适当多留白，调动学生的积极性，学生的潜能可能会超乎想象。

（3）换位思考，理解学生。司汤达、袁隆平的学习体验让教师在教学中不再急于让学生接受法则，而是不断地给出些生活中的情景让学生慢慢感受“负负得正”。因为学习经验的差别，教师往往从自己的视角来看学生学习，于是很多内容变得“十分简单”，而忽视学生的学习困难，历史发展有利于教师摒弃自我中心的视角，更好地理解学生的想法，据此设计教学，给过快的教学节奏减速。

（4）精耕课堂，细作教学，秉承初心。有理数乘法的教学不应该沦为有理数乘法法则的应用，要传授有文化的数学，打造有情趣的课堂，培养出有无限生命力和创造力的学生。

历史故事有利于鼓励学生质疑求真的理性精神，启发学生主动思考，探索“负负得正”合理性可以培养学生探究的能力，真正体会“做数学”的乐趣，不同时空的多元解释可以开拓学生视野，让不同学生有机会获得不同发展，这都是这节课可以达成的教育价值。

致谢：本文系 HPM 网络研修系列课例之一，感谢汪晓勤教授、栗小妮博士、贾彬老师、王进敬老师及研修班同行的悉心指导与帮助。

参考文献

[1] 李爽, 张艳霞, 孙洪涛. 支持校际协作的教师在线专业学习社区建设策略探索———基于国内外实践的调查与反思[J]. 教师教育研究, 2015, 27(4): 86-92.

[2] 陈玲, 张俊, 汪晓凤, 余胜泉. 面向知识建构的教师区域网络协同备课模式研究———一项基于学习元平台的实践探索[J]. 教师教育研究, 2013, 25(6): 60-67.

[3] 王进敬, 栗小妮. HPM 视角下“有理数的乘法”教学研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(03): 10-14.

[4] 邵爱娣, 余庆纯, 汪晓勤. HPM 视角下的“十字相乘法”课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(05): 10-15.

[5] 巩子坤. “负负得正”何以能被接受[J]. 数学教学, 2010(3): 7-10.

[6] 覃淋. 负数的历史以及“负负得正”的缘由[J]. 数学教学, 2018(7): 6-10+49.

[7] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学：理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019: 77-90.

[8] 佟巍, 汪晓勤. 负数的历史与“负负得正”的引入[J]. 中学数学教学参考, 2005(Z1): 126-128.

[9] Aley, R. J. *The Essentials of Algebra* [M]. New York: Silver, Burdett, 1904: 40-41.

[10] Taylor, J. M. *A College Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1889: 12.

[11] Benedict, J. T. *Elements of Algebra* [M]. New York, 1877: 15-16.

[12] Euler, L. *An Introduction to the Elements of Algebra* [M]. Cambridge: Hilliard and Metcalf, 1821: 9-11.

[13] Hill, D. H. *Elements of Algebra* [M]. Philadelphia: J. B. Lippincott, 1859: 24-29.

[14] F·克莱因. 高观点下的初等数学（第 1 卷）[M]. 舒湘芹, 陈义章, 杨钦樑, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2008.

[15] 卡茨. 数学史通论[M]. 李文林, 邹建成等, 译. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[16] Arcavi, A., Bruckheimer, M., Ben-zvi, R. Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1982, 3(1): 30-37.

教学实践

HPM 视角下的二项式定理教学*

向荣[1] 韩嘉业[2]

（1.华东师范大学附属东昌中学，上海，200120；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

“二项式定理”是上海教育出版社高中三年级第一学期第 16 章《排列组合与二项式定理》中的一节内容。课程标准对其的描述是：二项式定理的推导依赖于组合数的性质，它可用于解决诸如与整除有关的问题以及某些计算近似值的问题，也是进一步学习高等数学必备的基础知识[1]。教材则直接呈现$(a+b)^1$、$(a+b)^2$、$(a+b)^3$的展开式，通过分析$(a+b)^4$的展开式，运用组合思想进行解释，从而得到二项式定理，整个推理过程非常简略。纵观已有的教学设计，教师注重展示二项式定理推导的思维探究过程，注重培养学生观察、类比、归纳的探究能力和理性思维[2-5]。同时也存在不足：如未关注学生的学习动机，使得学生不了解为什么要学习二项式定理[2-3]；教学内容单调，使得学生无法感受数学文化的多元性[4]；偏向于学生的知识技能，而忽视了学生的情感信念[5]。

美国数学史家、数学教育家 M·克莱因（M. Kline，1908-1992）曾经指出，数学史是教学的指南[6]。翻开历史的画卷，我们会发现：某一个命题或一个公式从产生到完备，从特殊到一般，往往走过几百年甚至几千年的漫长旅程，不同民族、不同时期的数学家们都对它做出过贡献，二项式定理就是其中的一例。因此，从 HPM 视角来设计和实施本节课的教学一定会精彩纷呈。

美国哥伦比亚大学的西格尔（M. Siegel）教授在 1998 年提出了数学探究式教学的四阶段模式：准备与聚焦、探索与发现、综合与交流、评估与延伸[7]。近年来，已有一些基于数学史的探究式教学课例成果可供参考[8-9]。故本次教学采用探究式教学模式将是一次非常好的尝试，从四

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目——数学课程与教学中如何落实立德树人任务的研究（A8）系列论文。

个阶段进行教学设计，既关注学生在课前的思考，以学定教；又关注学生在课堂上对知识的深入探究、对话理解，培养提升学生的数学素养；同时关注学生的学习体会与收获，实现学生课后的“再学习”。基于这样的思考，我们拟定本节课的教学目标如下：

（1）了解二项式定理产生的必要性；

（2）采取适当的方法获得二项式定理，并能够加以证明；

（3）在二项式定理推导的过程中理解二项式系数与组合数之间的关系；

（4）学会应用二项式定理解决相关问题；

（5）通过数学史的渗透，感受多元的数学文化，建立良好的数学观，培养浓厚的学习兴趣，激发问题探究的意识。

2 历史材料及其运用

从公元 1 世纪数学家们开始二项式定理的研究，到 19 世纪二项式定理的研究在历史画上了句号，这期间经过了漫长的 1800 多年。本节课将以二项式定理的形成为脉络，利用重构、复制、附加的方式将相关的历史素材融入到教学之中。

2.1 二项式定理的起源

为了解决已知正方形土地的面积求解正方形边长的问题，成书于公元 1 世纪的《九章算术》少广章第十二至十六问提出了开平方的问题，并记载有相关的开平方术；紧随其后，少广章第十九至二十二问提出了开立方的问题，并记载有相关的开立方术[10]。作为世界上最早的多位正整数开平方、开立方的一般程序，《九章算术》中的方法用到了两个公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 和 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，当时是使用修辞代数的方式进行记载的。

11 世纪中叶，中国数学家贾宪在《释锁算书》中给出了二项式系数表的前 7 行，用于求解次数大于 3 的高次方根问题。但非常遗憾的是《释锁算书》原书佚失，现在只能在 13 世纪中国数学家杨辉所著的《详解九章算法》一书中看到贾宪的二项式系数表，贾宪将整张数表称为“开方作法本原图”。杨辉引用了这张数表，并注明“《释锁算书》，贾宪用此术”，现在常常误称“贾宪三角”为“杨辉三角”[11]。贾宪未给出二项系数的一般公式，因而未能建立一般正整数

次幂的二项式定理。

14 世纪初，中国数学家朱世杰（1249-1314）在《四元玉鉴》中复载此数表，并在贾宪的基础上前进了两步，一是增加了 2 行，二是将相关的数字用线段连接，称为“古法七乘方”。可以推断，朱世杰已经总结出了相邻两行之间的关系：每个数等于它肩上两个数相加[11]。

2.2 二项式定理的发展

1654 年，法国数学家帕斯卡（B. Pascal，1623-1662）著《论算术三角形》一文，给出二项式系数表（见图 1），详论二项式系数的性质和应用，获得算术三角形的 19 条性质，帕斯卡建立了正整数次幂的二项式定理[13]。1665 年，英国数学家牛顿（I. Newton，1642-1727）发现了一般有理数指数幂情形的二项式定理[14]。1695 年，德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646-1716）和瑞士数学家约翰・伯努利（John Bernoulli，1667-1748）将正整数次幂的二项式定理推广到三项以上情形[12]。18 世纪，数学家们开始对二项式定理进行证明，1773 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707-1783）第一个给出实指数情形的一般证明。19 世纪，挪威数学家阿贝尔（N. H. Abel，1802-1829）研究了指数为复数的情形，从而基本上为二项式定理的历史画上了句号[12]。

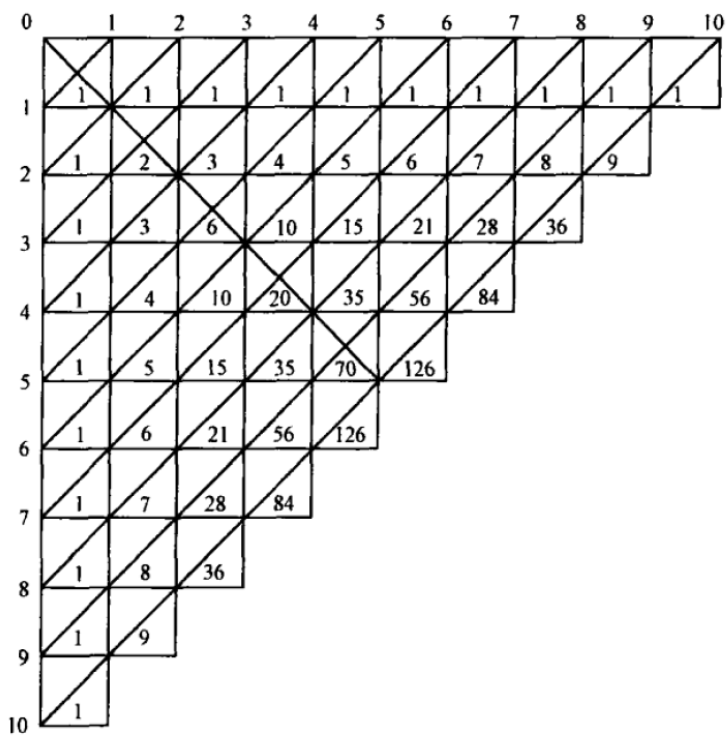


图 1 《论算术三角形》中记载的“二项式系数表”

3 教学设计与实施

3.1 准备与聚焦

师：今天我们将开启一段新的学习历程，将从一张图片开始（图 2），第三张邮票中的数表是什么呢？

生：杨辉三角。

图 2 邮票上的数学故事

师：原来大家对杨辉三角这么熟悉，那么请问这七行数字表达的是什么内容，其内涵是什么？

生：（沉默，有些茫然）……

师：此表是一张二项式系数表，第一行数字对应 $(a+b)^0$ 展开式，第二行数字对应 $(a+b)^1$ 展开式，那么第七行数字对应什么？

生：$(a+b)^6$ 展开式。

师：如展开 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$，你们看到了怎样的规律？

生：这些数字恰好是展开式的系数。

师：很好，这就是我们刚刚谈到的二项式系数表，大家习惯将此三角形数表称为杨辉三角，翻看史料，最早提出它的数学家是北宋的贾宪，他给出了直到六次幂的二项式系数表，并称之为开方作法本原图（图 3）。很可惜，贾宪的数学著作已失传。13 世纪数学家杨辉在《详解九章算法》中引用了开方作法本原图，并注明“《释锁算书》，贾宪用此术”，因而“杨辉三角”这一名称流传至今。

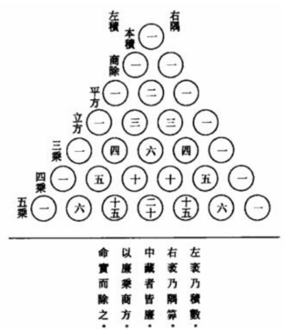


图 3 贾宪三角

图 4 朱世杰三角

（教师继续展示一幅图，询问学生观察此幅图的变化。）

师：到了 14 世纪，数学家朱世杰在《四元玉鉴》中复载此图（图 4），增加了两层，并添了两组平行线。从贾宪三角到杨辉三角，再到朱世杰三角，我们可以提出问题：既然能够研究 $(a+b)^6$、$(a+b)^8$，那么你们认为一直可以研究到多少次？

生：可以研究到 n 次

师：我们把 n 次的展开式对应的公式称为二项式定理，其研究方法是从特殊到一般，这就是我们本节课的主题。对于一个新知识的学习需要充分了解其发生发展的全过程，因此需要思考以下问题：

1.该知识点是如何产生的，其产生的必要性是什么？

2.如何运用已有的数学基础知识和方法获得新的数学发现？如何开展数学知识的探究过程？

3.获得新的知识后可以解决哪些具体问题？

师：请同学们以小组为单位，对已经汇总的课前思考问题对应上面的三个问题进行归类，思考我们将如何很好地实现本节课的学习目标。

（学生进行小组讨论）

【设计意图】展现邮票上的数学，引起学生对数学美的感悟。通过一张图表（贾宪三角）引发学生的思考，引出主题。贾宪三角对学生并不陌生，然而学生们普遍了解的是其中的数字，这些数字背后内涵并不清楚，同时翻看史料发现杨辉三角是一个误传，可以很自然地向学生讲授数学故事。课堂伊始就是要唤起学生的学习热情，从学生熟悉的数学史素材展开本节课的学习，使课堂充满人文情怀。

