上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 03 期

第十届数学史与数学教育(HPM)高级研修班

暨首届“留白创造式”数学教学研讨会合影

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

HPM 视角下的数学写作

秦语真

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

美国最早关注到数学课程中的写作，全美数学教师协会（National Council of Teacher of Mathematics，简称 NCTM）认为，写作是数学教学的重要组成部分。研究表明，将写作融入数学教学可以提升学生的学习兴趣，提高元认知水平，优化师生关系，提高教学质量。学生借助数学写作，可以将所思所想所感所悟在头脑中重组再付诸笔端，联结思维与语言，可以帮助学生主动思考，勇于表达。同时，数学写作也是有效的德育教育形式，数学写作具有区别于日常写作的严谨性与逻辑性，有助于培养学生的理性精神，惠及“立德树人”教育根本任务的落实。

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》提倡学生撰写研究报告或小论文，在现行中学教科书中，人教 A 版高中教科书就加入了“文献阅读与数学写作”栏目，意在培养学生选题确定、资料搜集、素材整理、交流讨论的能力。但受限于教师对该栏目的认识与理解，且该栏目不会在考试中考察，因此在实行方面会大打折扣。

数学写作为学生的思考提供了表达平台，且其形式多样，可分为解释性数学写作、反思性数学写作和创造性数学写作。而 HPM 为数学写作提供了思维养料，依托数学史，学生可以在解释性数学写作中解释前人的所思所想，抒发自己对于概念、命题的理解；在反思性数学写作中可以对数学家们提出的定义进行反思批判并修正改进，也可以用数学家的方法来解决问题；在创造性数学写作中可以重现古人的智慧，发现数学结论。本文将利用数学史，编制解释性数学写作、反思性数学写作和创造性数学写作的题目，为数学史融入数学写作提供一种视角。

2 解释性数学写作

解释性数学写作指的是让学生直接解释数学概念或提供关于数学概念有关的信息，通常涉及到对概念的陈述、推理、比较，并通过数学写作来交流和解释。其常见的类型有解释数学概念、解释问题解决的策略、解释关于过程与程序的推理以及解释数学上的联系与区别，解释性数学写作帮助教师了解学生的认知基础，检测学生的知识掌握，以及激发学生对于概念探究的兴趣。

高中阶段所涉及的函数概念是对初中阶段所学概念的继承与精确化，学生需要在变量之间的依赖关系描述函数的基础上，用集合语言来精确刻画函数，建立完整的函数定义。如在高中函数概念一课教学前，教师可以通过数学写作让学生回顾函数的定义，并举例说明，以确定学生的认知基础。在课后，教师可以通过数学写作让学生对函数定义进行比较，既可以让学生认识到函数概念的演进，教师也可以透过数学写作以窥学生对函数定义的理解。

（课前写作）请描述你们眼中的函数，并举例说明。

（课后写作）为什么初中和高中都在学函数的概念？请写一篇小文章谈谈你的看法。

此外，一些数学概念的词源也可以作为写作素材，让学生通过“释义”对概念产生新的理解或认识。如圆锥曲线一章中，椭圆“ellipse”来源于古希腊语“ ἔλλειψις”，双曲线“hyperbola”来源于古希腊语“ὑπερβολή”，抛物线同样也源于古希腊语“παραβολή”。这些希腊语单词首先被用于语法和修辞学中，本义分别为缺少、过度和类比，值得一提的是“παραβολή”在几何学上的意思为“在一个线段上作一个矩形”。这其实均起源于阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约前 262-约前 190）的《圆锥曲线论》中，三个古希腊语分别代表圆锥曲线的三种不同性质。教师可以在课后通过数学写作让学生去探索词源，写出数学家为何如此命名，让学生体会解析几何之源，感受解析法和几何法的碰撞。

（课后写作）椭圆一词起源于“ ἔλλειψις”，其意为“缺少”，后被朱恩宽等人译为“亏曲线”，请查阅资料，试说明为什么椭圆又名为“亏曲线”

3 反思性数学写作

波利亚（G. Pólya, 1887-1985）曾言："如果没有了反思，那么就错过了解题的重要而有益的方面"。由此可见，反思在数学学习中尤为关键。"反思性数学写作"指在写作中构建论点或批判推理，其中可分为以下两类题目，第一类是解决问题并分析与论证答案，第二类是分析与论证给定答案。

（数学写作—解决问题并分析与论证答案）公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》第 11 卷中最早给出棱柱的定义："棱柱是一个立体图形，它是由一些平面构成的，其中有两个面是相对且相等的，其他各面都是平行四边形。请你结合下图判断一下欧几里得的棱柱定义是否是正确的？并分析为什么以及如何对欧几里得的定义进行改进？

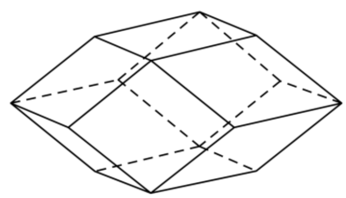


图 1 棱柱定义判断

通过课后对错误答案的分析，学生既可以完善自己对于概念的认识，同时也可以认识到数学定义也是在不断演进，不断完善的，从而树立动态的数学观。

（数学写作—给出正确答案让学生论证） 已知两角差的余弦公式为：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，请用给定斜边为 1，一个内角分别为 α 和 β 的两个直角三角形$\triangle AOC$ 和$\triangle BO'D$，来构造$\alpha-\beta$，并证明两角差的余弦公式。

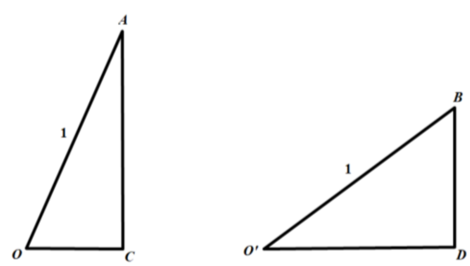


图 2 两角差的余弦公式证明

学生既可以在课前学习单上初探两角差的余弦公式，教师可以翻转课堂，让学生课上利用自己课前的证明方法进行补白；同时，也可以在课后探究余弦公式的多种证法，让学生进行课后补白，在不断探究中感受数学方法之美。

4 创造性数学写作

创造力是人的各种能力的综合和最高形式。荷兰数学家、数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）曾指出数学是一个“再创造”的过程。其中创造性数学写作可分为：提出原创性问题、产生原创性解决方案、发现数学结论和记录原初性想法这四类。

在学生初探轨迹时，教师可以《几何原本》和《平面轨迹》为参考设置问题情境，在课前或课后让学生去进行问题提出。课前的问题提出，教师可建立脚手架式问题帮助学生激活认知，探索何为轨迹。课后的问题提出，学生不仅可以思考何为轨迹，还可以去深入探索其纯粹性与完备性，从而达到思维进阶。

（数学写作）（1）$\triangle ABC$ 的一边长 $BC=2cm$，若$\triangle ABC$ 面积为已知数，则顶点 A 的轨迹是什么？

（2）若限制$\triangle ABC$ 的一边长 $BC=2cm$，你还能提出怎样的问题？

在讲解“相似三角形的应用”一课时，教师可以选用萨默斯隧道的例子，设置开放或半开放的写作题目，让学生开放思维，产生原创性的解决方案。

（数学写作）古希腊历史学家西罗多德曾描述毕达哥拉斯的故乡——萨默斯岛上的一条穿山隧道，该隧道建于公元前 530 年，设计者为工程师欧帕里诺斯。20 世纪 70 年代，考古工作者发现，隧道是由两个工程队从山的南北两侧同时挖掘的，最后在山底某处会合，会合误差极小。当时人们挖隧道用的标准方法是在山的表面向下挖若干通风井，从而确定所抵达的位置，以此来校正挖掘方向，但该隧道挖掘时并未采用此种方法，聪明的同学们可以猜到该隧道是如何挖掘的吗？请描述自己的猜想。

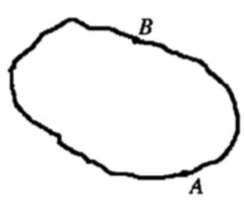


图 3 萨摩斯隧道模型

16 世纪德国著名数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）曾为《几何原本》作注，体现了数学家在前人基础上的不断创新。因此，教师可以克拉维斯注释中的内容为参考，让学生在《几何原本》上不断拓展出新的命题，发现新的数学结论。

（数学写作）《几何原本》第一卷给出以下四个命题：

命题 I.35：同底且位于同样两条平行线之间的平行四边形相等。

命题 I.36：等底且位于同样两条平行线之间的平行四边形相等。

命题 I.37：同底且位于同样两条平行线之间的三角形相等。

命题 I.38：等底且位于同样两条平行线之间的三角形相等。

同学们类比以上命题，可以得到关于梯形的什么结论呢？

通过记录原初性想法，教师可以从中一窥学生对于概念的课前认知，例如学生在学完有理数之后，在课前是如何看待“无理数”这一概念的，教师可以于课前让学生进行写作。

（数学写作）结合之前所学的有理数概念，你是如何认识我们接下来所要学习的“无理数”的？

5 结论与启示

HPM 为数学写作提供了丰富的思维养料，为不同类型的写作习题编制提供了素材，同时也为留白创造式课堂创造了空间。

依托丰富的数学史材料，教师可以为学生编制不同类型的数学写作题目，解释性写作难度较低，教师可先由易到难让学生感受数学写作；反思性写作考察学生的批判性思维，学生需要思辨地去看待数学定义、命题等，教师可搭建脚手架，逐步让学生认识到数学概念的发展是不断趋于完善的，让学生树立严谨求实的数学态度；创造性写作对学生能力要求较高，可以放到课后让学生去寻找新解法、发现新结论等，让学生可以像数学家一样思考数学问题。

数学写作也为课堂留白创造了可能性，教师可以在课前布置数学写作题目，课上让学生展示自己的证明方法，实现课下留白，课上补白，让学生成为课堂的主人。同时，受限于课堂时间，教师可以把课上尚未探究完的内容或是需要学生课下探究的内容布置成课后的数学写作任务，让学生课下对教师课上的设问进行补白，让学生作出创新。

目 录

CONTENT

理论探讨

数学教科书中“旁白”与“留白”的关系探析

韩 栗，刘倩雯

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

教科书在我国建设教育强国的伟大征途中肩负着“培根铸魂，启智增慧”的职责[1]。作为“最不该被忽视的研究”，近十年来教科书研究不断升温，建立具有中国特色、中国气派的“教科书学”变得可期可待[2]。然而，教科书话语权的缺失是横亘在我国教科书学建设前不容忽视的难题，尤为凸显的是本土教科书学术话语的“不在场”及其转化为学科教科书话语的“不通畅”[3]。因此，更新和创造教科书学术话语并用之分析和研究学科教科书，有望成为构建我国教科书话语体系，进而形成植根于本土的教科书学的破局之举。

在我国基础教育一众学科教科书中，数学教科书因数学教育之重，受到来自学校、家庭和社会不同层面的广泛关注，一支人员庞大、素质过硬的编研队伍承前启后、继往开来，不断调整、丰富和创新数学教科书的知识内容、编排顺序和栏目设计[4]。纵观百年数学教科书变迁，诸如“旁白”（又称旁注、边注）、章引言、阅读材料等新元素不断涌现，引导学生“提问题”和“讲想法”的新理念渐至落实[5]。其中，源自戏剧、语气情态各异的教科书旁白不仅是在全知视角下叙述和澄清数学的知识，还被用于在限知视角下设问数学的思想、方法、情感和精神，为学生使用教科书学习数学留下了充分的思维空间和遐想余地，“言有尽而意无穷”的境界与中国传统美学中的“留白”理念有共通之处[6-7]，可谓之“教科书留白”。循留白理念观教科书旁白，依旁白载体析教科书留白，这一教育学与戏曲影视、绘画艺术三方跨界而得的新路径既创生出源于中国传统文化的本土教科书学术研究话语，也必将影响教育场中教科书编研者、教师、学生等不同主体的一系列教科书实践活动[8]。

鉴于此，本研究拟从理论背景、实然现状和未来展望三方面厘清教科书中旁白与留白的关系，回答有关教科书旁白“留白有源”“留白有形”与“留白有期”的研究问题，即：教科书

为何会以旁白形式留白？旁白中留下了哪些类型的“白”？基于留白理念，未来如何更好地编写、运用和研究教科书旁白？

2 留白有源

2.1 从“教材”到“教学之材”的整体定位转变

尽管“教科书不等同于教材”早已是公认的论断，但因教材的历史更为悠久，加之传统教学论中诸如教学大纲等产物对教科书编写的深远影响，使得长期以来教育实践中的教科书“向教性”明显强于“向学性”[8]。教科书即教师拿来教知识的教材，于学生而言则是在教师课堂上学知识的课本，其使用与否、如何使用、用在何处、有何感受，都极大地受制于教师的教科书观和教科书行为。譬如，教师若奉教科书为圣经，忠实地复现教科书中的一切内容，则学生无需倾听教科书；教师若弃教科书如敝履，远离教科书而无限拓展课程，则学生无暇倾听教科书[9]。因此，在“教材”这一传统定位之下，教科书只需做好一张排列组合学科知识的“菜单”供教师择选，再由教师将知识如同“上菜”一般“交（教）”给学生，无需如戏剧一般有旁白叙理设疑，更无需如绘画一般留白有象外之象、意外之意。

进入 21 世纪，在新一轮课程改革以“学习者为中心”的教育思潮影响下，教科书的定位从“教材”逐渐转变为“教（与）学之材”，以期平衡“向教性”和“向学性”，扭转“重教轻学”的不当倾向，实现教科书“转识成智”的育人目标[10]。例如，《普通高中教科书 • 数学》A 版（下称“人教 A 版高中数学教科书”）在卷首即寄语学生：“亲爱的同学，欢迎使用这套教科书，希望它能成为你学习数学的好帮手。”结语则有：“期盼这套教科书能给你带来愉快，使你的数学素养得到大幅提升。”由此可见，教科书不再是一本冰冷客观的知识图谱，更像是一位热情主观但不失严谨的专家学友，或侃侃而谈，或娓娓道来，意在激发学生的学习兴趣，唤醒学生的学科认同，同时不吝于指导教师教学实践。其中，旁白因具有概念、人际、语篇等丰富的话语功能，成为教科书“人性化”的重要元素之一。随着教科书编写越来越注重为学生学和教师教留出空间，旁白也愈发如中国人说话般含蓄谦逊而留有余地，亦如画家作国画般为求深幽与渺远而留出空白。事实上，采用“问题引领学习”等方式于旁白中留白早已成为新时代教科书编研者的追求共识和共同实践[11]。

2.2 从“正文加习题”到“正文加辅助系统”的单元体例更新

媒介技术的发展驱动着教科书的演进，自进入印刷媒介时代起，教科书的体例多遵循由 16 世纪法国教育家彼得·拉米斯（Petrus Ramus, 1515-1572）开创的“拉米斯范式”：首先是冷冰冰的学科定义和分类，由此再引导出进一步的定义和分类，直到穷尽该学科的每一个细枝末节[12]。拉米斯范式下的封闭式线性叙事结构形塑着数百年间数学教科书中“正文加习题”的单元体例，进而塑造了僵化的“新知获取加习题训练”这一依教科书学习数学的单一模式。由此观之，看似圆满无缺的拉米斯式教科书实则是长在应试教育这一“发霉奶酪”上的一块或大或小、或轻或重的“霉斑”，不仅窄化了学习者应追求的多维学习目标，还剥夺了其本应从教科书中获得的丰富学习机会。

随着课程改革的深化，印刷技术的进步和教科书出版文化的繁荣，素质教育导向下的教科书中的元素开始从单一走向多元，章引言、旁白、阅读材料等栏目陆续入驻数学教科书，它们共同构成了相对于教科书正文而言的辅助系统[5]。在新时代教科书“正文加辅助系统”的单元体例中，各栏目的功能、容量及栏目与栏目间、栏目与正文间的适配度是教科书能否有效落实如创造多元学习机会、培育学生问题意识等新课程理念以最终实现“教科书育人”的重要因素[13]。就旁白而言，旁白往往被置于正文一旁的边空（margin）中，它的存在直接打破了直线式的单元文本结构及伴随着的铺陈直叙的内容呈现，使得教科书更加全景化、精致化、生动化，但是其应有的“旁指曲谕”之效却常因栏目体量过小而被教师无视乃至漠视。已有研究揭示了旁白具有的连贯、说明、补充、拓展、启发及提问六大功能，其中连贯类、拓展类、启发类和提问类旁白有着不同程度的留白[14]。教师若能用好旁白，学生若能补好留白，便能充分发挥教科书编者为旁白所预设的设疑激趣、点拨启思、辨析求真等功效。

2.3 从“单向输出”到“多方共商”的意识形态变化

从话语分析的视角，有研究者指出教科书的本质是促进教育性教学展开的话语空间，编者、教师、学生是共时性地存在于教科书话语空间中的权力主体[10]。然而，各权力主体的地位并不是一成不变的，而是在影响教科书编写的多重因素的共同作用下悄然发生着变化，构成为隐匿的教科书意识形态的要素。研究我国建国以来不同年代的数学教科书意识形态发现，21 世纪

前的教科书表现为代表教科书的“说话者”对学生这一“听话者”的控制，知识多以纯粹先验的存在形式由前者单向传递给后者，而进入 21 世纪，随着社会建构主义思潮经由数学哲学的内化吸收进而辐射至教科书编写，教科书中前者对后者的控制程度明显减弱，两者间的对话和协商明显增多，意图将一部分知识建构于教科书话语空间内共同体的讨论之中[15]。

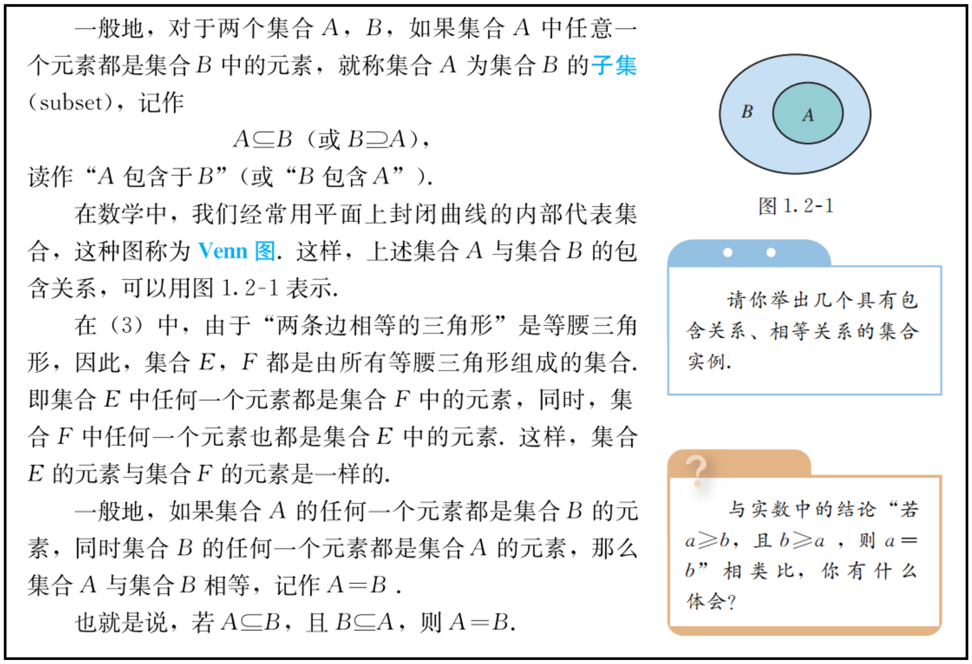
由新时代教科书整体的意识形态入微至旁白，可以发现教科书旁白不仅仅是正文的“解说词”，抑或是编者的“传声筒”，应当将其视作各方为求真理而坐定共商的一张“圆桌”：编者可以藉由旁白向教师和学生质询发问，教师可以利用旁白引导学生探赜索隐，学生亦可对照旁白自主思考、自由发声、自行补白，从理解旁白走向理解学科。参照电影介入叙事中的“全知式旁白”和“限知式旁白”[16]，教科书旁白同样存在全知和限知，即未留白与留白之分，留白的教科书旁白如同电影中的“限知式旁白”一般，能够巧妙地设置悬念以促进知识共创，灵活地贯穿正文以助力学习者的学习进阶，推动教科书意识形态的进一步民主化。

3 留白有形

鉴于国内已有数学教科书研究以人民教育出版社出版的教科书为主，但较少涉及高中学段[17]，本研究选取人教 A 版高中数学教科书作为研究对象。

3.1 分析方法

首先，确定分析单元。人教 A 版高中数学教科书配套教师教学用书指出：“正文的边空设有‘贴士’和‘思考’，‘贴士’介绍与正文内容相关的背景知识，‘思考’中是一些有助于理解正文的问题”。如图 1 所示，“贴士”指蓝色外框旁白（下称“贴士型旁白”），“思考”指带有问号的黄色外框旁白（下称“思考型旁白”），必修与选择性必修全五册教科书中各计有 221 处和 127 处，共计 348 处。经初步内容分析发现，思考型旁白因其设问而全体留白，而贴士型旁白多数为铺叙，仅少数留白。去除仅铺叙的 177 处贴士型旁白，最终得到 171 处旁白作为正式分析单元。


一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A 为集合 B 的**子集**（subset），记作

$$A \subseteq B \text{（或 } B \supseteq A\text{）},$$

读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）.

在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 **Venn 图**. 这样，上述集合 A 与集合 B 的包含关系，可以用图 1.2-1 表示.

图 1.2-1

在（3）中，由于“两条边相等的三角形”是等腰三角形，因此，集合 E，F 都是由所有等腰三角形组成的集合. 即集合 E 中任何一个元素都是集合 F 中的元素，同时，集合 F 中任何一个元素也都是集合 E 中的元素. 这样，集合 E 的元素与集合 F 的元素是一样的.

一般地，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

也就是说，若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则 $A=B$.

请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例.

与实数中的结论“若 $a \geqslant b$，且 $b \geqslant a$，则 $a=b$”相类比，你有什么体会?

