



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 12 期



哥本哈根第谷天文馆

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 邵爱娣 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯

岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

初探早期教科书有感

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

历史是一面镜子, 鉴古知今, 学史明智; 历史是一只滚滚向前的车轮, 不断轮回, 无可阻挡; 历史更是一种智慧, 隐藏着人生宇宙的规则尺度、机巧谋略。作为文明延续的重要纽带、民族精神传承的基本载体、治国安邦的经验宝库、启迪人生的智慧向导, 尊重历史, 敬畏历史, 才能从中汲取足够的智慧, 数学教育亦是如此。

现代数学不是某一个民族或地区的产物, 而是多民族、地区在世世代代的生产实践中逐渐发展而成。从数学形成时期, 到常量数学时期, 再到变量数学时期, 最后到现代数学时期, 数学的学科分支、内容得到了极大地丰富, 可以说, 数学已从最开始的“嫩芽”长成了枝繁叶茂的“参天大树”, 其走过了数千余年的春秋岁月, 既有缓慢的量的积累, 也有质的突破, 表现出渐进性和阶段性。然而数学的发展也不是一蹴而就、一帆风顺的, 无理量的发现、微积分和非欧几何的创立、乃至费马大定理的证明等, 无一不是经历了曲折艰难最终探索出来。数学史汇集了人类几千年来智慧的结晶, 不仅蕴涵了丰富的数学思想, 还记录下了数学家克服困难和战胜危机的斗争, 这些内容无疑是今天在数学教学中渗透数学文化, 使学生学习数学的过程中体验数学文化, 受到文化感染, 产生文化共鸣, 从而实现数学的文化教育功能的重要素材。

近年来, “数学文化”已然成为了数学教育界密切关注的热点问题, 作为人类文化的重要组成部分, 蕴含着丰富而且深刻的文化底蕴与内涵, 与人类的繁荣和发展一脉相连。2018 年 1 月教育部印发的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(以下简称《课标》)中已对数学文化给出明确说明, 即数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点, 以及它们的形成和发展; 还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义, 以及与数学相关的人文活动。此外, 《课标》还在课程的基本理念中指出: 数学课程应注重数学文化的渗透。由此可见, 数学史、数学文化与数学教育之间的关系博大精深, 足以成为数学教育中一个前景无限广阔的研究领域。

数学史融入数学教学的实践和案例开发是 HPM 研究的重要方向之一,教师若要开发出一个理想的 HPM 课例,好的历史材料是“源”,好的教学设计则是“流”,两者缺一不可。数学史作为一个巨大的宝藏,今天却遭遇着“高评价、低应用”的境遇,其主要原因之一正是数学教师手头缺乏丰富而实用的数学史素材。因而,在 HPM 专业学习共同体中,高校研究者首先需要经历 HPM 课例研究流程中的“选题与准备”的部分过程(图 1),通过对于相关主题的历史以及西方早期教科书中的相关内容进行深入研究,获得教育取向的数学史料,然后按照科学性、有效性、可学性、人文性和趣味性原则,通过共同体成员的交流研讨,对史料进行裁剪和加工,编著数学史实用参考书或撰写相关研究论文,为一线教师解决史料缺乏的问题,最终推动 HPM 视角下的数学课堂教学行稳致远。

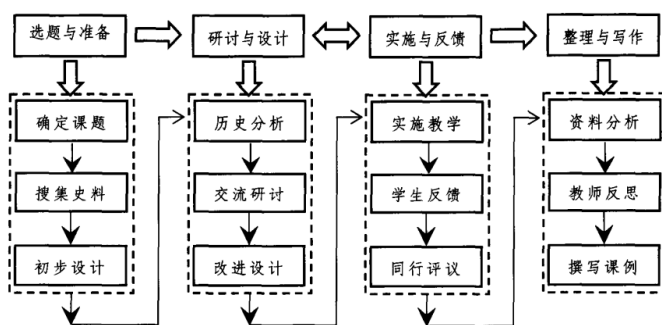


图 1 HPM 课例研究的流程

鉴于此,笔者在读研期间参与了早期教科书研究,基于自身经历,拟从对在职教师和对职前教师两方面谈谈早期教科书研究的心得体会。

1 在职教师能力提升

谈到数学史与数学文化的经典名著我们总能想到很多,例如古代西方有《几何原本》《圆锥曲线论》《计算之书》,中国古代有《九章算术》《周髀算经》《四元玉鉴》,现代有 M·克莱因的《古今数学思想》、钱宝琮的《中国数学史》等。虽然这些书籍囊括了古今中外的数学历史和故事、数学思想和方法,教师可以以此为借鉴和参考进行教学设计,但是很少是针对中小学数学教师来撰写的,导致部分数学史内容较为分散且缺乏教育价值。教师依然面临“巧妇难为无米之炊”的困境,而针对某一专题的早期教科书研究,为教师开展 HPM 视角下的教学实践提供理论支撑。以一节笔者参与史料搜集和教学研讨环节的 HPM 视角下的“圆锥曲线高三单元复习

课”教学为例。

在已有的圆锥曲线高三复习课中，大部分教师均是以试题为导向，通过归纳用圆锥曲线定义解决的几类问题，引导学生用圆锥曲线定义解题。然而，数学史的融入可以让以往平淡无奇的高三复习课焕发生机，让学生的数学知识插上腾飞的翅膀。在今天的数学课程中，圆锥曲线是作为解析几何概念登场的。教材的处理偏重从代数的角度呈现圆锥曲线的知识，却不太关注作为几何概念的圆锥曲线的起源，从而忽视了知识之本源。探寻美英早期解析几何教科书，圆锥曲线在“数”与“形”上的特点昭然若揭。由此，教师在实际教学中，从学生已掌握的轨迹定义出发，通过介绍古希腊截线定义回答学生“椭圆、双曲线和抛物线为什么统称为圆锥曲线”之困惑，并运用旦德林双球模型建立起截线定义和轨迹定义之间的统一性。这将有助于学生厘清圆锥曲线的“纯几何身份”，丰富学生对圆锥曲线的本质理解。

课后，教师对本节课进行了反思。

教师尝试在 HPM 视角下，以数学文化为抓手，借助多媒体信息技术，通过类比推理训练，发展学生直观想象、数学建模等数学核心素养，落实立德树人的根本任务。

由此可见，教师对本节 HPM 视角下的高三复习课有着较高的评价，早期教科书中的数学史的融入既帮助教师改进教学，也为学生带去了多方面的教育价值。

当然，从早期教科书中挖掘出的数学史素材，对教师教学和学生学习的益处不胜枚举。例如，对教师而言，可以发现知识产生的动因、寻找历史相似性、丰富教学知识储备等，对学生而言，可以增加学习动机、加深概念理解、培养远见卓识等，这也是笔者进行早期教科书研究的价值所在。

2 职前教师专业发展

数学是数学教育的核心，数学教育之所以称为数学教育正是因为有了数学。数学教育作为一名学科，无论是数学还是教育学两者都不可偏废。通过早期教科书的研究，将大大促进职前数学教师的专业发展，为未来的发展之路打下坚实基础。

2.1 提升数学素养

《万字》告诉我们：学无止境，若浅尝辄止，盲目自满，是学不到真本领的。随着知识经

济时代的到来,知识更新周期日益加快,若数学教师固守原有的数学知识、教育理念、思想方法,这是远远不够的。在数学“双新”的背景下,沪教版已加入导数的内容,但笔者听闻部分教师却苦恼如何讲授这一部分内容,只因导数是在大学中讲授的内容,经过多年的教学早已遗忘。面对这一“困境”,教师必须具备终身学习的能力,而早期教科书研究将带动职前教师的数学素养的提升。

历史是最好的教科书,历史是最好的老师,翻阅早期教科书,不同数学家丰富的数学思想将极大发展和完善职前教师的 MKT。例如,函数的定义从初中开始就有了,从“依赖说”,到“变量说”,再到“对应说”,一个简单的数学概念在早期教科书中经历多次演变,了解其演变背后的动因,更将加深职前数学教师对函数概念本质的理解。依托早期教科书研究,将助力职前教师巩固和增长数学知识,并从更广阔、更为多样的角度对数学本质有更为透彻的理解。

教育之计,教师为先,数学教师的数学思维对提升学生的思维能力起到了举足轻重的作用。纵观中国教育的历史,应试教育对学生的“副作用”依然挥之不去,为了获得理想的考试成绩,学生每天则需要机械地完成大量的练习。题海战术不仅高耗低效,还固化了学生的思维。笔者在与学生交流的过程中发现,一些学生的应试思维已略见雏形,如看见立体几何就想建系、看见圆锥曲线就用韦达定理等。寻求捷径解决数学问题固然重要,但探寻问题背后的原因,提升解决问题的能力才是关键。

于是,数学教师在公式教学中应关注公式之导,在定理教学中应关注定理之证,在解题教学中应关注一题多解。然而,现行教科书往往只能为我们提供一两种证明或推导方法,这就让历史上的思想精华与我们渐行渐远。通过早期教科书的研究,不免让我感到惊讶,原来历史上无数先哲为我们留下了如此之多灵活、多样、精彩的思想方法。以棱台体积公式为例,早期几何教科书中的证明方法包括分割法、构造法、定义法和公式法四种,这些思想无疑展示了方法之美,拓宽了广大职前教师的思维,还为今后走上讲台开展探究式教学提供有益参考。

2.2 培养教学技能

数学教师不仅要有扎实的数学功底,还要练就扎实的数学教育教学的基本功。早期教科书研究不只是进行简单的史料搜集的工作,更重要的是去思考历史演变背后的动因、数学史的教育价值以及数学史的运用方式,从而为一线教师开展实际教学提供科学的理论指导。

(1) 厘清知识背后的历史轨迹。早期教科书给出了“负负得正”的多种解释方式,包括利用分配律、相反数法、连减法、归纳法和几何法从数学内部出发解释符号法则;利用物理模型和生活模型从数学外部出发来解释该法则,最终让学生明白:无论从数学内部出发还是从现实情境出发,“负负得正”都是合理的存在。由此可见,以史为鉴可以让教师了解一个看似简单的法则背后的历史轨迹,这对我们的数学教学带来的作用是巨大的,对学生理解一些定理、法则、公式的作用也是巨大的。

(2) 体现数学史的六大教育价值。从邦贝利为了解决一元三次方程去面对复数、为了开高次方产生二项式定理等,使得数学知识的产生自然流畅,符合学生的认知水平,有助于建构知识之谐。从韦达定理的证明、余弦定理的推导等,使得不同时空的灵活、多样、精彩的思想方法齐聚课堂,拓宽学生思维,培养发散性思维,有助于彰显方法之美。从三角形内角和、椭圆定义的发展阶段等,让学生在课堂上充分探究,从而经历这些知识的发生发展过程,积累基本数学活动经验,获得成功的体验,有助于营造探究之乐。借助数学史,培养学生的数学素养,充分体现数学课堂上的数学文化内涵,有助于实现能力之助、展示文化之魅。在 HPM 视角下的数学教学实践,充分体现数学史的德育价值,最终达成立德树人根本任务,有助于达成德育之效。总之,早期教科书中的数学史料远不止于此,而在课堂上不同史料的运用将发挥独特作用。

(3) 优化数学史的组织形式。早期教科书中虽然有丰富的数学史料,但融入数学史的数学课不能只有简单的附加,这样体现不出必要性。教师应尝试根据历史材料,编制数学问题,或对历史上的思想方法进行适当的改编,或借鉴或重构知识的发生、发展历史,将数学知识与数学史更有机地结合在一起,最终使我们的数学课程比较流畅,教学设计环节清晰,目的明确。