3.2 探索与发现

师：接下来我们将对三个问题展开讨论。问题一：二项式定理学习的必要性是什么？第一组问到了类似的问题：二项式定理产生的源头是什么？请问你们能回答吗？

生：不能。

师：步入历史长河，可以很肯定、很清楚地找到答案：二项式定理的产生是为了开高次方。

（为了让学生在课堂上理解古人开高次方的过程，通过播放 2 分钟微视频的方式来呈现历史，在素材的选择上尊重历史，选择的是《九章算术》中的问题：32461759 的三次方根是多少？）

师：下面我们将进入问题二的探究，以小组为单位开展自主探究，能否发现正整数次幂的二项式定理？请同学们观察杨辉三角（贾宪三角），展开式中一共有多少项？每一项有怎样的特征？这些问题都需要引起我们的思考，请每个小组做好三件事情，确定研究方案、寻找研究方法、得出结论。

（7 个小组开展问题的自主探究。教师在教室内巡视，发现学生有困难时，启发引导。）

师：如推导$(a+b)^3$，同学们将采取怎样的方法？

生 1：$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$。

生 2：$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$。

师：请问生 2，运用你的方法，展开式中有几项？合并之后每一项有怎样的特征？

生 2：展开式中有 8 项。

师：能说说这 8 项的来源吗？

生：每个因式中有两项，所以是$C_2^1C_2^1C_2^1=8$。

师：很好！这实际上是组合思想的体现，经过同类项合并之后形成了 4 项。印度人在研究二项式定理时用到的就是组合思想，恰恰二项式系数表中也可以给出组合数的几何表示，后面的课中会讲授。

师：运用这样的思路$(a+b)^4$展开式中一共有多少项？合并同类项之后每一项的特征？

生：一共 16 项，合并同类项之后一共有 5 项，其特征为 $a^r b^{4-r}(0 \le r \le 4)$。

师：好，下面请选择适当的方法研究 $(a+b)^n (n \in N^*)$ 的展开式？

（学生继续开展研究，教师在教室内巡视，及时发现学生的研究结果，借助信息技术，通过希沃授课助手即刻投影出来。）

【设计意图】学生的探究应该以问题为起点，向学生呈现本节课的学习问题既有利于学生开展问题探究，同时便于检测本节课的教学目标的达成情况。通过小组合作的形式、借助信息技术（希沃授课助手），让课堂上生生互动、师生之间的思维互动真实发生。通过探究发现学生完成了对知识的自我构建，教材上呈现的静态内容被生动地再现。

3.3 综合与交流

（教师展示学生的研究成果，并请相应同学进行交流。）

生：$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$，其中的每一项符合 $C_n^r a^{n-r} b^r$。

师：请对其加以解释。

生：$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b)=C_n^0 a^n b^0+C_n^1 a^{n-1} b^1+\cdots+C_n^r a^{n-r} b^r+\cdots+C_n^n b^n$，从每一个因式中都要取出一个数，或者 a，或者 b，第一项 $C_n^0 a^n b^0$ 表示 n 个因式都取 a，没有取 b，第二项 $C_n^1 a^{n-1} b^1$ 表示 n-1 个因式都取 a，有一个因式取 b。

师：非常好，这实际上就是组合思想的体现。而这位同学概括的 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 即是二项展开式的通项。把整个展开式称之为二项式定理。

（教师带领学生强化认识 C_n^0、C_n^1 是展开式中第几项的二项式系数，明确通项的准确表达形式：$T_{n+1}=C_n^r a^{n-r} b^r (0 \le r \le n, n \in N^*)$，对展开式的项数进行强化。）

师：对二项式定理的研究不仅中国古代的数学家在研究，早在公元 5 世纪印度，其后阿拉伯国家、16 世纪欧洲各个国家的数学家都在研究二项式系数表，但都未给出一般形式，直到 1654 年法国数学家帕斯卡给出了二项式系数完整的研究，并给出了正整数次幂的二项式定理的一般形式，就是刚刚同学们研究出的结论。我们利用组合思想推导出了二项式定理。

师：既然已经推导出了二项式定理，让我们看看问题三的解决，如何应用二项式定理解决

具体问题。

（教师出示两道例题，引导学生共同解决，突出二项展开式通项公式的应用，规范答题步骤。题 1：求 $(x+\frac{1}{x})^5$ 展开式的第四项？题 2：求 $(2x-1)^7$ 展开式的第四项及展开式？）

【设计意图】通过两道具体题目的练习帮助学生认识二项式定理的具体应用，强化学生对二项展开式通项的理解，对 a、b 含义的深入理解、对 n 是正整数的理解，让学生在练的过程中对二项式定理有进一步的感知，为后续知识的学习埋下伏笔。同时回应学生课前提出的问题，将对二项式定理基于教材的研究深入挖掘，积极培养学生善于思考问题、提出问题并解决问题的能力。

3.4 评估与延伸

（在以上三个问题得到解决之后，启发引导学生进行深入学习，再一次回归学生提出的问题，如学生课前问题：$(a+b+c)^n$ 等于什么？怎么处理带根号（比如立方根）的二项展开式问题？充分肯定学生与数学家的想法是一致的，继续介绍数学史中精彩的内容，1695 年德国数学家莱布尼兹和瑞士数学家约翰·伯努利将正整数次幂的二项式定理推广关到三项以上情形，解决了 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n$ 的展开式问题。而在 1773 年，瑞士数学家欧拉第一个给出了实指数情形二项式定理的一般证明。19 世纪法国数学家柯西研究了 x 为复数的情形，年轻的挪威数学家阿贝尔对 x 和 n 均为一般复数的情形作了研究。）

师：原来历史上的数学家与我们的认知是及其相似的，所以我们今天共同的身份是：数学家。希望同学们开展课后自主学习、研究。

（HPM 的教育价值可以在六个方面得以体现：知识之谐、探究之乐、方法之美、能力之助、文化之魅、德育之效。本节课教师在课堂小结阶段呈现这六个关键词，请同学们任意选择谈谈学习体会和收获。）

师：课前看到同学们提出的如此之多且有价值的问题，我的内心非常喜悦，同学们的一些思考点也正是历史上那些数学家的思考研究点，大家还记得老师上周与大家说过：我们这节课会有一个身份，那此时我们的身份就是数学家。接下来请大家在这六个核心词中选择一个说说你们这节课的收获。

（7 个学习小组都选派了代表进行课堂交流。学生谈到中西方文化的融合；谈到学习新知识是基于之前已经学习的内容，知识板块之间要融会贯通；谈到在本节课的学习过程中采取了新技术，运用微视频，引经据典展现中国古代数学史的魅力；谈到在问题讨论过程中，组员积极参与其中，提高了发现问题、解决问题、团队协作的能力，同时提高了逻辑推理的数学素养；谈到要向数学家们一样学习数学，有信心，坚信我们都是数学家。）

师：翻开历史画卷，某一个命题或一个公式从产生到完备，从特殊到一般，往往走过几百年甚至几千年的漫长旅程，不同民族、不同时期的数学家们都对它做出过贡献。二项式定理就是其中的一例。刚刚同学们谈的都非常好，本节课我们体会了从特殊到一般的数学思想方法，了解了组合思想在推导二项式定理中的应用，数学抽象、逻辑推理、数学运算的数学素养得到了培养，此外我们感受到了多元文化，不同民族、不同国家的数学家所共有的理性精神，让我们形成了正确的数学观：知识是从不完善到完善的一个动态发展过程。此外这一章中还包含趣味数学问题，期待着同学们课后的自主学习。

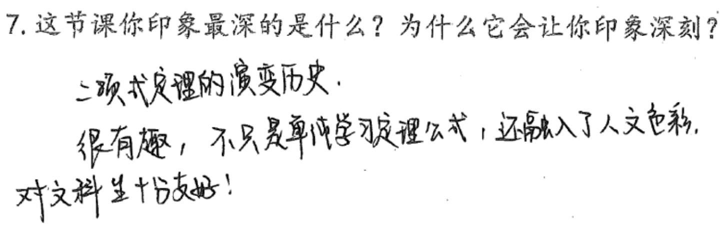
【设计意图】在一节课的学习过程中我们既要关注学生对知识和技能的获得，又要关注学生在情感态度价值观上受到的影响，注重学生数学核心素养的培养，如何让这些教学目标可测，在课堂小结阶段可以创新形式，将学习时空和话语权交还给学生，会成为一节课的点睛之笔，让我们真真切切地看到学生的学习收获。

4 学生反馈

课后，我们收集了全班 32 名学生对本节课的反馈信息。对于本节课的总体情况，所有学生都表示听懂了这节课的教学内容，68.75%的学生喜欢将数学史融入课堂的教学，28.13%的学生喜欢本节课的数学史融入方式，这些反馈说明本节课学生的接受度较高。对于本节课运用的微视频，所有学生都表示喜欢这种新的方式。

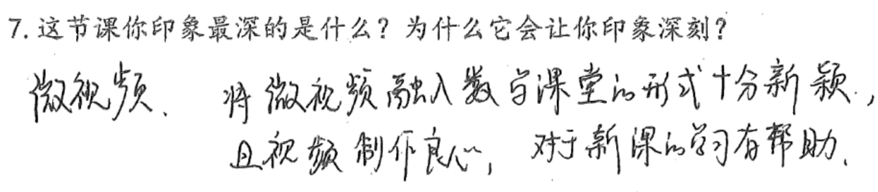
对于问题：古人为什么要研究二项式定理？96.9%的学生准确说到是开高次方的需要，3.1%的学生写到是多项式的运算，这说明第一个教学目标很好地实现了。对于问题：在本节课中，我们学习了哪些数学思想方法？学生说到的思想方法有从特殊到一般、数学归纳法、组合思想、逻辑推理、数学建模等，这说明学生对二项式定理的研究方法有了一定的了解，这间接说明第二、第三和第四个教学目标也实现了。对于问题：这节课你印象最深的是什么？为什么它会让

你印象深刻？学生的回答主要有：1. 数学史（18 条），为古代数学家的智慧感到钦佩，二项式定理的发现、发展有迹可循，这节课不单单是学习了定理公式，还融入了人文色彩，古人的探索精神很艰辛，教会我们要刻苦努力学习；2. 数学思想（9 条），巧妙地结合了我们已经学习过的组合思想来探究得出二项式定理，一步步从特殊到一般地探究二项式定理，寻找规律的过程本身很有趣味，促进了我对二项式定理展开式的理解；3. 微视频（7 条），微视频很精彩，告诉了我们古人如何开高次方；4. 同学的发言（1 条），课堂小结由同学们进行总结发言，感觉比较新鲜，从来没有过这样的体验，也让我对这节课的学习有了更深刻的认识。由此可见，最后一个教学目标也很好地实现了。


7. 这节课你印象最深的是什么？为什么它会让你印象深刻？

二项式定理的演变历史.
很有趣，不只是单纯学习定理公式，还融入了人文色彩.
对文科生十分友好！

图 5 学生答卷的扫描件 1


7. 这节课你印象最深的是什么？为什么它会让你印象深刻？

微视频、将微视频融入数学课堂的形式十分新颖，
且视频制作良心，对于新课的学习有帮助.

图 6 学生答卷的扫描件 2

5 结 语

本节课基于学生在课前提出的问题，借鉴二项式定理的历史发展过程，设计探究式教学活动，让学生经历知识的发生发展过程，体会数学研究的方法，积累数学活动经验，加深学生对数学的理解。本节课数学史的应用方式主要有重构式、复制式和附加式：教师基于二项式定理的历史，采用重构的方式从二项式定理学习的必要性、二项式定理的发现、二项式定理的运用三方面展开课堂教学；采用复制式讲解贾宪、杨辉、朱世杰探索二项式定理的历史过程；采用附加式穿插莱布尼兹、欧拉等人的研究成果。

本节课依据准备与聚焦、探索与发现、综合与交流、评估与延伸的数学探究式教学四阶段

模式，通过学生小组合作研讨、师生互动交流的方式引导学生自行发现，运用组合思想、从特殊到一般的思想，成功地得到了二项式定理。从学生反馈来看，他们不仅有知识上的学习、能力上的提高、数学素养的培养，而且学生感受到了数学的理性精神，一种学习热情和自信心激励着他们持续不断地努力。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京：人民教育出版社, 2017.

[2] 邹军明. 优化课堂设计 培养核心素养——以《二项式系数的性质和应用》一课为例[J]. 福建中学数学, 2018(05): 31-34.

[3] 宗火祥. 问题驱动思维 思维成就素养——以“杨辉三角与二项式系数的性质”为例[J]. 中学数学教学参考, 2019(13): 21-24.

[4] 陈崇荣, 舒桢. 一节以数学文化为背景的开放型课例的尝试与反思[J]. 福建中学数学, 2011(10): 27-28.

[5] 金建军. 研究性课题：《杨辉三角》的教学设计[J]. 中学教研, 2005(12): 6-8.

[6] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社, 2017.

[7] Siegel M, et al. Supporting students' mathematical inquiries through reading[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1998, 29(4): 378-413.

[8] 王鑫, 汪晓勤, 岳增成. 基于数学史的数学探究活动设计课例分析[J]. 中学数学月刊, 2018(10): 54-58.

[9] 瞿鑫婷, 汪晓勤, 贾彬. 基于数学史的三角形内角和探究活动的设计与实施[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(02): 12-15+46.

[10] 郭书春. 九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社, 1998.

[11] 汪晓勤. 算术三角形的历史及其文化价值[J]. 中学数学月刊, 2019(04): 52-55.

[12] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社, 2002.

[13] Smith D E. A Source Book in Mathematics[M]. New York: McGraw-Hill Book Co., 1929.

[14] Struik D J. A Source Book in Mathematics, 1200-1800[M]. Massachusetts: Harvard University Press, 1969.