图 1 人教 A 版高中数学教科书中的旁白示例

其次，建立分析框架。数学课堂留白分为“陈述之白”“发现之白”“论证之白”“方法之白”“问题之白”及“超越之白”六种类型[6]，然迁移至教科书旁白中的留白分析稍显粗略。例如，一处贴士型旁白为“请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例”，要求举例陈述具体集合及其满足的集合间不同基本关系，留下陈述之白；一处思考型旁白为“从不同角度表述不等式的性质，可以加深理解。对其他不等式的性质，你能用文字语言表述吗”，要求用文字语言陈述符号语言呈现的不等式的基本或常用性质，同留下陈述之白，但前者陈说具体实例，后者调用另一种数学语言。因此，需要细化教科书旁白中的留白子类型，建立由留白类型及子类型组成的分析框架，分别完善好概念界定及操作性定义以进行两级编码。

再次，预编码与修订分析框架。随机抽取 20%的分析单元，由两位研究者按照初始分析框架进行预编码，完成后比对预编码结果，就编码不一致的分析单元交流原因，交流部分分析单元编码不一致的原因，并积极征询多位高校研究者、中小学专家型教师及教研员的意见与建议。其中，一位研究者不断“往返”于未尽的分析框架和全部分析单元编码中，多次迭代修订分析框架，如 171 处旁白均未留下问题之白，故就人教 A 版高中数学教科书的分析而言，暂时删去该主维度。经研究团队对主维度和子维度逐一论证，得到“数学教科书中的旁白与留白分析框架”，分析框架及编码示例如表 1 所示。

表 1 数学教科书中旁白与留白分析框架

主维度		子维度		编码示例
留白类型	概念界定	子类型	操作性定义	
陈述之白	解决“是什么”的问题，主要指陈述有关数学概念、公式、命题、法则的理解	举例说明	列举若干数学学科、其他学科或现实世界中的简单实例	请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例。
		简单应用	应用正文中的概念、公式、命题、法则，解决简单数学问题	你能用这样的方法表示偶数集吗？
		语言转化	转化图形语言、符号语言和文字语言中的一种或多种数学语言	从不同角度表述不等式的性质，可以加深理解。对其他不等式的性质，你能用文字语言表述吗？
		概念理解	运用数学语言表达对正文中概念、公式、命题、法则的一般性理解	函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等。那么判断一个图形是不是函数图象的依据是什么？
发现之白	解决“是什么”的问题，主要指提供发现新知的学习机会	新知探索	通过观察、归纳、类比等合情推理提供线索，点拨学生获取新的数学知识	$2A+2B$ 与 A，B 之间能构成怎样的关系？
		变式提升	改变正文中例习题的条件或结论，设计高认知需求的数学任务	在本例中，如果再加上条件 $AC=BD$，那么四边形 $EFGH$ 是什么图形？
		内容连贯	连通分布于不同学段、册次的教科书或同一册教科书不同章节中的同一数学内容，为后续进一步学习该内容作铺垫	幂的指数除了可以取整数之外，还可以取其他实数，当它们取其他实数时幂也具有各自的含义，这些会在后面学习。

		知识拓展	查阅文献资料或运用信息技术，补充、延伸或拓展教科书外的数学学科或跨学科知识，丰富知识的表征形式	通过查询互联网，进一步了解无理数 e、常用对数和自然对数。
论证之白	解决“为什么”的问题，主要指论证或证明公式、命题或其他数学结论	数学说理	思辨、判断给定数学命题的合理性，解释推理步骤或推理结果	$\angle AOB$ 的大小与点 O 在 l 上的位置有关吗？为什么？
		演绎证明	通过严密的演绎推理，严格证明数学命题、公式、结论	你能证明这些运算律吗？
方法之白	解决“怎么做”的问题，主要指探究问题解决的多种方法	多法并举	思考、探究、尝试不同于正文选用的方法	你能用其他方法证明余弦定理吗？
		解法反思	比较、体会、反思正文中不同方法应用于问题解决时的异同	比较坐标法与向量法，它们在解决几何问题时，有什么异同点？
超越之白	解决“还有什么”的问题，主要指超越知识本身，启迪数学思想，叩问数学精神	\		从这里的推导过程，你感受到向量运算的力量了吗？

最后，两位研究者按照分析框架对所有分析单元进行背靠背正式编码，计算得到主维度编码信度 R_1=0.960，子维度编码信度 R_2=0.905，编码信度较好[18]。对于两位研究者编码不一致的旁白，采取两种途径予以解决，一是引入教科书配套教师教学用书以理解编者设计意图，二是邀请第三位研究者磋商、讨论。最终，研究团队就所有分析单元的两级编码达成一致。

3.2 分析结果

表 2 呈现了人教 A 版高中数学教科书中旁白的留白类型分布。整体而言，以论证之白和陈述之白为主，发现之白与方法之白其次，超越之白最少。从《普通高中数学课程标准》划分的不同内容主题来看[19]，表 2 显示人教 A 版高中数学教科书在“几何与代数”这一内容主题下

的旁白中分布有全类型的留白，“函数”和“概率与统计”的旁白中分布有 4 种类型，而课程中课时容量本身偏少的“数学建模活动与数学探究活动”和“预备知识”的旁白中分别分布有 3 类和 2 类留白。

表 2 人教 A 版高中数学教科书中旁白的留白类型分布

留白类型 / 内容主题	陈述之白	发现之白	论证之白	方法之白	超越之白
预备知识	6	0	1	0	0
函数	18	15	21	7	0
几何与代数	12	17	21	14	3
概率与统计	13	7	9	3	0
数学建模活动与数学探究活动	0	1	1	2	0
合计（占比[1]）	49（28.65%）	40（23.39%）	53（30.99%）	26（15.20%）	3（1.75%）

如图 2 所示，限定同一留白类型，其下不同子类型的分布同样各具特色，深刻体现了人教 A 版高中数学教科书在主编寄语中所述的“理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法”的十六字学习方针。以下逐一分析，明以察微。

[1] 属于该留白类型的分析单元在所有分析单元中的占比

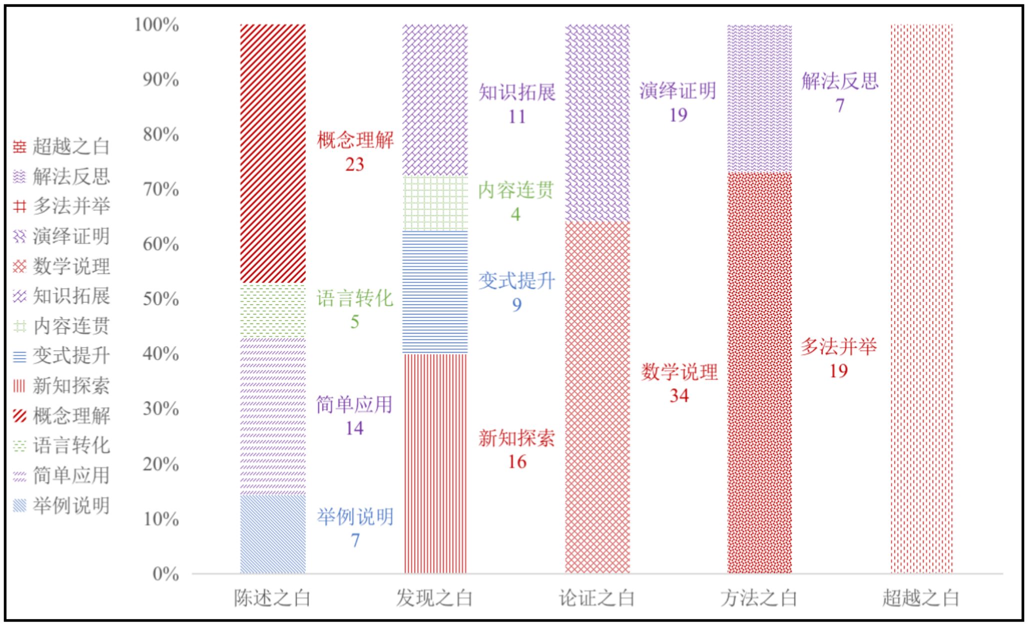


图 2 人教 A 版高中数学教科书中旁白的留白子类型分布

3.2.1 陈述之白与发现之白：“注重基础，拾阶而上”

人教 A 版高中数学教科书在旁白中留下了大量的陈述之白和发现之白，它们整体指向解决“是什么”的问题，分别具有的“层级化”和“连贯性”的特点，折射出本套教科书“注重基础，拾阶而上”的鲜明特征。

在留有陈述之白的旁白中，“层级化”意指不同子类型涉及的认知需求具有不同的层级，学生在对不同子类型的陈述之白进行补白时需要从事的认知活动可以被划分为低认知需求的“仅记忆”和“无联系地使用程序”，以及高认知需求的“有联系地使用程序”和“做数学”[20]。“举例说明”和“简单应用”类旁白占比近四分之一，以低认知需求的记忆复现和无联系程序操练为主，前者包括列举数学、物理学及生活中的实例，丰富正文中抽象数学概念的实例类意象，后者主要指按照正文中已有示范，“依葫芦画瓢”式地应用数学概念、公式、命题或法则解决问题。“语言转化”类旁白占比约 29%，以有联系地使用程序为主，认知需求较高，既有同一种数学语言的转换，如“你能根据图 3.4-1 画出汽车行驶路程关于时间变化的图象吗？”，还有符号语言、图形语言及文字语言三种数学语言的互译，如“你能根据图 3.1-1 找到中午 12 时的 AQI 的值吗？”。“概念理解”类旁白约占 47%，接近半数，因较少依托例题或任务中的具体情境，多在新概念、新命题、新方法、新法则或总结性规律的边空中质询发问，故强调对更上位的一般性理解，认知需求高，显现出一定的做数学的特征。譬如，“函数及其性

质”章中一处旁白为“函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等。那么判断一个图形是不是函数图象的依据是什么？”，学生对该旁白的补白，实则体现了其对集合对应说下函数概念理解的正确与否及深刻程度。

在留有发现之白的旁白中，“连贯性”意指不同子类型经由“旁白到正文”“旁白到问题”“旁白到后文”“旁白到书外”等不同路径实现基于教科书学习数学的连贯一致。“新知探索”类旁白最多，它们于正文和边空中“穿针引线”，旨在为学生获取新知“铺路搭桥”。如“三角函数”一章中连续的两处旁白“$2A+2B$ 与 A，B 之间能构成怎样的关系？”和“α 与 $\dfrac{\alpha}{2}$ 有什么关系？”，均在引导学生发现角的倍数关系，应用二倍角公式，并进一步发现半角公式。“知识拓展”和“变式提升”类旁白位居其次，它们以挑战学生认知为目标，向着丰富学生认知而努力。其中，前者意在跳脱教科书，将知识创生的场域延伸到课堂、文献乃至互联网，实现从教科书中知识的静态表征到课堂中借助信息技术可为的动态表征的跃迁，从初等数学到高等数学的拓深，从学科知识到跨学科知识的拓广。后者则体现出使用变式材料这一我国数学教科书一以贯之的编写特色[21]，在旁白中运用“否定属性（what-if-not）”策略实现变式[22]，且表现为以条件式策略为主，目标式策略为辅。零星的“内容连贯”类旁白看似于正文即刻的新知获得无益，实则在构筑教科书严谨的知识体系和严密的逻辑顺序中起着举足轻重的作用，如“幂的指数除了可以取整数之外，还可以取其他实数，当它们取其他实数时幂也具有各自的含义，这些会在后面学习”，它由指数幂的拓展关联起后续的“幂指对”函数，彰显了数学学习的整体性和连续性。

3.2.2 论证之白：“凡事问个为什么”

留有论证之白的旁白在人教 A 中高中数学教科书中独占鳌头，这与“凡事问个为什么”的主编寄语不谋而合。“看过问题三百个，不会解题也会问”，注重培养学生的问题意识是本套教科书堪称典范的原因之一[23]。

“数学说理”类旁白占比超 60%，它要求学生用数学的语言阐释其自身或编者对一个命题所作出判断的背后的原因。来自数学课堂的证据常表明，学生仅“知其然”，而不“知其所以然”，故教科书在旁白中留下说理之白，鼓励学生“敢开口”“能说理”，直到“说明白”，而不过高要求逻辑推理的完整度和严密性。譬如，仍是“函数及其性质”章中一处旁白：“问题 1

和问题 2 中的函数有相同的对应关系，你认为它们是同一个函数吗？为什么？”，此时函数的定义还未粉墨登场，依定义域和值域两大构成要素判断函数是否相同的法则更在云中漫步，此处旁白意在让学生找出两函数自变量取值范围不同，说出两函数因此不同而不同，直击要害，不需复杂的释理说法。“演绎证明”类旁白有益于培育学生高水平的逻辑推理素养，一类可以通过参照正文中示范的证明过程而补白，如“请你类比公式二，证明公式三和公式四”，另一类是教科书正文因课程标准对有关命题、公式、法则等的推导或证明不作要求而留白，旁白却对学生明确提出补白任务，如“你能证明这些运算律吗？”“你能证明唯一性吗？”，作为筑牢数学大厦中命题体系的地基，它们的重要性可见一斑。

3.2.3 方法之白：“采用多样化学习方式”

人教 A 版高中数学教科书在旁白中留下的方法之白，既为学生“采取阅读自学、独立思考、实践探究、合作交流等多种学习方式”供给着素材，同时显化了数学教学，特别是命题教学中“方法之美”的意蕴[24]。时空更迭，数理人文，一个横亘古今的数学定理绝非只相配一种证明方法，一个广泛运用的数学公式不会只有一种推导思路，一个被奉为经典的数学问题自然也不会只有一种解法。随着数学的演进、科学的进步、技术的变革乃至社会的愈加开放，学生应当有机会走进，甚至创造一个“一枝独秀不是春，百花齐放春满园”的数学世界。

在留有方法之白的旁白中，“多法并举”类旁白占据主流，包括一理多证、一式多导和一题多解。譬如，数学史上余弦定理最早为几何命题，在《几何原本》中作为勾股定理的推广出现，16 世纪起因法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）改写的三角形式渐成三角学中的基本定理，此时期各种视角下的证明方法大放异彩，20 世纪后解析几何的发展和向量几何的诞生又依次革新了其推导[25]。因此，教科书将余弦定理作为平面向量的应用，应用向量法推导余弦定理，是一种顺应历史潮流的选择，但却难以回应“为何今天要学习余弦定理”等学习动机之滥觞。对此，教科书在旁白中追问：“你能用其他方法证明余弦定理吗？”，以期由教师引导学生在徜徉历史中探定理源流，补方法之白。

此外，虽然就量而言，“解法反思”类旁白仅为点缀，但就质来说，它与前述的多法并举类旁白相得益彰，使后者不会流于“方法选美”的表面热闹，更有“方法智慧”的内里沉淀。例析几何与代数内容主题下的解析几何与向量几何，由于学生此前在必修中学习了向量几何，选择性必修册次便在解析几何的相应旁白中留下白：“比较坐标法与向量法，它们在解决几何

问题时，有什么异同点？”，为学生创设反思两种几何方法的学习机会，让方法应用不止是用，还能有所思、有所得，继而有所生，形成问题解决中“多法并举-解法反思”的良性循环。

3.2.4 超越之白：“数学有用”

旁白中的超越之白或因“超越”字面意义之厚重而罕见于人教 A 版高中数学教科书中，然究其实质，却是一种返璞归真，它朴实地指向着“数学有用”的论断，凸显着寄语中“数学不仅对社会发展和科技进步作用巨大，而且对你个人的发展也很重要”的命题。

留有超越之白的 3 处旁白不仅均列于几何与代数同一主题中，更都摄于向量内容之下，体现出教科书对向量几何的推崇[26]。重温超越之白中“超越知识本身，启迪数学思想”的要素，可以发现一处旁白超越了方法之白：“例 3 即为直线与平面垂直的判定定理的证明过程。尝试用综合几何方法证明这个定理，并比较两种方法，你能从中体会到向量方法的优越性吗？”；两处旁白启迪着我们关注几何学发展带来的工具改进及其先进性的运算本质：“从这里的推导过程，你感受到向量运算的力量了吗？”“我们随时随地看到向量运算的作用，你同意‘向量是躯体，运算是灵魂’‘没有运算的向量只能起路标的作用’的说法吗？”。不难看出，留有超越之白的旁白联合着疑问语气和高情态词，显示出教科书背后的“人”为其赋予的极强的感情色彩，反映出“人”在书写旁白时一并抒写的数学知识观、价值观和世界观。今日学生若能在初等数学中学好二维和三维向量，将来便能进入高等数学中的高维向量空间，进而掌握一套通行于物理、工程、计算机等科学中的数学语言，无疑有益于他们的未来发展。此外，若旁白中继续留白有“从综合法到解析法，再到向量法，你对几何学的发展有何感悟？”，或许更能凸显超越之白中“叩问数学精神”的超越要义。

4 留白有期

尚在学科建设中的教科书学已经旗帜鲜明地指出，对教科书的诠释要在一定的学科框架中，立足正确的价值立场，指向真实的教育教学[27]。今天，ChatGPT（Chat Generative Pre-trained Transformer）等生成式人工智能大行其道，引发颠覆性的教育变革，教科书若只停留在学科知识的复制式传播层面，则根本无法应对人工智能带来的冲击，即使从印刷媒介进化为数字媒介，也终将成为衰落的夕阳产物。留白是创造的必要条件，如果说旁白是进入 21 世纪教科书多元

化的取径之一，留白就是新时代教科书守正创新的必行之道。探析数学教科书中旁白与留白的关系，不仅丰富了本土教科书学术研究话语，也能襄助于未来教科书编写、应用、研究等一系列实践活动。

4.1 丰富教科书旁白的留白设计

从人教 A 版高中数学教科书旁白中的留白类型分布来看，数学教科书旁白留下的论证之白、陈述之白、发现之白与方法之白基本到位，但超越之白有限，问题之白缺位。因此，未来修订、编写教科书时，在全面考量教科书各栏目的功能和价值后，首先可以考虑在不同内容主题下适度配置留有超越之白的旁白，充分挖掘潜藏于数学根基之中的精神、思想和方法[28]。以函数内容主题下的函数周期性为例，从自然现象的周期变化到三角函数的周而复始，从有形的锯齿函数和阶梯函数到无形的狄利克雷函数，从反映心脏节律到用于设计心脏起搏器，周期函数这一数学概念愈发抽象，科学应用愈发广泛，周期一词的含义也愈来愈丰实，可以是“遥遥无期”，可以是“合乎预期”，还可以是“未来可期”。对此，教科书可设置一处旁白：“学习了周期函数后，你对周期是否有新的理解？”，触发学生感悟充满于数学中的系统化、应用化、扩张化的精神。

其次，于教科书旁白中合理增加问题之白。当前“问题提出（Problem Posing）”研究的火热与教科书中问题提出的遇冷构成了一对明显的矛盾[29]。因此，从教科书留白的角度，不仅要设计发现之白以求“知其然”，设计论证之白以求“知其所以然”，更要设计问题之白以在提出新问题、提出好问题的层面达到“何由以知其所以然”。基于当前教科书整体上的问题提出的稀缺，若要在教科书旁白中留出问题之白，不应急于求成，而应稳中求进，即逐渐增加问题之白的分量，逐渐提升问题提出的自由度，逐步发展学生的问题提出能力。具体撰写旁白时，可以组合疑问语气和低情态词，如“根据已有信息，可能提出新的问题吗？”，以尽可能地降低学生在提出问题方面常有的畏难情绪。

4.2 实践教科书旁白的留白教学

要使教科书中的旁白不旁落，留白不白留，关键仍在于课堂。事实上，早有教师着手钻研教科书旁白，对课堂留白的探讨更早于教科书留白，但教学实践中的旁白与留白始终是分而治

之的两个议题。近年来，“留白创造式”教学在中小学兴起，涉有课堂教学、学生学习、课程资源、教师素养等多个领域，包括教师能否选取好留白资源，设计好课堂留白，学生是否被激发补白动机，最终能否补好白等一揽子问题[6]。教科书作为最重要的课程资源，其中的旁白为教师设计课堂中的陈述之白、发现之白、方法之白和论证之白提供了大量的素材。为藉由留白促进学生探究和创造，教师不该忽视看似边角料的旁白，而应主动强化对教科书正文和含旁白在内的教科书辅助系统的一体化理解，不负编者的苦心孤诣、字斟句酌，打通实践视野下旁白和留白间的无形之墙。

此外，针对旁白中超越之白的缺位和问题之白的缺失，教科书的修订需要漫长的时间，但教师却可以即刻发挥自身的能动性，试法从其他途径获取留白素材，如从学科联系中获得问题情境，从数学历史中寻找思想养料，从高等数学的前沿发展中反拨初等数学教学的要义所在。可以断言，一节好课必有留白之实，而一位好教师当是善于留白创造，敢于创造留白。

4.3 拓展教科书旁白与留白的研究

回瞻历史，新中国成立以来的教科书建设史揭示了“教科书编写，科研先行”的发展规律[30]，展望未来，通过学科交叉、跨界融合是丰富教科书学学科谱系，为教科书学开疆拓土的纵横方略。由此观之，对教科书旁白与留白的研究具有承先启后、薪火相传的重要意义，然而，目前严谨的学术研究尚处于起步阶段，在教育科研的理论性、对象层、问题域、方法论、普适化等方面有着深掘的必要性和广阔的可能性。

譬如，中国山水画中的留白有“疏密-空白”“结构-空白”“层次-空白”与“主次-空白”之分，它们相互关联、相互制约，得以成就中国画通过留白“置陈布势”的艺术特色[31]。据此，研究者可以融合已有教科书研究方法和中国画鉴赏方法，从宏观、中观和微观三个层面观研教科书旁白中留白的疏密、结构、层次与主次，采掘教科书留白的美育价值。再者，基于旁白的话语属性，可以运用语言学中的话语分析方法量化剖析教科书旁白的语用功能，再从美学和哲学的角度质性深描于旁白中留白的意境和意味，以融二白为浑然一体。

参考文献

[1] 新华社. 习近平给人民教育出版社老同志的回信 [EB/OL].（2020-11-30） [2023-06-08]. ccps.gov.cn/xxsxk/zyls/202011/t20201130_145361.shtml.