2.3 增强学术能力

研究生作为我国高等教育的最高层次,其学术能力的培养,不仅仅是为国家人才战略作储备,更是对人类知识的进步作贡献。作为一名硕士研究生,所具备的学术能力应包括问题的发现与提出的能力、文献的收集与整理的能力、概念的生成与厘定的能力、做出学术命题的能力、设计研究过程的能力、对学术前沿的敏感等。因此,广泛阅读、勤写论文以及方法论的学习,是实现研究生学术能力提升的重要途径。

华东师范大学教师教育学院采取的教育硕士培养模式是“实践+科研”两条腿走路,要求学

生既要提升教学技能，又要学会学术研究，两者不可偏废。因此，笔者在已有教育实践课程的基础上，同步进行早期教科书研究，无疑为今后学术研究能力的发展埋下伏笔。

3 结语

综上所述，笔者基于自己近期早期教科书的研究经历，初步论述了早期教科书研究对在职教师和职前教师的价值。当然，早期教科书的研究价值远不止于此，例如，学术价值上可以为未来教科书的编排提供借鉴意义，技术价值上可以呈现一节与众不同的数学课堂，社会价值上可让读者了解数学知识背后的时代背景等。期待未来有更多的数学史与数学教育方向的研究者投入到历史以及早期教科书的研究中去，为 HPM 视角下的数学教学不断添砖加瓦。

目 录

刊首新语

初探早期教科书有感	刘梦哲 I
-----------------	-------

历史研究

比的历史	王智洋, 刘思璐 1
美英早期教科书中的椭圆面积	刘梦哲 11
美英早期解析几何教科书中的抛物线定义与方程	钱 秦 22
美英早期三角学教科书中的诱导公式	鲜宇骋 33
美英早期三角学教科书中的倍角公式	姚 瑶 44

教学实践

HPM 视角下圆锥曲线的光学性质及其应用的教学	王文雅, 刘梦哲 56
-------------------------------	-------------

学术动态

万物皆比寻根源, 育智育德浸课堂	王智洋, 刘思璐 69
共话 HPM 开启新篇章	岳增成 73
2021 年 HPM 研究成果总汇	77

CONTENT

FOREWORD

Feelings of a Preliminary Exploration of Early Textbooks Liu Mengzhe I

HISTORICAL STUDY

The History of the Concept of Ratio..... Wang Zhiyang, Liu Silu 1

The Area of Ellipse in Early American & British TextbooksLiu Mengzhe 11

The Definition and Equations of Parabola in Early American & British Textbooks on
Analytic Geometry Qian Qin 22

The Reduction Formulas in Early American & British Textbooks on Trigonometry
..... Xian Yucheng 33

The Multiple-angle Formulas in Early American & British Textbooks on
Trigonometry Yao Yao 44

TEACHING PRACTICE

Teaching of Optical Properties and Applications of Conic Sections from the
Perspective of HPM..... Wang Wenya, Liu Mengzhe 56

ACADEMIC INFORMATION

Lesson Study Activities of the Meaning of the Ratio Wang Zhiyang, Liu Silu 69

The first National Primary School HPM Symposium Yue Zengcheng 73

A Summary of 2021 HPM Research Results..... 77

历史研究

比的历史

王智洋 刘思璐

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

随着越来越多的数学教育者意识到数学史的教育价值^[1,2], HPM 研究已成为数学教育研究的一个重要领域。其中, 教育取向的数学史研究是 HPM 领域的基础性研究, 是课例研究的第一步, 决定着课例的成败。

比的意义是六年级比和比例的起始内容, 承接除法、分数的内容, 也是学习比例、函数等相关知识的基础。《课程标准》(2011 年版) 要求: “在实际情境中理解比的含义, 并能解决简单问题”^[3]。在“比的意义”一课中, 学生不仅需要了解比的定义, 还应形成比的概念、理解比的意义。即教师需要让学生意识到“为什么要学习比”以及“什么是比”。

现行各版初中教材都是通过不同类型的生活情境来体现比的意义。为了选择更合适的教学情境, 厘清教学主线, 实施“发生教学法”, 教师需要深入了解“比的概念”的产生和发展过程。此外, 各版本教材上关于比的定义的叙述不尽相同, 且较为抽象, 给学生和教师的理解均造成了困难^[4]。

鉴于此, 本文拟通过历史文献(包括美英早期数学教科书)的考察, 追溯“比”的概念的起源和发展脉络, 为课堂教学提供启示。

2 比的概念

比的意义主要来自于四个方面, 包括描述和测量的需要、物物交换的需要、合成与分配的需要以及蕴藏于自然与美学之中。

2.1 描述和测量

生活中,各种各样的单位无处不在,我们常用“米”来描述大楼的高矮,用“斤、两”来称量物品的轻重……单位制在我们进行描述和测量时,发挥着潜移默化的作用。事实上,这其中蕴藏着比的意义,单位制其实是比的概念形成和发展的最终产物。

最初人们并没有单位的概念,对未知事物进行描述时,只能通过将其与已知事物进行比较来实现。美国数学史家史密斯(D. E. Smith, 1860-1944)提到,在人类历史早期产生了两个有关比的概念。古人在描述部落规模时,会指出一个部落的人数是另一个部落的两倍多;在形容皮制带子的长度时会指出一根皮制带子只有另一根的一半长^[5]。

随着人类文明的进步,为了建造生活中需要的住房、生产工具等,人们需要对材料的形状大小进行测量,自然想到用已有工具的形状大小进行测量,这样就得出了最初对长度、重量和容量的度量。苏联学者博尔加列夫斯基在《数学简史》中介绍了一种传统的长度测量方法——借助人体的部件^[6]。例如,为了测定长度,成年男子的步子被当作最常用的测量单位。如果测量一些体积不大的物体,人们会动用自己的手和脚,借助手指的厚度、大拇指关节的长度、手掌的宽度、大拇指与食指或者中指顶端之间的距离等,都是测量单位。利用身体部件不仅可以较为准确地实现测量目的,还十分便利,随时随地都可以进行。直到今天,我们依然在生活中频繁使用这种测量方法。

之后,由于社会的发展,人们对于度量单位的要求更为精确,于是整个度量单位制度逐渐形成。博尔加列夫斯基还介绍了古巴比伦建立的公制度量单位制度,其度量单位是 60。直到今天,依然有六十进制的痕迹存在,如划分时间和角度的方法,即 1 小时等于 60 分钟、1 分钟等于 60 秒、 1° 等于 60'^[6]。这样的度量单位制度能够准确地表达和书写任意的数量,满足商业、农业和建筑的需要,推动了巴比伦文明发展进程,也大大造福了后世。

除了古代的西方文明,在古老的中华大地上也建立起了度量衡单位制度,该制度产生于四、五千年前的原始社会末期。度量衡是测量长短、容积、轻重的统称,其中“度”指测量长短,“量”指测量容积,“衡”指测量轻重。众所周知,秦始皇统一中国后所做的重要的贡献之一便是统一度量衡。汉承秦制,《汉书·律历志》中有记载:“以一黍之广度之,一为一分”,意思是横排 100 粒黍的长度记为汉代一尺,约今天的 23 厘米^[7]。书中还详细记载了度量衡的单位、进位、量器的形状、材质等,即便在今天,仍不失其耀眼的光辉,在世界度量衡史上同样绝无仅有。

2.2 物物交换

经济的发展离不开生产和交易。在社会分工形成之后，自然产生了以物易物的需求，而在交换过程中双方为实现公平必须制定一个交换规则，这便产生了比的意义。

我国汉代数学典籍《九章算术》中的“粟米”一章中记载着以下问题^[8]：

若粟率 50，粝米率 30。

今有粟一斗，欲为粝米，问得几何？

答曰：为粝米六升。术曰：以粟求粝米，三之，五而一。

“粟米”章主要为了处理抵押交换的问题，其中用到的方法称为“今有术”，方法是将所有物的数量乘以所有物的率作为分子，将所求物的率作为分母，得到的分数即为所求物的数量，相当于现在教材中解比例问题的“知三求一”。“今有术”涉及比和比例的性质，也揭示了比的概念是在物物交换的过程中产生的。

随着人类文明的进步，货币逐渐产生并充当物物交换的媒介。18 世纪出版的英国数学教科书中提到，为了用一种商品交换另一种商品，或用商品交换货币，或用货币交换商品，使得交易的过程更加便利，于是产生了比的概念^[9]。人们可以在一个地方用一笔钱换一张支票，然后在另一个地方将支票兑换成对应的货币，即现在的“外汇兑换”。货币的产生和发展不仅让交易的范围扩大，也极大地增加了交易的便利性和安全性，而本质上得益于比的概念。

2.3 合成与分配

中国早在 3000 多年前的商朝，青铜工艺就已经非常发达，公元前 6 世纪左右煅铸的越王勾践的青铜剑就是一把合金宝剑，出土后仍然锋利无比。合金产物的硬度和耐用性都高于组成金属，如今已广泛应用在各个领域，其合成的原理也离不开“比”。

《计算之书》第十一章——论合金钱币的配制中提到：“当钱币由银和铜混合配制而成时，无论面值多少，它都被称作合金钱币。所谓‘含银 2 盎司的钱币’意指每磅钱币中含有 2 盎司的银”。书中介绍了配制合金钱币的三种方法，第一种方法是用一定量的银或铜合铸而成；第二种是由任意给定的钱币加入银或铜合铸而成；第三种是仅由给定的若干种钱币合铸而成。关于以上三种方法，书中共展示了七类不同的问题，其中一类如下^[10]：

第一类（由给定量的银或铜铸成钱币）

某人有 7 磅银，欲铸含银 2 盎司的钱币，他想知道需要加入多少盎司的铜。

为了解决该问题，所用到的方法被称为“商议法（method of negotiations）”，具体过程是将每磅含银量和含铜量写在第一行，将所有银的数量写在含银量下方，如图 1。然后将对角位置 7



图 1 《计算之书》中的商议法

和 10 相乘，除以 2，商为 35 磅，即为所加铜的量。

《论语·季氏》中有云：“不患寡而患不均”。资源和利益的分配是自古以来始终困扰人们的难题。从数学的角度出发，利用除法运算可以进行平均分配，但有时平均分配未必公平。《九章算术》第三卷——衰分中有这样一个问题：“已知羊吃的食物是马的一半，马吃的食物是牛的一半。问：总共 5 斗粟如何在这三种牲口间分配？”^[8]考虑到羊、马、牛三种动物的差异，平均分配显然不合情理，书中应用了“衰分术”解决这个问题，将每项之和作为分母，每一项乘以分配的总数作为分子，所得的分数即为分得数。本题中羊、马和牛的食量分别是 1、2、4，各项加起来是 7 作为分母，将每一项乘以 5 作为分子，故分给羊、马和牛的粟以斗为单位分别是 $\frac{5}{7}$ ， $\frac{10}{7}$ 和 $\frac{20}{7}$ 。

2.4 自然与美学

比的意义除了从生活需求产生，还蕴藏于奇妙和谐的自然界之中。古希腊的毕达哥拉斯学派在悦耳的音乐中，觉察了“和声”，并注意到在用三根弦发音时，如果这三根弦的长度之比为数 3、4、6，就得到了和声的谐音。在许多其它场合，他们也发现了同样的数量关系。例如，立方体的面数、顶点数、棱数的比，分别等于数 6、8、12，化简比也是 3、4、6。在研究用正多边形覆盖平面的问题时，毕达哥拉斯学派找到了这种覆盖只有图 2 中的三种情况。注意到这三种情况的正多边形的边数，分别为 3、4、6。毕达哥拉斯学派根据类似的观察更加确信，整个宇