从圆到球，从三角形到四面体

——基于新课标的高中立体几何类比推理教学设计

张冰[1]，纪妍琳[2]

（1. 上海市通河中学，上海 201900; 2. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

类比推理是指根据两事物在某些属性上的相似性而断定它们在另一些属性上也相似的推理形式[1]。《普通高中数学课程标准（2017 版）》（以下简称《课标》）提出，逻辑推理包括从特殊到一般的归纳、类比和从一般到特殊的演绎推理[2]。《课标》第一次明确了归纳推理、类比推理与演绎推理一样，都是有逻辑的思维形式[3]。因此，类比推理是培养学生逻辑推理素养过程中不可忽视的内容，也是培养学生创新和发现意识的重要内容。然而，在实际教学中，如何有效、恰当地进行类比推理的教学仍需讨论。

类比推理不同于其它数学知识，它不是具体的概念或原理，而是推理的一种形式，是培养逻辑推理素养的必备要素。根据《课标》中对于逻辑推理素养内涵和不同水平的描述，学生既应该理解类比推理是发现和提出数学问题的重要途经、理解类比推理的基本形式，还应该明确类比推理得到的结论是或然成立的。基于类比推理的特点和《课标》的要求，笔者在高中立体几何的教学与复习中围绕类比推理设计了三个教学活动环节，以期通过教学活动的层层推动，进阶式地培养学生的类比推理能力，逐步达到课程标准的要求，总体设计见表 1。

表 1 类比推理教学活动设计

活动设计	教学目标
新知探究：球体积公式 由圆面积有关命题，类比推理得到球体积的有关命题	**初识类比推理：** 通过类比推理得到关于球体积公式的猜想，了解类比推理是得到数学发现的重要途经，了解类比推理的基本形式。
数学探究活动：从三角形到四面体 基于三角形与四面体的相似性，类比推理得到有关四面体的命题	**体验类比推理：** 通过小组合作，尝试运用类比推理得到有关四面体的数学命题的过程中体验类比推理的基本形式，认识类比推理是得到数学发现的重要途经。
数学阅读与写作：类比推理的昔与今 阅读有关类比推理的数学史，结合数学探究活动的经历，通过数学写作的方式交流对类比推理的看法	**理解类比推理：** 体会类比推理在数学发现中的价值，理解类比推理的或然性。

笔者通过以上三个教学活动环节的设计，将类比推理的教学穿插在高中立体几何的教学中。本文将基于上述三个教学环节，总结在高中立体几何中实施类比推理教学的设计和经验，为类比推理教学的开展提供参考。

2 类比推理教学活动的具体开展

2.1 新知探究，初识类比推理

对于数学定理，通过演绎推理证明其正确性固然重要，但利用归纳推理（归纳、类比）揭示其发现的过程才能让学生“知其然”更知其“所以然”。数学命题的证明主要依赖演绎，而数学命题得到主要依赖归纳和类比[4]。

因此，在命题或公式的教学中，教师可以引导学生借助类比推理获得对于新知的猜想，一方面，学生在猜想探究中建构对新知的理解；另一方面，学生在具体知识的学习过程中深刻体

会到类比推理的创造性。

例如，在进行球的表面积和体积公式的教学时，可以引导学生类比圆的周长与面积之间的关系，猜想球的表面积与体积之间的关系。

在利用沪教版教材进行球体积公式的教学时，笔者引导学生进行类比推理进而得到关于球体积公式的猜想，教学片段节选如下。

师：六年级的时候，我们已经接触到了平面几何的相关知识，学习了“圆”这个几何图形，关于圆面积公式的探讨，课本上给出了如下推导思路（PPT 展示沪教版六年级数学教科书中切割法求圆面积相关内容图片）。同学们对照这幅图，能简单回顾一下当初圆面积公式是如何推导出来的吗？

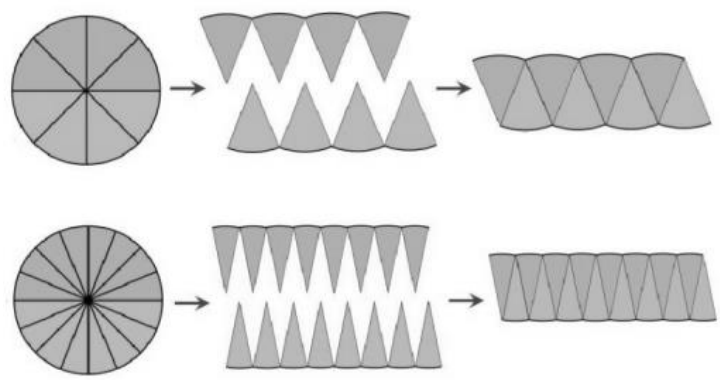


图 1 圆面积公式的推导

生：我们通过对圆进行均等分割，将得到的小扇形近似看成小三角形，进行拼接组合，得到的图形近似平行四边形，从而我们通过平行四边形的面积公式可计算得到圆面积。

师：得到的平行四边形和圆有什么关系呢？

生：平行四边形的底等于圆周长的二分之一，高等于圆的半径。

师：那我们就可以得到，$S_{圆}=\frac{1}{2}C_{圆}R=\frac{1}{2}(2\pi R)R=\pi R^2$，观察这个结论，圆的面积除了与拼接得到的平行四边形相等外，还与什么样的图形的面积相等？

生：与以圆的周长为底，以圆的半径为高的三角形面积相等。

师：嗯，对的，圆的面积恰好等于以圆的周长为底、以圆的半径为高的三角形的面积。

我们知道，球是空间中到定点等于定长的点的集合，圆是平面中到定点等于定长的点的集合，球与圆具有很强的相似性，那么球体积与球表面积之间的关系，是否类似于圆面积和圆周

长之间的关系呢?

生：……（沉默，陷入思考）

师：球可以由圆绕着过圆心的轴（也就是圆的对称轴）旋转得到，而将三角形绕着它的高旋转一周，可能得到什么呢？

生：圆锥!

师：是的！基于这些发现，根据“圆的面积等于以圆的周长为底、以圆的半径为高的三角形的面积”，同学们能类比推理得到球的体积和球的表面积之间的关系吗？

生：旋转之后，球的面积“对应”圆的周长，球的体积“对应”圆的面积，那么“以圆的周长为底、以圆的半径为高的三角形的面积”可以类比为“以球的面积为底，以球的半径为高的圆锥的体积”。

师：不错。什么是“以球的面积为底”？能更加严谨地表述一下这个猜想吗？

生：球的体积等于以球半径为高，底面积等于球的表面积的圆锥的体积，即

$$V_{球}=\frac{1}{3}S_{球}R$$

师：很好！球的表面积公式我们已经知道了，按照上面的类比推理，我们可以进一步获得球体积公式的猜想了！

在沪教版教材中，球面积公式先于球体积公式出现，故笔者在球体积公式的教学中引导学生利用类比推理得到关于球体积公式的猜想。随后，播放了微视频“球积公式的历史”，视频中不仅较详细地介绍了阿基米德由类比推理关于球体积与球面积的关系的猜想，印证了学生刚完成的类比推理的猜想与伟大的数学家阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）如出一辙，还介绍了德国数学家开普勒 192（J. Kepler, 1571-1630）的“切割法”求球体积的方法，最后提及许多的数学家：中国的祖暅、意大利的卡瓦列里（B. Cavalieri, 1598-1647）、日本的关孝和（Seki Takakazu, 1642-1708）等在关于球积公式的推理中也都有各自不同的方法。微视频的展示，不仅让学生了解到类比推理是数学发现的重要途径和基本形式，也让学生体会到类比推理在数学发现中的价值。

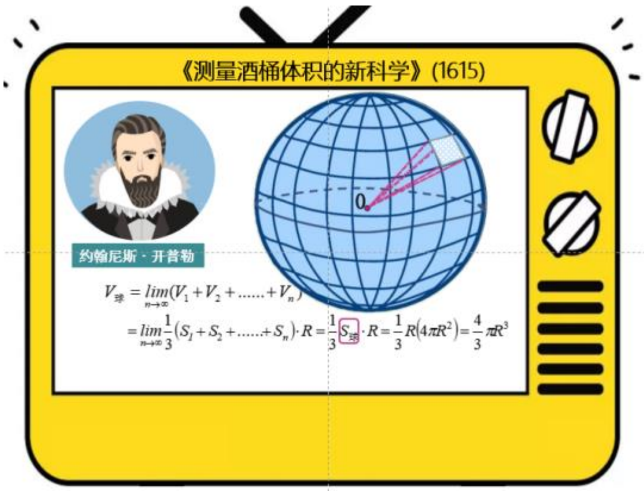


图 2 微视频片段

而在人教版教材中，球体积公式先于球面积公式出现，笔者建议教师可以在球面积公式的教学中开展类似的类比推理探究环节，也能让学生在具体知识点的学习过程中了解类比推理。

类比推理的教学不能脱离具体的数学对象，就“类比”谈“类比”，除了球体积公式的教学，三棱锥体积公式等内容的教学中同样可以渗透类比推理[5]。在这样的方式下，学生对于所学的知识能有更加深刻的理解，经历数学发现的过程，并从中了解类比推理的形式。

2.2 合作探究，体验类比推理

由类比推理的形式可知，具有相似属性的数学对象之间可以进行类比推理。在高中数学中，圆与球、三角形与四面体、等差数列与等比数列等具有相似属性的数学对象，均可以利用类比推理进行研究。针对某一对数学对象，学生利用类比推理可以得到许多数学发现，教师可以针对某一数学对象设置数学探究活动，让学生自主地通过类比推理发现新命题，从中体会类比推理的创造性。

在学生学习完立体几何相关章节后，笔者开展了“立体几何中的类比推理——从三角形到四面体”的数学探究课，旨在为学生运用类比推理进行数学发现创设机会，实现让学生真正理解类比推理是发现和提出数学问题的重要途经，以及理解类比推理的基本形式的教学目标。

基于美国学者西格尔（M. Siegel）提出的数学探究式教学的四个阶段：准备与聚焦、探索与发现、综合与交流、评价与延伸[6]，笔者将此节探究课设计为四个环节，流程如图 3 所示。

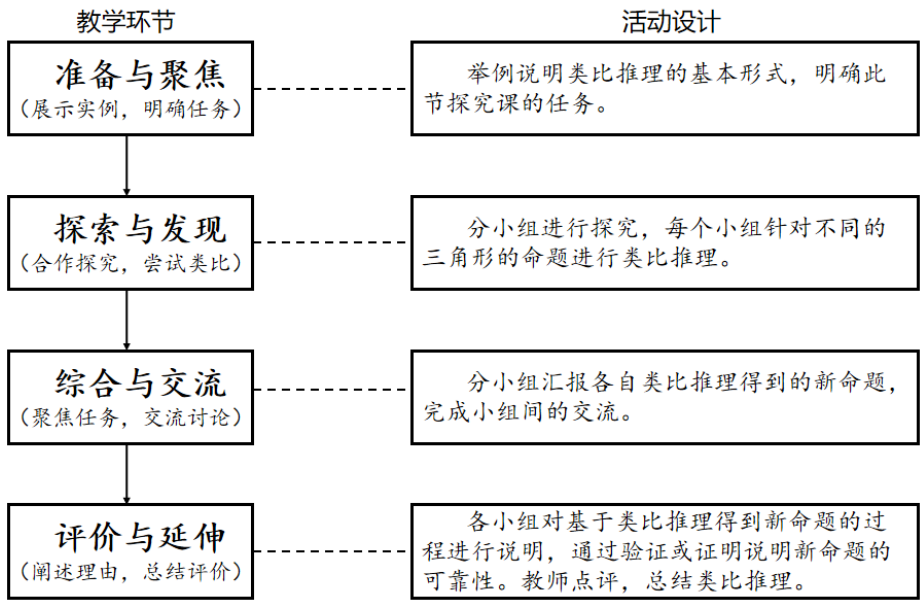


图 3 教学流程设计

“聚焦与准备”环节中，首先以三角形和四面体之间的类比推理为例，说明类比推理的基本形式。

师：三角形是“过线段外一点分别同线段的两个端点相连接”所构成的，而四面体，也是三棱锥，则是“过三角形所在平面外一点分别同三角形的边所做的平面”所构成的。从这一点可见，两者之间有很强的相似性，同学们还能举出其他方面的例子来说明两者的相似性吗

生：三角形是空间中边数最少的多边形，而四面体是空间中面数最少的多面体。

师：嗯，很好！我们可以从多方面说明三角形与四面体之间的相似性，那这就为我们将两者进行类比提供了依据，我们就可以把三角形的很多结论类比到空间中，比如，在三角形中，有三角形任一一边之长小于其余两边长度之和，那么类比到空间中，我们能得到什么呢？

生：三角形类比到空间中是四面体，三角形的边可以类比为四面体的面，那么边长可以类比为面积。可否类比得到：四面体任一一个面的面积小于其余三个面的面积之和？

师：嗯！非常好，我们来总结一下刚刚我们进行的类比推理，首先我们找到两个对象之间的相似性，然后再此基础上，根据 A 对象所具有的性质，推断 B 对象也具有类似的性质。

类比推理通常可用下列形式来表示（其中a_i与a_i'相同或相似）：

A 具有性质a_1，a_2，a_3,⋯，a_n 及d

B 具有性质$a_1{}'$，$a_2{}'$，$a_3{}'$，⋯，$a_n{}'$

因此，B 也可能具有性质d'

接着，笔者引导学生基于先前类比推理的经历，将平面几何与空间几何基本元素、基本量、基本图形之间建立起对应关系（如表 2），为学生进行类比推理的尝试提供了较好的基础。

表 2 平面几何中基本元素、基本量与基本图形在空间几何中的对应

	平面中	空间中
基本元素	点	点或直线
	直线	直线或平面
基本量	长度、	长度或面积
	面积	面积或体积
基本图形	角	二面角
	三角形	四面体
	圆	球
	（弦长、直径、切线、周长、面积）	（小圆、大圆、切面、面积、体积）
	......	......