[2] 石鸥, 周美云. 教科书研究 40 年发展与展望[J]. 宁波大学学报(教育科学版), 2019, 41(4): 54-60.

[3] 王攀峰, 邓文卓. 中国教科书话语体系构建的价值、问题与路径[J]. 课程.教材.教法, 2023, 43(4): 42-49.

[4] 宋莉莉, 李海东. 数学教材的“研”“著”“编”[J]. 中国编辑, 2015(6): 21-23.

[5] 王嵘. 百年高中代数教科书变迁的特点与启示[J]. 课程.教材.教法, 2017, 37(10): 100-105.

[6] 王华, 汪晓勤. 中小学数学“留白创造式”教学：理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2022: 18-19, 67-80.

[7] 蔡甜甜, 刘国祥, 宁连华. 数学课堂留白艺术的理论探析与实践反思[J]. 数学教育学报, 2018, 27(6): 29-32.

[8] 余宏亮. 通向根脉与面向未来: 建构教材学的基础、逻辑与方略[J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 2021, 39(2): 30-39.

[9] 孙宽宁. 课程实施: 忠实基础上的理解与选择[J]. 教育发展研究, 2008(Z4): 72-75.

[10] 叶波. 教科书本质: 历史谱系与重新思考[J]. 课程.教材.教法, 2018, 38(9): 75-79.

[11] 王嵘, 王翠巧. 中学数学教科书中问题设置的分析与启示[J]. 数学通报, 2021, 60(12): 8-10, 13.

[12] 段发明, 刘业辉. 媒介技术驱动教材发展的历程、逻辑与启示[J]. 课程.教材.教法, 2023, 43(4): 50-57.

[13] 章全武. 教科书内容编制过程模型构建及其应用价值[J]. 课程.教材.教法, 2022, 42(4): 42-49.

[14] 韩粟, 华旻珂, 杨孝曼. 沪教版高中数学教科书必修第一册的旁白研究[J]. 上海课程教学研究, 2021(9): 18-23.

[15] 褚小婧. 数学教科书意识形态研究[D]. 浙江: 浙江师范大学, 2019: 124-126.

[16] 朱岩. “介入叙事”与电影旁白[J]. 电影评介, 2008(8): 55-56.

[17] 吕世虎, 彭燕伟. 近二十年中国中小学数学教科书研究综述——基于 CiteSpace 知识图谱分析[J]. 数学教育学报, 2019, 28(4): 48-54.

[18] 徐建平, 张厚粲. 质性研究中编码者信度的多种方法考察[J]. 心理科学, 2005(6): 152-154.

[19] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京:人民教育出版社, 2020: 10.

[20] Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms[J]. *American Educational Research Journal*, 1996, 33(2): 455-488.

[21] 章建跃, 王嵘. 中国数学教科书使用变式素材的途径和方法[J]. 数学通报, 2015, 54(10): 1-8, 48.

[22] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S. & Kenney, P. A. Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study[J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1996, 27(3): 293-309.

[23] 邵光华, 张妍. 人教 A 版高中数学新教材特色分析及使用建议[J]. 课程.教材.教法, 2019, 39(12): 109-114.

[24] Wang, X., Qi, C. & Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics [J]. *Science & Education*, 2017(26): 1029-1052.

[25] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的余弦定理历史[J]. 数学通报, 2015, 54(08): 9-13.

[26] 章建跃. 必须关注教学内容的变革[J]. 中小学数学(高中版), 2010(6): 50.

[27] 林小鸽. 论教科书的诠释: 三重逻辑、现实困境与纾解之道[J]. 课程.教材.教法, 2022, 42(7): 42-48.

[28] 米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019: 147-148.

[29] 郭玉峰, 闫佳洁, 周雯佳. 问题提出融入中小学数学教科书: 现状、困境及解决思路[J]. 课程.教材.教法, 2022, 42(6): 117-123.

[30] 课程教材研究所. 新中国中小学教材建设史(1949-2000)研究丛书: 数学卷[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012: 475-476.

[31] 胡巧红. 中国画留白艺术认识[D]. 浙江: 杭州师范大学, 2007: 8-10.

专题研究

美英早期教科书中解析几何的应用

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

几何学是一门古老而实用的科学，是自然科学的重要组成部分，自 17 世纪法国数学家费马和笛卡尔创立解析几何以来，其为传统几何学注入了新的活力。著名数学家拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736-1813）曾经说过："只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄，但是当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后就以快速的步伐走向完善。"[1]解析几何架起了代数与几何之间的桥梁，它将代数、几何、三角等数学知识有机地联系在一起，使得人们可以用代数的方法研究几何图形。

解析几何是高中数学重要的教学内容之一，在高考中占有举足轻重的地位，也是高考的热点之一。在提倡将数学文化融入数学教学、实施数学学科德育、落实立德树人的今天，传统机械式的套用公式解决数学问题已不能满足时代的要求。数学文化作为国家文化素质教育的重要组成部分，体现了数学的人文价值和科学价值，在培养学生的数学素养、促进学生的理性思维中扮演着重要角色。面向新时代，国家需要创新型人才，因而今天的数学教学更应加强理论与实际相结合，关注学生的应用意识和创新能力的培养，注重对数学文化、特别是对中国古代传统优秀文化的渗透。

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称《课标》）指出，数学是自然科学的重要基础，并且在社会科学中发挥越来越大的作用，数学的应用已渗透到现代社会及人们日常生活的各个方面。在学习数学和应用数学的过程中，学生能发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养。[2]数学作为一门主要学科，在启迪智慧、挖掘潜能、培养创新意识方面的作用已经越来越受到重视，数学应用更成为人们关注的焦点。此外，在解析几何这一板块中，《课标》要求学生能够运用平面解析几何方

法解决简单的数学问题和实际问题，感悟平面解析几何中蕴含的数学思想。[2]鉴于此，本文拟聚焦解析几何的应用，选取 1861-1960 年间出版的 51 种美英早期解析几何教科书作为研究对象，对其中的相关命题及应用问题进行考察、分析和归类，以期为今日教学提供有用素材及思想养料。

2 数学内部的应用

在早期教科书中，关于解析几何在数学内部的应用主要在于证明相关的几何命题。

例 1：三角形三条中线交于一点。

如图 1 所示，建立平面直角坐标系，将△ABC 的一边 BC 置于 x 轴，使得 BC 中点与原点重合。设点 A、B、C 的坐标分别为 $A(h,k)$、B(-a,0)、C(a,0)。

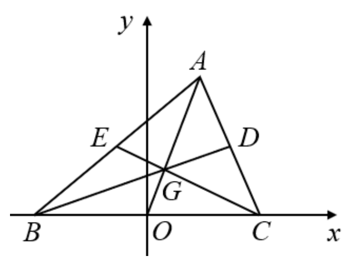


图 1 例 1 图

Johnston 首先运用行列式推导三角形三条中线的直线方程，再联立方程计算出两条中线的交点坐标，最后证明其满足第三条中线的直线方程。[3]因为 AC 的中点为 $D\left(\frac{a+h}{2},\frac{k}{2}\right)$，于是过点 B、D 的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{a+h}{2} & \frac{k}{2} & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

化简可得

$$kx-(3a+h)y+ak=0 \tag{1}$$

同理，中线 CE 及中线 AO 的直线方程分别为

$$kx+(3a-h)y-ak=0 \tag{2}$$

$$hy-kx=0 \tag{3}$$

联立（2）（3）式可得中线 CE 和中线 AO 的交点为$G\left(\frac{h}{3},\frac{k}{3}\right)$，将该点代入（1）式，可知中线 BD 过点 G。当然，把三角形放置在平面直角坐标系上的任何位置均可证明这一命题，于是 Johnston 沿用这一方法来推导三角形重心坐标公式。

设点 A、B、C 的坐标分别为$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$。运用行列式计算可得，三角形中过点 A、B、C 的中线的直线方程分别为

$$x(2y_1-y_2-y_3)-y(2x_1-x_2-x_3)+x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3)=0,$$

$$x(2y_2-y_3-y_1)-y(2x_2-x_3-x_1)+x_2(y_3+y_1)-y_2(x_3+x_1)=0,$$

$$x(2y_3-y_1-y_2)-y(2x_3-x_1-x_2)+x_3(y_1+y_2)-y_3(x_1+x_2)=0,$$

运用同样的方法即可证明三角形三条中线交于一点且三角形重心坐标公式为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)。$$

借助平面直角坐标系，我们即可建立曲线与方程之间的对应关系，从而用代数的方法证明许多几何命题。表 1 给出了可以用解析法证明的若干几何命题，其中涉及三角形、四边形、圆和圆锥曲线中的相关命题。

表 1 可用解析法证明的几何命题

类别	命题	教科书
三角形	三角形的三条中线/高线/内角平分线/中垂线交于一点。[3]	Johnston（1893）
	直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。[4]	Bailey & Woods（1899）
	若一个三角形的两条中线相等，则这个三角形是等腰三角形。[4]	
	如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。[4]	
	阿波罗尼奥斯定理：三角形一条中线两侧所对边平方和等于底边的一半平方与该边中线平方和的 2 倍。[4]	
四边形	平行四边形的对角线互相平分；菱形的对角线互相垂直；矩形的对角线相等；正方形的对角线相等且互相垂直平分。[5]	Nichols（1892）
	梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半。[6]	Poor

		（1934）
	顺次连结任意四边形各边中点得到的四边形是平行四边形。[4]	Bailey & Woods （1899）
圆	直径所对的圆周角是直角。[7]	Young, Fort & Morgan （1936）
	从圆上一点 P 作直径 AB 的垂线 PC，垂足为点 C，则 $\lvert PC\rvert^2=\lvert AC\rvert\cdot\lvert CB\rvert$。[7]	
圆锥曲线	椭圆上任一点的焦半径的夹角被该点的法线所平分。[8]	Ziwet & Hopkins （1913）
	双曲线上任一点的焦半径的夹角被该点的切线所平分。[8]	
	从抛物线的切点作两条直线，一条与焦点相连，另一条垂直于准线，则它们与切线成相等的角。[8]	

3 数学外部的应用

解析几何在实际生产生活中有诸多的应用，其不仅能与日常生活中许多常见的事物建立起联系，还在测量、定位、建筑及工程、天文和物理等方面有着极为广泛的应用。

3.1 测量上的应用

在平面直角坐标系中，点到直线距离公式和三角形面积公式是学生经常使用的两个公式，以此可以测量两地之间的距离以及所围多边形的面积。

例 2：在华盛顿市，字母街道（*A* 街、*B* 街等）向东西方向延伸，编号街道（1st 街、2d 街等）向南北方向延伸，国会大厦位于坐标原点，坐标轴被称为大道。例如，1st 街在国会大厦以东一个街区。如果一个街区的长度是 $\frac{1}{10}$ 英里，从南 *C* 街和东 5th 街的拐角处到北 *Q* 街和西 14th 街的拐角处的距离是多少？[9]

如图 2 所示，若以国会大厦为坐标原点、以大道为坐标轴建立平面直角坐标系，则南 C 街

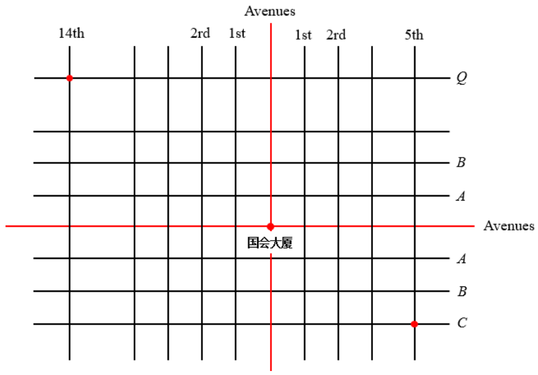


图 2 例 2 图

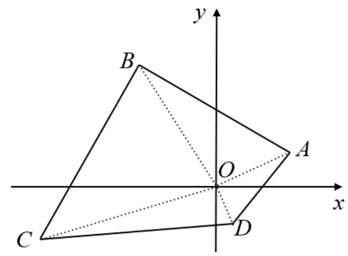


图 3 例 3 图

和东 5th 街的拐角处的坐标为(5,-3)，北 Q 街和西 14th 街的拐角处的坐标为(-14,17)。由两点间距离公式计算可得 $\sqrt{(5+14)^2+(-3-17)^2}=\sqrt{761}$，因为一个街区的长度是 $\frac{1}{10}$ 英里，所以这两地相距约为 2.76 英里。

例 3：从四边形场中的一点 *O* 到各顶点的距离和方向如下

顶点	距离	方向
A	**120 英尺**	**北偏东 65°**
B	**216 英尺**	**北偏西 32°**
C	**320 英尺**	**南偏西 74°**
D	**65 英尺**	**南偏东 23°**

制作该区域的地图并计算其面积。[10]

如图 3 所示，以 O 为原点建立直角坐标系 xOy，则点 A、B、C、D 的坐标分别为 A(108.76,50.71)、B(-114.46,183.18)、C(-307.60,-88.20)、D(35.40,-54.51)（保留 2 位小数）。由三角形面积公式计算可得，四边形 $ABCD$ 的面积为

$$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}108.76 & 50.71 & 1\\ -114.46 & 183.18 & 1\\ -307.60 & -88.20 & 1\end{matrix}\right\|+\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}108.76 & 50.71 & 1\\ -307.60 & -88.20 & 1\\ 35.40 & -54.51 & 1\end{matrix}\right\|=59890.83,$$

即该区域的面积约为 59890.83 平方英尺。

3.2 定位上的应用

我们把平面内与两个定点 F_1、F_2（叫做焦点）的距离之差的绝对值等于常数 $2a$ $(0<2a<|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做双曲线。基于双曲线的定义，在战争中可用于确定敌军大炮的位置。通过设置两个监听站，然后计算在这两个哨所听到炮声的时间差，则大炮就位于以哨所为焦点的双曲线上。如果设置三个监听站，则大炮位于三条双曲线的交点处。[11]

例 4：两个监听站位于 $A(0,0)$和 $B(4,1)$，单位为英里。在这两个点的麦克风显示，枪距离点 B 比距离点 A 近 3.60 英里。在平面直角坐标系中画出一条穿过枪所在位置的曲线。[12]

设曲线上一点为 P，因为枪距离点 B 比距离点 A 近 3.60 英里，所以 $|PA|-|PB|=3.60$，于是枪在以 A、B 为焦点、长轴长为 3.60 的双曲线的右支上（图 4）。

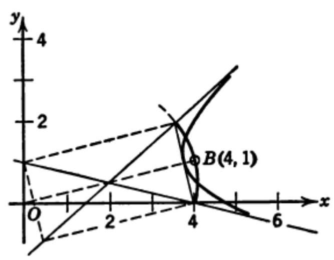


图 4 例 4 图

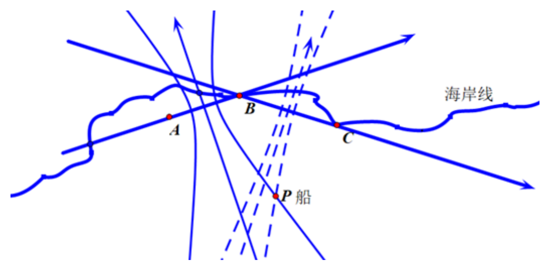


图 5 Loran 系统

运用上述原理，双曲线在通信定位上也有广泛的应用。如图 5 所示，Loran（Long Range Navigation）系统就是利用双曲线的定义来测定船的位置。Loran 系统使用来自选定的电台的无线电信号，以及预先绘制的双曲线系统地图，以电台为焦点。因为它不受黑暗、日光或天气的影响，并且只需要很少的计算，所以这个系统快速且有效。[11]例如，在二战的时候，设计监听站根据枪响的时间差确定敌人所在的位置。同时，双曲线也被应用于雷达和导航中。

3.3 建筑及工程上的应用

在桥梁设计中经常可以看见抛物线的使用。如果一个拱要支撑一个均匀的水平荷载，拱会有抛物线的形状，此时拱所受应力将与拱的曲线相切（图 6）。[11]

图 6 Kells & Stotz（1949）中的拱桥插图

类似地，悬索桥的主缆索被设计用来承载均匀的水平荷载，悬挂的曲线大致呈抛物线形状（图 7）。[11]

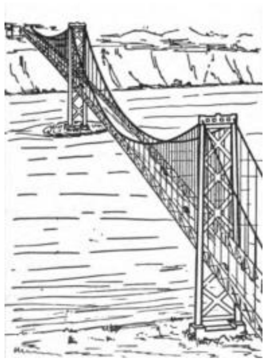


图 7 Kells & Stotz（1949）中的悬索桥插图

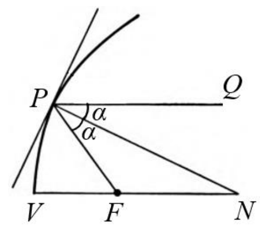


图 8 抛物线的几何性质

例 5：在一个横截面为顶点向下的抛物线的槽中充满液体，其顶点上方 1 英尺的槽的宽度是 4 英尺，若水面的宽度是 8 英尺，求液面的高度。[13]

以抛物线的顶点为圆心、对称轴为 y 轴，建立平面直角坐标系。曲线关于 y 轴对称，设抛物线方程为 $x^2 = ky$。曲线经过(2,1)，则 k=4，即 $x^2 = 4y$。因为水面的宽度是 8 英尺，令 x=4，于是液面的高度为 4 英尺。

抛物线的几何性质是声光反射器设计的基础。如图 8 所示，点 P 是抛物线上任意一点，F 是焦点，PQ 平行于抛物线的对称轴 VN，则过 P 的法线 PN 平分$\angle FPQ$。可知，从点 F 到点 P

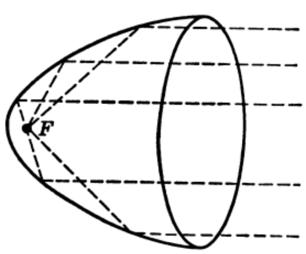


图 9 Purcell（1958）中的抛物面插图

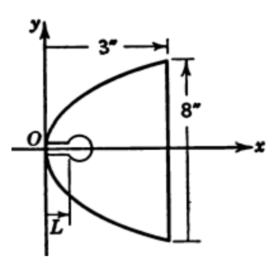


图 10 例 6 图

的光线会沿射线 PQ 反射。如果反射器的形状是绕抛物线的对称轴旋转而得到的，那么来自焦

点处的光线将平行于对称轴反射，从而产生集中的光束而不是漫射光（图 9）。[11]抛物线的这一特性被用于设计汽车的前照灯和探照灯，光源放置在焦点上。当然，平行于对称轴的入射光线经反射后会经过抛物线的焦点，由于来自遥远恒星的光线在实际应用中是平行的，因此抛物面镜有时被用在望远镜中。在足球比赛中，一个抛物面形状的麦克风会指向体育场的远处，用来接收欢呼声和音乐。[14]

例 6：前照灯的横截面通常设计成一条抛物线，灯泡的灯丝放置在抛物线的焦点处，于是所有从灯丝发出光线都能被抛物面反射器反射成平行于抛物线对称轴的光线。一个前照灯的直径为 8 英寸，深度为 3 英寸，灯泡的球体直径为 0.800 英寸。确定安装灯泡柄所需的管件长度，即从反射器到灯泡所需的长度。[12]

如图 10 所示，建立平面直角坐标系，设抛物线方程为 $y^2 = kx$，因为曲线经过(3,4)，则 $y^2 = \frac{16}{3}x$。此时，抛物线的焦距为 $\frac{4}{3}$，因此安装灯泡柄所需的管件长度为 $\frac{4}{3} - 0.400 = 0.933$ 英寸。

椭圆在科学和工程领域也有许多应用。例如，它们被用于不同角速度的齿轮（图 11）和半椭圆弹簧。[11]

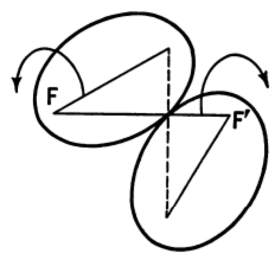


图 11 Kells & Stotz（1949）中的椭圆齿轮插图

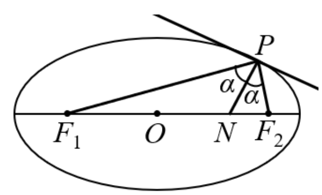


图 12 椭圆的几何性质

椭圆的一条几何性质在建筑设计中也被广泛应用，即椭圆上任意一点的法线平分过该点的焦半径之间的夹角（图 12）。因此，由椭圆绕其长轴旋转而形成的表面具有这样的特性：来自一个焦点的光波或声波将被表面反射，从而到达另一个焦点。例如，华盛顿国会大厦有一间圆形大厅，由于其屋顶是椭圆形穹顶，因此在这个房间里和人讲话很不保险，如果你在窃窃私语时恰好站在地板上的某个金属星标点处，你的话就能被房间里站在对面的人听到；在伦敦圣保罗大教堂（St. Paul's Cathedral）中，若有人站在一堵墙附近低声细语，那么在 108 英尺远的墙边可以清晰地听到对话的内容。[11]

3.4 天文上的应用

在天文学中，行星在太阳引力下的运动轨迹是椭圆（图 13）。因此，地球相对于太阳的运动轨迹大致呈椭圆形，太阳在椭圆的一个焦点上，并且地球绕太阳的椭圆轨道的离心率约为 $\frac{1}{60}$。月球绕地球运动的轨道也是一个椭圆，地球在椭圆的一个焦点上，且这个椭圆轨道的离心率约为 $\frac{1}{18}$。[11]几乎所有彗星运动的轨道都是抛物线，太阳是这个抛物线的焦点。[15]