宙的现象完全依附于某种数值的相互关系，也就是存在着“宇宙的和諧”^[6]。

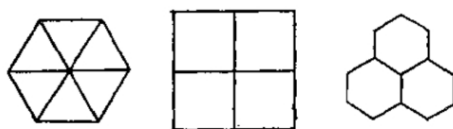


图 2 能覆盖平面的三种正多边形

此外，毕达哥拉斯学派还发现了迷人的“黄金比”，他们观察到正五角星中有不少黄金比，故视其为神物，还作为学派的徽章。“黄金比”三个字的起源是意大利著名科学家、艺术家达·芬奇冠以的美称，他在画作中也经常使用黄金比，留下了像《蒙娜丽莎的微笑》等诸多旷古烁今的艺术作品。十九世纪末，德国心理学家费希纳做了一个实验，他制作了十个长宽之比不同的矩形，让 592 位参观者在其中选择最美的，结果 565 人认为长宽之比为黄金比的矩形是“最美矩形”，可见黄金比是具有普遍审美价值的^[11]。黄金比揭示了一种和谐的线段比例，因而在古今中外大量的艺术、建筑作品和日常生活中都被广泛应用。

3 比的定义

“比”就像空气，无处不在，但想要具体说出它的定义确是难事。翻开国内教科书，表 1 给出了关于比的定义的几种叙述方式。

表 1 教科书中关于比的定义叙述

教科书版本	定义
沪教版	a, b 是两个数或两个同类的量，为了把 b 和 a 相比较，将 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比 (ratio)。记作 $a:b$ ，或写成 $\frac{a}{b}$ ，其中 $b \neq 0$ 。 a 叫做比的前项， b 叫做比的后项。前项 a 除以后项 b 所得的商叫做比值。
人教版	两个数的比表示两个数相除，“:”是比号。 在两个数的比中，比号前面的数叫做比的前项，比号后面的数叫做比的后项。 比的前项除以后项所得的商，叫做比值。比值通常用分数表示，也可以用小数或整数表示。
苏科版	两个数相除又可以叫作两个数的比。“:”是比号，比号前面的数叫作比的前

项，比号后面的数叫作比的后项。比的前项除以后项所得的商叫作比值。

北师大版 两个数相除，又叫作这两个数的比。如， $6 \div 4$ 写作 $6:4$ 。 6 是这个比的前项， 4 是这个比的后项， 1.5 是 $6:4$ 的比值。

从表 1 可见，人教版、北师大版、苏科版和沪教版中比的定义均基于除法运算，揭示了比和除法之间的统一性。苏科版和北师大版给出的“两个数相除，又叫作两个数的比”，意指比和除法是完全一样的，只是名称不同。人教版给出的“两个数的比表示两个数相除”，透露出比的范围相较于除法更宽泛。关于比、除法、分数三者之间差异性的模糊，容易使学生在学习时产生的困惑，不理解学习比的必要性^[4]。

另外，除了四版教材都规定比的对象是两个“数”，沪教版教材还补充了两个同类“量”。虽然其它三版教材并没有给出“量”之比的定义，但是人教版与苏科版在课堂引入时采用了“路程与时间之比”的情景，这并不满足沪教版教材中给出的定义。

比与除法、分数有什么区别？两个“量”的比为什么要强调同类量？为解决这两个问题，笔者翻阅了《几何原本》和大量西方早期教科书。

3.1 定义发展

3.1.1 欧氏定义

欧几里得在《几何原本》第五卷中明确给出了比的定义^[12]：

定义 1 当一个较小的量能量尽一个较大的量时，我们把较小量叫做较大量的一部分；

定义 2 当一个较大的量能被较小的量量尽时，我们把较大的量叫做较小的量的倍量；

定义 3 两个同类量彼此之间的一种大小关系叫做比。

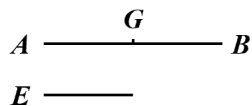


图 3 《几何原本》第五卷命题 1 图

以《几何原本》第五卷命题 1 中的一张图（图 3）为例来理解这个定义， E 为较小量， AB 为较大量，则 E 为 AB 的部分， AB 为 E 的倍量， AB 与 E 的大小关系为比。欧几里得给出比的定义是两个“同类量”之间的一种“大小关系”，而这种大小关系特指倍数关系。“量尽”一词，不仅体现了比的“描述和测量”意义，也从“形”的角度帮助我们理解比的概念。有趣的是，

《几何原本》中的许多命题的图都是类似于图 3 这种线段比。

3.1.2 比较定义

19 世纪的英美教科书基本沿用了《几何原本》中的定义，即“比是两个同类量之间的大小关系”，但叙述更为具体，内容也更加丰富。如 J. Day 在《代数引论》(1841) 中写道^[13]：

我们经常会把已知的数量与不等于它的其他数量进行比较。那么如何进行比较？自然就产生了两种比较方式，可以考虑两个数量中一个比另一个多了多少？或者，一个数量是另一个的多少倍？在寻找答案的过程中，我们发现了两个数量的比，分别为“算术比 (arithmetical ratio)”和“几何比 (geometrical ratio)”。

比是指一个量与另一个量的大小关系。首先这两个量要是相同类型的，否则无法判断。例如，把英尺（长度单位）和磅（重量单位）放在一起比较是荒谬的。

“算术比”表示的比较，旨在发现一个量比另一个量多了多少，即他们的差，最早用“..”表示。 a 与 b 的算术比，记为 $a..b$ 。例如， $6..3=3$ 。既然两个量的算术比即两个量的差，而“差”似乎是更好的表达方式。因此，“算术比”逐渐被“差”代替，记号“..”也被“—”所代替。

“几何比”表示的比较，旨在发现一个量是另一个量的多少倍，简称为比。 a 与 b 的比，记为 $a:b$ 。例如， $6:3=2$ 。

书中指出，比是两个同类量之间大小关系的比较，并交代了两种比较方式——“算术比”和“几何比”，从感知的角度形象地给出了比的定义。

3.1.3 形式定义

比的定义叙述在 20 世纪英美教科书中发生了较大变化，主要有下面两种类型：

● 除法定义

两个数的比是第一个数除以第二个数，通常用 $a:b$ 表示，由于比实际上是除法，所以也写成 $\frac{a}{b}$ 。显然，两个不同性质的数量之间没有比，然而在同一种类的两个单位之间有比，例如 1 英尺：1 英寸=12。^[14]

● 分数定义

两个数 a 和 b 的比是分数 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。每两个同类量的比是这些量的数值之比。^[15]

以上两种定义的对象都是两个“数”的比，在除法定义中隐含了两个量的比应为同类量。其中，除法定义用两个数的除法运算来定义比，与如今国内的教科书给出的定义一致；分数定义则从运算结果来定义比，两种定义方法都表达了比的形式，揭示了比与除法、分数的紧密联系。

3.2 厘清源流

从比的定义的发展过程可知，欧氏定义和比较定义表明，比的本源是“比较”，是一种“大小关系”，包含了“算术比”与“几何比”两种关系。随着定义的发展，算术比的概念逐渐被“差”所代替，几何比便演化成了今天教科书上的“比”，发展过程体现了数学是动态发展的、数学追求精确性与严谨性等科学精神。除法定义和分数定义只是“流”，比的含义包含了除法和分数，当我们关注结果，即倍数是多少时，可以通过除法进行运算，得到的比值能用分数表示。但除法、分数只是比的形式和现象，关系才是其本质，比可以推广到三个、四个乃至更多个数量之间的倍数关系，还可以扩展为两个变量之间的函数关系，这些含义较之除法和分数要深刻得多^[16]。

至于“量”之比，三种定义均要求两个量是“同类量”。通俗来说“量=数·单位”^[17]，“量”之比相对形象具体，更容易被感知，而“数”之比较为抽象。从比的概念产生中，我们可以发现比来源于生活，即产生于数学外部，所以比较两个量的大小关系是自然的，那么同种类型的量是进行比较的前提。随着数学的发展，正如毕达哥拉斯学派提出的“万物皆数”，两个量的比逐渐抽象成了两个数的比，于是两个“非同类量”的比也就能理解了。但与同类量之比不同，非同类量的比值一定有量纲。因此，同类量之比是比的概念之“源”，不同类量之比是“流”，数之比起着“纽带”的作用，从同类量之比到不同类量之比的发展满足从数学外部到数学内部再到数学外部顺序，体现了数学来源于生活又应用于生活。

4 教学启示

从概念产生的角度，比的意义体现在描述和测量、物物交换、合成与分配、自然与美学四个方面，不仅源自于先人们对物质生活的需求，还有对精神世界的熏陶。通过对教科书中比的定义考察，本文厘清了比的定义的“源”与“流”。“万物皆数”指世间万物都可表示成两数之

比，而无理数的发现却让其存在漏洞，但倘若将“万物皆数”的口号赋予新的含义，改成“万物皆比”，便能将比的意义体现得淋漓尽致了。

比的概念的源与流为今日教学提供了诸多启示。

其一，创设合适的课堂教学情境。阅读古今中外关于比的概念的史料，帮助一线教师积累丰富的素材，同时能够对多种素材进行分类或加工，可以围绕一个主题进行教学设计，如“描述和测量”，也可以展示多个不同种类的情境，但需要对它们进行归类和总结。

其二，阐明比的定义的源和流。学生的认知往往具有历史相似性^[18]，若在情境引入时直接采用非同类量的例子，是不符合历史发展规律的，可能会增加学生的困惑。先给出“同类量之比”的定义，再抽象成“数之比”，最后引出“非同类量之比”，这是符合历史发展顺序的教学思路。

其三，从广度和深度两方面揭示比的意义^[19]。横向来看，生活中到处都是比，通过情境创设可以让学生感受到数学与生活息息相关。纵向来看，比有着除法、分数所不具备的深刻意义和思想，可以为后面比例、三连比、函数的学习做铺垫。

其四，渗透数学文化，达成德育之效。通过东西方不同文化背景下比的产生与发展，可让学生感受到古今中外数学文化的多元性，激发其学习兴趣，树立动态的数学观。同时分配、交换、建筑等方面的应用，可让学生感受到数学之于公平要求、理性精神和规则意识等品质的重要性，同时数学中蕴含着对美的刻画。

参考文献

- [1] Wang, X. Q., Qi, C. Y., Wang, K. *A Categorization model for educational values of the history of mathematics*[J]. *Science & Education*, 2017, 26(7-9): 1029-1052.
- [2] 汪晓勤,邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. *数学通报*, 2020, 59(03): 7-12+19.
- [3] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012: 22.
- [4] 史宁中,娜仁格日乐. 小学数学教科书中的比及其教学[J]. *数学教育学报*, 2017, 26(02): 1-5.

- [5] Smith, D. E. *History of Mathematics*[M]. New York: Ginn & Company, 1958: 477-478.
- [6] 博尔加列夫斯基(潘德松, 沈金钊译). 数学简史[M]. 上海: 知识出版社, 1984: 10-15+34-36.
- [7] 丘光明. 度量衡的经典著作《汉书·律历志》[J]. 品牌与标准化, 2020(01): 62-65.
- [8] 郭书春. 汇教九章算术[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998: 68-81.
- [9] Leybourn, W. *Arithmetick, Vulgar, Decimal, Instrumental, Algebraical*[M]. London: Matthews & Churchill, 1700: 170.
- [10] 斐波那契(西格尔, 纪志刚等译). 计算之书[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 247-248.
- [11] 徐传胜. 黄金比趣说[J]. 数学教师, 1996(09): 28-30.
- [12] 欧几里得(兰纪正, 朱恩宽译). 几何原本[M]. 南京: 译林出版社, 2014: 119-122.
- [13] Day, J. *An Introduction to Algebra*[M]. New Haven: Durrie & Peck, 1841: 174-175.
- [14] Edgerton, E. I., Carpenter, P. A. *Intermediate Algebra for College Students*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1957: 353-354.
- [15] Feinstein, I. K., Murphy, K. H. *College Algebra*[M]. Ames: Littlefield & Adams, 1957: 171.
- [16] 张奠宙. 返璞归真 正本清源——“比”不能等同于除法[J]. 教学月刊小学版(数学), 2015(03): 4-8+1.
- [17] 蒋鑫源, 郜舒竹. “数”与“量”的意义辨析[J]. 教学月刊小学版(数学), 2021(09): 4-6+14.
- [18] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 4-8.
- [19] 孙建君, 肖海, 林承娟. 追本求源抓本质 厘清概念寻发展——“比的认识”教学实录与评析[J]. 小学数学教育, 2020(19): 56-57.