“探索与发现”环节，每个小组选择一个三角形的有关命题，合作将其类比到四面体中，大多数小组能完成类比推理任务。“综合与交流”环节，学生在笔者的引导下进行清晰的汇报与交流，教学片段如下。

生：由“正三角形内任一点到三角形三边的距离之和为定值”，我们小组类比推理得到的相关四面体的命题为：正四面体内任一点到四面体四个面的距离之和为定值。

师：非常好，新命题表述得很清晰，你能具体说说你们小组是如何进行类比推理得到这个命题的吗?

生：平面中的“正三角形”可以类比为空间中的“正四面体”，“点到三条边的距离”可以类比“点到四个面的距离”。

同时，在学生汇报由类比推理得到的新命题之后，笔者要求学生对其类比推理的过程进行说明，有助学生更好地掌握类比推理的形式。

类比推理是数学发现的渠道，但数学发现的证明还需通过演绎推理来完成。在学生陈述其类比推理的过程之后，教师应对学生利用类比推理得到猜想的做法进行肯定，同时与学生探讨所得命题的正确性，如下教学片段所示。

（接上片段）

师：非常好，你们小组通过类比推理得到了一个非常“漂亮”的命题，这个命题一定是正确的吗？

生：可能还得证明一下。

师：嗯，是的！虽然我们今天的任务只是通过类比推理得到新命题，但是我们得到的只是一个猜想。正所谓“大胆猜想，小心求证”，要说明其正确性，还得通过严谨的证明。

在“评价与延伸”环节，笔者与学生就类比推理的或然性进行讨论，明确类比推理得到的结论不一定是正确的，可以利用特例对所得命题进行初步验证，经过反复验证命题均成立后，再尝试对命题进行证明。课堂尾声，笔者布置课后任务，让学生在课后选择其它的具有相似性的数学对象进行类比推理的练习。

除了在课堂上开展探究活动，教师还可将“类比推理”设计为数学探究活动的课题，让学生进行更加全面的探究。课标修订后，新《课标》把“数学建模活动与数学探究”作为四条主线之一，在必修课程、选修课程均作出了明确的要求。“类比推理”在立体几何、解析几何、数列等知识内容中均有一定涉及，可作为数学探究的选题。

2.3 阅读写作，理解类比推理

翻开历史的画卷，数学家运用类比推理获得数学发现的例子比比皆是，同时不少数学家的类比错误也被载于史册。例如，阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）通过类比得到关于球面积公式的猜想[7]；印度数学家阿耶波多（Āryabhaṭa, 476-550）在其著作《阿耶波多历数书》“数学篇”中，类比三角形面积公式得出错误的三棱锥体积公式：三棱锥体积等于底面积与高的乘积的一半[8]；欧拉（L. Euler, 1707-1783）通过将有限次代数方程根与系数关系类比到无限次方程从而解决了 17 世纪下半叶的著名数学难题——自然数倒数平方和[9]。

有关类比推理的历史是类比推理创造性的最好诠释，数学家们在进行类比推理时也不免犯错的例子足以说明类比推理的或然性。将有关的史料作为课后的数学阅读材料让学生进行阅读，通过阅读数学家们基于类比推理获得数学发现的历史，学生可以感受到类比推理在数学发现中扮演的重要角色；通过阅读数学家们进行类比推理得到错误命题的史料，可以明白类比推理具有或然性，纵使是数学家使用类比推理也可能得到错误命题。

阅读后，教师可以鼓励学生通过数学写作的方式，结合“类比推理”探究课的经历和阅读数学史料的感受，表达对类比推理的看法，在交流与写作中提升表达与交流能力。下列片段节选自某学生的数学写作片段：

“以前总感到好奇，那一个个数学命题是如何得来的，总以为是聪明的数学家们灵感闪现，然后笔下生花就证明出来的。最近才知道，原来他们很可能用了类比推理得到的！但遗憾的是，类比推理得到的命题不一定是正确的。一开始我觉得，既然类比推理的结论还得通过证明才能说明其正确性，那直接证明不就好了吗，还要多此一举做什么？但仔细一想，没有猜想，我们又要去证明什么呢？尽管类比推理得到的结论可能是错误的，但它是我们获得发现的第一步，我们不能因为害怕错误就拒绝尝试，数学的发现也不是一帆风顺的……”

从这位学生的数学写作中，我们可以看到，类比推理相关史料的阅读，让他对类比推理有了更深入的思考，也形成了动态的数学观，体会到数学发展不是静态的、一成不变的。

3 教学启示

从三个教学活动中，我们得到如下启示。

（1）聚焦具体数学内容，揭示类比推理特点

类比推理的学习，不应该停留在类比推理形式的模仿，为完成“类比推理题”而“类比”。类比推理的教学应以具体数学对象为载体（如三角形与四面体、圆与球等）进行，通过具体实例，让学生真切体会到类比推理是数学发现的重要渠道。同时，类比推理的或然性也应是类比推理教学的重要内容，学生通过类比推理的学习后，能够辩证地看待类比推理的价值。

（2）融入相关数学史料，提升数学文化底蕴

类比推理是历史上数学家们作出数学发现的重要途径，在类比推理的教学中，融入类比推理的史料，一方面能够有力地说明类比推理对于数学发现的价值；另一方面也能说明类比推理

的或然性。通过数学史的融入，能够让类比推理的学习增添“人”的元素，而不停留于“冷冰冰”的形式化的类比，为类比推理的学习增添数学文化的色彩。

（3）采用多种学习方式，促进学生有效学习

类比推理不是特定的数学概念或命题，其学习不局限于课堂。教师除了在具体数学知识的学习中渗透类比推理外，非正式的学习方式也可以成为类比推理学习的有效途经，教师可以开展以课题研究为形式的数学探究活动、数学阅读与数学写作等等，让类比推理的学习不停留于课堂。

参考文献

[1] 熊惠民. 数学思想方法通论[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 199.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[3] 史宁中. 试论数学推理过程的逻辑性: 兼论什么是有逻辑的推理[J]. 数学教育学报, 2016(4): 1-16.

[4] 史宁中, 王尚志. 普通高中数学课程标准（2017）版解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[5] 官金龙.在立体几何教学中教一点类比推理[J]. 数学教学, 1993(01): 2-5.

[6] Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. Supporting students' mathematical inquiries through reading[J].*Journal for Research in Mathematics Education*, 1988, 29(4): 378-413.

[7] 阿基米德. 阿基米德全集[M]. 朱恩宽, 等, 译. 西安: 陕西科学技术出版社, 2010: 538.

[8] 李文林. 数学珍宝——历史文献精选[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 75.

[9] 汪晓勤. 欧拉与自然数平方倒数和[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2002, (4): 29-33.

案例分析

HPM 视角下的“扇形面积”同课异构课例分析

王海雯

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

扇形的面积是沪教版数学六年级上册第四章“圆和扇形”第二节的内容。扇形面积直接应用于圆锥的侧面积和全面积的计算，为高中阶段进一步学习立体几何打下基础。在学习本知识点之前，学生已经具备了弧长、圆心角、圆的周长、圆的面积及其基本公式的几何基础知识，能计算一些与圆有关的简单组合图形的周长和面积。教材以生活中学生熟悉的三色陀螺引入，通过观察红色、黄色、蓝色部分的形状，引出扇形的概念。紧接着，通过思考扇形面积与哪些量有关，推导出扇形面积公式。已有的教学设计通常采用两种方式：一种是通过探究弧长、圆心角、扇形占圆中相应量的几分之几，由部分与整体关系推导出扇形面积公式；另一种是通过求特殊角的扇形面积来探究扇形面积公式。[1][2]

HPM 视角下的数学教学关注知识的发展过程和学习的上升过程，希望学生经历概念的形成过程和公式的生成过程，自然地推导出扇形面积公式，既能符合学生的认知规律，又能引导学生领会其中的数学思想和数学方法。目前的教材以及已有的教学设计是从扇形和圆的面积比例关系出发得到扇形面积公式，但并未将推导圆面积公式的方法用于扇形，导致扇形面积公式$S=\frac{1}{2}lr$不易被学生理解。因此，我们希望通过将数学史融入扇形面积的教学，来解决这个问题。

为此，HPM 工作室以“扇形面积”为课题开展课例研究，工作室学员、来自上海市两所不同中学的教师 A 和 B 各自实施了“扇形面积”的教学。在课例研究的第一个环节，研究者搜集了 19 世纪西方早期教科书中关于“扇形面积”的教学内容，从扇形的定义和扇形面积公式的引入、推导和应用等方面，挖掘有用的史料；A 和 B 研读这些史料并对其进行裁剪和加工，结合教材和学情，各自初步完成教学设计；经过工作室的研讨，对教学设计进行修正，根据试讲的

效果，对教学设计作出进一步的修正和完善，并付诸实践。

本文从宏观和微观两个层面对 A 和 B 的教学进行比较和分析，试图揭示两节课的特点，从中获得有益的教学启示，并为 HPM 课例研究提供参考。

2 扇形面积的历史素材

2.1 扇形的定义

扇形是初中平面几何的重要概念之一，现行各版初中数学教科书所给出的扇形定义互有不同。人教版和沪教版给出的扇形的定义是从圆心角出发，而北师大版、苏教版和浙教版给出的定义则是从一条弧出发。历史上，最早给出扇形定义的是古希腊数学家欧几里得（Euclid, 公元前 330?-275?）。他在《几何原本》卷三命题 **10** 中给出了扇形的定义：由顶点在圆心角的两边和该两边所截一段圆弧所构成的图形，称为扇形。沪教版和人教版的教科书在对扇形的定义中也包含了圆心角，即由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形。而在其他西方早期教科书中，扇形的定义不尽相同。除了与几何原本相似的定义，大多数的美英早期教科书倾向于把扇形定义为：一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形。北师大版、苏教版和浙教版教科书中的定义与此相同。

2.2 扇形面积公式的推导

此外，扇形面积的计算也是方法各异，按照历史发生顺序，人们最先采用的计算公式是$S=\frac{1}{2}lr$，其中 S 为扇形面积，l 为扇形的弧长，r 为扇形的半径。而后采用公式$S=\frac{n}{360}\pi r^2$，其中 S 为扇形面积，n 为扇形的圆心角的度数，r 为扇形的半径。对于圆心角度数不同的扇形，让学生在课后习题中求得含特殊角的扇形面积。

扇形面积公式$S=\frac{1}{2}lr$的推导方法大致可分为三类。

第一类是分割的方法，如美国数学家华尔克（T. Walker, 1802-1856）在《几何基础》中即采用此法[3]。由于圆的周长可看作是边数趋于无穷的正多边形的周长，内接圆的半径就是它本身的半径，而边数趋于无穷的正多边形可分割成无穷多个近似的小三角形，三角形的面积为半底乘高，因而圆面积等于半周长乘半径。类似地，将扇形分割成无穷多个小三角形，那么扇形面积等于半弧长乘半径。如图 1，将扇形分成无限个小扇形，将每个小扇形看作近似三角形，于是

扇形面积等于无限个三角形面积之和。

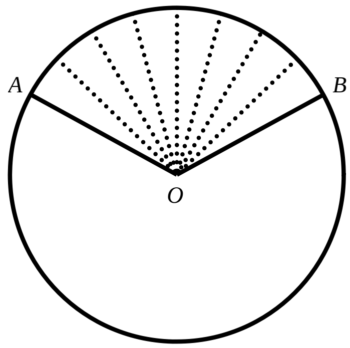


图 1 分割法

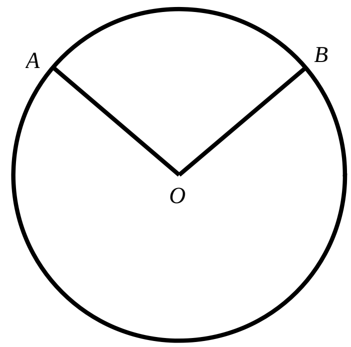


图 2 比例法

第二类利用扇形面积与圆面积之比，如 19 世纪美国数学家格林利夫（B. Greenleaf, 1786-1864）在《几何基础》中即采用此法[4]。如图 2，设 AB 的长度为 l，圆周长为 C，则有

$$S_{扇形AOB}:S_{圆O}=l:C=\frac{1}{2}lr:\frac{1}{2}Cr$$

因$S_{圆O}=\frac{1}{2}Cr$，故有

$$S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}lr$$

第三类是 17 世纪德国数学家开普勒（J. Kepler, 1571-1630）的方法。如图 3，将扇形 AOB 的面积对应到ΔOGH 的面积上，虽较为直观，但不够严谨。有的教科书中甚至以引理的形式，直接给出扇形面积公式，并没有给出具体的推导过程。