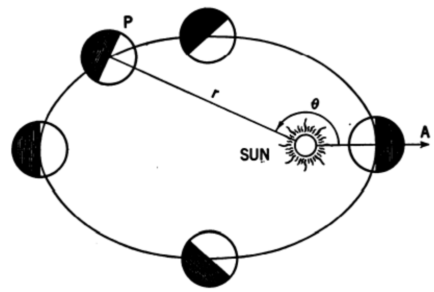


图 13 Kells & Stotz（1949）中的地球公转轨道插图

例 7：彗星以太阳为焦点，沿抛物线轨道运行。当彗星距离太阳 40000 英里时，太阳到彗星所在直线与抛物线轨道的对称轴成 60°角。彗星离太阳的最近距离是多少？[16]

如图 14 所示，以太阳为焦点，建立平面直角坐标系。设抛物线的方程为 $y^2=2px\left(p>0\right)$，于是 $|OF|=|OR|=|TQ|=\frac{p}{2}$。因为 $\angle PFS=60°$ 及 $|FP|=40000$，所以 $|OS|=20000+\frac{p}{2}$，而 $|TP|=40000-\frac{p}{2}$，所以 $20000+\frac{p}{2}=40000-\frac{p}{2}\Rightarrow p=20000$，于是彗星运动的轨迹方程为 $y^2=40000x$。由此可知，彗星离太阳的最近距离是 $|OF|=10000$ 英里。

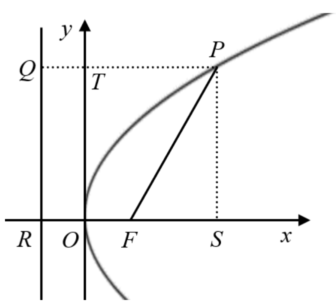


图 14 例 7 图

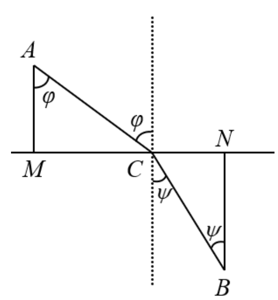


图 15 折射定律

3.5 物理上的应用

在物理中，若一个物体在真空中从地面抛起，其轨迹是一条非常接近抛物线的曲线。设该物体的初始速度为v_0且与水平方向成ε角，在 t 时刻会处于位置$x=v_0\cos\varepsilon\cdot t, y=v_0\sin\varepsilon\cdot t$。若物体在水平运动和垂直运动时处在平衡状态，由于重力加速度 g 保持不变，在 t 时刻纵坐标 y 减小了$\frac{1}{2}gt^2$，则物体在 t 时刻的坐标为$\begin{cases} x=v_0\cos\varepsilon\cdot t \\ y=v_0\sin\varepsilon\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$，消去参数，即可得到直角坐标方程$y=v_0\tan\varepsilon\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varepsilon}x^2$。[8]由此可见，抛射体运动的轨迹是一条抛物线。

光的折射定律是物理中的重要课题之一，它由荷兰数学家斯涅尔发现。光线从一种介质中的点 A 折射后到达另一种介质中的点 B，这两种介质被一个平面隔开（图 15）。如果光线在第一种介质中的传播速度为v_1，在第二种介质中的传播速度为v_2，运用微积分这一工具可以确定光线的传播路径，使得光线从点 A 到点 B 的耗时最短。[17]

设点 A 到平面的垂直距离为$|MA|=a$、点 B 到平面的垂直距离为$|NB|=b$及$|MN|=c$、$|MC|=x$，则$|AC|=\sqrt{a^2+x^2}$及$|CB|=\sqrt{(c-x)^2+b^2}$。于是，光线从 A 到 B 所需要的传播时间为$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}$。由于

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{b^2}{v_2[(c-x)^2+b^2]^{\frac{3}{2}}},$$

又$\frac{d^2t}{dx^2}>0$，所以当光线从点 A 到点 B 的耗时最短时，有$\frac{dt}{dx}=0$，即

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

记

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sin\varphi,\quad \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=\sin\psi,$$

就得到 $\frac{\sin\varphi}{v_1}=\frac{\sin\psi}{v_2}$ 。

4 结论与启示

综上所述，历史上出现了解析几何的诸多应用，其既可以用于证明与三角形、四边形、圆和圆锥曲线等几何图形有关的命题和性质，又可以用于测量、定位、建筑及工程、天文和物理等领域的实际问题之中，这些素材为今日解析几何应用的教学提供了诸多启示。

其一，构建情境，提高数学兴趣。数学来源于生活，许多数学问题是从实际生活中抽象而来。由于高中数学中存在一些较为抽象、理解起来十分困难的内容，所以教师在教学过程中应当返璞归真，或将一些数学问题放到原有的情境中，或为学生构建生活化的问题情境，从而增强学生对知识的理解和记忆，实现和现实生活的紧密关联，达到良好的数学学习效果。例如，世界最大的射电望远镜，之所以探测能力超群，其与抛物线的几何性质密切相关，因此，在学习抛物线的几何性质时，教师可以为学生构建这一生活化的教学情境，以激发学生进一步探究的兴趣。

其二，关注教材，增强应用意识。数学教科书是教师教学的重要资源、主要依据，是学生获取知识、掌握技能技巧的主要源泉之一，更是落实课程改革的重要载体。虽然教师在数学内容的编排上各有特色，但教学所需的例题、习题等素材主要取自课本。因此，教师应充分利用课堂，积极挖掘教科书中知识应用的素材，加强和培养学生应用数学的意识。以沪教版选择性必修一为例，在“圆锥曲线”一章的旁白中就已介绍椭圆和抛物线的光学性质，教师可以以这些阅读材料为依托，结合上述圆锥曲线在光学和声学上的应用，以此帮助学生丰富和积累数学应用意识、培养核心素养、开拓数学视野。

其三，加强实践，培养创新能力。实践出真知，实践在学生理解、掌握和熟练应用知识的过程中起着至关重要的作用。我们认为，这里的实践应包含两层含义。第一，教师和学生一起应用知识。教师可以设计数学知识的简单应用和数学知识的实际应用问题，以此帮助学生巩固所学知识，建立知识之间的联系。第二，教师给予学生探究知识的机会。例如，在圆锥曲线的几何性质的学习中，教师可以安排学生在课前运用互联网搜集圆锥曲线的实际应用，并以小组的形式进行分享，同时介绍其背后的数学原理。通过学生的主动探究，不仅有助于唤起学生的

主体意识，让他们积极主动地参与到知识的探究过程中去，充分感受、理解知识的产生和发展过程，还将培养学生的创新意识、创新精神和创造能力。

参考文献

[1] 唐毅, 刘光. 几何问题代数解的潜在功能[J]. 数学教学通讯：中教版, 2005(9S): 4.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 1, 8, 43.

[3] Johnston, W. J. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1893: 75-79.

[4] Bailey, F. H. & Woods, F. S. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1899: 20-21, 84-85.

[5] Nichols, E. W. *Analytic Geometry for Colleges, Universities, and Technical Schools*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1892: 48.

[6] Poor, V. C. *Analytical Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1934: 14.

[7] Young, J. W., Fort, T. & Morgan, F. M. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936: 119.

[8] Ziwet, A. & Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 184, 189, 209-211.

[9] Ziwet, A. & Hopkins, L. A. *Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1916: 9.

[10] Dowling, L. W. & Turneaure, F. E. *Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1914: 31.

[11] Kells, L. M. & Stotz, H. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1949: 128-129, 139-140, 149-150.

[12] Cell, J. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1951: 98, 114.

[13] Roberts, M. M. & Colpitts, J. T. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1918: 116.

[14] Purcell, E. J. *Analytic Geometry*[M]. New York: Appleton-Century-Crofts, 1958: 112-113.

[15] Lambert, P. A. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1897: 27.

[16] Osgood W. F. & Graustein, W. C. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: 211.

[17] Woods, F. S. & Bailey, F. H. *Analytic Geometry and Calculus*[M]. Boston: Ginn & Company, 1917: 171.

几何视角下的二倍角公式

姚 瑶

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

倍角公式是平面三角学中三角函数式的恒等变换中的一项重要且非常实用的公式，具体是指用本角三角函数把倍角三角函数表示出来。然而，平面三角学中的三角函数恒等式众多，学生在学习过程中的难点通常在于三角函数公式的理解和记忆，由此导致学生学习兴趣不高。

数学内容通常既具有数的特征，又具有形的特征，从数和形的双重视角赋予倍角公式以几何意义，能促进学生对三角函数公式的本质理解，培养学生直观想象素养。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中也要求学生借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题，培养直观想象的数学学科核心素养[1]。

加强几何直观教学，借助几何直观的抽象性、动态性、模型性发展学生的观察力与分析力，可有效增强学生兴趣、提高学生学习能力、促进学习效率的提升，有助于激发创新意识、发展创造性思维，在解决数学问题的同时，发现新结论、新思路、新方法等。

鉴于此，本文从几何的视角，对 19 世纪至 20 世纪中叶期间出版的 107 种美英早期三角学教科书中的二倍角公式相关内容进行考察，从中总结出二倍角公式的几何证明，以期为课堂教学提供更加丰富的素材。

2 帕普斯模型

早期三角学教科书编者常常利用帕普斯模型来推导和差角正余弦公式与和差化积公式，Lewis 采用帕普斯模型推导了倍角公式 [2]。如图 1，在 Rt$\triangle AOB$ 中，$\angle ABO=90°$，$OA=1$，$\angle AOB=2\alpha$，过点 A 作 AC 垂直 $\angle AOB$ 的角平分线 OC 于点 C，过点 C 作 CD 垂直 OB 的延长线于点 D，$CE\perp AB$。故在 $\triangle AOB$ 中，有 $AB=\sin 2\alpha$，$OB=\cos 2\alpha$。在 $\triangle AOC$ 中，有 $AC=\sin\alpha$，$OC=\cos\alpha$。在 $\triangle OCD$ 中，$CD=\cos\alpha\sin\alpha$，$OD=\cos^2\alpha$。在 $\triangle AEC$ 中，可知

$\angle CAE=\alpha$，故有 $AE=\sin\alpha\cos\alpha$，$CE=\sin^2\alpha$。由 $AB=AE+CD$，$OB=OD-CE$ 可得二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha。$$

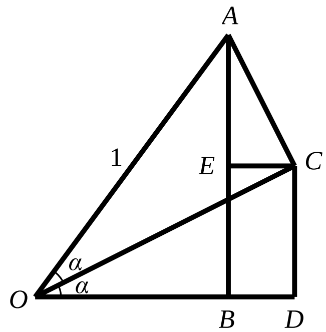


图 1 帕普斯模型

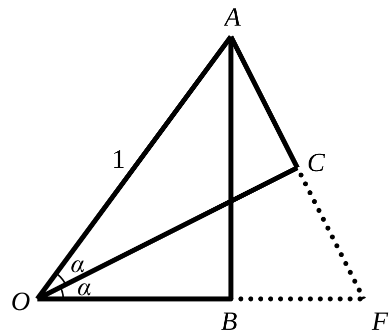


图 2 等腰三角形法

3 等腰三角形法

Lock、Loney 借助等腰三角形的几何性质进行证明[3-4]。如图 2，在 Rt△AOB 中，$\angle ABO=90°$，$OA=1$，$\angle AOB=2\alpha$，过点 A 作 AC 垂直 $\angle AOB$ 的角平分线于 OC 点 C，AC 和 OB 的延长线交于点 F，由此可知 $\triangle OAF$ 是等腰三角形，$OA=OF=1$。

在 $\triangle AOB$ 中，有 $AB=\sin 2\alpha$，$OB=\cos 2\alpha$。在 $\triangle AOC$ 中，有 $AC=\sin\alpha$，$OC=\cos\alpha$。在等腰 $\triangle OAF$ 中，$CF=AC=\sin\alpha$，且有 $\triangle OCA\backsim\triangle ABF$，故在 $\triangle ABF$ 中，$AF=2\sin\alpha$，$\angle FAB=\alpha$，从而有 $AB=2\sin\alpha\cos\alpha$，$BF=2\sin^2\alpha$，再结合 $OB=OF-BF$，即可证得二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha。$$

还可借助正弦定理和余弦定理得到二倍角公式[4]。如图 2，在等腰 $\triangle OAF$ 中，$OC\perp AF$，故 $\angle F=90°-\alpha$。根据正弦定理，在 $\triangle OAF$ 中，$\dfrac{\sin\angle AOF}{AF}=\dfrac{\sin F}{AO}$，代入可得

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\sin\left(90°-\alpha\right)}{1},$$

即

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=\cos\alpha,$$

故得二倍角正弦公式。

根据余弦定理，在 $\triangle OAF$ 中，$AF^2=OA^2+OF^2-2OA\cdot OF\cdot\cos\angle AOF$，代入可得 $(2\sin\alpha)^2=1+1-2\cos 2\alpha$，化简可得 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$。

4 中位线法

Nichols 等利用三角形中位线推导二倍角公式[5]。如图 3，在 Rt△ AOB 中，$\angle ABO=90°$，$OA=1$，$\angle AOB=2\alpha$，过点 A 作 AC 垂直 $\angle AOB$ 的角平分线于 OC 点 C，AC 和 OB 的延长线交于点 F，过点 C 作 $CG\perp BF$ 于点 G。由 $AC=CF=\sin\alpha$ 可知，CG 为 $\triangle ABF$ 的中位线，从而 $AB=\sin 2\alpha=2CG$，$BG=GF$。

在 $\triangle CGF$ 中，可知 $\angle FCG=\alpha$，故 $CG=CF\cdot\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$，$GF=CF\cdot\sin\alpha=\sin^2\alpha$。在 $\triangle OCG$ 中，$OG=OC\cdot\cos\alpha=\cos^2\alpha$，从而根据 $OB=OG-BG=OG-GF$，$AB=2CG$ 可得二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha。$$

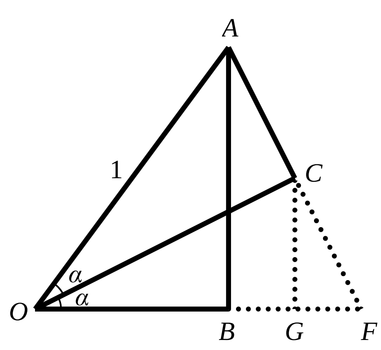


图 3 中位线法

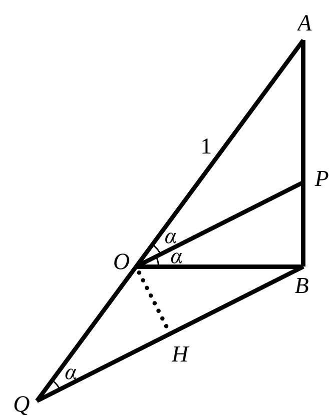


图 4 平行线法

5 平行线法

Whitaker 还通过构造平行线来推导二倍角公式[6]，其方法可简化如下。如图 4，在 Rt△OAB 中，$\angle ABO=90°$，$OA=1$，$\angle AOB=2\alpha$，作 $\angle AOB$ 的平分线交 AB 于点 P，过点 B 作 $BQ//OP$ 交 AO 的延长线于 Q，H 是 BQ 的中点。由平行线可知 $\angle Q=\angle AOP=\alpha$，$\angle OBQ=\angle POB=\alpha$，$OQ=OB$，于是有

$$\sin 2\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{AQ}\times\frac{AQ}{OA}=\frac{PB}{OQ}\times\frac{QB}{OP}=\frac{PB}{OP}\times\frac{QB}{OQ}=\frac{PB}{OP}\times\frac{2QH}{OQ}=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{OQ}{OA}=\frac{QB-OP}{OP}=\frac{2QH}{OP}-1=\frac{2QH}{OQ}\times\frac{OQ}{OP}-1=\frac{2QH}{OQ}\times\frac{OB}{OP}-1=2\cos^2\alpha-1。$$

6 角平分线定理法

Todhunter 提出了推导半角公式的一种几何证明方法[7]，利用该方法，同样可以推导二倍角公式。如图 5，在 Rt△OAB 中，$\angle ABO=90°$，$OA=1$，$\angle AOB=2\alpha$，作 $\angle AOB$ 的平分线交 AB 于点 P。故在 $\triangle AOB$ 中，有 $AB=\sin 2\alpha$，$OB=\cos 2\alpha$。由角平分线定理得 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AB-PB}{PB}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$，于是 $PB=\dfrac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$，从而得

$$\tan\alpha=\frac{PB}{OB}=\frac{\dfrac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

于是得

$$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)^2}=\frac{1-\cos^2 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)^2}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

由此可得二倍角公式。

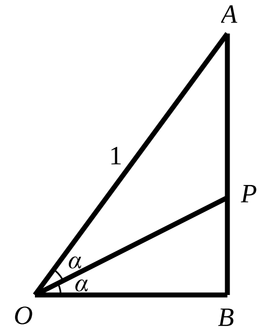


图 5 角平分线法

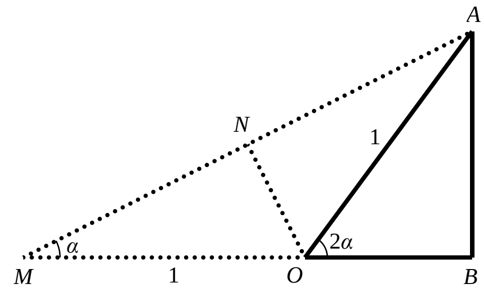


图 6 双直角三角形法

7 双直角三角形法

Pendlebury 构造了双直角三角形进行证明[8]。如图 6，在 Rt△ AOB 中，$\angle ABO = 90°$，$OA = 1$，$\angle AOB = 2\alpha$，延长 BO 使得 $OM = OA$，连结 AM，过点 O 作 $ON \perp AM$ 于点 N。故可知 $\angle M = \angle OAM = \alpha$，$MN = NA$。在 $\triangle AOB$ 中，有 $AB = \sin 2\alpha$，$OB = \cos 2\alpha$。在 $\triangle MON$ 中，有 $MN = \cos\alpha$，故 $MA = 2MN = 2\cos\alpha$。在 $\triangle AMB$ 中，$AB = AM \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$，$MB = AM \cdot \cos\alpha = 2\cos^2\alpha$。故由 $OB = MB - MO$ 可得二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1。$$

8 若干启示

上述二倍角公式的六种几何推导方法，均以直角三角形 AOB 为主线，通过改变辅助线，构造帕普斯模型、等腰三角形、中位线、平行线、角平分线、直角三角形，形成二倍角公式几何证明的脉络。图 7 是按照各几何证明方法初次出现的时间顺序绘制的历史演进图。

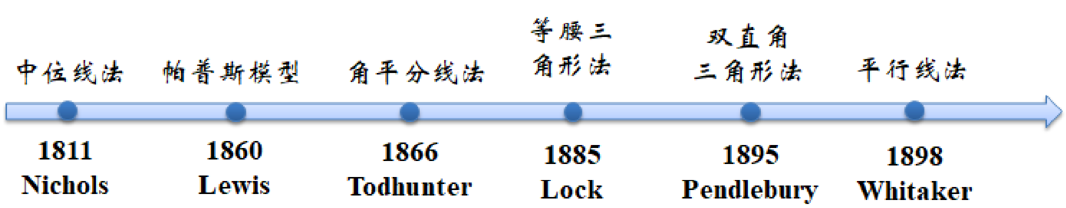


图 7 二倍角公式几何证明方法的时间轴

几何视角下的二倍角公式证明方法可以为我们今日二倍角公式的教学提供如下启示。

其一，利用倍角公式，建立知识网络。二倍角公式的六种几何证明方法涉及多种平面几何相关

的知识定理，图 8 为构建的知识网络图，几何视角下的倍角公式证明不仅体现了前后知识的关联性，还体现了代数知识与几何知识的关联性。在实际教学中，也可将其中几种关联性较强的几何证明方法结合，形成几何图形，让学生从不同角度进行证明，如 Moritz、Rider & Davis 均编制了用几何方法证明二倍角公式的习题[9-10]，即给出如图 9 所示的图形，学生可以从帕普斯

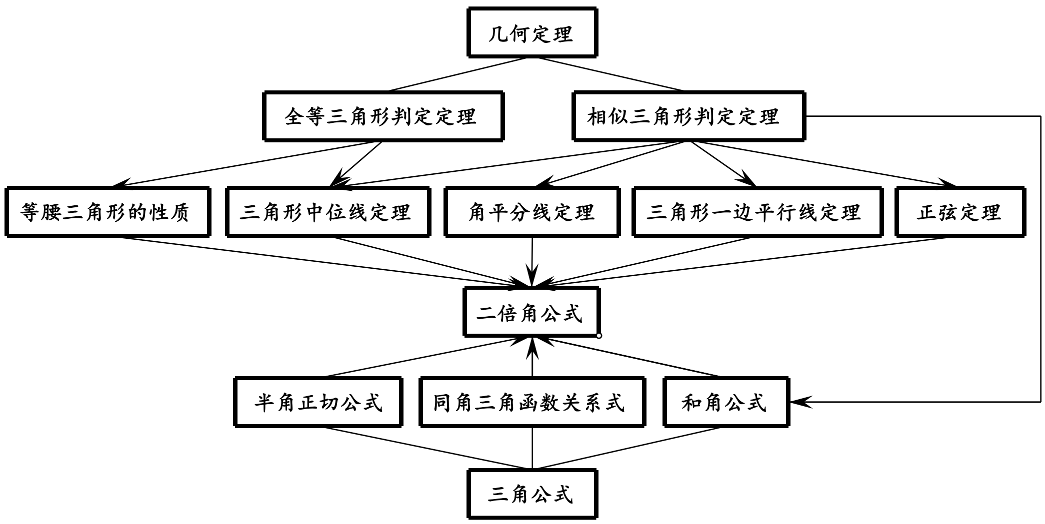


图 8 倍角公式几何证明方法的知识网络图

模型法和中位线法两个角度求证。

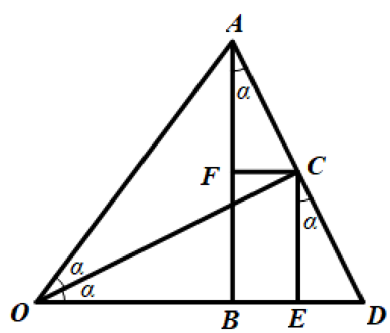


图 9 倍角公式几何证明的习题编制

其二，借鉴有关图形，证明更多公式。二倍角公式的几何证明也为其它三角公式的证明提供借鉴，如图 10 所示，在 Rt△AOB 中，$OA=1$，$\angle AOD=\angle DOC=\angle COB=\alpha$（设$\alpha<30°$），过点 A 作 OD 的垂线，垂足为点 E，分别交 OC 和 OB 的延长线于点 F 和 G，过点 F 作 OG 的垂线，垂足为点 H，以 F 为圆心，FA 为半径作圆弧，交直线 HF 于点 K，连结 AK，过点 A 作 HK 的垂线，垂足为点 I。易知 $\angle AFK=2\alpha$，$\angle KAI=\alpha$。于是，在等腰△FAK 中，$AK=2\times 2\sin\alpha\times\sin\alpha=4\sin^2\alpha$，在 Rt△$AIK$ 中，$IK=4\sin^3\alpha$，$AI=4\sin^2\alpha\cos\alpha$。因