美英早期教科书中的椭圆面积

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

《普通高中数学课程标准》(2017 年版)指出,数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展;还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义,以及与数学相关的人文活动^[1]。数学文化作为人类基本的文化活动之一、作为数学教育的有机组成部分,教师有必要在教学中渗透数学方法、展示数学思想、实施数学学科德育,最终落实立德树人根本任务。

距今 2000 多年前,古希腊数学家最先开始研究圆锥曲线,并获得了大量的成果。椭圆作为圆锥曲线中的重要课题,除了要掌握其基本定义,我们还需要了解与之相关的性质。历史上,和圆的情形类似,椭圆面积的推导方法同样也是丰富多彩的。从古希腊时期,欧多克索斯(Eudoxus)利用穷竭法确定曲边形面积和曲面体体积^[2],到 17 世纪数学家开始研究面积、体积等微积分问题,椭圆面积公式的推导方法在不断开阔着人们的视野。

在数学教学中,学生不仅要掌握数学定理、公式,还应特别重视定理、公式的来龙去脉;不仅要学会运用公式解题,还应特别重视其背后所蕴含的思想方法;不仅应当重视显性的数学知识,还应特别重视隐性的数学素养。

HPM 视角下的数学教学回溯历史,观照现实,架起历史与现实之间的桥梁。翻开历史的画卷,古今中外,上下数千年,无数先哲所留下的精彩纷呈的数学思想方法^[3],在 HPM 的教学设计中被照进课堂,成为了学生在课堂中进行思维碰撞的宝贵素材,也成为了拓宽学生思维、激发学生创新意识、促进教师专业发展的宝贵财富。

19-20 世纪美英解析几何教科书中所呈现的椭圆面积公式的各种证明方法,既是对历史的继承和发展,同时又有着教育的形态,但迄今我们对此知之甚少。本文拟聚焦椭圆面积,对美英早期解析几何教科书进行考察,以期为今日教学提供思想养料。

2 早期教科书的选取

本文选取 1831-1970 年间出版的 72 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

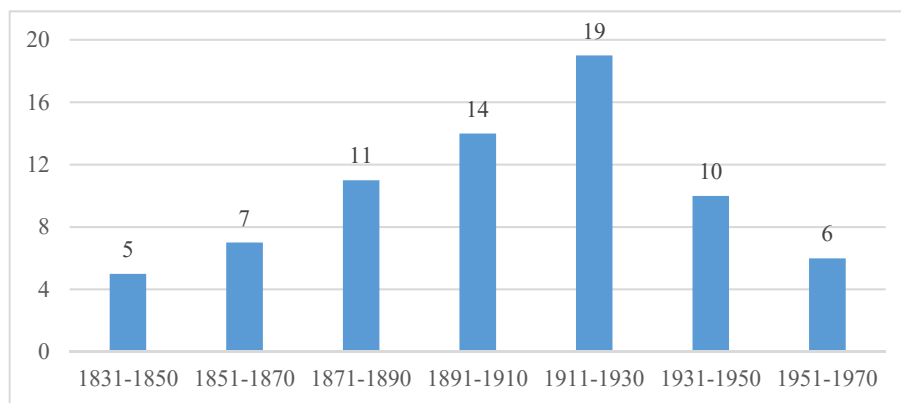


图 1 72 种美英早期数学教科书的出版时间分布

有关椭圆面积的内容主要出现在“椭圆”“椭圆和双曲线”“圆锥曲线”“积分的应用”“微分、不定积分”等章节。微分和积分作为高等数学的重点内容之一，19 世纪的教科书编者大多在解析几何教科书中没有涉及，因而椭圆面积的推导大多放在“椭圆”一章，而在 20 世纪的教科书中可以看见微积分的身影，微积分中的部分内容逐渐被教科书编者加入到解析几何教科书中，此时椭圆面积的计算主要归于“积分的应用”一章。

3 椭圆面积公式的推导

在 38 种给出椭圆面积公式的解析几何教科书中，除 2 种教科书直接给出椭圆面积公式，其余 36 种教科书中的椭圆面积公式的推导方法可以分为极限法、积分法和投影法三类。

3.1 极限法

“以直代曲”是微积分的重要思想，通过“分割、代替、求和、取极限”这四个步骤可以求出曲线或曲面所围成的面积或体积。在计算椭圆面积的过程中，教科书编者通常将椭圆细分成若干个小矩形或小梯形进行累和。

3.1.1 矩形划分

有 12 种教科书采用矩形划分来逼近椭圆的面积。首先，教科书编者分别以椭圆的长轴和短轴为直径作椭圆的大辅助圆（major auxiliary circle）和小辅助圆（minor auxiliary circle），于是证明在横坐标相同的情况下，椭圆和大辅助圆上不同两点的纵坐标的比值是一个定值，即椭圆的压缩变换定义。

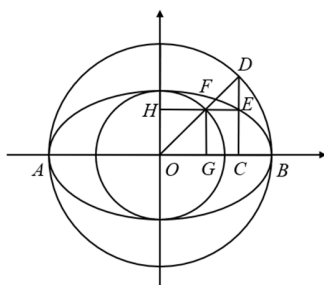


图 2 椭圆及其辅助圆

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ 、大辅助圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 及小辅助圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 中，过椭圆上一点 E （不与点 A 、 B 重合）作 $CD \perp AB$ 及 $HE \parallel AB$ ， CD 和 HE 分别交大辅助圆和小辅助圆于点 D 和 F ，作 $FG \perp AB$ ，垂足为点 G （图 2）。记点 E 、 D 的纵坐标分别为 y_E 、 y_D ，表 1 给出了证明 $\frac{y_E}{y_D} = \frac{b}{a}$ 的不同方法。

表 1 证明同一横坐标下椭圆和大辅助圆上不同两点的纵坐标的比值相同

编号	证明方法	教科书
1	设点 E 的横坐标为 x，则点 E、D 的纵坐标分别为 $y_E = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$、$y_D = \sqrt{a^2 - x^2}$，于是 $\frac{y_E}{y_D} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}$。 [4]	Wentworth (1886)
2	将椭圆方程和大辅助圆方程相减，得到 $\frac{y_E^2}{b^2} - \frac{y_D^2}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{y_E}{y_D} = \frac{b}{a}$。 [5]	Runkle (1888)
3	设点 $E(x, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})$，则 $D(x, \sqrt{a^2 - x^2})$，$F(\frac{b}{a}x, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})$，故 $k_{OF} = k_{OD}$，于是 $\frac{CE}{CD} = \frac{OF}{OD} = \frac{b}{a}$。 [6]	Tanner & Allen (1898)

利用参数方程, 设 $E(a \cos \theta, b \sin \theta)$, 于是点 $D(a \cos \theta, a \sin \theta)$, 则 Riggs

$$4 \quad \frac{y_E}{y_D} = \frac{b \sin \theta}{a \sin \theta} = \frac{b}{a}. \quad [7] \quad (1911)$$

在此基础上, Wentworth (1886) 将椭圆的长半轴 OA 任意 n 等分, 并过相邻两点 M, N 作 $MQ \perp AB, NS \perp AB$, 直线 MQ 分别交椭圆和大辅助圆于点 P, Q , 过点 P, Q 分别作 AB 的平行线 PR, QS (图 3)。因为

$$\frac{S_{\square MPRN}}{S_{\square MQSN}} = \frac{MP \cdot MN}{MQ \cdot MN} = \frac{MP}{MQ} = \frac{b}{a},$$

由比例的等比性质可知

$$\frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n S'_i} = \frac{b}{a},$$

其中

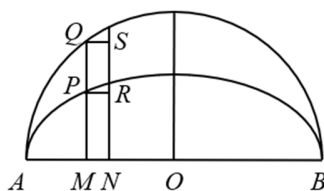


图 3 矩形划分推导椭圆面积公式

S_i, S'_i 分别表示一个象限内椭圆和大辅助圆中对应矩形的面积。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$\sum_{i=1}^n S_i \rightarrow S, \sum_{i=1}^n S'_i \rightarrow S'$, 其中 S, S' 分别表示一个象限内椭圆和大辅助圆的面积, 所以 $\frac{S}{S'} = \frac{b}{a}$ 。由

$S' = \frac{1}{4} \pi a^2$, 故

$$S = \frac{1}{4} \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{4} \pi ab,$$

于是 $S_{\text{椭圆}} = \pi ab$ 。[4]

3.1.2 梯形划分

在数值计算中, 为了计算出更加准确的定积分, 往往会采用梯形代替矩形计算定积分的近似值。有 8 种教科书采用了这一逼近方法, 其最早出现在美国数学家戴维斯 (C. Davies, 1798-

1876) 于 1836 年出版的《解析几何基础》一书中^[8]。

在给定椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ 中内接任意多边形 $BD_1D_2D_3D_4D_5A$, 过点 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 、 D_5 分别作椭圆长轴的垂线 C_1D_1 、 C_2D_2 、 C_3D_3 、 C_4D_4 、 C_5D_5 , 交大辅助圆于点 E_1 、 E_2 、 E_3 、 E_4 、 E_5 , 于是多边形 $BE_1E_2E_3E_4E_5A$ 是大辅助圆的内接多边形 (图 4)。

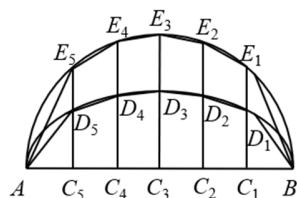


图 4 梯形划分推导椭圆面积公式

令 $D_1(x_1, y_1), D_2(x_2, y_2), D_3(x_3, y_3), \dots$ 及 $E_1(x_1, y'_1), E_2(x_2, y'_2), E_3(x_3, y'_3), \dots$, 由梯形面积公式计算

可得

$$S_{\text{梯形}D_1C_1C_2D_2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2), S_{\text{梯形}E_1C_1C_2E_2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y'_1 + y'_2),$$

于是

$$\frac{S_{\text{梯形}D_1C_1C_2D_2}}{S_{\text{梯形}E_1C_1C_2E_2}} = \frac{y_1 + y_2}{y'_1 + y'_2}.$$

又因为 $\frac{y_1}{y'_1} = \frac{a}{b}, \frac{y_2}{y'_2} = \frac{a}{b}$, 所以

$$\frac{S_{\text{梯形}D_1C_1C_2D_2}}{S_{\text{梯形}E_1C_1C_2E_2}} = \frac{a}{b}.$$

同理, 记 $\sum_{i=1}^n T_i, \sum_{i=1}^n T'_i$ 分别表示椭圆和大辅助圆中所有梯形的面积之和, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^n T_i \rightarrow T, \sum_{i=1}^n T'_i \rightarrow T', \text{ 其中 } T, T' \text{ 分别表示椭圆和大辅助圆的面积, 所以 } \frac{T}{T'} = \frac{b}{a}, \text{ 故}$$

$$T = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab.$$

3.2 积分法

面积计算是微积分的主要议题之一, 而定积分成为了解决曲边形面积问题中, 最常用且最犀利的工具。有 8 种教科书采用定积分求得椭圆的面积。Lardner (1831) 利用椭圆的压缩变换

定义^[9], 记 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $y_1 = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, 于是 $y = \frac{b}{a} y_1$ 。选取横坐标 x 为积分变量, 计算可得

$$S = \int_{-a}^a y dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^a y_1 dx。$$

因为 $\int_{-a}^a y_1 dx$ 表示大辅助圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的面积, 所以

$$S = \frac{b}{a} \int_{-a}^a y_1 dx = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab。$$