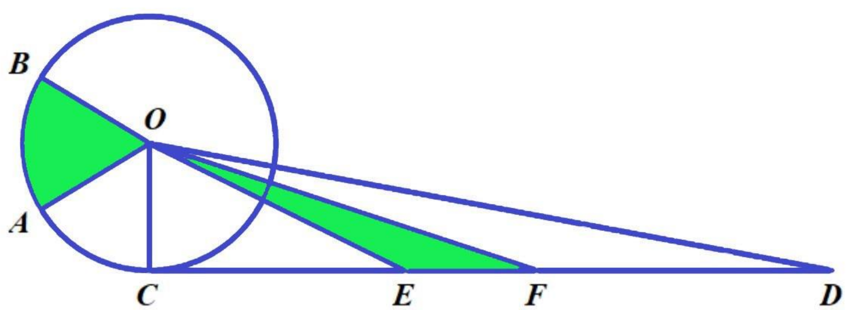


图 3 开普勒的方法

2.3 与扇形相关的问题

历史上，与扇形面积相关的问题数不胜数，精彩纷呈，令人着迷。古巴比伦时期的泥版书上，已载有一些特殊图形面积计算问题[5][6]，如图 4 所示。

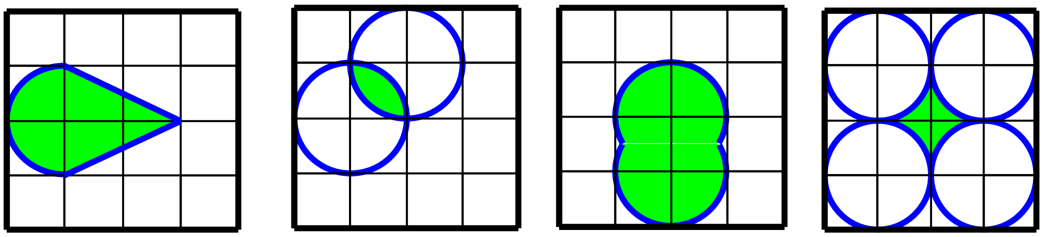


图 4 古巴比伦泥版书上的特殊图形面积问题

古希腊数学家希波克拉底（Hippocrates,前 5 世纪）在研究化圆为方问题时，发现了与扇形面积密切相关的“弓月形”。如图 5，等腰直角三角形斜边上的半圆与以直角顶点为圆心、直角边为半径的四分之一圆弧所围成的弓月形的面积恰好等于等腰直角三角形的面积。阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）研究过若干半圆所围成的“鞋匠刀形”和“盐窖形”等有趣的图形。如图 6，大半圆直径上的一点将直径分为两段，而后在每一段上作同侧半圆，那么由三个半圆所围成的图形称为“鞋匠刀形”。如图 7，将大半圆直径分为三段，其中左右两段长度相等，在左右两段分别作与大半圆同侧的半圆，在中间作与大半圆异侧的半圆，那么由这四个半圆所围成的图形称为“盐窖形”。

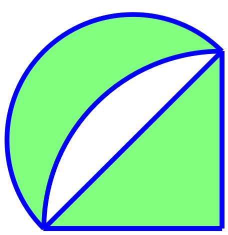


图 5 弓月形

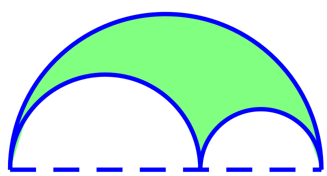


图 6 鞋匠刀形

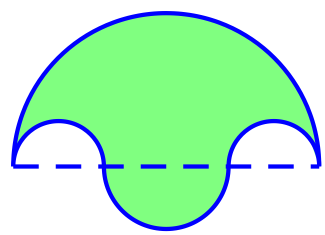
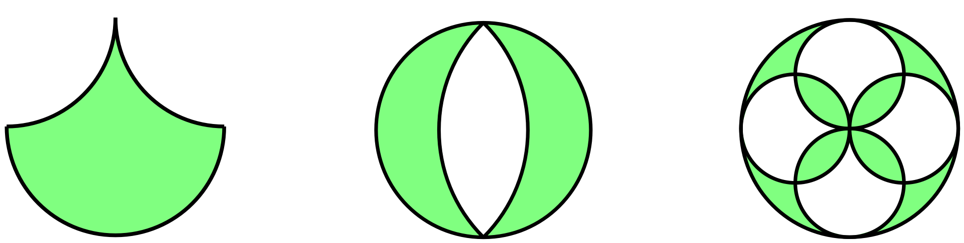


图 7 盐窖形

16 世纪，意大利艺术大师达芬奇（L. Da Vinci, 1452-1519）在他的素描手稿中绘制了很多由圆弧围成的图形，如图 8 所示。其中，左图形似银杏叶，由一个半圆和两个四分之一圆



银杏叶 猫眼 蘑菇

图 8 达芬奇笔记本中的图形

弧围成；中图为“猫眼图”，由两个希波克拉底弓月形组成；右图由四个“蘑菇形”组成。拿破仑曾在远征途中提出“只用圆规将一个已知圆四等分”的问题，一朵蘑菇与一片银杏叶的面积之和即为大圆面积的四分之一。

3 两节课的宏观比较

两节课的教学目标基本相同，分别是：（1）认识扇形并理解扇形的概念；（2）掌握扇形面积公式的推导并运用公式进行相关的面积计算；（3）在公式推导过程中体会数形结合、化曲为直和无限逼近等数学思想方法。不同之处在于，教师 A 通过数学史上的图形，让学生感受数学文化的魅力；教师 B 则通过数学史上的图形，让学生欣赏几何图形之美。两节课的教学重、难点也是相似的：重点为扇形面积公式的应用，难点为扇形面积公式的推导。

在教学过程中，A 和 B 的教学过程均由情境引入、公式探究、公式应用、课堂小结四个环节组成，具体见表 1。

从表 1 可见，尽管 A 和 B 均从 HPM 的视角实施课堂教学，但两者的教学设计却迥然不同。A 注重学生的探究，试图让学生像数学家一样经历扇形面积公式的发现过程；B 则注重数学家发现和推导扇形面积公式过程的技术呈现，几乎没有给予学生探究的机会；A 聚焦开普勒的方法，B 同时展示了阿基米德和开普勒的方法。总的说来，A 的设计更符合 HPM 的教学理念。

表 1 两位教师的教学环节对比

教学环节	教师 A	教师 B
情境引入	课前让学生用尺规绘制由圆弧构成的图画，并对其进行命名。上课开始，教师展示学生的部分作品，并将其与阿基米德的“鞋匠刀形”和达芬奇的“猫眼图”等进行对照，在此基础上引出扇形课题。接着，通过扇形要素的分析，引入扇形定义。	首先复习圆周长和面积公式，通过分披萨问题引入扇形概念，引导学生对扇形概念进行辨析，并列举生活中的实例。
公式探究	引导学生归纳扇形面积与圆心角和半径有关，从特殊扇形入手，类比弧长公式的推导，通过小组讨论得到扇形面积公式。接下来引导学生开展小组合作，探究扇形面积与弧长之间的关系，并分别从代数和几何角度得出第二个公式，最后播放微视频，介绍开普勒的推导方法。	通过画扇形思考与扇形面积大小有关的因素，从特殊角的扇形面积中归纳出一般扇形的面积公式。接着，类比圆面积的推导方法，将扇形进行分割重组，得出第二个公式。分别用几何画板演示开普勒和阿基米德的方法。
公式应用	给出一把展开的扇子的圆心角度数和扇子的骨架长度，求扇子展开所占的面积以及制作折扇所需的纸张大小。	给出披萨的半径，分别给出扇形披萨的圆心角度数和扇形披萨的周长，求扇形披萨截面的面积。
课堂小结	让学生总结扇形面积公式，归纳从特殊到一般的研究方法以及类比和方程思想。让学生课后进一步探究第二个扇形面积公式的推导，并写一篇数学小作文——“我眼中的扇形”。	让学生总结扇形面积公式，归纳整节课涉及的数学思想。让学生课后用尺规等工具绘制一幅与扇形有关的图形，并用文字语言或符号语言对其进行命名和解释。

4 两节课的微观比较

借鉴文[7]和[8]的分析框架，我们从四个维度对两节课进行比较和分析。

4.1 史料的适切性

作为 HPM 工作室的学员，两位教师拥有同样的历史素材，这些素材均来自历史研究，满足科学性。A 在情境引入环节，呈现了以下材料：

- 古巴比伦泥版上的特殊图形；
- 希波克拉底弓月形；
- 阿基米德的“盐窖形”和“鞋匠刀形”；
- 达芬奇笔记本中的银杏叶形和猫眼图。

B 并未在情境引入环节使用数学史料，而是将上述材料呈现于课前印发的阅读材料中。这些材料有效地激发了学生的兴趣和学习动机。

在公式探究环节，A 借鉴开普勒的方法设计折纸活动，并在活动之后播放 HPM 微视频，展示开普勒的方法；B 通过几何画板，分别呈现了阿基米德和开普勒推导扇形面积的动态过程。A 和 B 所用的史料满足科学性、趣味性、可学性、有效性和人文性。虽然 B 将历史素材呈现得更有趣（学生看到扇形转化成三角形的动态过程，不约而同地发出惊呼），但 A 给予了学生更多的学习机会。

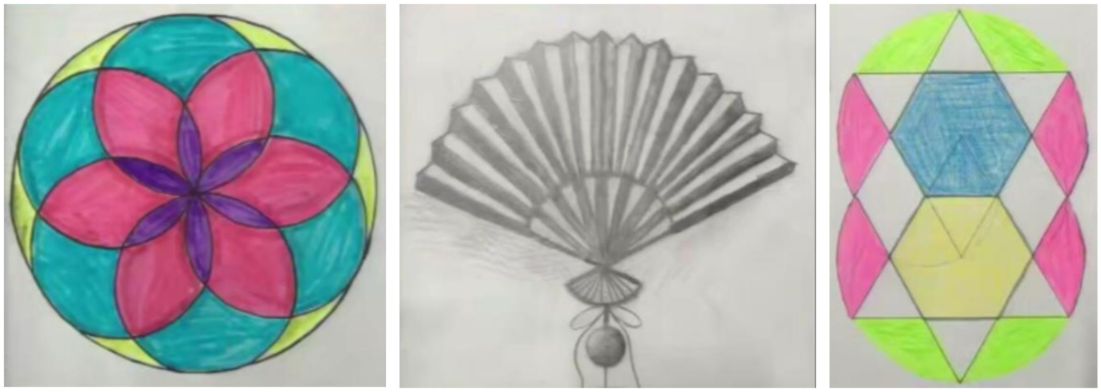
4.2 融入的自然性

要自然地将数学史融入数学教学，需要达成知识的逻辑序、历史序和学生心理序的有机统一。

教师 A 在情境引入和公式探究环节运用了数学史料。引入环节，A 在对比学生的绘图和历史上数学家的图形的基础上，引入扇形概念；探究环节，A 借鉴历史，引导学生采用开普勒的方法发现和推导扇形面积公式。以下是 A 的教学片段。

A 的教学片段一

师：历史上一些伟大的数学家也非常喜欢研究用圆弧构造的图形。在大英博物馆所收藏的古巴比伦数学泥版上就发现了由圆弧构造的图案。古希腊著名数学家希波克拉底在研究化圆为方问题时，构造了著名的弓月形，并发现了“月牙定理”。阿基米德喜欢用半圆来研究一些面积问题。到了文艺复兴时期，达芬奇也喜欢用圆来研究面积问题，比如“银杏叶”和“猫眼图”。我们发现大家的作品与他们也有异曲同工之妙。



花朵　　　　折扇　　　　组合图形

图 9 学生作品

生：是的，我们的作品在很多地方与这些图有相似之处。

师：相信同学们在未来也可以成为小小数学家，那么大家观察一下，能够发现这些图形都有什么共同的特征呢？

生：都是由线段和圆弧所围成的图形。

师：我们把由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫做扇形。

A 的教学片段二

师：扇形面积和组成它的弧长有什么关系呢？下面请同学们以小组为单位通过动手折扇形来探究一下。

生：将扇形折成若干份，当份数越多时，它会近似为一个三角形。三角形的面积公式为二分之一乘以底乘以高，那么扇形面积就是二分之一乘以弧长乘以半径。

师：能想到这一点非常好，如果在古代，我想你也会成为一名小小数学家。其实他的方法与德国天文学家和数学家开普勒给出的一种直观的推导方法是相似的，下面通过一小段微视频为同学们介绍一下他所采用的方法。

A 展示学生课前完成的作品，并将其与历史上数学家的与扇形相关的图形进行对照，学生发现一些有趣的图形与他们自己所绘制的图形十分相似。A 通过倾听学生的想法，让学生从中找出规律，发现扇形，表达他们的见解，于是，扇形定义的引出便水到渠成、自然而然了。可见，A 的引入方式虽未采用“从圆到扇形”的逻辑序和历史序，但符合学生的心理序。而在探究扇形面积公式时，A 引导学生采用开普勒的方法，与圆面积公式的推导一脉相承，因而以思

想方法为线，建立扇形和圆之间的联系，基本上达成了三种序的统一。

教师 B 在公式探究和公式应用环节运用了数学史料。以下是 B 在公式探究环节的教学片段。

师：大家对于开普勒有了解吗？哪位同学可以说一说？

生：开普勒是德国杰出的天文学家、物理学家、数学家，他发现了行星运动的三大定律，人类在 2015 年发现了首个围绕着与太阳同类型恒星旋转且与地球大小相近的行星就被命名为开普勒-452b。

师：非常好。在学习圆面积公式的时候我们就采用了开普勒的推导方法，哪位同学能说一下，如何将圆转换成我们熟悉的图形呢？

生：将圆等分成若干份，随着份数的增加，拼成的图形越来越接近直角三角形，一条直角边相当于圆的半径，另一条直角边相当于圆的周长。

师：说得非常好，那么下面我们一起来看一下，借助几何画板，用开普勒的方法又是如何推导扇形面积公式的。

（几何画板展示开普勒推导扇形面积公式的方法）

图 10 开普勒方法的几何画板演示

生：将大扇形切分成了很多个小扇形，在展开后，把小扇形拼成了一个近似的三角形。

师：最后拼成的近似的三角形的底边是什么呢？

生：扇形的弧长。

师：那么接下来我们一起来验证一下这个公式。

这里，B 引导学生类比圆面积公式推导扇形面积公式，符合“从圆到扇形”的逻辑序和历史序。然而，尽管几何画板的动态展示虽然令学生惊叹，但在快速演示之下，他们可能并不理解从扇形到三角形的等积变换背后的原理。因此，B 在兼顾学生心理序方面，还有改进的空间。