$AB = HI = HK - IK$， $OB = OH - AI$， 故有

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha，$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha - 4\sin^2\alpha\cos\alpha。$$

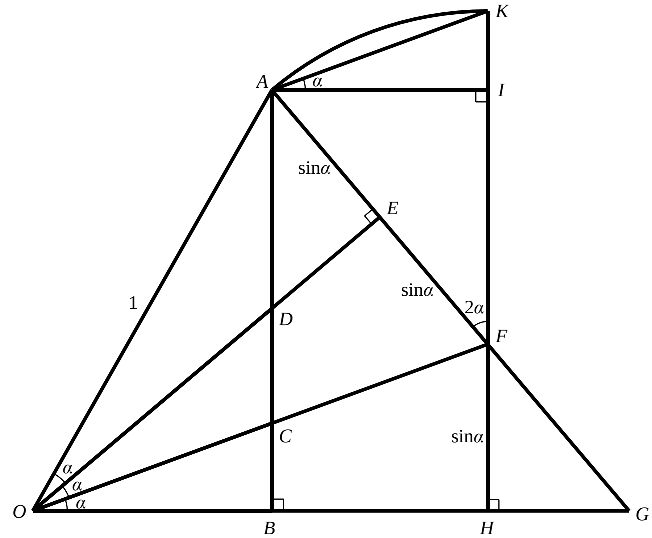


图 10 三倍角正余弦公式的几何证明

类似地，拓展帕普斯模型，也可以证明三倍角的余弦公式[11]。

其三，留出论证之白，体会几何之美。基于学生拥有一定数学基础的情况下，教师可以尝试在课堂中设计二倍角公式的无字证明环节，仅呈现 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$，其中 $AO = 1$， $\angle AOB = 2\alpha$，以给予学生充分的思考空间。学生可以通过小组讨论合作，展示无字证明的数学说理过程，提高自主推理能力。教师将课堂的一部分交给学生，促使学生产生创造性思维的碰撞，再对学生的想法进行归纳总结，形成清晰的知识脉络。在此过程中，学生能够建立自信，也能够在几何世界中充分体会数学的魅力。

其四，经历数形结合，激发创新思维。三角学中，和角公式、和差化积公式、积化和差公式、半角公式等其它三角函数恒等式也都与直角三角形的几何背景紧密相连，学生在经历并积累数形结合的二倍角公式推导经验后，可以拓宽思路，激发创新思维，探究其它三角函数恒等式的几何证明主线，围绕主线创造新的几何证明方法，将代数与几何灵活转化，强化数形结合的数学思想。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 6.

[2] Lewis, E. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: Uriah Hunt & Son, 1860: 46-48.

[3] Lock, J. B. *A Treatise on Elementary Trigonometry*[M]. London: Macmillan & Co., 1885: 133.

[4] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1893: 106-107.

[5] Nichols, F. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: F. Nichols, 1811: 72.

[6] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge, 1898: 28-29.

[7] Todhunter, I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London: Macmillan & Company, 1866: 19.

[8] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell & Sons, 1895: 78-79.

[9] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 218.

[10] Rider, P. R. & Davis, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1923: 153.

[11] Roger, B. N. 数学写真集(第 4 季)——无需语言的证明[M]. 管涛, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2017: 58-59.

美英早期三角学教科书中三角学定义的演变

朱轶萱

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

三角学源起于天文研究，后成为航海、实地测量的有力工具。16 世纪，韦达（F. Viète, 1540-1603）将代数变换方法引入三角研究的创举使得三角学成为一门愈发完善的学科。而后伴随着三角学的分析化，这门学科开始在物理领域崭露头角，成为反映现实世界运动变化规律的工具，如傅里叶（J. Fourier, 1768-1830）运用三角级数解决了物理学中的弦振动和热传导问题。

尽管如今三角学已不再作为一门独立的学科被研究，但它在中学教学中依然占据相当大的比重。在《义务教育数学课程标准（2022 版）》中，锐角三角函数的相关内容隶属图形与几何领域下的“图形的相似”章节[1]；而在《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中，三角相关内容分布于两条不同的主线：其一，位于函数主线，在建立任意角三角函数概念的基础上，研究同角三角函数关系、函数图像与性质、三角恒等变换等；其二，位于几何与代数主线，要求学生借助向量探索正、余弦定理，并将其用于三角形的求解[2]。可见，后者与初中利用锐角三角函数解直角三角形的思想一脉相承，属于几何范畴；而前者则是将三角学从静态的研究三角形解法的天地中解放出来，以函数的视角进行审视。它们既有深刻的渊源，又研究的是两类截然不同的问题。

已有的实证研究表明，高中生学习任意角三角函数概念时，常常因为受到初中学习的锐角三角比概念原型的负迁移影响，混淆三角函数定义法，导致知识割裂、解题思绪不清[3]。可见，帮助学生建立对三角学内容的整体理解是教育者亟待完成的任务，这首先需要教师自身具备良好的面向教学的数学知识（MKT）。然而，职前教师在三角学上的 MKT 存在着较大的不足，其中最重要原因是数学发生发展知识的缺失[4]。

张奠宙先生曾指出：“当前的数学教学往往局限于概念、定理和思想等局部历史的介绍，缺乏宏观历史进程的综合性描述。实际上，用宏观的数学史进程可以更深刻地揭示数学的含

义。”[5]本文关注到许多早期三角学教科书的开篇往往会解释什么是三角学，随着时间的推移，关于三角学的定义逐渐发生变化，反映了三角学的发展，这或许可以成为帮助学生建立对三角学整体理解的有益素材。鉴于此，本文聚焦三角学的定义，对 18 世纪初至 20 世纪中叶的美英三角学教科书进行考察，试图回答以下问题：早期教科书中对三角学有哪些定义？这些定义是如何演变的？以期为今日课堂教学提供启示。

2 研究对象

本文选取 1706-1958 年间出版的 81 种美英三角学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

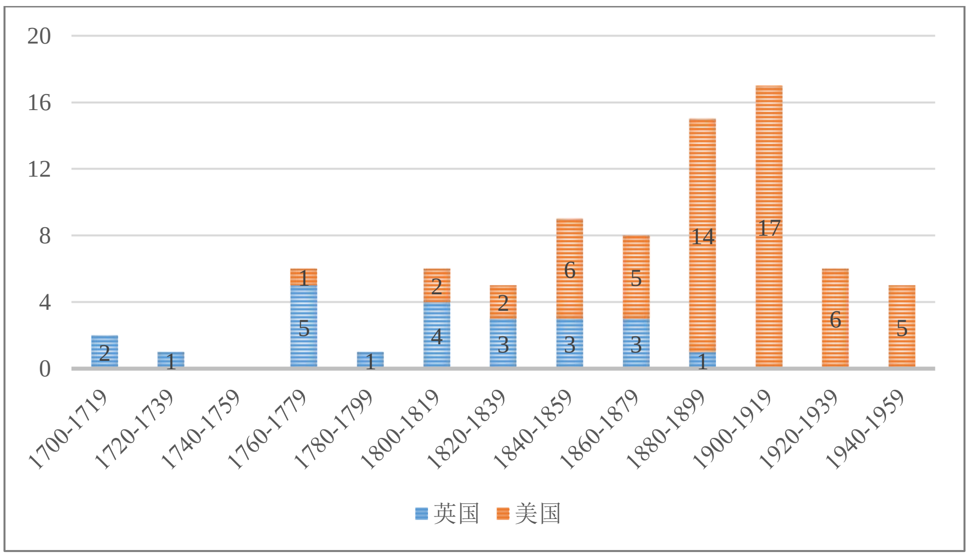


图 1 81 种美英早期三角学教科书出版时间分布

早期教科书中三角学定义所在位置往往是正文开头处或前言部分，在考察定义的同时通过关注教科书的目录、正文内容等，确保定义分类的准确性。需要注意的是，三角学的研究内容可分为平面三角学与球面三角学，本文主要聚焦于前者。

3 三角学定义的分类

经过统计和分析，早期教科书中对“三角学”的定义可分为三个阶段，诚如德国数学家汉

克尔（H. Hankel，1839-1873）所言："在大多数学科里，一代人的建筑被下一代人所摧毁，一个人的创造被另一个人所破坏，惟独数学，每一代人都在古老的大厦上添加一层楼。"后一阶段的定义往往是随着学科研究领域的日益扩大，建立在前一阶段的基础之上。

3.1 追本溯源：隶属几何分支

15 世纪，德国数学家雷格蒙塔努斯（J. Regiomontanus，1436-1476）著作《论各种三角形》的问世，标志着三角学正式成为一门独立学科。在之后的很长一段时间内，三角学都被视为几何学的一个分支。38 种教科书在此认知基础上给出了三角学的定义，可分为三类：解三角形定义、线段关系定义和三角形边角关系定义，其中第一类侧重于利用三角形性质解决问题，第二类揭示了当时三角学研究的基本对象，第三类则关注三角形性质本身。部分教科书同时提及了多种定义。

3.1.1 解三角形定义

三角学（trigonometry）一词是由古希腊字母"*tri*"（三）、"*gonia*"（角）和"*metron*"（测量）组合而成，德国数学家毕蒂克斯（B. Pitiscus, 1561-1613）首先使用这个英文单词，意义是解三角形和三角计算，三角学的第一种定义应运而生，30 种教科书（37.04%）采用了这种定义。

Maseres 称："三角学，顾名思义，指的是三角形的测量，其目的是已知三角形的边求角，或已知三角形的角求边或边的比，或已知三角形的一些边和角求其他边和角。" [6] Ewing 则给出了更具体的说明："一个平面三角形有六个元素（三边和三角），其中任意三者已知（除了三个角的情形），剩余的均可求出，在所有可能的情况下实施上述过程的方法叫做三角学。" [7]

3.1.2 线段关系定义

Nichols 给出了同时期的第三种定义："三角学是一般几何学的一个分支，它研究圆内外某些线段的性质和相互关系，也教导人们用一套三角公式计算三角形的边和角。" [8]这种定义从理论角度出发，解释当时三角学研究的基本对象。显然，此时采用的是三角函数的线段定义。7 种教科书（8.64%）采用了这种定义。

3.1.3 三角形边角关系定义

还有 4 本（4.93%）教科书聚焦三角形性质，而不是性质的应用。Donne 指出："三角学是研究三角形性质的科学或理论。"[9] Scholfield 则给出如下定义："平面三角学是研究平面三角形边角关系的科学。"[10]三角学的加入使过去几何学中研究的边角关系理论得以完善，被当时的数学家纳入几何范畴也就顺理成章了。

3.2 与时俱进：融入代数、微积分工具

随着代数符号的兴起和解析几何、微积分的发展，早期教科书开始兼容并包地将其他数学分支最先进的工具用于三角学的研究。一方面，为许多定理、公式的推导与证明开辟了更简洁巧妙的途径；另一方面，也在悄然扩大三角学研究的范围。这一变化也在教科书对三角学的定义当中有所体现，这些定义又可被分为两类。

3.2.1 基于几何的发展性定义

第一种定义的特点是依旧承认几何的核心地位，但能够利用其他分支的一些优势。如 Gregory 在给出解三角形定义的同时指出："但近年来，欧洲数学家普遍采用了另一种方法，由欧拉率先提出，它是分析性质的。正弦、正切等的性质和相互关系可以由几个简单的方程来定义"，这实际上对应的是三角函数的比值定义，"其他所有可能使用的定理和公式，只需对原始方程进行简化和变换，就可以非常方便地推导出来。这种方法大大缩短了几乎所有的三角研究，除了一些处于科学基础的东西。"说明了利用比值定义的高效性。书中承认，这种方法在当时仍存在巨大争议："本书可能会落到有些人的手中，他们不会像完全用几何学方法那样认可它。这种偏见虽然正在减弱，但仍然存在于一些可敬的数学家的头脑中。"由此可窥见数学知识传播的滞后性，尽管与当时的信息闭塞不无关系，但也说明了许多天才般的数学成就，常常在一时不被认可，需要经过漫长的时间才能被理解和消化。

此外，作者也论证了这种处理方法的优越性，可归纳为两点。

第一，它更简明，因此可以扩展到更大的数量和维度，而单纯运用几何方法是很难做到的。此外，巧妙地运用代数换元法，可以得到一些优美的公式或结论。以作者书中的一段公式推演为例：设 $2\cos A = z + \frac{1}{z}$，由二倍角公式可得 $2\cos 2A = 2(2\cos^2 A - 1) = z^2 + \frac{1}{z^2}$，继续算下去会

得到一个奇妙而优雅的结论：

$$2\cos nA = z^n + \frac{1}{z^n}\text{，}$$

这个结论还可以用于推导余弦和公式：

$$\begin{aligned}&\cos A+\cos 2A+\cos 3A+\cdots+\cos nA\\&=\frac{1}{2}\left(z+z^2+\cdots+z^n\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{z^{n+1}-z}{z-1}+\frac{z^n-1}{z^n(z-1)}\right),\end{aligned}$$

最终经过适当化简得到

$$\cos A+\cos 2A+\cos 3A+\cdots+\cos nA=\frac{\sin\frac{n}{2}A\cos\frac{n+1}{2}A}{\sin\frac{A}{2}}\text{。}$$

第二，这种方法更具统一性和普遍性，相似的原理或可用于一系列定理的推导。而通常使用的几何方法，无论多么令人信服和优雅，对一个定理或结论的证明可能没有丝毫的相似性。如一些在几何世界里需要重新构造图形证得的结论，有时利用简单的代数变换便可得到[11]。

表 1 给出了几何发展性定义的其他典型例子。[12-15]

表 1 基于几何发展性定义的典型例子

年份	作者	定义叙述
1837	De Morgan	三角学是代数应用于几何的一个分支，指的是在所有涉及边与角的关系的情况下，一般利用三角形的性质进行测量，而不仅仅是边，也不仅仅是角：还包括在高等数学中有用的各种测量结果。
1855	Airy	三角学是研究三角形的一个数学分支，是算术在几何上的应用。
1883	Newcomb	三角学是用代数方法处理线段与角之间关系的几何学分支。
1887	Wells	三角学是数学的一个分支，它用代数过程来处理几何图形的性质和测量。

3.2.2 超越几何的定义

随着时间的推移，部分教科书将几何的地位弱化为三角学研究的重要内容之一。例如，Wheeler 认为：“三角学，最初只是一种通过数值计算测量三角形的方法。这种方法涉及使用特定的角度函数，我们称之为三角函数。现代三角学主要包括这些函数最一般关系的完整理论，

而三角形的测量，或三角学本身，则被简化为该理论的一个分支或应用。[16]”

甚至在有些教科书中出现否定几何的迹象。Lardner 认为：“三角学的本质是分析。除了相似三角形边的比例外，它没有借用几何学的任何原理，甚至这种性质，用分析的语言也许比用几何学的术语更简单、清楚。这门科学的一切成果都与数值计算相关，有些过程无疑是可以用几何形式表示的，但在许多情况下并非如此。”作者试图利用代数、分析工具建立一个高度理论化的三角学体系，却狭隘地认为三角学科在几何测量方面的实用价值已成史话，对之避开不谈：“无论它更遥远的用途有多么广泛和多样，它的直接目的是建立一种符号系统和原则，根据这些原则，角的大小可以用于计算，并且角之间可以利用解析公式联系起来，以研究它们的相互关系。”作者希望直接利用代数、分析建构三角学严密的上层结构，而完全否定几何的优势：“分析学在这些国家终于作为数学教育的基本组成部分获得了关注，其重要性不言而喻。即将学习三角学的学生现在基本上已经掌握了代数的相关知识，而迄今为止认为用几何方法处理这些问题是有利的原因已经不复存在了。[17]”

3.3 焕然一新：走向分析时代

随着分析学的蓬勃发展，25 种早期教科书（30.86%）开始以函数的角度研究任意角三角函数，包括其图像和性质，并进一步利用这种具有特殊周期性的函数研究物理学中的规律现象。

例如，Nixon 指出：“在近代发展起来的三角学，是研究周期幅值的数学表示的科学——周期幅值交替地增大到最大值，然后减小到最小值，并如此往复。”[18]

Wentworth 对三角学本质的形容也颇值得回味：“这个分支虽然使用数字，但其内容大多与数字无关;虽然使用方程，但并不致力于方程；虽然自由地利用几何事实，但有时又不涉及几何形式的研究。[19]”

随着三角学的成熟化，更多教科书对这门学科的定义日臻完善，能够客观地认识三角学的发展历程与研究对象，此时的定义已经与三角学的现代定义并无二致。

Wylie 认为：“尽管我们可以在不涉及任何角或三角形的情况下学习所有的三角函数，但如果在基础课程中遵循这种夸张的、完全理论化的方法，那肯定是不可取的。然而，当我们用传统的几何方法来研究这一课题时，我们也不能够忽视这样一个事实，即三角函数最终不过是利用某些特定的关系或函数，将变量联系起来，这些变量除了用几何语言来解释外，还可以被赋

予许多其他有用的意义。[20]”客观而又不失前瞻性的语言仿佛是对上文 Lardner 观点强有力的回应。这一阶段的其他典型例子见表 2。[21-23]

表 2 走向分析的三角学定义的典型例子

年份	作者	定义叙述
1933	Davis & Chambers	作者努力在计算三角学和分析三角学之间保持适当的平衡，计算三角学本身就是一个目的，而分析三角学则是学生学习更高级的数学时不可缺少的。
1938	Hardy	现在，三角学研究的是某些比率，称为三角函数;这些函数的应用有两个目的，一是求解三角形，二是发展其他数学分支以及物理学、力学和工程学所需要的工具。重点可能从这些函数的一种用法转移到另一种，这取决于学习三角函数的目的。
1952	Smail	虽然三角形的解是现代三角学的重要组成部分，但它绝不是唯一的部分，甚至不是最重要的部分。在计算求解三角形的方法的发展过程中，会出现一些角函数，而研究这些角函数的性质及其在各种数学问题中的应用，包括三角形的求解，构成了三角学的主题。而后来，这些函数又代表了周期函数的最简单类型，成为科学和工程中研究各种周期现象的天然基础。

4 三角学定义的演变

由上述分析可知，早期教科书定义三角学的角度各不相同，或侧重学科价值，或侧重理论范式。图 2 以 20 年为单位，展示了早期教科书中三角学定义的演变情况。

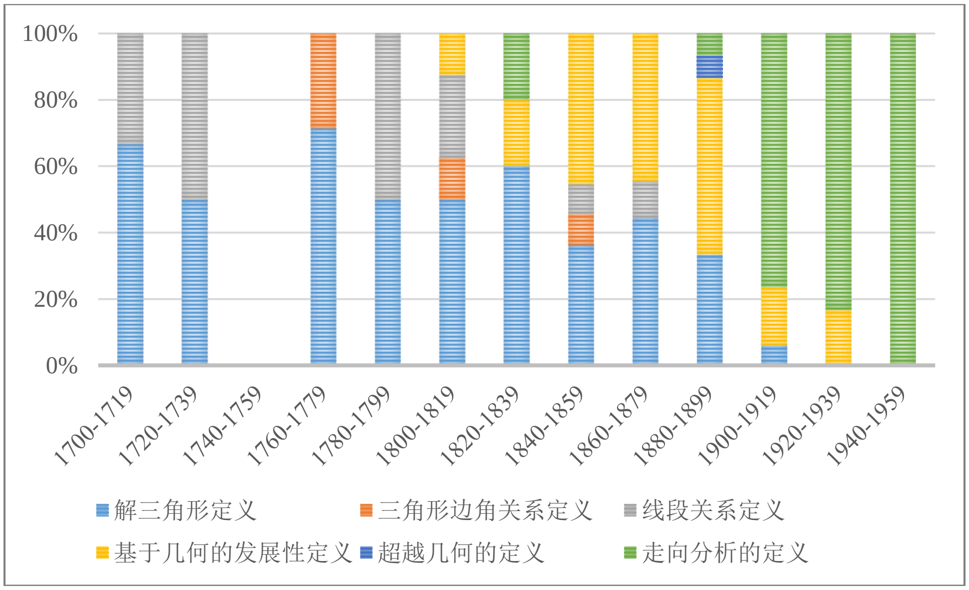


图 2 早期教科书中三角学定义的演变情况

从图中可知，18 世纪的三角学完全隶属于几何分支，呈现出“执几何工具研究，为几何测量服务”的特点。19 世纪往后，各数学分支的发展开始渗透进三角学的研究，新兴的代数、分析等工具一方面为许多三角公式、定理的证明提供了更简洁、优美的方法，另一方面也开拓了三角学的研究范围。20 世纪之后，走向分析学的三角定义占据了统治地位，人们开始以研究函数的视角审视这一类具备独特周期性的函数，我们可以从两方面探讨其原因：就数学内部而言，欧拉（L. Euler,1707-1783）在《无穷小分析引论》中，对三角学进行了开创性的改革，比值定义、单位圆、弧度制等的引入为分析视角的三角学研究奠定了坚实的理论基础；就数学外部而言，数学对于描述我们周围物理世界的重要性日益增加，人们对周期运动规律的不懈探索是推动三角学分析化的根本原因。

5 结论与启示

早期教科书中三角学定义的演变折射出了三角学的发展，这也为今日三角学相关内容的教学提供了一定的历史素材与思想启迪。

其一，以史重构教学，构建三角网络。三角学的主要内容如今已分散于中学教学的不同阶段，可分为几何视角的解三角形主线和分析视角的函数主线。早期教科书中几何定义到分析定义中间的漫长过渡更加印证了学生在经历两条主线的切换时很容易产生认知障碍：初中所学的

锐角三角函数与高中所学的任意角三角函数究竟有何区别与联系？教师可以将历史重构式地融入序言课和单元复习课教学，帮助学生构建三角学的知识脉络，图 3 可予以参考。

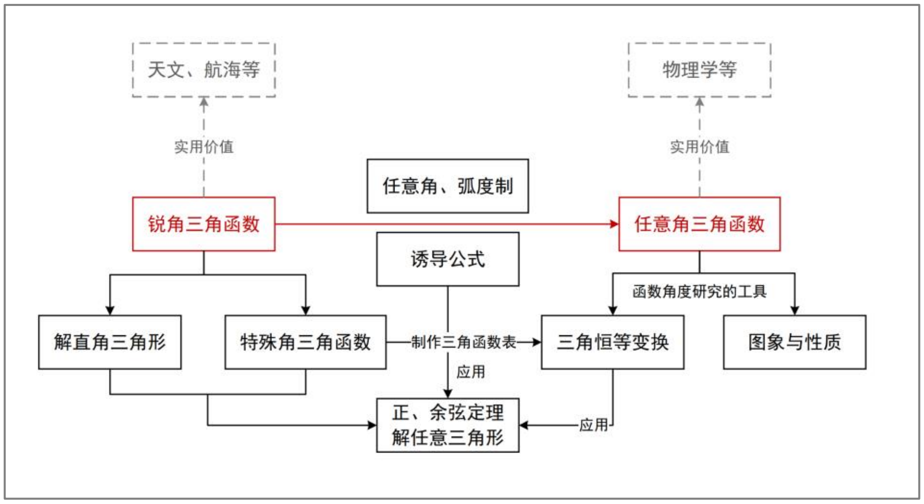


图 3 三角学知识脉络图

其二，建立知识联系，彰显方法之美。除了几何和分析主线之外，三角学的发展还离不开代数、解析几何的推动，因此三角学可以成为一架沟通各数学分支的桥梁，在课堂中，教师应注重挖掘知识之间的联系，使学生体会到数学的整体性。此外，数学家对同一个公式、定理证明的不断推陈出新亦是很好的教学素材，教师可以带领学生尝试比对各种方法的异同与优劣。

其三，尊重思维顺序，以史促进理解。以人教 A 版高中教材中的“三角恒等变换”为例，其位于“三角函数的图像与性质”一节之后，书中首先在单位圆中利用圆的旋转对称性和两点间距离公式得到差角余弦公式，再由此推导出其他恒等式。这种方法简洁优美，但似乎缺乏自然，也难免引起学生对其必要性的困惑。事实上，早在任意角三角函数出现的数千年以前，托勒密（C. Ptolemy，约 85-约 165）为了制定三角函数值表，已经用几何方法推导出了和差角公式。教师若先能从其历史动机出发，带领学生悟其渊源、品其方法，再过渡到其他更简洁的现代证法，定能激发学习动力，促进学生的理解。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 69.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 21-26.