Woods (1907) 取椭圆上任意一点 $P(x, y)$, 作 $MP \perp OM$, 延长 MP 交大辅助圆于点 Q , 记 $Q(x, y')$ 。联结 OQ , 记 $\angle QOM = \varphi$, 则 $P(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ 及 $Q(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ (图 5)。记椭圆的面积

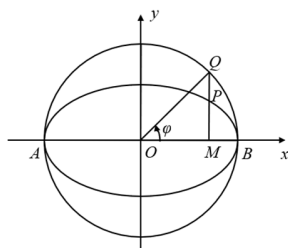


图 5 积分法推导椭圆面积公式

为 S , 因为

$$y = \frac{dS}{dx} = \frac{\frac{dS}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dS}{d\varphi}}{-a \sin \varphi},$$

则

$$\frac{dS}{d\varphi} = -ab \sin^2 \varphi = ab \cdot \frac{\cos 2\varphi - 1}{2},$$

于是

$$S = ab \left(\frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \right) + C。$$

令 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $A = 0$, 则 $C = \frac{\pi}{4} ab$, 故

$$S = ab \left(\frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{\pi}{4} \right)。$$

因此, 当 $\varphi = 0$ 时, 椭圆面积 $S = 4S(0) = \pi ab$ 。^[10]

此后, Woods (1917) 运用微积分基本定理^[11], 计算得到

$$S = 4 \int_0^a y dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{2b}{a} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \pi ab$$

Hart (1963) 则利用参数方程求椭圆面积^[12], 即

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin \theta d(a \cos \theta) = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \pi ab$$

3.3 投影法

圆是一种特殊的椭圆, 其长轴和短轴相等。圆投影之后长轴不变、短轴变短, 于是就变成了椭圆。因此, 利用投影面积计算公式, 可以推导出椭圆的面积。

Briot (1896) 利用三角形给出一个平面在任意平面上的投影面积^[13]。若 $\triangle ABC$ 有一边 AB 平行于投影面, 过点 C 作 $CD \perp$ 投影面, 垂足为点 D , 联结 AD 、 BD (图 6(a))。过点 C 作 $CE \perp AB$, 于是 $DE \perp AB$, 则 $\angle CED$ 是二面角 $C-AB-D$ 的平面角, 记 $\angle CED = \varphi$ 。因为 $ED = CE \cdot \cos \varphi$, 所以 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE \cdot \cos \varphi \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi$ 。

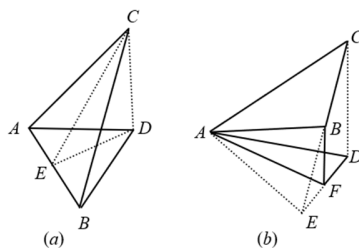


图 6 三角形投影面积

若 $\triangle ABC$ 没有一边平行于投影面, 延伸平面 ABC 交投影面于直线 AE , CB 的延长线交投影面于点 E (图 6(b))。因为 $\triangle ABE$ 的投影为 $\triangle AFE$, $\triangle ACE$ 的投影为 $\triangle ADE$, 记面 ACE 和面 ADE 的夹角为 φ , 则 $S_{\triangle AFE} = S_{\triangle ABE} \cdot \cos \varphi$, $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ACE} \cdot \cos \varphi$, 两边相减得 $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi$ 。

Fine & Thompson (1914) 则以长方形为例给出投影面积公式 (图 7)^[14]。

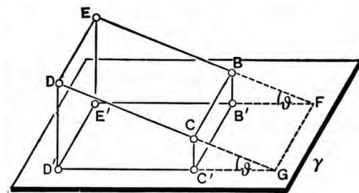


图 7 矩形投影面积

因为曲边形的面积可以用其内接多边形或长方形的面积逼近, 所以任意平面 A 在面 T 上的投影面积 S 等于平面 A 的面积 S' 乘以两平面夹角的余弦值, 即 $S = S' \cos \varphi$ 。由此容易算出椭圆

的面积, 因为圆面积 $S' = \pi a^2$, $\cos \varphi = \frac{b}{a}$, 所以椭圆面积 $S = \pi ab$ 。[13]

4 椭圆 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ 的面积

当椭圆不是以标准方程的形式给出时, 往往需要对椭圆进行平移或旋转, 即进行坐标变换, 从而方便的找出椭圆的各种性质, 在求椭圆面积时依然如此。对于以原点为中心旋转过的椭圆 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$, Gibson(1919)设旋转的角度为 θ , 令 $x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta$, $y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta$, 代入方程可得 $a'\xi^2 + 2h'\xi\eta + b'\eta^2 = 1$, 其中

$$a' = a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta$$

$$h' = (b-a) \sin \theta \cos \theta + h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$b' = a \sin^2 \theta - 2h \sin \theta \cos \theta + b \cos^2 \theta$$

令 $h' = 0$, 则 $\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$, 此时椭圆 $a'\xi^2 + b'\eta^2 = 1$ 的两半轴长分别为 $\frac{1}{\sqrt{a'}}$, $\frac{1}{\sqrt{b'}}$, 于是

$S = \frac{\pi}{\sqrt{a'b'}}$ 。因为 $a'b' = a'b - h'^2 = ab - h^2$, 所以 $S = \frac{\pi}{\sqrt{ab - h^2}}$ 。[15]

5 推导椭圆面积公式方法的演变

以 20 年为一个时间段, 图 8 给出了推导椭圆面积公式方法的时间分布情况。可以看出, 推

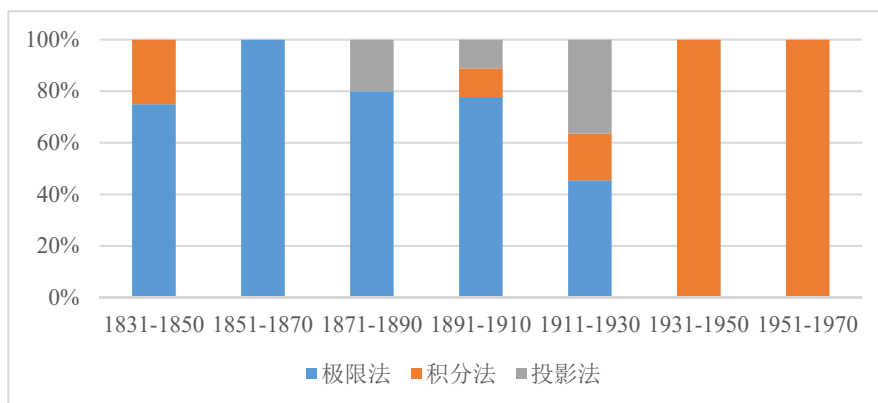


图 8 推导椭圆面积公式方法的时间分布

导方法呈现出从多元走向单一的趋势。19 世纪, 极限法是推导椭圆面积公式的主流方法, 在这

期间只有少量教科书涉及另两种方法。从 20 世纪开始,积分法逐渐出现在越来越多的解析几何教科书中,并最终成为教科书编者所青睐的一种方法。

早在古希腊时期,因为当时的哲学家和数学家们未能接受“实无穷”概念,于是内接多边形于曲边形并利用穷竭法来计算其面积是这一时期的主流思想。随着微积分的创立与发展,极限方法率先被教科书编者所采用,可以说现在所流行的内接矩形或梯形去逼近椭圆面积的做法也继承了穷竭法的核心思想,这一做法使得椭圆面积公式的推导得到进一步的简化。随着黎曼和达布分别于 1854 年和 1875 年对有界函数建立严密的积分理论,19 世纪后半叶,戴德金等人建立严格的实数理论,微积分的理论和方法有了一个牢固的基础,基本形成了一个完整的体系,因而使用定积分来计算椭圆面积的方法被越来越多的教科书编者所接受,并被编入解析几何教科书中。

与此同时,在 72 种教科书中,19 世纪的教科书大多不涉及微积分的内容,因而椭圆面积多利用极限或投影的方法进行推导。随着教科书的不断完善,微分和积分的部分内容被陆续加入,积分法的使用也变得水到渠成。微积分作为近代数学的重要内容,是近代数学进一步发展和拓展的重要基础,在解析几何教科书中融入微分和积分等知识,也是理所应当的。

6 结论与启示

以上我们看到,除了我们所熟知的运用定积分计算椭圆面积,极限法和投影法也是推导椭圆面积的一大利器,几种方法中均蕴含着丰富的数学思想。可以说,历史上出现的各种椭圆面积公式的推导方法,为今日椭圆面积的教学提供了诸多启示。

第一,析微察异,创新课堂引入方式。在传统教学模式中,讲授式教学模式是教师在课堂中所普遍采用的。新课程改革以来,以学生为主体、教师为主导的人性化教育理念成为改变传统教学方式的重要指导思想。因此,教师可以从知识的引入方式入手来创新自身的教学设计,实践法和发现法则是教师可以尝试使用的两种引入策略。例如,在椭圆面积的教学设计中,教师需要搜集与椭圆面积相关的、有趣味的模型,例如卫星轨道等,又或者去发掘椭圆面积背后的生活背景,例如计算一片橡皮树叶的面积等,让学生感受到数学公式与实际生活息息相关。因此,教师是要努力成为生活的细心观察者,善于发现生活中万事万物与数学之间的联系,这样才有可能设计出一节独具匠心、精彩纷呈的优秀课例。

第二，触类旁通，加强知识普遍联系。任何数学知识都不是孤立存在的，前后知识之间存在着联系的密切，因此教师需要引导学生建构知识结构体系，从整体上把握某一知识点。在椭圆面积的教学，教师可以引导学生将极限法、积分法与投影法的本质属性进行比较，不难发现积分法中蕴含极限思想，而投影法也是一种图形变换。使学生了解到三种方法之间的逻辑关系，并将其一起纳入椭圆面积这一知识体系中，形成一个整体。通过建立知识链或知识网络（图 9），使学生深入理解数学知识的本质，从而使所学知识类化。

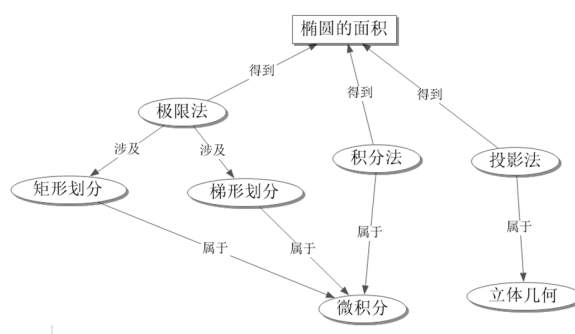


图 9 椭圆面积的概念图

第三，新益求新，培养逻辑思维能力。教材是公式学习的有效载体，但是只掌握书上的一种推导方法是远远不够的。椭圆面积公式的推导中蕴含着丰富的数学思想方法，例如从圆面积到椭圆面积，体现类比思想；以直代曲计算曲边形面积，体现化归思想。因此，在教学中，教师应鼓励学生勇于探索不同的公式证明方式，也可以通过小组讨论的形式，给予学生探索的时间和空间，学生之间集思广益，不断开阔自身的思维，不仅能够让学生从中获得成功的喜悦与成就感，提高数学学习的兴趣，还有助于培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学素养。

第四，立德树人，转变数学学习思想。数学是一门不断发展中的学科、是一门不断与时俱进的学科，即使是前人已经解决过的问题，数学家们依然会以此为抓手，尝试改进解决方案，找寻最优的解决路径。因此，教师应培养学生动态的数学观，让学生感受到数学家在数学探索中的耐心和毅力、感受到数学背后的理性精神，最终达成立德树人根本任务。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教

育出版社, 2017: 10.