4.3 方法的多元性

A 在情境引入环节，呈现历史上数学家研究过的图形，属于复制式。让学生通过动手折纸自主探究，发现规律，经历扇形面积的发现和推导过程，体会其中的极限思想，基本上属于重构式。最后利用微视频介绍开普勒推导扇形面积公式的方法，也属于附加式。

B 在公式运用环节，展示了数学史上与扇形相关的美妙图形，属于复制式。通过类比圆面积公式的推导过程，展示阿基米德和开普勒推导扇形面积公式的方法，属于复制式。

由于 A 并没有设计问题串，因而他对扇形知识的重构并不完善，而 B 完全没有采用重构式。A 和 B 仅仅满足于古代数学家所研究图形的呈现，而没有将有关图形设计成面积问题，因而顺应式是完全缺失的。

4.4 价值的深刻性

在 A 的课堂上，数学史的教育价值主要体现在探究之乐和德育之效上。A 借鉴历史设计探究活动，引导学生像数学家一样去作出数学发现，积累数学活动的经验；同时，通过“古今联系”策略，让学生“创越时空与古代数学家对话”，从而亲近数学，增加自信。

在 B 的课堂上，数学史的教育价值主要体现在方法之美上。B 利用技术，直观地再现数学家的方法，让学生看到数学方法的灵活、多元和神奇。

此外，悠久的历史、美妙的图形让 A 和 B 的课堂都散发着数学文化的芬芳。

5 学生反馈

课前和课后分别对两个班级的学生进行了问卷调查，并对部分学生进行了访谈。在课前问卷调查中，针对问题“回忆推导圆面积公式的推导方法”，由于 B 在之前讲圆面积公式时注重数学史的融入，她的学生能够写出开普勒推导圆面积公式的方法，这也为学生在“扇形的面积”课堂上能够比较自然地接受用开普勒的方法推导扇形面积公式奠定了基础。A 任教的班级中，学生虽然没有明确提及开普勒的方法，但相较于 B 的班级，有更多的学生能够写出具体的类似“化曲为直”的推导过程，这与 A 注重在课堂中渗透数学方法是分不开的。

在课后问卷调查中，针对问题“在所给的图形中选择正确的扇形”，A 的学生正确率较高，大多数学生能够选出正确的扇形。B 的学生正确率低于 A 的学生，错误集中在漏选了圆这个特殊的扇形，错选了形如扇面的图形，主要原因在于 A 在课堂练习中讲解了与扇面有关的例题，

强调了扇面是由两个扇形面积相减得到的。针对问题“计算给定边长的猫眼图变式中两个弓月形的阴影面积”（图 11），A 的学生只有少数同学能够正确作答，而在正确作答的学生中，大部分学生利用面积相减的计算方法进行解题，只有极少数学生能观察出阴影部分的面积与正方形中两个三角形的面积是相等的，而 B 的学生正确率要更低一些。显然这道题目对于六年级的学生在理解和计算上是有些困难的。

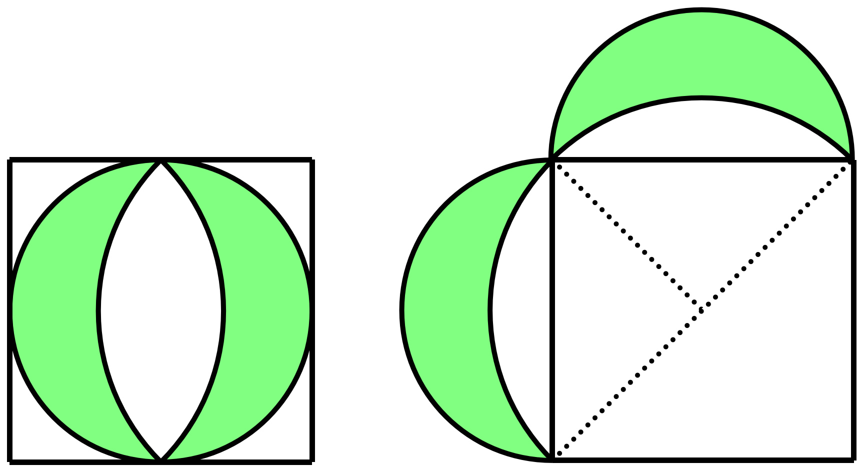


图 11 猫眼图的变形

在对部分学生的访谈中，针对问题“对这节课印象最深的部分”，A 的学生谈及：自己用圆等基本图形画出的作品；自主探究扇形面积公式的过程；开普勒推导扇形面积公式的方法。B 的学生谈及：用极限思想推导扇形面积公式；借助几何画板展示扇形面积公式的推导过程；古代数学家推导扇形面积公式的方法。总的来说，通过访谈了解到，学生对于数学史是充满好奇的，能够接受甚至喜爱数学史融入数学课堂的教学方式。

学生对 HPM 视角下的“扇形面积”一课的教学评价大致可以分为以下四类：

- 课堂有意义，经历扇形面积公式的探究过程；
- 课堂有收获，会利用扇形面积公式进行计算；
- 课堂有趣味，了解到古代数学家的经历和学术成果；
- 课堂有反思，感受到数学思想的重要性和奇妙作用。

6 结 语

以上分析表明，两节课各有其亮点和特色。总的说来，A 的教学更能体现出 HPM 教学的特

点，而 B 以技术见长，技术为 HPM 插上了翅膀。A 和 B 所选择的史料都符合科学性、趣味性、可学性、有效性和人文性，但 A 教师采用了附加式、复制式和不完善的重构式，而 B 只用了附加式和复制式。A 在三种序的统一上略胜一筹。A 借助数学史，在课堂上营造了探究之乐，展示了文化之魅，达成了德育之效；而 B 借助数学史，彰显了方法之美和文化之魅。

通过对两节课的比较，我们得到如下启示。

（1）关注基于数学史的问题设计

两节课在数学史的运用方式上并不尽如人意，究其原因，教师根据历史材料编制数学问题的意识还有待于加强。没有理想的问题串，就不会有理想的重构。实际上，历史上的与扇形相关的图形背后都是求面积问题。

（2）兼顾学生探究与技术运用

A 的教学长于探究，但在"古今联系"时，学生并不能直观地看到数学家的方法；B 的教学长于技术，但学生没有机会亲历探究过程。如果兼顾学生探究与技术运用，那么，数学史的教育价值将得到更充分的体现。

参考文献

[1] 俞宏毓, 顾非石. 关于"扇形面积"的教学指导研究报告[J]. 数学教育学报, 2013, 22(2): 44-48.

[2] 邹炜华. 深入教材, 追溯文化,丰富课堂——兼谈"扇形面积"的教学设计与教学反思[J]. 中学数学教学参考(中旬), 2017(9): 67-70.

[3] Walker, T. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Richardson & Lord, 1829: 108-110.

[4] Greenleaf, B. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Robert S. Davies & Co., 1859: 161-162.

[5] 汪晓勤. 从巴比伦祭司到达芬奇[J]. 中学数学教学参考, 2009 (1/2): 131-133

[6] 汪晓勤. 数学文化透视[M]. 上海: 上海科技出版社, 2013.

[7] 林庄燕, 汪晓勤. HPM 视角下的分式概念教学——同课异构课例分析[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(4): 7-12

[8] 赵丽红, 汪晓勤. HPM 视角下的基本不等式同课异构课例分析[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(1): 8-14

他山之石

如何分析数学教师的专业知识

——“数学教师的专业知识”一文评介

王娟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 相关背景

1.1 刊物介绍

《Mathematics Education Research Journal》（简称 MERJ）是一份国际期刊，致力于促进国际社会感兴趣的高质量研究，旨在介绍数学教育领域的新知识、新思想、新方法和新认识论。MERJ 出版的文章的主题集中于理论、教学、方法和哲学，涉及与各种层次的教育和职业（包括正式和非正式的）相关的数学教育。

MERJ 积极寻求促进澳大拉西亚地区的研究，包括在该地区进行的研究、由该地区的研究人员进行的研究以及利用该地区的研究成果进行的研究，促进了澳大拉西亚地区的数学教育的重要思想的产生和发展。MERJ 接受来自国际上所有地区的作者的论文，但是作者研究必须以澳大拉西亚地区已经有的广泛研究为基础。

1.2 作者简介

Diana Zakaryan 自 2011 年起在西班牙韦尔瓦大学就读教育专业的博士，2013 年起就职于瓦尔帕莱索天主教大学的数理研究所，2015 年 5 月起成为智力数学教育学会的会员，2019 年 1 月受智利数学教育杂志的邀请担任编辑一职。

Miguel Riberio 也毕业于西班牙韦尔瓦大学的教育专业，2016 年起在坎皮纳斯州立大学担任副教授一职。

2 文章评介

在这篇文章中，作者描述了一个关于中学教师专业知识的个案研究，内容包括理论背景、MTSK 框架、研究问题与方法、研究对象与过程、数据分析、研究结果等。文章的关键词是数学教师的专业知识、教师实践和有理数。

2.1 相关背景

2.1.2 理论背景

在现存的数学教师教育的文献中，有一个普遍的共识："扎实的学科知识(solid knowledge)"是教师教学实践的坚实基础[1]，然而当谈论什么构成了"扎实的学科知识"的主要内容时，意见却不能统一。国际研究(如 TEDS-M)以评估未来教师所拥有的知识为目的，创造了一套关于学科知识(SMK)和教学内容知识(PCK)的项目[2]。与此同时，旨在表征和加深对教师知识的不同领域的理解的研究也催生了教师知识的几种概念框架的产生，如 Ball 团队提出的 MKT（Mathematics Knowledge for Teaching）框架[1]、Carrillo 等人提出的 MTSK（Mathematics teachers' specialized knowledge）框架[3]、Rowland 等人提出的 KQ（The Knowledge Quartet）框架[4]。

在教师知识概念化的过程中，寻找数学教师知识中"专业的（specialized）"方面已成为研究领域中越来越重要的工作[5]。本研究的作者将这种专业化解释为一种形成的过程，而不是一种存在的状态；强调数学教师知识中固有的认识论脉络，要能够理解数学过程中的复杂动态。MTSK 倾向于将数学教师的知识和其他使用数学作为资源的专业人士（如工程师、数学家、其他学科教师）的数学知识进行比较。从这个角度来看，对教师知识的分析需要更好地理解数学的认识论根源、数学现象的产生、与其他数学对象的关系、这些关系允许建立的结构，或者这些数学实体的生成方式[6]。在本研究中，我们认识到对教师知识进行不同概念化阐释的重要性，并认识到需要通过将其与实际情况联系在一起来加强这一知识，鉴于上述原因，作者将从 MTSK 的角度来审视数学教师的知识。

2.1.2 MTSK 框架

如图 1 所示，教师的信念（包括教师的数学信念和数学教与学的信念）位于 MTSK 框架的中心，因为教师信念渗透在所有的方面，即教师的信念影响教师知识，也被教师知识影响。MTSK

框架将教师的数学知识分为两个部分，分别是数学知识（MK）和数学教学知识（PCK），其中 MK 分为三个子部分：主题知识（KoT）、数学结构知识（KSM）和数学实践知识（KPM），PCK 也分为三个子部分：数学教学知识（KMT）、学习数学特征知识（KFLM）、数学学习标准知识（KMLS）。

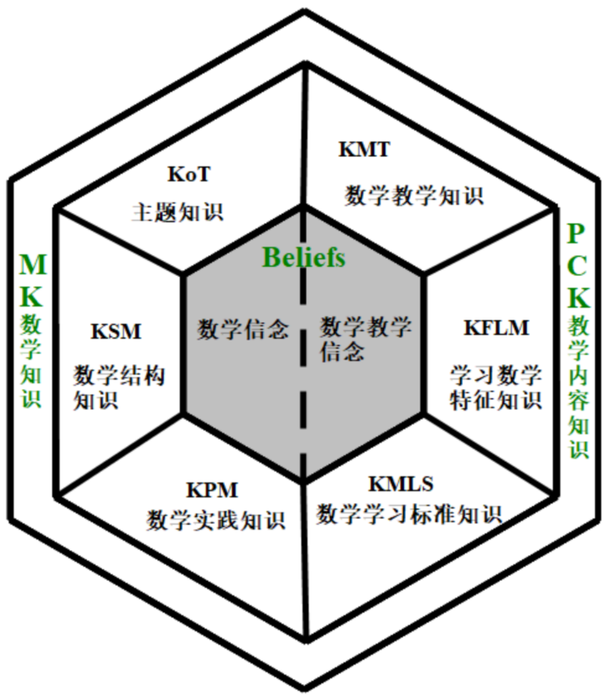


图 1 MTSK 框架

2.2 研究设计

2.2.1 研究问题与方法

这篇文章的研究问题是：基于 MTSK 框架，中学教师具有哪些与有理数有关的“话题知识 (Knowledge of topics)”？因为作者关注的是教师所教的内容也就是数学有关的特殊知识，因此本文不涉及教学内容知识（PCK），而关注数学知识（MK）中的主题知识（KoT）。

为了更好的理解和表征教师专业知识的各个方面，文章采用解释性范式和案例研究作为研究方法。这种案例研究被称为工具性案例研究，关注的并不是案例本身，而是把案例当作获取知识和理解特定主题以生成或完善理论的工具[7]。