[3] 陈晓娅. 高中生三角函数概念理解水平调查研究[D]. 天津: 天津师范大学, 2021: 3.

[4] 徐章韬, 顾泠沅. 师范生课程与内容的知识之调查研究[J]. 数学教育学报, 2014, 23(2): 1-5.

[5] 张奠宙. 关于数学史和数学文化[J]. 高等数学研究, 2008(1): 18-22.

[6] Maseres, F. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. London: T. Parker, 1760: 19.

[7] Ewing, A. *A Synopsis of Practical Mathematics*[M]. Edinburgh: William Smellie & Co., 1771: 33.

[8] Nichols, F. *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: F. Nichols, 1811: 4.

[9] Donne, B. *An Essay on the Elements of Plane Trigonometry*[M]. London: B. Law & J. Johnson, 1775: 1.

[10] Scholfield, N. *Higher Geometry and Trigonometry*[M]. New York: Collins, Brother & Co., 1845: 27.

[11] Gregory, O. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*[M]. London: Baldwin, Cradock & Joy, 1816: 1.

[12] de Morgan, A. *Elements of Trigonometry and Trigonometry Analysis*[M]. London: Taylor & Walton, 1837: 19.

[13] Airy, G. B. *A Treatise on Trigonometry*[M]. London & Glasgow: Richard Griffin & Co., 1855: 8.

[14] Newcomb, S. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1882: 15.

[15] Wells, W. *The Essentials of Plane and Spherical Trigonometry*[M]. Boston & New York: Leach, Shewell & Sanborn, 1887: 19.

[16] H. N. Wheeler. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1878: 19.

[17] Lardner, D. *An Analytic Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*[M]. London: John Taylor, 1826: 13-16.

[18] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 25.

[19] Wentworth, G. A. & Smith, D. E. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1914: 1.

[20] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955: 15.

[21] Davis, H. A. & Chambers, L. H. *Brief Course in Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1933: 20.

[22] Hardy, J. G. *A Short Course in Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1938: 15.

[23] Smail, L. L. *Trigonometry, Plane and Spherical*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952: 15.

教学实践

基于传统文化 培养创新意识 渗透学科德育

——以一节二元一次方程组专题复习课为例*

胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

1 引 言

中华优秀传统文化是中华民族共同的精神财富，需要我们传承与发扬。当前，中华优秀传统文化进中小学课程（教科书）已经成为一种时代要求。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》提出，在选择课程内容时要关注数学文化，继承和弘扬中华优秀传统文化[1]。中国古代数学有着悠久的历史、辉煌的成就和独特的价值取向，其中不乏与中小学数学课程密切相关的内容[2]。培养创新意识已经成为全社会的一种共识，立德树人是新时代教育的根本任务。如何借助传统文化，培养创新意识，渗透学科德育，是需要广大数学教育工作者思考的问题。

二元一次方程组是苏科版初中数学教科书七年级下册第 10 章的内容，包括二元一次方程组的定义、解法和应用。《九章算术》是中国古代最著名的一部数学著作，以问题集的形式呈现，其中有许多问题可以用二元一次方程组解决。近期笔者选取《九章算术》第七、八两章中的四道问题，设计一节二元一次方程组专题复习课，在培养学生的创新意识和渗透学科德育方面取得了良好的效果。

* 本文系江苏省中小学教学研究第十四期课题“初中数学学科德育内容开发与实施路径研究”（编号：2021JY14-L47）、江苏省教育科学“十四五”规划课题“走向自明：初中问题支架式教学研究”（编号：XC-c/2021/58）的阶段性研究成果。

2 历史素材

本节课选用的中华优秀传统文化素材包括《九章算术》中的四道问题以及刘徽的“方程新术”。[3-4]

（1）第七章盈不足，第 1 题：今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何？

（2）第七章盈不足，第 16 题：今有玉方一寸，重七两；石方一寸，重六两。今有石立方三寸，中有玉，并重十一斤。问玉、石重各几何？

（3）第八章方程，第 7 题：今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛羊各直金几何？

（4）第八章方程，第 10 题：今有甲乙二人持钱不知其数。甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十。问甲、乙持钱各几何？

“方程新术”是先消常数得到两个未知数的比例关系，再求解的方法，这是魏晋时期数学家刘徽的一种创新解法。

本节课采用多种方式将以上历史素材融入教学。选取古题翻译成白话文，课前布置给学生完成，属于复制式；让学生基于数学历史名题编写问题，属于顺应式；借助微视频介绍中国古代数学著作《九章算术》的概况，开阔学生视野，属于附加式；借助《九章算术》第七、八两章中的问题以及解法介绍，启发学生思考古人为何把这些都可以用二元一次方程组求解的问题写成两章？让学生进行古今对照，制造认知冲突，体会符号代数的优越性，属于顺应式。

3 教学设计与实施

基于对教科书和历史的分析，结合学生的认知水平，将本节课的教学目标确定如下。

（1）让学生用不同方法解决 4 道古题，感受代数方法的优越性。

（2）让学生基于历史名题提出问题，逐步抽象出二元一次方程组的一般模型，发展模型观念，培养创新意识。

（3）引导学生思考古人将《九章算术》七、八两章分开写的原因，体会字母表示数对数学发展与演进的推动作用，培养动态数学观和学会倾听的品质。

本节课的教学重点是抽象出二元一次方程组的一般模型，建立模型观念；教学难点是感悟数学是不断发展与演进的，培养正确的数学信念。

本节课的主要教学环节如下。

一、课前留白作业

（1）课前印发上述四道古题（翻译成白话文），让学生用尽可能多的方法解决。

（2）请你仿照（1）中的问题，编写一些问题考一考汉代《九章算术》的作者。

【设计意图】课前让学生用尽可能多的方法解决四道古题，课上展示学生作品中出现的算术方法、一元一次方程方法、二元一次方程组方法等不同解法，引导学生感悟代数方法的优越性；为抽象出二元一次方程组的一般模型提供素材，培养发现问题、提出问题的能力。

二、师生谈话引入

师：同学们近来学习了二元一次方程组的定义、解法、应用等知识，知道二元一次方程组可以用来解决许多实际问题。我国是一个拥有几千年光辉灿烂历史的文明古国，在数学领域，《九章算术》可以说是一颗璀璨的明珠。翻开《九章算术》，我们发现其中有许多可以用二元一次方程组解决的问题，课前大家解决的四道问题都来自于《九章算术》，下面展示一些同学的解法。

三、展示古题解法

教师板书方程组：① $\begin{cases}8x-3=y\\7x+4=y\end{cases}$，② $\begin{cases}x+y=176\\\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{6}=27\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=27\\7x+6y=176\end{cases}$，③ $\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$，④ $\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=50\\y+\dfrac{2}{3}x=50\end{cases}$，$\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=50\\\dfrac{2}{3}x+y=50\end{cases}$。

教学过程简述：前两题出现了算术方法、一元一次方程方法和二元一次方程组方法，后两题只出现了二元一次方程组方法，于是组织学生对不同方法进行比较。引导学生观察④中的两个方程组，强调未知项最好按字母顺序排列，随后让学生用不同方法解最后一个方程组，展示学生给出的“消元”和“消常数”两种解法，点明“消常数”方法与刘徽的“方程新术”一致。

【设计意图】呈现问题的不同解法，让学生体会代数方法的优越性，强调未知项按字母顺序排列，为后续提炼模型奠基，点明用“消常数”方法解方程组是一种创新，与古人一致，增

强学生的自信心。

四、展示学生编题

生 1：若老师给学生分糖，若老师给每个学生 10 颗糖，则少 5 颗；若老师给每个学生 9 颗糖，则多 6 颗。问：有几个学生和几颗糖？

生 2：某人用有机肥给玉米施肥，如果每亩施 10kg，缺 200kg；如果每亩施 8kg，剩 200kg。问：共多少亩玉米？有机肥多少千克？

生 3：若干人共同买鸡，每人出 8 元，少 24 元；每人出 12 元，少 8 元。共多少个人？鸡价多少？（图 1）

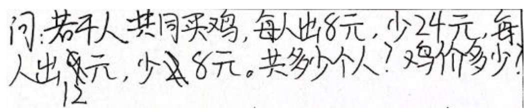


图 1 学生 3 编制的问题

生 4：好田 300 钱一亩，坏田 50 钱一亩，合买好田、坏田 100 亩，共需 10000 钱。问：好田、坏田各买了多少亩？

生 5：某停车场收费标准如下：中型汽车的停车费为 12 元/辆，小型汽车的停车费为 8 元/辆，现在停车场共有 50 辆中、小型汽车，共缴费 480 元。问：中、小型汽车各有几辆？（如图 2）

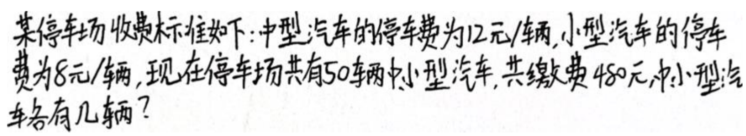


图 2 学生 5 编制的问题

生 6：小华和家人到公园游玩，湖边有大、小两种船，小华发现 1 艘小船与 2 艘大船一次可坐 46 人，2 艘小船与 1 艘大船，一次可坐 32 人。问 1 艘大船坐多少人，1 艘小船坐多少人？

生 7：今有 A、B 两个粮仓各存不同数量的粮食，把 B 仓的粮运四分之一到 A 仓，则 A 仓有 40 吨，把 A 仓粮食运五分之四到 B 仓，则 B 仓有 50 吨。问：A、B 两仓各存多少吨粮食？

教学过程简述：呈现上述问题，学生设出未知数、列出方程组，教师将方程组按类型板书。教师引导学生对问题 3 和问题 5 展开讨论，图 1 中数字有改动，教师问学生为何改动数字，学生回答了编制问题过程中的思考与调整过程，图 2 中是汽车停车费问题，教师带领学生穿越到汉代，问何谓汽车，提醒学生要站在古人的立场。

【设计意图】让学生自主提出问题，可以激发学习兴趣。基于数学史料的问题提出策略有复制式、情境式、条件式、目标式、对称式、链接式、自由式[5]。通过对学生提出的问题进行分析发现，本次问题提出中，学生主要使用情境式、条件式、自由式三种策略，所展示的前 3 题与第 1 道古题类似，第 4、5 两题与第 2 道古题类似，第 6、7 题分别与第 3、4 道古题类似，将所列方程组按类板书，为提炼模型作准备。

五、提炼一般模型

（1）启发学生写出上述四类方程组的一般形式。

类型 1：$\begin{cases} ax-b=y \\ cx+d=y \end{cases}$；类型 2：$\begin{cases} x+y=a \\ bx+cy=d \end{cases}$；类型 3：$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$；类型 4：$\begin{cases} x+ay=b \\ y+cx=d \end{cases}$。

（2）引导学生对上述 4 种类型进一步抽象，得出二元一次方程组的一般模型：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}。$$

（3）引导学生谈对二元一次方程组模型的认识。

教学过程简述：引导学生观察黑板上各类具体方程组的共同特征，先分别抽象出四类方程组的一般形式，随后再对四类方程组加以抽象，得出二元一次方程组的一般形式，接着组织学生理解一般形式。

【设计意图】引导学生分两步抽象出二元一次方程组的一般模型，培养抽象能力，建立模型观念，体会数学模型的价值，了解从特殊到一般再到特殊的研究方法。

六、介绍史料概况

教学过程简述：借助微视频介绍《九章算术》概况，分别以第 1、3 两道古题为例，介绍古人解决第七、八两章问题分别采用的是算术方法和方程组方法。然后提出问题：在今天看来，课前选取的 4 道问题都可以用二元一次方程组求解，为何古人却将其写成两章？学生各抒己见，有的说前两题可以用算术法解，所以单独成章。教师启发学生要站在古人的位置思考问题，历史告诉我们，人类在 16 世纪才开始大量使用字母表示数，而《九章算术》成书于公元 1 世纪前后。教师追问：现在你怎么看待这个问题？你对刚才的回答有何感想？我们从这件事情中学到了哪些？

【设计意图】借助信息技术，传播数学文化，培养学生的民族认同感，增强文化自信。学生了解到因为古人没有字母表示数，所以难以抽象出统一的模型，由此体会到代数的优势以及

数学的发展演进性，增强学生的数学信念，培养学生学会倾听和换位思考的品质。

七、小结与作业

教学过程简述：引导学生从数学抽象、模型观念、创新意识、理性、信念、品质、情感等方面对本课进行总结。布置两项作业：（1）复习题第 7、11 题；（2）撰写一篇关于二元一次方程组的随笔。

【设计意图】借助小结与思考帮助学生对本课所学内容在头脑中形成整体认识，建立模型观念，培养创新意识，体会学科德育。作业的第 1 题用于巩固所学的知识与技能，第 2 题帮助学生加深对所学内容的认识和理解。

4 学生反馈

在实施本节课后，对 48 名学生进行问卷调查，整理和分析调查结果发现以下结论。

所有学生都希望在今后的数学课中融入数学史，原因有：数学史让课堂更有趣、开拓视野与知识面；数学史让我们更好地走进数学，了解古人的思想，学习古人的智慧；数学史加深我们对数学知识的理解，为我们提供创新思维的火花。

对于本节课印象最深的环节，56%的学生表示对归纳、提炼二元一次方程组模型环节印象最深，40%的学生对自主提出问题环节印象最深，原因有：归纳模型让我体会到数学模型的价值，让我对二元一次方程组有了整体上的认识；赏析同学出的问题很有趣，见识到同学的思维丰富、题目新颖，这让我们更深刻地体会到创新的意义，出题同学很有自豪感；交流出题的思考过程，让我明白提出一个好的问题需要付出智慧和汗水。

对于数学认识有何变化，许多学生表示，这节课让我发现数学是有趣的、与生活息息相关的；数学很有用，可以解决生活中的许多问题；数学是不断发展的，经过一代代人的努力才有今天的数学；数学模型很有用，改变情境可以编出很多问题。

5 教学启示

中华优秀传统文化是一座宝库，为我们设计数学教学提供丰富的素材。在平时的课堂教学中，我们需要根据相应数学知识的具体情况和学生心智发展的特点，恰当选取相应的中华优秀

传统文化素材，使其深度融入数学教学。

本节课的教学对中华优秀传统文化融入数学教学有如下启示。

5.1 基于传统文化，设计教学活动

传统文化浩如烟海，我们需要根据具体教学内容和学生认知特征，从中选取相关素材，对其适当加工后融入教学活动，以促进学生的数学学习。

本节课选取《九章算术》中的四道问题，翻译成白话文后让学生用尽可能多的方法解答，帮助学生体会代数方法的优越性，同时也为学生提出问题提供参考，在解决四类古题和新题的基础上，引导学生分两步抽象出二元一次方程组一般模型，建立模型观念，体会数学的简洁美。

5.2 设计课堂留白，培养创新意识

留白是中国艺术的专有名词，能够给人以美的遐想。教育中的留白能够给学生留下思维的空间，是培养学生创新意识的重要前提。[6]

本节课采用课前留白的方式，让学生课前用多种方法解决四道古题，并仿照古题提出新的问题，为学生提供创新的机会。课堂上让学生用不同方法解第 4 道古题中的方程组，出现消元和消常数两种方法，其中消常数方法与刘徽的“方程新术”一脉相承，是一种创新解法。自主编制问题活动深受学生喜爱，他们提出许多精彩且富有创意的问题，这些留白设计很好地培养了学生的创新意识。

5.3 通过古今对照，渗透学科德育

历史为我们提供了学习的素材，对于同一内容，历史与当下可能会有不同之处，对此可以采用古今对照的方式，引导学生站在古人的立场分析历史，渗透理性、信念、品质、情感等数学德育要素。

本节课借助信息技术呈现《九章算术》第七、八两章的内容及解法，引导学生思考古人将今天看来都可以用二元一次方程组解决的问题分成两章来写的原因，启发学生站在古人的角度进行历史分析，发现古人因为没有字母表示数，所以无法看出这两章的共同特征，培养理性精神；在历史分析中，学生体会到数学是不断演进的，培养自己的动态数学观，增强数学信念；

古今对照让学生懂得换位思考，学会倾听别人，培养良好品质；利用微视频介绍我国古代数学成就，增强学生文化自信和情感认同。

注：在本节课设计和本文写作过程中，汪晓勤、沈中宇、邹佳晨三位老师提出许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[2] 汪晓勤. 中华优秀传统数学文化融入初中数学教学的若干路径[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2022(6): 34-39.

[3] 张苍, 等. 九章算术[M]. 江苏: 江苏人民出版社, 2011: 160, 171, 188, 190.

[4] 洪燕君, 李霞, 常道宽. 数学史融入“加减消元法”的课堂教学[J]. 数学教学, 2017(1): 39-42.

[5] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.

[6] 王华, 汪晓勤. 中小学数学留白创造式教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 2-3.