- [2] M • 克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 58.
- [3] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M] 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 23.
- [4] Wentworth, G. A. *Elements of Analytic Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1886: 150-176.
- [5] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 236-237.
- [6] Tanner, J. H., Allen, J. *An Elementary Course in Analytic Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1898: 242-244.
- [7] Riggs, N. C. *Analytic Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 131-132.
- [8] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836: 138-139.
- [9] Lardner, D. A. *Treatise on Algebraic Geometry* [M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 181-182.
- [10] Woods, F. S., Bailey, F. H. *A course in mathematics: for students in engineering and applied science* [M]. Boston: Ginn & company, 1907: 303-305.
- [11] Woods, F. S., Bailey, F. H. *Analytic Geometry and Calculus* [M]. Boston: Ginn & Company, 1917: 260-263.
- [12] Hart, W. R. *Analytic Geometry and Calculus* [M]. Boston: Heath, 1963: 345-346.
- [13] Briot, C. *Briot and Bouquet's Elements of Analytical Geometry of Two Dimensions* [M]. Chicago: Werner School Book Company, 1896: 199-200.
- [14] Fine, H. B., Thompson, H. D. *Coordinate Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1914: 90-93.
- [15] Gibson, G. A., Pinkerton, P. *Elements of Analytical Geometry* [M]. London: Macmillan & Co., 1919: 421-426.

美英早期解析几何教科书中的抛物线定义与方程

钱 秦

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

在数学新课程理念的倡导下, 我国的数学教育正不断地进行数学文化和数学史融入数学教育的探索和实践, 也取得了一定的成效。目前, 在圆锥曲线一章, HPM 视角下椭圆的课例最为丰富, 也有不少学者进行了双曲线的尝试。但融入数学史的抛物线的课例屈指可数, 笔者在知网上仅搜索到了 4 篇: 李昌从数学史中寻找启示, 利用光学性质自然揭示抛物线的焦点准线并建构解析定义, 为使学生厘清抛物线的来龙去脉^[1]; 徐超通过重构数学史的方式来设计教学环节, 帮助学生突破焦点—准线定义及其由来^[2]; 张佳丽在其硕士毕业论文中分析了圆锥曲线的历史, 再采用重构式给出 HPM 视角下的椭圆、双曲线、抛物线及其标准方程的教学设计^[3]; 陆琳琰采用发生教学法, 从数学史、知识逻辑、学生的认知需求和生活实际出发, 让学生在自主探索中将知识“再创造”出来, 使抛物线知识自然发生^[4]。但这些课例所用到的历史素材十分有限。

国内现行高中数学教科书大多采用抛物线的第二定义(焦点—准线定义), 且人教 A 版、沪教版、苏教版和北师大版教科书均在第二定义的基础下, 以顶点为原点建立平面直角坐标系推导抛物线方程。在阅读材料中, 沪教版教科书探究了二次函数的图像为什么是抛物线, 人教 A 版和苏教版介绍了抛物线的光学性质, 北师大版教材则呈现了圆锥曲线的截线定义。四版教科书中关于抛物线的数学史元素都较少。

巧妇难为无米之炊, 史料的匮乏是阻挡 HPM 视角下课例开发的最大障碍。早期教科书既体现了特定历史时期教育理论或理念, 也蕴含着编写者的智慧, 为今日教学提供了丰富的素材和思想启迪。鉴于此, 本文从有关数据库选取 1820-1959 年间出版的 95 种美英早期解析几何教科书(75 种出版于美国, 21 种出版于英国, 其中 1 种同时在两国出版), 对其中抛物线的引入、定义与方程进行考察, 试图回答以下问题: 关于抛物线, 美英早期解析几何教科书给出了哪些定义? 采用了哪些推导方程的方法? 抛物线的历史对今日教学有何启示?

2 抛物线概念的引入

考察发现，在 95 种教科书中，有 55 种直接给出了抛物线的定义。其余 40 种则采用不同方法来引入抛物线的概念。

2.1 一般圆锥曲线定义

23 种教科书先介绍圆锥曲线的第二定义或截线定义，再引入抛物线：根据点的运动规律可以产生无数轨迹，其中有一类尤为重要，这些曲线上的点到定点的距离与点到定直线的距离之比始终为常数，该曲线被称为圆锥曲线^[5]。

2.2 二次方程

有 6 种从一般的二元二次方程引入： $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 为一般的二元二次方程，其中 A, B, C, D, E, F 均为常数，这个方程所代表曲线的性质会随着系数的特定值变化而变化……若 $B^2 - 4AC > 0$ ，方程代表两条双曲线；若 $B^2 - 4AC = 0$ ，方程代表一条抛物线；若 $B^2 - 4AC < 0$ ，方程代表一个椭圆^[6]。

2.3 轨迹问题

有 3 种从轨迹方程问题引入。考虑下面的轨迹问题：一个动点到一条固定线和一个固定点的距离相等，试确定动点轨迹的性质^[7]。

2.4 二次函数

有 3 种通过一元二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 引入。形如 $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ 的表达式称为 x 的二次函数，曲线 $y = ax^2 + bx + c$ 的纵坐标表示一条抛物线的函数^[8]。

2.5 圆锥曲线的历史

有 5 种通过圆锥曲线的历史引入，如 Roberts & Colpitts (1918) 在书中写道^[9]：

椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线，这一名称源于这样一个事实，这些曲线都可以由一个平面截圆锥得到。这些曲线的许多性质为希腊早期几何学家所知，其中主要的研究者是阿基米德和阿波罗尼奥斯。阿基米德计算了抛物弓型和椭圆的面积，阿波罗尼奥斯发现三条曲线都可以从同一个圆锥上截得，并研究了许多双曲线的特殊问题。许多世纪以后人们才发现圆锥曲线的知识在研究宇宙规律方面有很大的实用价值。大约 1600 年，德国的开普勒发现了它们在天体运动的研究中的重要性，与此同时，意大利的伽利略发现炮弹的轨迹是抛物线。直到人们意识到物理学、力学和建筑领域的大量问题都依赖于圆锥曲线的知识来解决，它们的应用领域才得到扩展。

3 抛物线的定义与作图

3.1 抛物线的定义

在考察的教科书中共出现了抛物线的 4 种定义。

第一种是古希腊的截线定义，26 种教科书给出了截线定义：平面斜截一圆锥面，当截面平行于一条圆锥面的母线（但不过圆锥顶点时），平面与圆锥的交线称为抛物线^[10]。

第二种是第二定义，86 种教科书给出了第二定义：抛物线是一条平面曲线，其上的点到定点与定直线的距离相等。定点为抛物线的焦点，定直线为准线^[11]。

第三种是极限定义，将抛物线视作椭圆或双曲线的极限，有 6 种教科书采用了极限定义：给定椭圆的一对顶点和焦点，假设它的长轴无限增大，则该曲线最终会成为抛物线^[6]。

第四种是特殊的比例定义，只在考察的 3 种教科书中发现。抛物线是一些点的轨迹，这些点到两条垂直直线的距离满足这样的关系：点到一条直线距离的平方与点到另外一条直线的距离成正比^[12]。

95 种美英早期解析几何教科书中所采用抛物线定义如图 1 所示。可以发现在 4 种定义中，第二定义和今天一样受人们青睐，出现的频率最高。而历史悠久的截线定义也受到了不少教科书的关注，这与今天截然不同。绝大多数教科书均采用第二定义，也有一些教科书给出了抛物线的多种定义，即将截线定义、极限定义和比例定义作为第二定义的补充定义出现，但是 20 世纪 20 年代后的教科书已经舍弃了比例定义和极限定义。

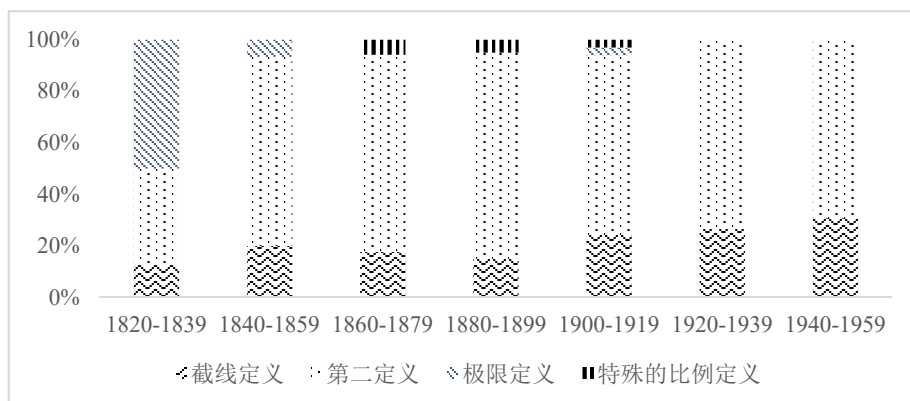


图 1 95 种早期解析几何教科书中的抛物线定义

3.2 抛物线的作图

早期的解析几何教科书也十分注重抛物线的作图，共出现 3 种作图法。

第一种作图法：利用三角尺和绳子构造抛物线。先作抛物线的准线和对称轴，如图 2，在 BC 处放置一块直尺，将 $\text{Rt}\triangle EDG$ 的一边 ED 贴紧直尺，并将一条与 DG 边等长的绳子一端固定在 G 处，绳子另一端固定在主轴上的 F 点处。当直角三角形沿着准线上下移动时，放置铅笔 P 使得绳子始终保持紧绷，那么铅笔会画出抛物线的一部分。当然，这只能画出抛物线的一部分，因为抛物线可以无限延伸^[11]。

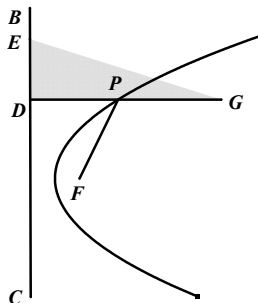


图 2 三角尺构造抛物线

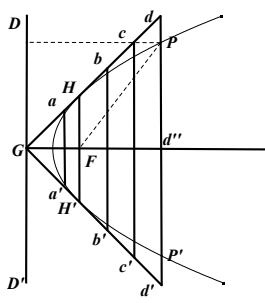


图 3 平行线构造抛物线

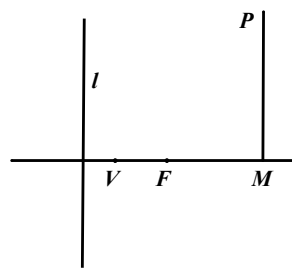


图 4 利用内在性质构造抛物线

第二种作法：平行线和同心圆相交法。如图 3，记 DD' 为抛物线的准线， F 为抛物线的焦点。过 F 点作 DD' 的垂线 GG' ，然后过 F 作 HH' 垂直于 GG' ，使得 $FH = FH' = FG$ ，易知 H 和 H' 是该抛物线上的两点。连接 GH 和 GH' 并延长，构造一系列平行于 HH' 的直线分别交 GH 和 GH' 于点 $a, b, c, d \dots$ ，和点 $a', b', c', d' \dots$ 。以 F 点为圆心，以 dd' 为半径作圆，交 dd' 于点 P 和 P' ，这两点即为抛物线上的点。采用类似的方法，我们可以找到抛物线与 $aa', bb', cc' \dots$ 的交点。

用一条平滑的曲线连接所有这些点，就得到了抛物线^[13]。

第三种作法：利用抛物线内在性质的作图。抛物线具有这样的内在性质：抛物线上每一点到对称轴的距离的平方，等于该点到顶点的水平距离乘以 2 倍焦距，这给我们提供了一种作抛物线图像的方法。如图 4，已知抛物线的准线为 l ，焦点为 F ，易找到抛物线的顶点 V 。在抛物线的对称轴上任意的选取一点 M ，我们可以算出 VF 和 $4VM$ 的等比中项，过点 M 以该等比中项的长度作对称轴的垂线 MP ， P 是以 l 为准线，焦点为 F 的抛物线上的一点。同理，通过选取对称轴上不同的点，我们就可以得到该抛物线上的许多点^[14]。