2.2.2 研究对象与过程

这篇文章的研究对象 Ana 是一名八年级智利数学教师，她是数学教育专业的硕士，拥有七年教学经验，曾经给学生上过有理数的课。

在研究过程中 Ana 给学生上了 7 节有理数的课（每节课时长为 90 分钟），研究使用的数据包括课堂观察以及 7 节有理数课程的音频和视频记录，课程结束之后研究者对 Ana 进行了问卷调查和 50 分钟左右的访谈。Ana 的 7 节有理数课的详细情况如表 1 所示，课堂中的师生对话和课后的访谈都会被记录下来。

表 1 Ana 的 7 节有理数课程

课程	课程内容
第 1 节课	介绍课程的总体目标，并解释如何进行课程评估(在这 7 节课的最后一节考试)；接着介绍了有理数的相关知识：形式表征、符号表征，包含自然数集和整数集的集合表征，以及数轴；以探索有理数的稠密性结束了本节课
第 2 节课	介绍十进制小数怎样转化成分数，以及无限纯循环小数和无限混循环小数的概念
第 3 节课	介绍用不同的方法来比较有理数的大小
第 4 节课	定义了有理数的等价性，并给出了确定有理数等价性的步骤
第 5、6 节课	探索与有理数有关的多米诺骨牌游戏，包括寻找以小数和分数形式表示的等价有理数，学生们分别(在老师的帮助下)制作多米诺骨牌，然后分成小组来玩
第 7 节课	有理数的加法和乘法

在 7 节课结束时，对 Ana 进行了半结构化的访谈，访谈集中在一些在课堂上没有观察到的方面。比如：你为什么认为这种方法是合理的？为什么优先考虑这个教学目标而不是其他的？

为了补充访谈的数据，还编制了五份问卷(由 3-5 道开放式问题组成)，重点放在不同方面(如背景、经验、与研究主题相关的信息)，比如：这个内容可以用什么现象来描述?为什么八年级的学生应该学习有理数?老师应该知道什么才能教授有理数的内容?你在哪里或如何学习八年级所

教的数学内容?

设计问卷和进行访谈的目的是期望从多角度获得 Ana 拥有的数学知识，实现不同数据来源的三角论证[7]，力求结论在内部和外部都能保持一致。这种方法有利于研究者获得对 KoT 及其每一个子类别的内容的更广泛和更深入的理解。

2.2.3 数据分析

如图 2 所示，本研究采用 Ribeiro 等人提出的教学过程建模模型[8]，将课堂分为若干个片段，标记为[i, j]，对应于第 i 节课的第 j 片段，比如[1,4]代表第 1 节课的第 4 个片段。对于每个片段，定义了该片段的初始事件和最终事件，确定其属于 KoT 的哪个子类。

[i，j]教学片段描述

[开始的时间，结束的时间]

数学目标：明确教师的教学目标

触发事件：标志着这一片段开始的事件

知识（KoT）：明确这一片段反应出的教师知识种类

属性和基础（KoTp）

现象和应用（KoTph）

数学程序（KoTmp）

表征系统（KoTrp）

结束事件：标志着这个片段结束的事件

图 2 教学过程建模模型

将课堂分为若干个片段之后，再将片段中观察到的教师知识进行分类编号，例如，KoTp1 对应 KoT 中的子类 KoTp 第 1 个被观察到的方面。

2.3 研究结果

基于 MTSK 框架，本研究通过 Ana 的 7 节有理数课程理解并表征 Ana 的 KoT 的各个方面，具体情况如表 2 所示。

另外，从访谈中了解到，Ana 拥有的一些知识并没有在课堂上表现出来，如 Ana 关于实数 R 的完备性的认识。这与 Mason 的观点一致，即仅仅知道某件事（如知道“What、how、why、when、where”）是远远不够的，不足以使得老师能自如的使用和讲授这些知识[9]。

这项研究借助数学的内在规定来了解来教师 MK 知识，这些方面包括现象学、性质及其基础、有理数的表征等。MTSK 框架不仅让我们了解老师拥有什么样知识，还了解了这些知识的深度。教师应该关注知识点的性质和类型（概念化），掌握更多知识以面对课堂上的各种棘手情境。

在有理数教学方面，我们获得的启示是：教师要掌握“如何（how）”和“为什么（why）”的知识；教师要针对有理数提出不同的问题（以促进学生思考，帮助学生理解）；教师要像学生解释有理数的不同表征——分数表征和小数表征。

表 2 教师 Ana 的 KoT

KoT 的分类	**具体表现**
属性和基础	KoTp1-关于定义的知识（有理数、自然数、整数） KoTp2-关于不同形式的有理数的知识（小数、分数、整数） KoTp3-关于有理数集符号 Q 及其有理数名称来源的知识 KoTp4-关于有理数性质的知识（有理数集合对于加、减法封闭，有理数可以写成两个整数之比，有理数集是稠密的等） KoTp5-关于不同数集的定义的知识（有限的、循环、混循环、小数） KoTp6-关于最简分数的知识
现象和应用	KoTph1-关于有理数的不同含义的知识（部分与整体、测量、比率）
数学程序	KoTmp1-关于分数和小数相互转化方法的知识 KoTmp2-关于比较有理数大小的不同方法的知识（通分、化简） KoTmp3-关于进行有理数加法的知识（通分、化简）
表征系统	KoTrp1-关于有理数不同表征的知识（语言表征、符号表征、图形表征） KoTrp2-关于有理数不同表征之间相互转化的知识（符号表征->图形表征）

3 反思借鉴

这篇文章描述了一个个案研究，试图从教师专业知识（MTSK）理论框架的角度来研究中学

数学教师的主题知识。读完这篇文章我们可以收获到：

（1）MTSK 知识框架。全称为 Mathematics teachers' specialized knowledge，即数学教师的专业知识。一方面，MTSK 框架倾向于将数学教师的知识和其他使用数学作为资源的专业人士（如工程师、数学家、其他学科教师）的知识需求进行比较。另一方面，MTSK 模型以分析为重点，旨在研究教师的知识，尤其是了解这些知识以及它们之间的相互作用，当提及某个老师需要 MTSK 某个特定子类别的知识时，意思是说教师必须具有该子类别中的知识。因此，教师教育者可以利用 MTSK 模型来组织受训教师的培训需求[10]。

（2）三角印证。为了从多角度发掘研究对象 Ana 所具有的专业知识，研究者对 Ana 进行了半结构化的访谈，集中了解在课堂上观察不到的方面，同时为了补充访谈数据，还编制了一份问卷，多渠道收集数据能有效提高研究的信度和效度。

（3）教学过程的建模模型。在处理课堂实录视频时，研究者使用教学过程的建模模型，将课堂分为若干个片断，并用数字记号进行标记、分类，每个片段都定义初始、结束事件，做到不重不漏，然后再确定每个片段中所蕴含的知识，处理地十分细致。

（4）访谈和问卷的设置。这篇文章列出了部分问卷和访谈中的问题，并且交代了可以从哪些方面进行提问（主要围绕通过课堂观察和文本分析不易观察到的部分），研究者也确实从访谈中了解到了一些 Ana 没有表现出来的知识。

另一方面，这篇文章提到使用研究方法是解释范式和案例研究，但是对解释范式这一方法没有过多的说明。总之，这篇文章对想通过个案研究了解教师某个方面的知识具有一定的参考价值。

参考文献

[1] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

[2] Teacher Education Studies in Mathematics [TEDS-M]. (2009). *Released items. Future teacher mathematics content knowledge (MCK) and mathematics pedagogical content knowledge (MPCK) –Primary*. East Lansing: Michigan State University.

[3] Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining

specialized knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of CERME 8 (pp. 2985–2994). Antalya, Turkey: METH.

[4] Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge:The knowledge quartet and the case of Naomi. Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 255–281.

[5] Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2017). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. International Journal of Science and Mathematics Education. doi:10.1007/s10763-017-9859-6

[6] Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18(3), 589–605.

[7] Stake, R. E. (1995). The art of case study research. Thousand Oaks, CA: Sage.

[8] Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15(2), 277–310.

[9] Mason, J. (2015). Responding in-the-moment: Learning to prepare for the unexpected. Research in Mathematics Education, 17(2), 110–127. doi:10.1080/14794802.2015.1031272.

[10] Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., & Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education. Advance online publication. doi:10.1080/14794802.2018.1479981.

学术资讯

后疫情时代，“云教研”助力教师专业发展

——“基于历史名题的单元复习课”HPM 课例论证会议纪要

余庆纯

（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2020 年 5 月 26 日上午，华东师范大学教师教育学院数学史与数学教育（HPM）工作室与义乌市高中数学王芳工作室联合，共聚“云教研”平台腾讯会议，共同开展“基于历史名题的单元复习课”的高中 HPM 课例论证会议。本次活动主要由华东师范大学教师教育学院数学教育研究所汪晓勤教授、浙江省义乌市王芳工作室王芳老师与金惠萍老师共同主持。来自华东师范大学 HPM 研究方向的博硕士研究生、内蒙古师范大学李春兰老师与其数学教育方向的硕士研究生、浙江省义乌市王芳工作室高中数学教师等近 40 余位师生一起参加了线上活动，实现跨区跨校、务实高效的线上教研。

首先，王芳老师简述本次“基于历史名题的单元复习课”课例论证会议的基本情况与研究设想，将前期教研的“基于数学史的章节序言课”课例与即将开展的“基于历史名题的单元复习课”课例统筹起来，衔接“概念教学”与“解题教学”，贯穿数学知识与数学思维，聚焦落实“数以明理、学而守正、文以载道、化而修身”的数学教育理念。

图 1 王芳老师主持开幕式

接着，以“一课一评”的方式依次论证 4 个高中 HPM 单元复习课例。首个报告是义乌中学金惠萍老师的“基于历史命题的解析几何单元复习课”。金老师拟选取“阿波罗尼斯圆”为切入口，以“点的运动轨迹”为研究主线，梳理“圆锥曲线”的核心单元知识网络。同时通过对历史名题的运用与改编，旨在微观上深化解析几何借助方程研究曲线问题的基本思路，构建知识之谐；宏观上揭示解析几何发展的历史动因，彰显解析几何的文化之魅。汇报后，汪教授积极肯定本复习单元的教学设计，指出“阿波罗尼斯圆”是解析几何单元复习的重要突破点，建议构建历史命题的“问题串”，串联阿波罗尼斯圆与圆锥曲线、动态轨迹问题等不同数学内容，提炼数学思想方法，展示解析几何的多元文化。

图 2 金惠萍老师的汇报分享

随后，义乌六中的万松强老师分享第二个报告，分享“数列单元复习课”的研究思路与教学设想。万老师先介绍“数列单元复习课”在教材、教学中的基本要求，再以 17 世纪的俄罗斯数学手稿中的历史名题“马蹄铁钉问题”作为情境，导出本节课的复习知识主线“等差数列”、“等比数列”，接着以改编的“木棒问题”引出数列求和中的不等式问题，最后提出了教学设计中所遇到的困难。汇报后，汪教授肯定该主题的教学设计，指出“数列单元复习课”需要进一步结合数学思想方法的提炼与数学核心素养的落实，建议借助历史名题，发掘数列单元中类比、化归、数形结合等数学思想方法，提升逻辑推理、直观想象、数学运算等数学核心素养。同时，王芳老师分享开展过的一节“数列复习课”，以“纳皮尔与富翁的故事”引领学生穿越古今，共同探讨等差数列、等比数列之间的关系。此外，王老师进一步介绍现代数学中有关 e 的

复利问题，建议延伸数列单元教学的深度与广度。汪教授补充指出“基于历史名题的单元复习课”要紧扣“以史为经、以题为纬”的系列单元课例研究思想，梳理数学知识体系，总结数学思想方法，展现多元数学文化，培育数学核心素养。

图 3 万松强老师的汇报分享

第三个汇报是来自义乌五中的纪亚荣老师带来的“三角单元复习课”报告。首先基于古希腊三角学起源，简述三角学与天文学、航海学之间的跨学科联系；接着以“埃拉托色尼计算地球”故事，引出角与弧长的关系探究；借助以“托勒密定理”或“弦长表”展示弦长与正弦函数之间的密切关系，紧扣全国高考的三角题目；最后以“单位圆”系统地串起三角知识体系，展示三角之美。报告后，汪教授十分肯定该课例的设计立意，指出平面几何中的三个重要核心定理：三角形内角和定理、勾股定理、相似三角形定理判定定理，三角学最初扎根于几何学而不断发展，以“单位圆”建构三角学与几何学的连接桥梁，进一步建议通过“托勒密定理”串联和角公式、差角公式、半角公式、倍角公式、余弦定理、正弦定理等重要数学公式与定理的单元复习，关注逻辑推理、直观想象等数学核心素养的培育，展示多元的三角文化。

图 4 纪亚荣老师的汇报分享

义乌中学的吴小悦老师带来第四个汇报“基于等周问题的不等式复习”。吴老师从“歌剧中的数学问题”引入，借鉴等周问题的历史发展顺序，开展等周三角形探究，运用 Geogebra 展示任意等底等周的三角形两边长连续变化时的面积最大值；借助“欧拉羊圈故事”引出等周矩形问题与基本不等式的运用，进而不断推广、验证、提炼与总结。报告后，汪教授肯定本次报告的教学设想，提议在基本不等式运用于解决等周问题的基础上，可以适当运用拓广于其他更加多元的领域。此外，还可以用二元的基本不等式过渡到三元、四元......n 元的基本不等式。王老师积极肯定汪教授的建议，指出 HPM 课例研究要聚焦前瞻性、立足教育实践性、把握操作可行性。