数学写作

“胡不归”问题探究及应用

严家浩，胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

1 何谓“胡不归”问题

关于胡不归问题，曾有个悲伤的故事：有个小伙子外出求学，有一天他得知老父亲病危的消息，便心急火燎地往家中赶去。他家和学府之间的地形如下：如图 1，直线 MN 是一条驿道，宽阔无阻，驿道以上是一片砂石地，干燥难行，驿道行走速度是砂石地行走速度的 k 倍。设小伙子所在的位置是 A，而家的位置在 B，遵守着两点之间线段最短的原则，他义无反顾地踏上了线段 AB 这条道路。当他回到家中，父亲刚刚去世。去世前，父亲口中一直念叨：“胡不归？胡不归……”也就是“为什么还不回来”的意思。

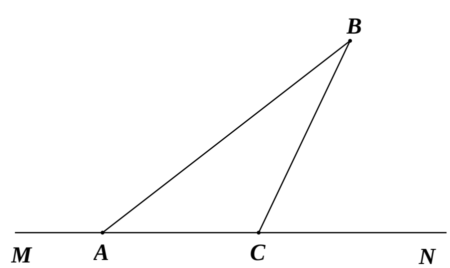


图 1 “胡不归”问题

在为这对父子感到惋惜的同时，我们也要思考小伙子是否有更快回到家中的方案？我们知道，驿道上的行走速度比砂石地要快，假如他先走一段驿道 AC，再走一段砂石地 CB 的话，是否有机会见到父亲最后一面？如果是，则点 C 在何处用时最短？换言之，就是求 $CB+kCA$（k 取不为 1 的正数）的最小值。这就是所谓的“胡不归”问题。

2 “胡不归”问题的破解

“胡不归”问题的解答，往往需要运用锐角三角形函数或相似等知识，将 $CB+kCA$ 转化成另一条线段，进而求这条线段的最小值，也就是要把“k”消掉，将 kCA 转化成另一条线段，

再求它与 CB 之和的最小值。上述问题，可以借助锐角三角函数的知识加以转化。如图 2，以 AC 为底，作射线 AD，作 $CG\perp AD$，垂足为 G，并使 $\sin\angle CAD=k$，即 $\dfrac{CG}{AC}=k$，$kAC=CG$，于是，$CB+kAC=CB+CG$，作 $BH\perp AD$，垂足为 H，BH 与 MN 交于点 C_0，则点 C_0 就是用时最短的点。

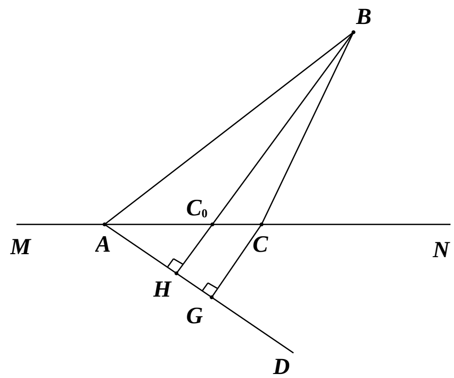


图 2 “胡不归”问题的解法

3 “胡不归”问题的应用

“胡不归”问题常常出现在二次函数的图象问题中。如图 3，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2-2x+c$ 的图象与 x 轴交于 A、C 两点，与 y 轴交于点 B，点 $C(3,0),B(0,-3)$，若点 P 是 x 轴上的一动点，点 $D(0,1)$，连结 PD，求 $PC+\sqrt{2}\,PD$ 的最小值。

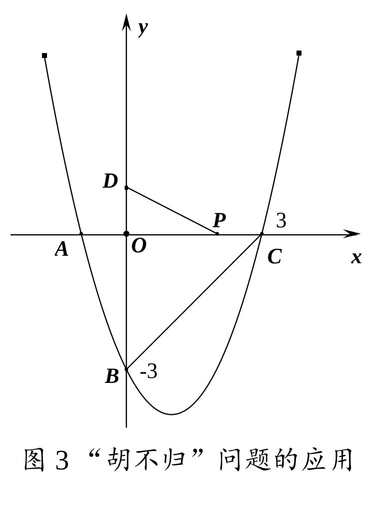


图 3 “胡不归”问题的应用

【分析】从 $C(3,0),B(0,-3)$，可以得出 $\angle BCO=\angle CBO=45°$，由于 $\sin45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以可将 $\sqrt{2}\,PD+PC$ 转化为 $\sqrt{2}$（$PD+\dfrac{\sqrt{2}}{2}PC$）。

如图 4，作 $PM\perp BC$，垂足为 M。由 $\sin\angle MCP=\dfrac{PM}{PC}$，则有 $PM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PC$。作 $DN\perp BC$，垂足为 N，则 $PD+\dfrac{\sqrt{2}}{2}PC$ 的最小值就是 DN。在 Rt△BDN 中，$DB=4$，$\sin\angle DBN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\dfrac{DN}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\dfrac{DN}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$DN=2\sqrt{2}$，所以 $PD+\dfrac{\sqrt{2}}{2}PC=2\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}\,PD+PC$ 的最小值是 4。

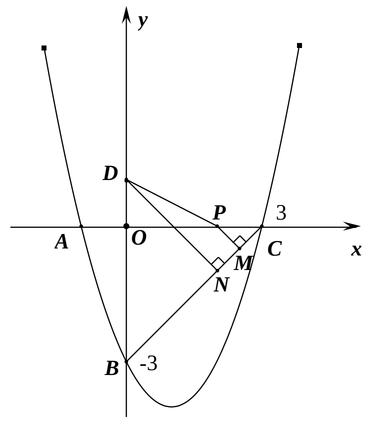


图 4 “胡不归”问题的应用之解法

这道题的有趣之处在于，它不仅考查“胡不归”问题，还考查了提取 $\sqrt{2}$ 的思想，将 $\sqrt{2}PD+PC$ 转化为 $PD+\dfrac{\sqrt{2}}{2}PC$，把系数 k 由一条线段成功地转移到另一条线段，这种转化让我们体会到了数学的魅力，也提醒我们以后在做题时，一定要根据题目特点灵活应对。

4 结 语

“胡不归”问题既有趣又有用，其中多处体现转化思想。我们要对它进行深入的研究，在理解的基础上把握解决这类问题的关键步骤与核心思想。相信“胡不归”问题不仅能在开头的故事中使用，也能在其它相关问题的解决中发挥应有的作用。

【指导教师点评】严同学对一道数学问题进行深入研究，从何谓“胡不归”问题引出话题，然后研究出这类问题的一般破解办法，再到运用研究得出的方法解决与之相关的问题，最后总结出蕴含其中的转化思想。小严同学经历了一个较为完整的数学问题的研究过程，为我们树立了钻研问题的好榜样。

数学话剧：祖冲之与《大明历》

别奥宸，胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

第一幕 启蒙立志

旁白：公元 429 年，在建康城（今南京）的祖姓家里诞生一名男婴，他便是日后成为著名数学家的祖冲之。祖冲之的爷爷祖昌是刘宋王朝的大匠卿，负责营造工程等事务，他学问很高，做事认真负责，在数学和天文学等领域均有研究。祖孙隔代亲，童年祖冲之常常缠着爷爷讲故事。

祖冲之（夜晚依偎在爷爷的身旁坐在院子里仰望星空）：爷爷，那颗是什么星？

祖昌（指着夜空）：那是北极星，它永远在北方，我们可以根据北极星判断方向。

祖冲之：爷爷，星星原来有这么大用处，您给我讲讲天上的星星吧。

祖昌：是的，许多星宿每天东升西落，都有各自的运动规律，我给你慢慢讲。

旁白：爷爷指着夜空给小祖冲之讲星宿的运动规律，以及古代科学家的故事。虽然这些规律或故事中的科学道理祖冲之并不完全理解，但前人的治学研究精神却在他幼小的心灵中播下了种子。从此祖冲之萌生大志，长大后要研究天文学，探求其中的奥秘。爷爷看出孙子喜欢天文学，就把他送到学堂跟随当时大天文学家何承天学习天文历法的知识。祖冲之学得很认真，学业进步很快。

何承天：祖冲之，你学习刻苦努力，学问也越来越深，将来你一定要把所学的知识用于服务国家社稷和天下黎民百姓呀！

祖冲之：感谢老师对我的悉心教导，我一定会牢记先生的嘱托，为国家和百姓服务。

旁白：公元 450 年前后，国家战事频繁，民不聊生，许多农民因战争流离失所，加上原来的历法年久失修，农民难以准确把握农时，导致大片土地荒芜。祖冲之看到这些景象，内心非常痛苦，他下定决心要用自己所学的知识，制定一部更为精准的历法，为国家和百姓服务。

第二幕 推荐新历

旁白：公元 462 年，也就是宋孝武帝大明六年，祖冲之在自己的努力研究下编纂出新的历法——《大明历》。祖冲之拿着《大明历》觐见皇帝，希望国家能够推行《大明历》。

谒者仆射：陛下，南徐州从事史祖冲之为改历一事求见。

宋孝武帝（懒洋洋）：传！

谒者仆射：是。

（谒者仆射下台。过了一会儿，祖冲之上来。）

宋孝武帝（半眯着眼）：祖冲之，听说你编撰了一本《大明历》啊？

祖冲之：回陛下的话，确有此事。臣即为改历之事而来。（从怀中掏出《大明历》递给宋孝武帝的侍卫。）

宋孝武帝（拿去后翻了翻又放下）：朕知道了，过几天，先由大臣们讨论后再说，你先回去吧。

祖冲之（跪拜）：臣谢旨！（下台）

旁白：祖冲之只好回到家里等待。过了几天，宋孝武帝下诏正式讨论《大明历》。参加讨论的除了一些显要大臣外，还有一些掌管历法的官员。

第三幕 朝堂辩法

巢尚之（迈出一步）：启禀陛下，臣以为祖冲之的《大明历》与何承天的《元嘉历》相比有两点大的不同：一是闰法的改革，《大明历》减少了《元嘉历》中闰年的频率，解决了《元嘉历》中闰年过多的问题；二是第一次把岁差引入天地，可以更精准地计算出太阳的位置。以臣之见，这两点都是难能可贵的，也是颇有道理的，并且，祖冲之还求出了精确的交点月日数，以此推算和验证以往二十三年间的日月食，分毫不差。由此可见《大明历》之精密。

戴法兴（踏出一步，用焦急的语气）：春秋秦汉到如今，哪一朝哪一代不是如此，也没见什么时候出现错误，浅薄无知的祖冲之怎么能随便改历！关于“岁差”的说法就更不合乎正道。古人云：“日有恒度，而宿无改位”，古历都说冬至太阳在建星，而祖冲之竟说冬至太阳并不总在建星，每年都有改变。真是信口胡说，攻击上天，违反经书，竟狂妄到如此地步！

（群臣中许多人觉得戴法兴的话并无道理，但惧怕戴法兴的权势，低着头不敢吭声，也有不少人伸长了脖子连连点头。）

祖冲之（压抑着自己的愤怒，平静地）：中郎将大人虽遍读古历，但未见其中的道理。

戴法兴（居高临下，盛气凌人）：何以见得？

祖冲之（向前迈出一步）：十九年七闰，虽然自古如此，但确有错误。以臣测算，如按十

九年七闰，每二百年就要差一天，从秦汉到何承天的年代，冬至推后了三天，这是被事实证明了的，只是中郎将大人不曾留心罢了。何承天制定《元嘉历》时，虽然把冬至日移准了，但还是采用了十九年七闰的闰法，这免不了又要出现差错。《元嘉历》实行了十八年，已出现了破绽。关于岁差的原理，并非臣所首创，前人虞喜早有论述，根据臣测算的结果推算虞喜的论述是正确的。请问，《元嘉历》有错，为什么不能改?（回头望向戴法兴）

戴法兴（被驳得面红耳赤，蛮横地）：日月星体的运行，不是你凡夫俗子所能测量的，一般的仪器都不准，你就是测量了，也不能算数！

祖冲之（激动地）：臣测量日影星体几十年如一日，从未间断，而且每次测量都亲自辨别日影的长短，从不马虎。圭表仪器非常准确，日晒雨淋也不变形，每次测量的结果都丝毫不差。如果像戴大人所说，凡夫俗子不能测日观天，仪器都不准，不能致用，那么，以前的历法又是怎么编成的？

戴法兴（恼羞成怒）：我不管你这《大明历》有多好，即使它再准，我也绝不会同意改历。（转向宋孝武帝）陛下，祖冲之这是信口开河，请陛下千万不要听信他的胡言乱语。

巢尚之：启禀陛下，臣以为祖冲之的《大明历》是有根有据的。祖冲之年轻力盛，言辞不免激烈，冒犯了戴大人，但他也是为了国家社稷和天下苍生呀！还望陛下能够推行《大明历》。

宋孝武帝（见戴法兴理屈，摆了摆手）：好了，好了，今天的议论各有各的道理，各位爱卿回去把你们的意见写下来，待朕审阅之后再作决定。

旁白：关于《大明历》的辩论，就这样告一段落。这场辩论，实际上反映了当时科学和反科学、进步和保守两种势力的尖锐斗争。虽然祖冲之受到了压制，但他并没有退缩，而是怀着满腔的激愤写下了著名的《驳议》，进一步对戴法兴的行为进行驳斥。因为种种原因，祖冲之在世的时候《大明历》一直没有被采纳。

第四幕 子承父业

旁白：祖冲之逝世后，他的儿子祖暅继承了他的事业，继承父亲没有完成的事业。据唐朝李延寿撰写的《南史》记载，祖暅学习非常专注，他在探究计算到细微之处时，雷霆不能入。有一次，祖暅边走路边思考问题，撞到了朝廷大官徐勉，他竟浑然不知，徐勉大声叫嚷，祖暅方才如梦初醒。

经过祖暅修改与完善的《大明历》变得更加精准，随后祖暅接连两次向梁武帝萧衍上书请

求推行《大明历》，但都没有结果。两次失败后，祖暅依旧没有放弃，决定第三次上书。

谒者仆射：陛下，南徐州从事史祖冲之之子祖暅为改历一事求见。

梁武帝：传！

谒者仆射：是。

（谒者仆射上祖暅上场）

梁武帝：祖暅，今天你又是为了改历之事而来吗？

祖暅：回禀陛下，正是！

梁武帝：祖暅啊，你这已经是第三次上书了，前两次都没有结果，你还不准备放弃吗？

祖暅：回陛下的话，《大明历》是先父在前朝时编制的，先父呕心沥血编成的《大明历》要比《元嘉历》精确得多，恳请陛下能够为国家社稷和黎民百姓考虑，采纳并推行《大明历》。

梁武帝：好。朕已经派人研究过了《大明历》，确实如你所说《大明历》要比之前的历法精确的多，朕同意推行！

旁白：经过种种曲折，梁武帝终于同意在天监九年，也就是公元 510 年采用《大明历》。

谒者仆射：圣旨，奉天承运，皇帝诏曰，从即日起正式在全国推行《大明历》，钦此。

祖暅：臣接旨，谢主隆恩！

旁白：这样，祖冲之费尽心血编制出的《大明历》在遭到了四十八年的压制之后，终于胜利地在南朝推行了。祖暅也第一时间来到坟前向父亲报告这一喜讯，以告慰父亲的在天之灵。

全体演员鞠躬谢幕。

活动讯息

初中数学第二十次集中研修活动

——“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”顺利举行

孔雯晴，刘倩雯

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 3 月 6 日上午，以“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”为主题的华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第二十次集中研修活动顺利举行。本次活动由华东师范大学广陵实验初级中学承办，参与此次研讨活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和 HPM 方向的研究生，扬州市教育科学研究院中学教研室主任、中学数学教研员王玉宏老师，以及华东师范大学广陵实验初级中学数学组教师和北京新东方扬州外国语学校的教师。同时，联盟各成员校初中数学教师线上参与本次活动。

本次活动由华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师主持，观摩课的主题为“矩形的判定”，授课教师为华东师范大学广陵实验初级中学罗瑞娟老师。本次主题研讨的主题是“基于课堂留白的 HPM 初中课例设计与实践”。

【课例观摩环节】

罗瑞娟老师以“你知道什么样的图形是矩形吗？”的问题引入，学生在白纸上填写并在黑板上展示他们的想法，接着，罗老师从众多答案中引出本节课要学习的矩形定义，并让学生根据定义来判定其他学生的结论是否正确，再带领学生归纳矩形的判定方法，并采用一道实际生活中的应用题加深学生的理解，之后播放“矩形定义的历史”的微视频，将学生的与数学家的定义进行古今对照，最后从知识、数学思想和德育等方面进行课堂小结。（图 1）

图 1 罗瑞娟老师课堂展示

【评课交流与主题研讨环节】

首先，华东师范大学广陵实验初级中学周崇英校长致欢迎辞（图 2）。周校长对华东师范大学教师教育学院团队的指导和华东师范大学教育集团的支持表达了由衷的感谢，接着，周校长介绍了华东师范大学广陵实验初级中学坚持主动学习、卓越发展的办学理念，着力打造德能双修的教师团队，以生为本的灵动课堂，师生获得了众多省级、市级奖项，最后，周校长预祝本次活动圆满成功。

接着，执教教师罗瑞娟介绍教学设想、分享实施感受（图 3）。罗老师表示，在磨课的过程中收获颇多，非常感谢教研组和专家团队的指导，本节课改编了传统的教学安排，直接引入矩形的定义和判定，进行课堂留白后，学生提供了很多他们对矩形的定义，超越了原来的设想。在执教后，罗老师表示对矩形部分的知识有了更加深刻的理解。

图 2 周崇英校长致欢迎辞

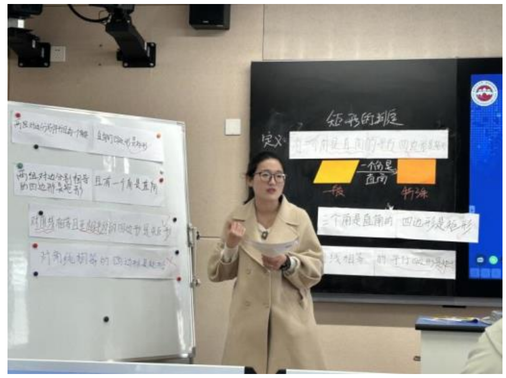


图 3 罗瑞娟老师分享教学实施感受

华东师范大学广陵实验初级中学教师、扬州市学科带头人严骏老师表示，本节课非常符合灵动课堂的特点（图 4）。其一，突破传统、勇于创新，罗老师以学情为基础，重构了教科书的安排，把矩形的定义和判定融合在一起；其二，本节课大胆留白，给予学生充分的思维空间；其三，注重渗透数学思想，如分类讨论、从一般到特殊等，同时关注数学文化的融入。

北京新东方扬州外国语学校杨晨光老师表示，本节课从矩说起，进行古今对话，以历史为主线培养学生推理的核心素养，同时，本节课留白较多，展现了教师的扎实教学技能。

邹佳晨老师从留白角度对本节课进行分析（图 5）。首先，罗老师通过问题 1 为学生留下发现之白，学生在已有认知基础上通过小组合作的形式自主发现矩形的定义。其次，通过让学生自主选择命题进行证明，为学生留下论证之白，学生在补白过程中结合同伴评价与质疑达到进一步补白。最后，可以考虑让学生在课堂中提出问题，留下问题之白。此外，邹老师还表示可以借助多媒体的便利功能提高课堂效率。

图 4 严骏老师点评

图 5 邹佳晨老师点评

扬州市教育科学研究院中学教研室主任、中学数学教研员王玉宏老师以三个关键词点评本节课。一是“简约”，本节课留白较多，整体以问题为导向，培养学生主动思考、主动学习；

二是“真实”，课堂体现了数学味道，符合新课改的方向；三是“深刻”，本节课的创新之一在于教师对教科书的逻辑结构进行了重构，且教师与学生在本堂课成为平等的参与者。同时，王老师建议教师关注学生的数学问题、关注知识的生成过程、关注对课堂学生的掌控度。此外，王老师还提出教师在教学时要关注“悬念意识”“点拨意识”“适度介入意识”与“留白意识”。

汪晓勤老师从五个方面对本节课进行点评（图 6）。其一，从历史到课堂，教师要充分挖掘知识点背后的历史，以矩形为例，历史上对四边形的分类是个大难题，课上学生通过活动，经历历史上矩形定义与判定的新知的创获过程。其二，从留白到创新，只有在课堂上充分留白，学生才会有创新，如今，人工智能可以替代事实性知识，但无法替代智慧创造，因此，我们要培养学生的创新意识与创新能力。其三，从谬误到证明，教师在课堂上纠正学生的错误，便可帮助学生收获真知。其四，从智育到德育，教师要关注数学的德育价值，例如包容学生的错误、培养学生的自信、培养学生学会倾听，同时，本节课的古今对照较弱，可以将历史上的与课堂上学生的定义进行对应，鼓励学生像数学家一样思考。其五，从教学到科研，教师可以将课例研究的过程整理成文，促进自身专业发展。

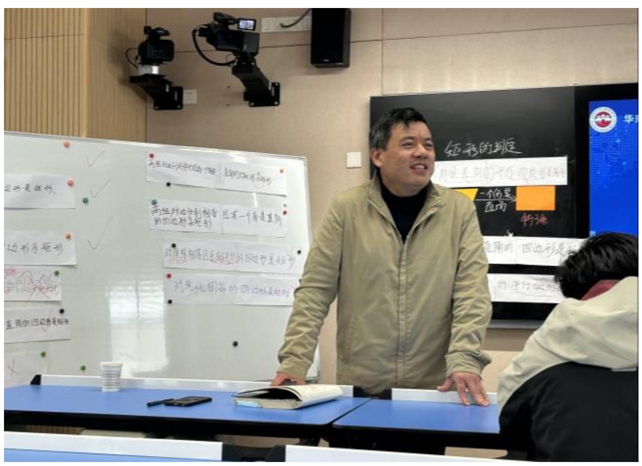


图 6 汪晓勤老师点评

两个多小时的研修活动在大家的热烈研讨中顺利结束，教师们在研讨的过程中充分感受到了课堂留白和数学史融入教学的价值，期待教师们将今天的收获融入到后续的教学中。

聚焦知识生成，照亮数学现实

——“余弦定理”教学观摩与研讨活动

吴越，刘倩雯

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 3 月 14 日下午，数学史与数学教育（HPM）课例研讨活动在上海外国语大学附属普陀实验学校举行。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室、上海市第四期“双名工程”高峰计划王华数学基地联合开展。本次课例研讨的主题是“余弦定理”，授课教师为上海市曹杨中学蔡真逸老师和上海市晋元高级中学缪寿红老师。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师，上海市晋元高级中学正高级教师、特级教师王华老师，此外还有来自 HPM 工作室和王华数学基地的教师以及华师大的研究生共同参与。

【课例观摩环节】

蔡真逸老师从单元视角出发，先带领学生回顾正弦定理的学习过程，再从测量沼泽地的现实情境引入本节课的课题。接着类比正弦定理，引导学生分别采用建系和作高的方法推导余弦定理，其中，建系能够避免分类讨论，作高可以得到射影定理这一“副产品”，并通过问题串引出余弦定理边角分离的形式，自然推理出三角形三边之间的大小关系与角的联系。然后，蔡老师介绍了欧几里得证明勾股定理的面积法，并留给学生自主探究的空间，将这种方法迁移到余弦定理的证明中，帮助学生探寻余弦定理的几何意义。最后，蔡老师在课堂小结环节梳理了本节课的知识和思想方法，并对本节课的教学进行了升华。（图 1）


图 1 蔡真逸老师课堂展示

缪寿红老师以测量铁路隧道的现实情境引出本节课的课题。缪老师先引导学生采用作高法，

将一般三角形转化为直角三角形，利用勾股定理探究两边一夹角和其对边之间的关系，并让学生分别对直角、锐角和钝角三角形进行自主探究。学生提出还可以建立直角坐标系，利用两点间距离公式得到余弦定理，在此过程中，缪老师带领学生复习了三角比的定义，并说明建系不需要分类讨论这一优点。接着引入赵爽弦图，启发学生利用几何法自主证明余弦定理，并建构勾股定理和余弦定理间的联系。除了建系、作高和几何法以外，缪老师还让学生利用正弦定理推导余弦定理，感悟正余弦定理间的密切联系。然后，学生尝试给出余弦定理的不同表示方式，并发现了余弦定理边角分离的形式。最后，缪老师又回到现实情景，利用余弦定理解决隧道测量问题，并对本节课的知识进行梳理与总结。（图 2）