4 抛物线方程的推导

95 种教科书中，有 8 种只研究了抛物线的几何性质而未给出标准方程，或直接给出标准方程，其余教科书均对标准方程进行了详细推导，共出现了 4 种定义下的推导方法。

4.1 基于截线定义的推导

有 1 种教科书利用旦德林单球模型联系抛物线的截线定义和第二定义。如图 5，圆锥中有

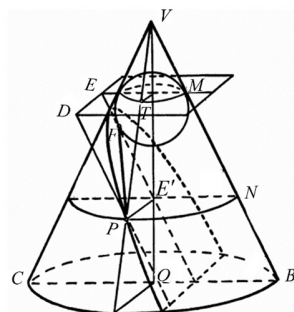


图 5 旦德林单球模型

一球与圆锥内表面相切，用平行于母线 VB 且与平面 VOB 相垂直的平面截取圆锥面，则截线为抛物线。已知平面 VOB 垂直于截面 PDE ，且平面 $VOB \perp$ 平面 DEM ，所以平面 VOB 垂直于平面 DEM 和平面 VOB 的交线 DE ，那么 $DE \perp$ 平面 VOB 上的 EE' 。 $MN \parallel$ 截面 PDE ，则 $MN \parallel$ 截面 PDE 和所有过 MN 平面的交线，那么 $MN \parallel PD \parallel EE'$ ，所以 $PD \perp DE$ 。一组平行平面所截的两条平行线相等，即 $PD=MN$ 。易知 $MN=PT$ ，又因为切线 $PF=PT$ ，所以 $PD=MN=PT=PF$ 。因此，我们可以将抛物线定义为这样一条平面曲线，曲线上的点到一定点（ F ）与定直线（ DE ）的距

离相等^[15]。根据这个事实，我们可以用解析几何的方法推出抛物线方程。

有 3 种教科书利用空间三角学的知识推导抛物线方程。已知圆锥母线与水平面的夹角为 v ，截面与水平面的二面角为 u ，该平面截圆锥所得曲线的统一方程为

$$y^2 \sin^2 v + x^2 \sin(v+u) \sin(v-u) - 2cx \sin v \cos v \cos u = 0。$$

当截面平行于母线时截线为抛物线，即 $u=v$ 时平面与圆锥的截线为抛物线，所以抛物线的方程为

$$y^2 \sin^2 v - 2cx \sin v \cos v \cos u = 0，$$

即

$$y^2 = \frac{2cx \cos^2 v}{\sin v}，$$

令常数 $\frac{2c \cos^2 v}{\sin v} = 2p$ ，则得抛物线方程 $y^2 = 2px$ ^[16]。

4.2 基于第二定义的推导

有 19 种教科书以准线为 y 轴建立直角坐标系进行推导。如图 6，以准线 YY' 为 y 轴，然后从焦点作准线的垂线（即抛物线的主轴），并将其作为 x 轴建立平面直角坐标系，令 $OF=2p$ 。根据抛物线性质知： $PF=PN=OM$ ，所以 $PF^2 = OM^2$ ，得 $PF^2 + PM^2 = OM^2$ ，即

$$(x-2p)^2 + y^2 = x^2，$$

故得

$$y^2 = 4p(x-p)。$$

令 $y=0$ 我们得到 $x=p$ ，即抛物线与主轴交于点 $A(p,0)$ ，若以 A 为原点，则 $x=x'+p$ ，于是得新方程 $y^2 = 4px'$ ^[17]。

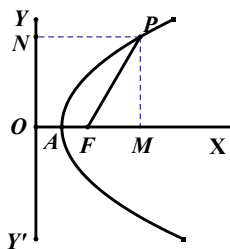


图 6 以准线为 y 轴

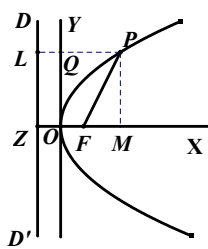


图 7 以顶点为原点

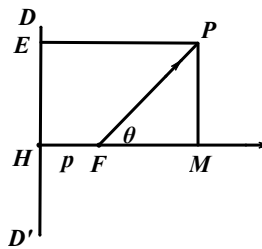


图 8 从极坐标进行推导

有 55 种教科书以顶点为原点建立直角坐标系进行推导。如图 7，记 DD' 为抛物线的准线， F 为抛物线的焦点。以垂直于准线的直线 ZMX 为 x 轴，记焦点到准线的距离 $ZF=p$ ，并以 ZF 的中点 O 为坐标原点，以垂直于 OM 的 OQ 作为 y 轴建立平面直角坐标系。令 $p(x,y)$ 为抛物线上任意一点，作 PM 垂直于 x 轴，作 PQ 垂直于 y 轴交准线于点 L 。那么 $ZO=OF=\frac{p}{2}$ ，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$ ，焦点坐标 $F(\frac{p}{2},0)$ 。计算得 $FP=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$ ， $LP=LQ+QP=x+\frac{p}{2}$ ，由抛物线的性质知 $PF=PL$ ，因此

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{p}{2},$$

化简得 $y^2=2px$ [11]。

有 3 种教科书先以第二定义推导抛物线的极坐标方程，再将其转为标准方程。如图 8，以圆锥曲线的焦点作为极点，以圆锥曲线的主轴为极轴，令焦点到准线的距离 $HF=p$ 。由圆锥曲线的定义知 $\frac{FP}{EP}=e$ ， $FP=\rho$ ， $EP=HM=p+\rho\cos\theta$ ，得 $\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e$ ，于是得圆锥曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

其中 e 为离心率， p 为焦点到准线的距离。根据极坐标与直角坐标方程的转换公式， $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ， $x=r\cos\theta$ ， $y=r\sin\theta$ 。极坐标方程可化为 $\rho-e\rho\cos\theta=ep$ ，即

$$\sqrt{x^2+y^2}=ex+ep,$$

两边同时平方得

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0。$$

又因为在抛物线中，离心率 $e=1$ ，可得方程

$$y^2-2px-p^2=0。$$

为了简化方程，令 $x=x'-\frac{1}{2}p$ ，得到抛物线的标准方程 $y^2=2px'$ [18]。

4.3 基于极限定义的推导

有 4 种教科书采用抛物线的极限定义推导其标准方程。

方法 1 直角坐标系下，以右顶点为原点的椭圆方程为：

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

即

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2。$$

已知给定椭圆的一对焦点和顶点，则距离 $m = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ 也是固定的。 b 可以通过 $b^2 = 2am - m^2$ 来表示，原方程变为

$$y^2 = \left(4m - \frac{2m^2}{a}\right)x - \left(\frac{2m}{a} - \frac{m^2}{a^2}\right)x^2。$$

假设 a 趋于无限大，方程变为 $y^2 = 4mx$ [6]。

方法 2 直角坐标系下椭圆和双曲线的方程为：

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2,$$

其中

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - a^2e^2}{a} = \frac{(a+ae)(a-ae)}{a},$$

而 $a - ae = AS$ ， $a + ae = 2a$ 。中心趋于无限远时， $p = \frac{AS \cdot 2a}{a} = 2AS$ ，则 $\frac{p}{a} = \frac{2AS}{a}$ 是一个无穷小量，所以抛物线方程为 $y^2 = 4ASx = 2px$ [19]。

4.4 基于比例定义的推导

有 3 种教科书基于比例定义推导抛物线方程。设 P 为以 F 为焦点， HB 为准线的抛物线上的任意一点。过点 P 作抛物线在该点的切线 PT 、法线 PC 及 x 轴的垂线 PD ，那么 TD 和 CD 为点 P 在 x 轴上的次切线和次法线。由 $TP \perp PC$ 和 $PD \perp TC$ ，易知 $\triangle TPD \sim \triangle PCD$ ，则 $TD:PD=PD:DC$ 。那么，对于一条给定的抛物线，其上任意一点 P 到 x 轴的距离、次切线和次法

线之间满足 $TD:PD=PD:DC$ 为定值。根据比例的性质有, $\frac{1}{2}TD:PD=PD:2DC$ 也恒为定值。令

P 的纵坐标 $PD=y$, 横坐标 $VD=x$, 参数为 $2p$, 则式子变为 $x:y=y:2p$, 即 $y^2=2px$ [20]。

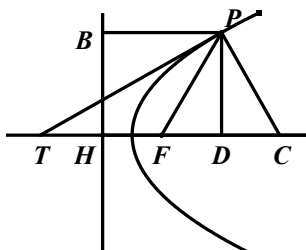


图 9 基于比例定义的推导

5 结语

由上可见,美英早期解析几何教科书中抛物线的定义和方程推导方法均呈现多样化的特点。早期教科书中给出了抛物线的 5 种定义,并且从 5 种定义出发分别推导了抛物线的标准方程,在推导过程中综合运用了丰富的几何、代数以及三角学的知识。然而,随着时间的推移,现代中学教科书中的抛物线定义与推导方法均趋向于单一。早期教科书给我们带来如下启示:

其一,追本溯源,重视几何本质。众所周知,圆锥曲线是高中解析几何部分的重要内容,而解析几何的核心是用代数的方法来研究几何问题。通过建立平面直角坐标系,复杂的几何判断就可转化成代数运算,为几何的研究带来了便利。但正是在这种极度的便利下,人们往往将圆锥曲线视为解析几何概念。但从历史上看,圆锥曲线是一个几何概念,最早由古希腊数学家的梅奈克缪斯(Menaechmus)用垂直于母线的平面去截顶角为锐角、直角和钝角的圆锥所得到。后续人们对圆锥曲线做了不少的探索,但在创立解析几何这门学科以前,人们一直采用古希腊人的截线定义,将圆锥曲线放在立体几何中进行研究。因此,抛物线教学不能仅从解析几何的角度开展,也应从几何角度对其进行探究。截线定义是抛物线的来源,理应为学生所知晓,而极限等补充定义则根据教师需要选择是否讲授。

其二,各取所长,展现方法之美。现代教科书中关于抛物线方程的推导虽然简洁,但过于单一且理想化。学生一定能想到以顶点为原点吗?学生没有其他想法了吗?仅讲解书上的一种方法是不够的,单一的方法限制了学生思维的发展。教师可以放手先让学生探究,再根据学生的思路适当做些补充。例如,准线是抛物线定义中天然存在的一条线,学生用准线作为 y 轴相

当自然，这也是早期教科书中使用频率相当高的一种方法。教师还可以选择性的讲解历史上的其他推导方法，让学生体会不同方法背后的思想之美。

其三，注重联系，构建知识之谐。一方面，学生在初中时期就已经对一元二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像为抛物线了然于心。如何让学生理解二次函数图像与当今课堂学习的抛物线同质是教学的一大重点，这里主要涉及到坐标的平移变换。另一方面，如果向学生介绍圆锥曲线的来源，也应说明截线定义和第二定义的等价性。旦德林单球模型是沟通截线定义与第二定义的良好桥梁，但使用的难度较大。教师应根据学情，通过搭建脚手架，构造实物模型等方式来降低教学难度。

参考文献

- [1] 李昌. 基于数学史的“抛物线”教学[J]. 江苏教育, 2021(11): 34-37.
- [2] 徐超. 抛物线概念教学:重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015(08): 26-31.
- [3] 张佳丽. HPM 视角下高中圆锥曲线的教学研究[D]. 江西师范大学, 2018.
- [4] 陆琳琰. 抛物线的发生教学研究[D]. 华东师范大学, 2013.
- [5] Tanner, J. H., Allen, J. *An Elementary Course in Analytic Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1898.
- [6] Salmon, G. *A Treatise on Conic Sections*[M]. Dublin: Hodges & Smith, 1850.
- [7] Smith, P. F., Gale, A. S. *New analytic geometry*[M]. Boston: Ginn, 1912: 153.
- [8] Ziwet, A., Hedric, E. R., Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913.
- [9] Roberts, M. M., Colpitts, J. T. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1918: 110-119.
- [10] Harding, A. M., Mullins, G. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1926: 120-124.
- [11] Loomis, E. *Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1851: 44-53.