图 5 吴小悦老师的汇报分享

之后，进行 5 个高中 HPM 课例汇报的简要串讲，分别是：义乌中学吴俊凯老师的“向量”

课例、上溪中学朱卉老师的“计数原理”课例与吴玮玮老师的“概率”课例、树人中学鲍雯霞老师的“立体几何”课例、义乌市国际商贸学校吴春妍老师的“基本初等函数”课例。

最后，汪晓勤教授与王老师共同总结了本次“基于历史名题的单元复习课”的课例论证线上会议的内容与重点，展望了后续教研的推进计划，勉励各位老师再接再厉，不断完善课例的教学设计，逐步落实单元复习的教学实践！

图 6 “基于历史名题的单元复习课”的课例论证线上会议

会后，内蒙古师范大学李春兰老师谈及本次线上课例论证的感想：第一次参与高中 HPM 单元复习的课例论证，收获匪浅，原来高中单元复习课可以如此精彩，富有人文气息！基于历史命题融入单元教学是很好的选题，以史为题，贯穿古今，既有内容厚度，又有时间广度，深受启迪！

后疫情时代，信息技术推动 HPM 教研形式的不断演进，助力 HPM“云教研”活动的有序开展，推动 HPM 共同体的教师专业发展。未来已来，期待信息技术能够为数学史融入数学教学的理论交流与实践推进搭建更加有效的线上交流平台，逐步推进基于数学史的数学文化走出书斋、走进课堂，传播富有数学文化的精彩数学教学！

华东师范大学基础教育学科教研联盟

高中数学第六次集中研修活动

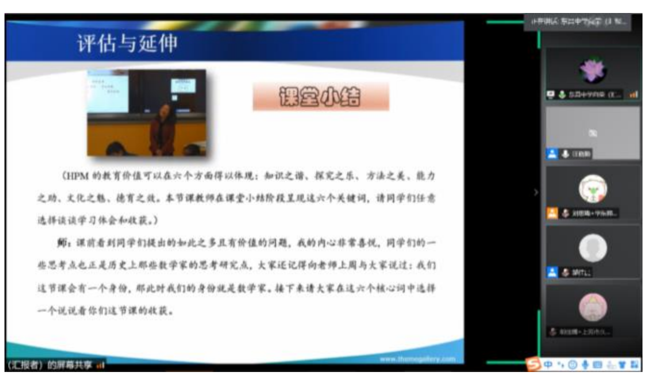
刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2020 年 6 月 16 日下午，华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学组的指导专家和联盟校的老师们，以在线会议的形式开展了高中数学组第六次集中教研活动。本次活动由华东师范大学教师教育学院数学教育研究所汪晓勤教授主持，研修主题为数学史融入高中数学课堂教学的课例研究：二项式定理和基本不等式。

汪晓勤教授简单回顾了上次教研活动中以函数概念为主题的相关内容，接着介绍了此次线上教研活动的主题：二项式定理和基本不等式。希望通过两位曾经实施过相应课例的老师分享的课例报告，来达到经验分享和教学讨论的目的。

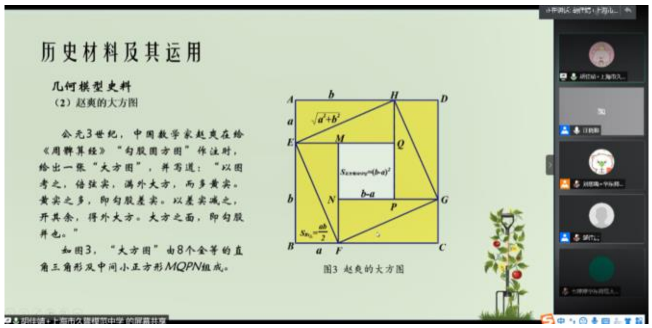
来自华东师范大学附属东昌中学的向荣老师做了“有情 有景 有趣 有思——HPM 视角下的二项式定理教学实践与反思”的课例报告。向老师首先跟大家解读了发言主题中的八个字。接着她介绍了自己在做 HPM 视角下的二项式定理教学设计时的思路，包括学生课前思考、二项式定理的发展脉络和 HPM 六大教育价值等。这个课例是一个四课时的单元教学，向老师此次主要介绍了第一课时的探究式教学和第四课时的学生小组合作学习的内容。最后向老师分享了实施课例效果以及她的教学反思，向老师提到教师要搭建促进学生成长的脚手架、要进一步落实探究式教学并且她会沿着 HPM 之路坚持向前。



向荣老师的分享

来自上海市久隆模范中学的胡佳婧老师报告了 HPM 视角下的基本不等式教学。胡老师从

教学设计背景、历史材料及其运用、教学设计与实施、学生反馈和数学史的多元教育价值这五个方面进行介绍。比如在教学设计背景这里，胡老师提到等周问题是基本不等式产生的历史动因之一，历史上的数学家发现了很多基本不等式的几何等价形式，不同地域、民族的数学家对基本不等式的研究体现了多元文化等。再比如在学生反馈这里，胡老师提到学生对基本不等式这个代数式的几何证法感到新奇，并且当他们知道历史上存在多种几何模型的史实时，非常钦佩古人的智慧！



胡佳婧老师的分享

课例分享结束后，汪晓勤教授解读和点评了两位老师的课例报告内容。汪教授提到学生的潜力是不可估量的，二项式定理课例中学生提出的问题和数学家曾经提出的问题有着历史相似性的，而这些问题往往可以在数学史中找到答案，要给学生表达和探究的机会。接着指出正如基本不等式的产生是以等周问题等内容为背景，数学知识不是凭空捏造的，它们的产生都有其历史背景作为动因，教师如果了解和研究这些，就可以更好地从历史到课堂实现数学史的六大教育价值。

接着华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师介绍了本年度在高中数学联盟拟举办“指向数学学科德育的数学教学设计”主题的教学比赛，欢迎高中数学联盟各成员校数学组的教师们参加。同时欢迎各成员校轮流承办联盟主题教研活动，鼓励各成员校的老师们积极参与联盟的教研活动。

最后在会议结束时，我们通过线上问卷的形式邀请参加活动的老师谈谈此次参加教研联盟活动的收获和对之后活动的建议。老师们在收获中提到最多的词汇是数学史，接着是融入、学生、兴趣、课堂等词汇，其中华东师范大学芜湖外国语学校的陆静老师提到“数学史融入课堂，能够了解知识本源，充分挖掘知识本质，了解数学知识的发展历程，能够激发学生的学习兴趣等。收获颇丰，以后会尽量在课程中融入一些数学史方面的知识。

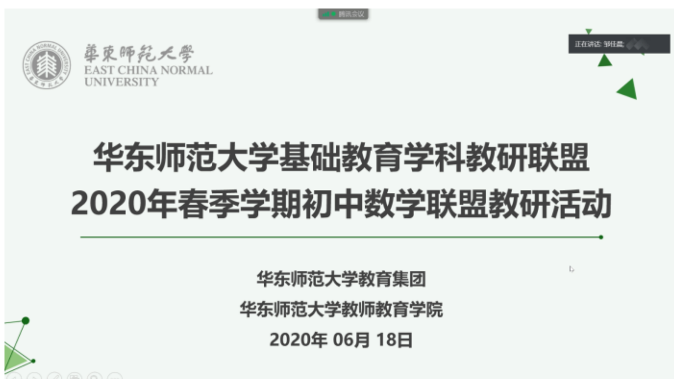
华东师范大学基础教育学科教研联盟

初中数学第六次集中研修活动

邵爱娣

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2020 年 6 月 18 日下午，华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学组第六次集中教研活动在线举行。本次活动由华东师范大学初中数学教研联盟、上海市闵行区首届初中数学学科德育研修班、闵行区吴泾镇学区化初中数学项目组以及数学史与数学教育（HPM）初中数学网络研修班联合举办。研修主题为数学史融入初中数学课堂教学的课例研究：演绎证明、等腰三角形。华东师范大学基础教育联盟成员校、各举办单位以及华东师大 HPM 研究团队的 70 余位教师参加了本次活动。

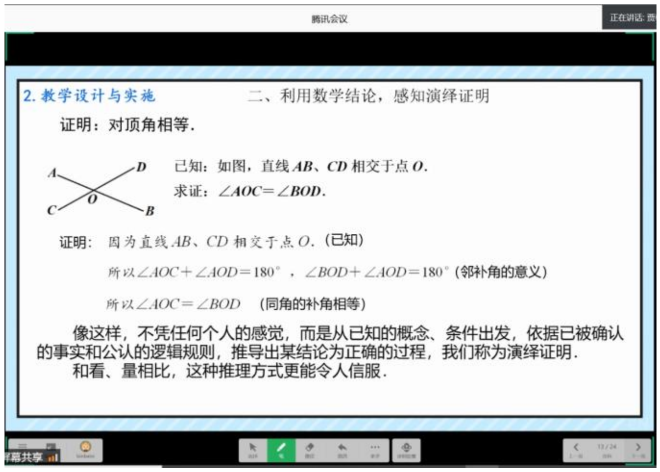


初中数学联盟线上教研活动

华东师范大学教师教育学院数学教育研究所邹佳晨老师主持了本次活动，邹老师回顾了第五次联盟教研活动中关于“有理数的乘法”教学的相关内容，接着介绍了本次活动的主题：演绎证明和等腰三角形，希望参与活动的老师能够从本次的课例报告中有所收获。

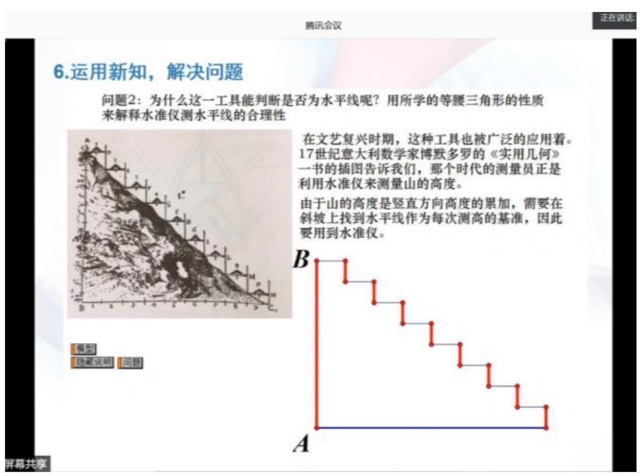
在本次教研活动的报告环节，来自上海民办建平远翔学校的贾彬老师带来了课例报告“HPM 视角下的‘演绎证明’教学”。贾老师首先对沪教版教材中本节课的内容作了分析，阐述了预设的教学目标。然后介绍了本节课选用的历史材料，包括证明的由来、达尔文的故事、《几何原本》的魅力。接着详细介绍了本节课的教学设计与实施，包括结合生活实例，引入数学证明；利用数学结论，感知演绎证明；融入历史素材，理解演绎证明；运用新学知识，实践

演绎证明。在学生反馈部分，贾老师展示了学生问卷调查的部分结果。最后，贾老师总结了自己的教学反思，认为本节课最重要的价值在于 HPM 的德育之效。



贾彬老师的分享

来自上海市长桥中学的汤雪川老师带来了课例报告“HPM 视角下‘等腰三角形性质’的教学”。汤老师首先对本节课的教材背景作了分析，并提出了自己对于教材内容安排的困惑。然后对历史材料进行了梳理，包括等腰三角形三线合一的实际应用、等边对等角的证明方法。接着详细阐述了本节课的教学设计与实施，包括两个课时：第一课时让学生通过操作说理等活动归纳得到等腰三角形三线合一，并且运用它来解决实际问题；第二课时让学生运用多种方式对等边对等角进行说理，反思各种方法之间的本质及联系。最后汤老师从数学史价值的角度总结了自己的反思与体会。



汤雪川老师的分享

在总结点评环节，上海市闵行区初中数学教研员、区首届初中数学学科德育研修班主持人巢晖老师认为 HPM 是非常有价值的，主要体现在两点：一是让学生知道数学的发展过程；二是能够渗透学科德育。贾彬老师的课充满了人性化，让学生具有研究的兴趣，知道研究的原因，体验研究的过程。汤雪川老师的课让学生体验过去数学家在研究数学时所具有的严密思维，感知数学知识的源流。

接着华东师范大学教师教育学院的汪晓勤教授表示这两节课都非常精彩，开课的老师也付出了巨大的努力。对教师而言，HPM 最大的价值就是能够促进教师的专业发展，特别是知识的发展。数学史能够帮助教师进行深入的学习与思考，教师有必要了解数学史的知识，从而增进对课程的认识。邹佳晨老师阐述了让数学课堂回归人性化的教学理念，给师生以情怀，发挥数学学科的德育功能，数学史的融入是可实践、可复制、可推广的路径之一。同时，邹老师预告了初中数学联盟拟举办主题为“指向数学学科德育的数学教学设计”教学比赛，鼓励各成员校初中组的数学老师们积极参与。

会议结束时，我们通过线上问卷的形式邀请参与的老师谈谈在本次教研活动中的收获。大部分老师都表达了自己的想法，其中上海市天山初级中学的沈晓阳老师提到“分享的课例很好地融合了数学史，不生硬，不脱节，在教学效果和学生德育方面都真正起到了积极的作用，促使自己对日常教学的策略进行反思，希望自己在今后的教学中也能加以尝试和探索”，华东师范大学澄迈实验中学的吴海龙老师提到“两位老师通过融入数学史讲解教材，能吸引学生的兴趣，并且能系统完整科学地帮助学生知其所以然，也符合探究真知的规律。对我的课堂教学有深刻的启发和引导。”