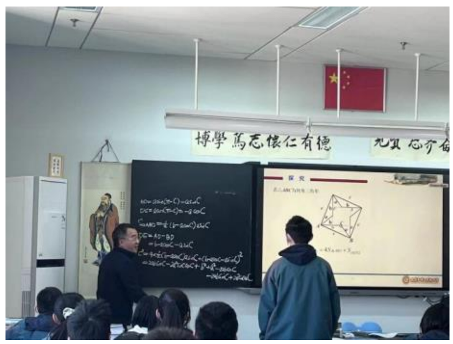


图 2 缪寿红老师课堂展示

【评课交流与主题研讨环节】

教学观摩后，随即开展了交流与研讨活动。上海市七宝中学黄婷老师（图 3）表示，两位教师的课堂都引入了数学史，无论是蔡老师迁移欧几里得的方法证明余弦定理，还是缪老师利用赵爽弦图推导余弦定理，都值得借鉴。

图 3 黄婷老师点评

图 4 徐洁兰老师点评

上海市回明中学徐洁兰老师（图 4）表示，活动的本质是思维的碰撞，通过设置探究活动将教师的思维传递给学生，学生通过交流与探究，将思维反馈给教师。徐老师还表示，定理的

推导过程其实是学生高阶思维的培养过程，这对学生核心素养的形成至关重要。

上海市晋元高级中学王老师作为新入职的教师，也分享了自己对于这两节课的感悟（图 5）。王老师认为，一个好的课堂就是说好一个故事，教师教学不应该站在成人的角度去思考，只注重应用，不关注知识形成和发展的过程，而应该从学生的角度出发，不过度追求节奏，留给学生自主探究和发现的空间，让学生带着自己的体会进入梦想。

上海市建平中学李老师（图 6）表示，“问题驱动”教学与“留白创造式”教学有异曲同工之妙，并提出高中解三角形的“一个目标、两条思路、三个工具、四个模型”，李老师认为“教得好不如学得好”以及“教之道在于度，学之道在于悟”，教学要注重“度”的把握。此外，李老师表示，蔡真逸老师的课堂从形出发引出数，又从数出发探寻几何意义，成功将优美的图形和简洁的代数建立联系，但建议采用“课下思考、课上展示”的形式，不仅能给予学生自主思考的空间，还能提高课堂效率。

图 5 王老师点评

图 6 李老师点评

邹佳晨老师（图 7）认为，两节课堂都很好地融入了留白元素。一是发现之白，两位教师都从生活中的测量问题入手，让学生通过现实情境发现三角形的两边夹一角与其对边间的联系；二是论证之白，两位教师都将数学史融入教学中，先展现《几何原本》和“赵爽弦图”中有关勾股定理的证明，再让学生类比这些方法来论证余弦定理，感悟古今对照；三是方法之白，这两节课的不足之处是没有分成多个小组，教师可以放手让学生自主探究或在呈现某种方法后，让学生讨论、探究更多的方法；四是陈述之白，除了给出余弦定理的符号表征外，教师还让学生用自己的语言叙述余弦定理，将符号语言转化成文字语言，促进对数学的理解。

王华老师（图 8）强调，做一名优秀的数学教师必须要“读数学书，说数学话，做数学人”，课堂形态分为讲授式课堂、互动掌握式课堂和留白创造式课堂，而在留白创造式课堂中，

最重要的是理解“什么是白”和“怎样留白”，还需要教师在课堂教学中进一步修炼。

图 7 邹佳晨老师点评

图 8 王华老师点评

汪晓勤老师从四个方面对“余弦定理”这一课例进行点评（图 9）。首先是知识之谐，课堂教学要思考知识的产生过程，从数学外部看，18 世纪以前，三角学来源于测量学，两位教师都利用现实情境中的测量问题引入课题；从数学内部看，初中阶段定性研究了三角形两边之和大于第三边，但并未涉及三角形三边中的等量关系；其次是方法之美，两位教师都建立与勾股定理间的联系，一是采用作高法，直接运用勾股定理的结论证明余弦定理，二是利用历史上证明勾股定理的几何法，将其迁移到证明余弦定理中来；再次是探究之乐，课堂中的超越之白较少，在课堂小结环节可以渗透数学思想方法，引导学生思考数学推广中的研究方法；最后是德育之效，通过古今对照，能够让学生感悟到古人的智慧，也拉进了学生与数学的距离。

图 9 汪晓勤老师点评

在参会人员的热烈讨论与思考中，本次教学观摩与课例研讨活动圆满结束。通过此次研讨，希望参与研讨的各位教师和学生对数学史与留白创造式教学及其教育价值有更进一步的认识。

初中数学第二十一次集中研修活动

——“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”顺利举行

刘倩雯，孔雯晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 3 月 27 日下午，以“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”为主题的华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第二十一次集中研修活动顺利举行（图 1）。本次活动由华东师范大学弋阳实验初级中学承办，参与此次研讨活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和 HPM 方向的研究生，上海市普陀区教育学院正高级教师陈兴义老师，华东师范大学弋阳实验学校副校长叶霞老师、初中数学教研组长刘美英老师以及数学组教师。同时，联盟各成员校初中数学教师线上参与本次活动。

本次活动由邹佳晨老师主持，观摩课的主题为 “矩形的性质”和“矩形的判定”。

图 1 初中数学第二十一次集中研修活动

【课例观摩环节】

华东师范大学弋阳实验学校程紫繁老师带来了“矩形的性质”展示课（图 2）。程老师首先从生活实例引入教学并让学生为矩形下定义，同时补充介绍矩的历史含义。随后，程老师让学生探究矩形的特殊性质，提出猜想并验证。接着，通过投圈游戏问题，让学生探讨直角三角形中斜边上的中线与斜边的关系。最后，程老师带领学生从数学知识、思想方法与德育价值三维度进行课堂小结。

图 2 程紫繁老师课堂展示

华东师范大学弋阳实验学校张依老师与上海市实验学校蒋来老师带来了“矩形的判定”的展示课。

张依老师首先以伦敦奥运会的泳池引入矩形，类比平行四边形的判定定理，带领学生从边、角、对角线三个方面猜想矩形的判定定理。接着，张老师展示学生在课前学习单上提出的判定命题，引导学生讨论命题的正确性，并邀请学生在黑板上展示证法，同时引出教科书中的矩形判定定理。随后，张老师介绍了与矩形相关的数学史，并使用三道例题强化学生对矩形判定定理的运用。最后，张老师从三个知识、三种思想、三类能力对本节课进行小结。（图 3）

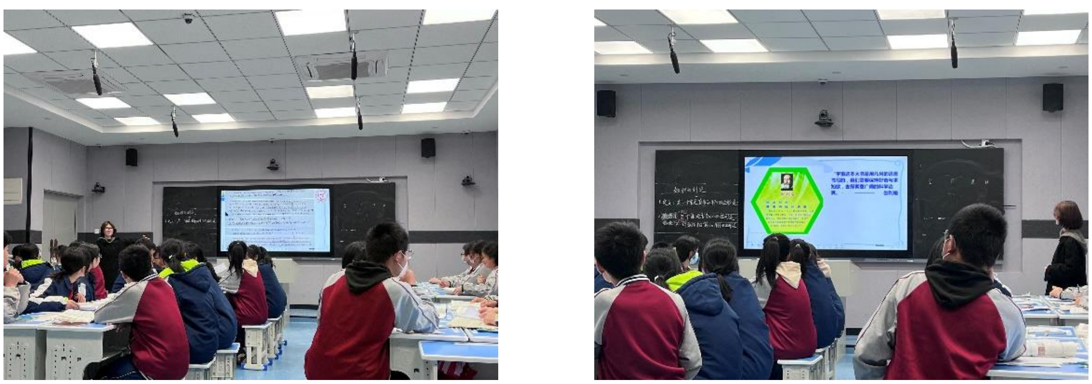


图 3 张依老师课堂展示

蒋来老师首先通过生活实例引入矩形，并让学生描述什么是矩形。接着，蒋老师展示了历史上的数学家给出的矩形定义，历史上的定义随着时间的推移逐渐变得简明，蒋老师将学生给出的定义进行古今对照，进而引出教科书中的矩形定义，并且播放了关于矩形历史的微视频。随后，蒋老师让学生在磁贴上写下矩形的判定命题，同时带领学生证明这些命题。最后，蒋老师从知识点、思想方法和已解决的问题三方面作课堂小结。（图 4）

图 4 蒋来老师课堂展示

【评课交流与主题研讨环节】

首先，华东师范大学弋阳实验学校副校长叶霞老师致欢迎辞（图 5）。叶校长首先介绍了华东师范大学弋阳实验学校的办学理念、办学特色与所获荣誉，随后对华东师范大学教师教育学院团队的指导和华东师范大学教育集团的支持表达了由衷的感谢，并预祝本次活动圆满成果。

图 5 叶霞副校长致欢迎辞

接着，执教教师程紫繁、张依与蒋来分别介绍教学设想、分享实施感受。

程老师（图 6）表示，本节课从矩形的必要性出发，通过复习平行四边形的性质，引导学生探究矩形的特殊性质，再通过投圈游戏的实际问题建立数学模型，引出命题“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，并由“一半”带领学生回顾以往所学知识“中位线”和“直角三角形中，30°所对的边等于斜边的一半”等，最后带领学生总结知识、思想与价值。

张老师（图 7）表示，本节课以矩形的常见性和不可替代性来启发学生学习矩形的必要性，以矩形是特殊的平行四边形来回顾两者的定义和联系，渗透从一般到特殊的思想方法。张老师认为，这次关于留白教学的尝试对自己有很大的启发。

图 6 程紫繁老师分享教学实施感受

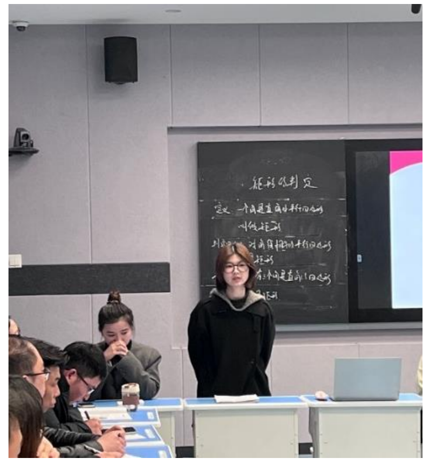


图 7 张依老师分享教学实施感受

蒋老师（图 8）表示，沪教版教科书中“矩形的判定”是第一节课，本节课先让学生自己尝试描述矩形的定义，然后引导学生简化冗余的条件，优化矩形的定义，体现数学探究的过程，同时介绍历史上矩形定义的演变过程，让学生体会数学的简洁美。

图 8 蒋来老师分享教学实施感受

陈兴义老师从三节课的特点入手进行点评（图 9）。首先，三节课都以学生为中心，引导学生为学生后续学习搭建平台。其次，三节课的流程都十分清晰，从生活情境入手激发学生兴趣，再数学化定义概念，辨析理解，最后应用知识并小结。同时，三位教师都关注学生的活动，以问题为抓手为课堂留白，促进学生的深度学习。最后，陈老师祝愿华东师范大学基础教育联盟活动更加丰富精彩。

邹佳晨老师（图 10）表示，这三节课都蕴含了丰富的留白元素。张老师在课前留白，陈老师和蒋老师让学生提出猜想再证明，体现了发现之白、论证之白和方法之白。同时，这三节

课融入了丰富的文化元素，借助数学史让学生知道数学的定义不是一成不变的，定义的发展经历了不断深化和完善的曲折过程。

图 9 陈兴义老师点评

图 10 邹佳晨老师点评

华东师范大学弋阳实验学校邓礼成老师（图 11）表示，非常赞同课堂留白的观念，邓老师认为“学生想要什么”比“教师想给学生什么”更为重要，并表示，在自己的课堂中也重视学生数学思想的培养。同时，邓老师还提出“如何让表达能力不强的学生在课堂上积极参与”是她目前在教学中所遇到的主要困惑。

刘美英老师（图 12）表示，非常感谢华师大老师们的指导，两位年轻教师刻苦踏实，勇于尝试新的教学方式，对此表示非常赞赏。刘老师特别指出，这三节观摩课带给她很大的震撼，对留白的内涵有了更深刻的认识，并表示以后可以多多尝试留白式教学。

图 11 邓礼成老师点评

图 12 刘美英老师点评

汪晓勤老师（图 13）首先阐述了开展留白创造式教学的意义，在当今人工智能发展迅速的时代，创新是极其必要的，因此，开展留白创造式教学是时代的呼唤。然后，汪老师从六个方面对本节课进行点评。其一，从留白到创造，数学教学需要强调思想的渗透，课堂上不能局限于知识的记忆，更要教会学生如何学习。其二，从历史到课堂，大众认为数学枯燥乏味的原

因之一是数学课堂缺少人的元素，因此，为了让数学课堂更加人性化、更为美好，教师可以考虑在教学中融入数学史。其三，从知识到素养，专业知识固然重要，但最终仅能成为载体，课堂教学中最重要的是学生能力的培养，而从知识到素养这一目标的达成便需要课堂的留白。其四，从生活到数学，三位教师都从生活引入，将生活实例与知识建立联系，贯穿课堂。其五，从智育到德育，教育的根本任务是立德树人，数学也有其独特的德育价值，三节课的德育素材非常丰富，例如，判断命题是否成立需要理性精神；课堂留白可以培养学生倾听的习惯和善于交流的能力；通过古今对照，让学生意识到自己与古代数学家的想法高度相似，进而培养学生的数学自信。其六，从课例研究到专业发展，如何做到“人无我有，人有我优”是教师以及教研组需要思考的，汪老师建议教研组要建立自己的特色，在特色的指引下，让每位教师得到专业发展。

图 13 汪晓勤老师点评

四个多小时的研修活动在大家的热烈研讨中顺利结束，教师们在研讨的过程中充分感受到了课堂留白和数学史融入教学的价值，期待教师们将今天的收获融入到后续的教学中。

高中数学第十九次集中研修活动

——“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的高中数学教学实践”顺利举行

刘倩雯，孔雯晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 3 月 28 日，以“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”为主题的华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学联盟第十九次集中研修活动顺利举行（图 1）。本次活动由华东师范大学上饶实验中学承办，华东师范大学盐城高级中学和厦门市华师希平双语学校协办。参与此次研讨活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和 HPM 方向的研究生，华东师范大学上饶实验中学校长肖家芸老师、副校长超龙老师以及高中数学组教师。同时，联盟各成员校高中数学教师线上参与本次活动。

本次活动由邹佳晨老师主持，观摩课的主题为“余弦定理”。

图 1 高中数学第十九次集中研修活动

【课例观摩环节】

当日上午，华东师范大学上饶实验中学江小华老师与华东师范大学盐城高级中学凌国华老师带来“余弦定理”的展示课。

江小华老师首先通过复习直角三角形的特殊性质引入任意三角形的特殊边角关系，接着让学生探究“任意三角形中已知两边夹一角，求第三边”的问题。随后，江老师带领学生归纳、总结出余弦定理，并进行知识运用以及课堂小结。（图 2）

图 2 江小华老师课堂展示

凌国华老师首先让学生判断边长不同的三角形的形状，接着引导学生用几何方法证明锐角和钝角三角形中三边平方之间的关系，呈现余弦定理的几何表示，再将其替换为余弦值，引出余弦定理的公式。随后，凌老师回归教科书，用向量法证明余弦定理，并推出余弦定理的变形式。接着，凌老师设置了一道关于测量的应用题和三道数学内部练习题。最后，凌老师对本节课进行总结，并升华了主题，希望学生努力成长为一个创新性人才。（图 3）

图 3 凌国华老师课堂展示

当日下午，厦门市华师希平双语学校罗俊玲老师与任飞老师线上展示了“余弦定理”的录课。

罗俊玲老师以杭州千岛湖为背景创设距离问题：已知三角形的两边和夹角，如何求第三边，由此引导学生用向量法推导余弦定理的公式，接着进一步延伸：已知三角形三边，能求角吗？让学生再次从公式出发，板演推导公式。随后，罗老师让学生思考余弦定理的多种证明方法，并提示从几何角度出发，考虑建系法与作高法。最后，罗老师通过例题进一步巩固知识，并通过课堂小结帮助学生掌握课堂内容。（图 4）

图 4 罗俊玲老师课堂展示

任飞老师以武广高铁规划路线的实际问题导入，将钝角和锐角三角形拆解为直角三角形，通过边的比例关系详细地推导了余弦定理。本节课的重点是平面向量的应用，任老师又采用建系的方法推导余弦定理，并带领学生用余弦定理解决导入中的问题，随后引出余弦定理的推论。最后，任老师通过一道陕西高考题“请证明余弦定理”，强调数学学习应该注重过程而不是结果，应该培养学生的数学思维。（图 5）

图 5 任飞老师课堂展示

【评课交流与主题研讨环节】

首先，华东师范大学上饶实验中学校长肖家芸老师致欢迎辞（图 6）。肖老师对汪晓勤教授和邹佳晨老师的莅临指导表示热烈的欢迎，接着对观摩展示课的顺利开展表示热烈的祝贺。最后，肖老师预祝本次教研活动圆满成功。

图 6 肖家芸校长致欢迎辞

接着，执教教师江小华与凌国华分别报告教学设计（图 7）。江小华老师表示，本节课首先带领学生推导出余弦定理，继而提问“已知三边能否求三角”，得到余弦定理公式的推论，再根据推论进一步判断三角形的类型，最后让学生思考：余弦定理能解决什么问题。

凌国华老师表示，本节课由数学史引入，让学生用几何方法探究三角形三边平方的关系，通过历史上定义和判定证明方法的创新渗透德育。接着，介绍教科书中使用向量推导余弦定理的方法。最后，用一个生活实例体现余弦定理的应用价值，再通过例题引出定理的互化。

图 7 江小华老师与凌国华老师分享教学实施感受

华东师范大学上饶实验中学胡芝老师（图 8）表示，厦门罗老师的教学设计非常精彩，通过设立问题，激发学生思考并让学生自主生成知识的教学方式值得学习。

华东师范大学上饶实验中学王老师（图 9）对凌老师与厦门罗老师的教学印象深刻，王老师表示，凌老师的课思路清晰，整堂课强调学生的自主探究，保留学生的主体地位，并引导学生用几何法和向量法推导出余弦定理。厦门罗老师的引入立足学生的认知起点以及高中学习余弦定理的必要性，帮助学生建构知识体系。此外，罗老师用千岛湖的例子贯穿课堂，讲解清晰，非常精彩。

图 8 胡芝老师点评

图 9 王老师点评

厦门华东师范大学希平双语学校教师、省骨干教师白根生老师对本校两位教师的教学进行点评（图 10）。白老师表示，“余弦定理”这节课应该从现实生活中来，到现实生活中去，两位教师通过千岛湖与高铁的现实情境激发学生的兴趣。同时，两位教师在备课过程中都进行了有效地沟通与差异性地处理，对于如何顺应新课标都进行了尝试。

华东师范大学上饶实验中学副校长、特级教师、正高级教师超龙老师从三个方面展开点评（图 11）。其一，以问题探究为导向，四位教师从生活实例与几何本身出发，激发学生的学习兴趣。其二，培育核心素养，四节课都包含了建模、推理、直观想象的核心素养。其三，渗透数学思想，课堂中渗透了分类讨论、从特殊到一般等数学素养。最后，超老师还建议教师在方法的讲解时应该充分考虑教科书中知识的先后顺序。

图 10 白根生老师点评

图 11 超龙老师点评

邹佳晨老师（图 12）表示，四位教师都从实际生活引入，符合测量之需，同时，邹老师建议教师可以使用更加具体的生活实例以激发学生学习数学的兴趣。接着，邹老师从课堂留白角度展开点评。四位教师都在课堂上进行留白，其中，江老师和凌老师都通过创设情境为学生留下发现之白，在学生发现定理后，又引导学生补论证之白，同时，江老师在教学设计时还为

学生在课后留下方法之白。罗老师在课前设置学习单，课后通过作业设计让学生用不同方法证明余弦定理，属于课前课后留白。任老师的课堂上呈现了三种证明余弦定理的方法，即和角公式法、建系法、向量法，虽然并未留下过多空白，但呈现的方法具有多样性。最后，邹老师表示，教师都在课堂上渗透了德育，但在高中课堂上采取齐读共答的教学方式不利于每位学生的知识掌握，教师可以基于学情，让学生自主提问回答、质疑纠正。此外，邹老师还表示，余弦定理的证明方法很多，值得各位老师继续研讨。

汪晓勤老师（图 13）首先表示，数学教学中存在逻辑序和历史序的矛盾，三角学扎根于几何，这四位教师设计的“余弦定理”课都兼顾了历史序和逻辑序。接着，汪老师强调了人工智能时代背景下留白创造式教学的重要价值，留白创造式教学不仅仅要传授数学知识，更要培养学生的数学思维和能力，教师在设计教学时应当考虑核心素养的培养、德育的融入和学生能力的发展等。随后，汪老师表示，师问齐答的讲授式与留白创造式教学是有矛盾的，建议教师多注重学生的表现，如果给学生一些机会，他们可能也会给教师带来一些惊喜。接着，汪老师指出，将创新的留白教育理念落实到课堂的过程具有一定的挑战，建议 1-3 年教龄的教师先站稳讲台，再尝试留白创造式教学。最后，汪老师表示，课例研究与教师专业发展密不可分，磨的是课，成的是人，鼓励联盟成员校定期开展观摩展示课。

图 12 邹佳晨老师点评

图 13 汪晓勤老师点评

长达五个小时的研修活动在大家的热烈讨论中走到了尾声，各位教师对基于课堂留白的 HPM 课例的设计及其教育价值有了进一步的认识，期待教师们将所思所学付诸实践。