- [12] Phillips, H. B. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 74-77.
- [13] Bauer, G. N. *The Simpler Elements of Analytic Geometry*[M]. Minneapolis, Minn: The H.W. Wilson Company, 1903: 38-41.
- [14] Poor, V. C. *Analytical Geometry*[M]. New York: J. Wiley & Sons, 1934: 82-102.
- [15] Reynolds, J. B., Weida, F. *Analytic Geometry and the Elements of Calculus*[M]. New York: Prentice-Hall, 1930: 153-159.
- [16] Biot, J. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. Philadelphia: Charles Desilver, 1860.
- [17] Loomis, E. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Harper & Brothers, 1872: 84-102.
- [18] Smith, P. F., Gale, A. S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1904: 173-178.
- [19] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1826: 142-143.
- [20] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman & Company, 1860: 50.

美英早期三角学教科书中的诱导公式

鲜宇骋

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

诱导公式是平面三角学的重要公式, 可用以将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数, 因而它们在历史上是人们计算三角函数值的不可或缺的重要工具。尽管今天的计算器可以方便地计算出任意角的三角函数值, 诱导公式的计算功能日渐式微, 但其对于学生思维的发展和科学探究精神的培养仍具有重要的作用。另一方面, 诱导公式也是人们认识三角函数周期性的的重要工具, 使三角学的功能从单纯的测量发展到现实世界周期现象的研究, 是三角学新旧阶段之间的分水岭。

因此, 诱导公式在今日高中数学课程中占有重要地位。《普通高中数学课程标准》(2017 年版) 要求学生能“借助单位圆的对称性, 利用定义推导出诱导公式 ($\alpha \pm \frac{\pi}{2}$, $\alpha \pm \pi$ 的正弦、余弦、正切)”^[1]由此可见, 课程标准要求学生掌握诱导公式的推导思路和过程, 借此发展学生的推理能力和运算能力。

教学实践中, 部分教师往往会本末倒置, 轻视诱导公式的来源、意义和推导过程, 而偏重记忆和计算。这显然与诱导公式的研究历程背道而驰, 也不利于学生数学核心素养的发展。鉴于此, 本文聚焦诱导公式, 对 18 世纪初期至 20 世纪中叶的美英三角学教科书进行考察, 以期今日教学提供思想启迪。

2 早期教科书的选取

本文选取 1771-1955 年间出版的 107 种美英三角学教科书作为研究对象, 以 20 年为一个时间段进行划分, 其出版时间分布情况如图 1 所示。其中, 对于同一作者再版的教科书, 若内容无显著变化, 则选取最早的版本, 若内容有显著变化, 则将其视为不同的教科书。

本文将对这 107 种教科书中关于诱导公式的引入、推导方法和应用进行分析、归纳和总结,

并考察其演变特点。

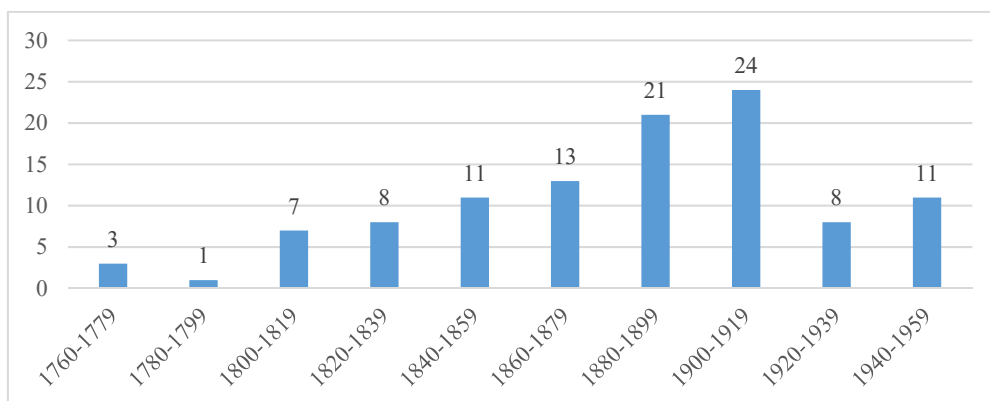


图 1 107 种美英早期三角学教科书的出版时间分布

3 诱导公式的发展

随着时间的推移和三角学研究的发展，早期教科书中诱导公式的相关内容也在不断演变：概念不断完善，范围逐渐扩大，推导过程更具严谨性和多样性，应用更加广泛，相关的理论体系愈加成熟。从形式上看，诱导公式从一些特例演变成了通用公式；从范围上看，从直角三角形中的锐角推广到了任意角；从内容上看，从零散的部分公式发展到成体系且不重复的六组公式。

18 世纪初，诱导公式尚未成形，只是在一些教科书中观察、比较特定角度的三角函数值时隐约体现出了诱导公式的思想，如 $\cos 1^\circ = \sin 89^\circ 59'$ 等^[2]，这类等式可看作最早的诱导公式特例。

18 世纪中后期，教科书明确提出了更一般的结论：“一个锐角的余角的三角函数等于这个锐角的相应余函数。”^[3]该结论蕴含了关于 $\frac{\pi}{2} - z$ (z 为锐角) 的诱导公式。还有教科书给出“某角的正弦等于其补角的正弦”等结论^[4]，不过该结论仅局限于特例，并未用一般公式表达出来。

1748 年，瑞士数学家欧拉 (L. Euler, 1707-1783) 在其《无穷分析引论》中，利用两弧和与差的正余弦公式，得到了关于 $\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right)$ 、 $(\pi \pm z)$ 等的部分诱导公式；进而得到关于 $\left(\frac{4k+1}{2}\pi \pm z\right)$ 、 $\left(\frac{4k+2}{2}\pi \pm z\right)$ (k 为整数) 等的更一般的诱导公式。《无穷分析引论》中的这组公式是三角学历史上最早明确给出的较为系统的诱导公式，但其推导过程仍不完善，而且缺乏正切、余切、正割、余割等四组三角函数的公式。^[5]

19 世纪之前, 角的概念尚未全面推广至任意角, 人们研究的大多是 180° 以内的角的三角函数, 因此诱导公式也基本以 $(90^\circ + \alpha)$ 、 $(90^\circ - \alpha)$ 、 $(180^\circ - \alpha)$ 为主。

19 世纪开始, 角的概念逐渐推广至任意角, 诱导公式也得到了更大的发展。随着教科书的不断完善, 诱导公式逐渐形成体系。公式推导过程也趋于严密, 且推导方法更加多元, 有直接定义法、比较法、迭代法、归纳法、和角与差角公式法和图像法等。

19 世纪中叶之后, 教科书开始对诱导公式加以命名, 最初给出的是“和或差为 n 倍直角的两角的三角函数关系”^[6]、“ $90^\circ \pm \theta$ 、 $180^\circ \pm \theta$ 的三角函数”^[7] 直观描述性名称; 到了 20 世纪 40 年代, 开始出现“简化公式”(Reduction Formulas)^[8] 这样的专有名称, 这一名称也直观地反映了其用途——将任意角的三角函数简化至正锐角的三角函数, 方便查表、计算。

经过百年来不断的发展, 最终形成了如今的六组诱导公式¹。各组公式均有角度制和弧度制两种表示方法, 若采用弧度制, 它们分别是:

$$\text{第一组: } \sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha;$$

$$\text{第二组: } \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha;$$

$$\text{第三组: } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\text{第四组: } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\text{第五组: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$$

$$\text{第六组: } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha。$$

通过观察、归纳可知, 以上六组公式可用一个通用公式

$$F\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \begin{cases} \pm F(\alpha), & n \text{ 为偶数} \\ \pm \text{co}F(\alpha), & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

¹ 为方便计算, 诱导公式应力求全面, 而这不可避免地会导致部分重复, 因为不同组公式之间可相互推出。因此目前诱导公式有多种分组方法。本文选取现行 2019 年人教版教科书中的分法, 共分为六组。由于余切、正割、余割分别是正切、余弦、正弦的倒数, 得到关于后三者的公式后即可得到关于前三者的公式, 故此不再赘述前三者。

来表达, 其中 $F(\alpha)$ 表示 α 的六个三角函数中的某一个, $coF(\alpha)$ 表示 $F(\alpha)$ 对应的余函数, 结果前的符号与将 α 视作锐角时原三角函数 $F\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ 的符号相同。这一通用公式也可用“奇变偶不变, 符号看象限”这一口诀来表述。

4 诱导公式的推导

4.1 第一组公式

在所查阅的 107 种美英三角学教科书中, 共有 77 种或完整或部分地呈现了第一组公式, 有的采用了符号语言, 有的采用了文字语言。

第一组公式主要采用周期性性质法来推得。任意角的终边顺时针或逆时针旋转若干整数圈, 即 $2k\pi$ 弧度后与原角的终边重合^[9]。再根据任意角的三角函数定义, 旋转前后两角的同名三角函数值相等, 即 $F(2k\pi + \alpha) = F(\alpha)$ 。

77 种教科书中, 有 66 种 (占 85.7%) 采用了上述方法。

4.2 后五组公式

107 种教科书中, 共有 82 种或完整或部分地呈现了第二组公式, 82 种呈现了第三组公式, 91 种呈现了第四组公式, 103 种呈现了第五组公式, 75 种呈现了第六组公式。有的采用了符号语言, 有的采用了文字语言。后五组公式的推导方法主要有比较法、和角与差角公式法、其他诱导公式推导法、图像法等。此外, 由于在任意角概念引入之前, 诱导公式大多局限在直角三角形中讨论, 因此第五组公式还涉及直接定义法。

4.2.1 比较法

定义六种三角函数之后, 对线段和坐标进行比较, 由此推导出有关诱导公式, 这种方法称为比较法。共有 92 种教科书 (占 86.0%) 采用了该方法。

这里, 我们仅以第三组公式为例。Wylie (1955) 作任意角 α 和相应的负角 $-\alpha$, 并使它们的

始边与 x 轴的正半轴重合。如图 2 所示²，当终边不与坐标轴重合时，在二者的终边上分别任取一点 $P(x, y)$ ， $P'(x', y')$ ，并使 $|OP| = |OP'| = r$ 。分别过 P 、 P' 分别作 x 轴的垂线，垂足重合，

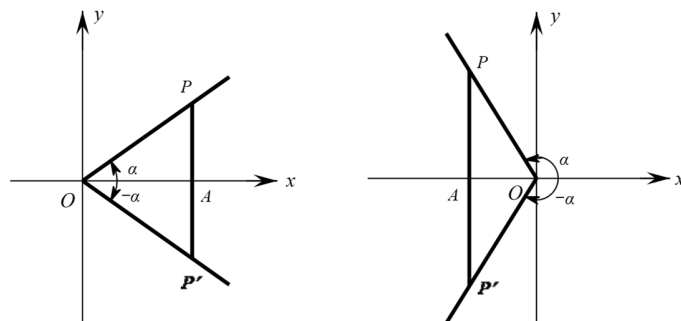


图 2 用比较法推导第三组公式

设为 A ，则有 $|x| = |x'| = |OA|$ 。易证得 $\triangle OAP \cong \triangle OAP'$ ，故有 $|AP| = |AP'|$ ，即 $|y| = |y'|$ 。再由 P 、 P' 所处的象限，易知 $x = x'$ ， $y = -y'$ 。根据任意角三角函数的定义，有

$$\sin(-\alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha,$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\tan \alpha.$$

当 α 终边与坐标轴重合时，可直接求出其函数值证明第三组公式仍成立。

综上所述，对于任意角 α ，第三组公式都成立^[10]。

4.2.2 利用和角与差角公式

Clarke (1888) 利用两角和与差的正弦公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

推导出 $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ 、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ 、 $\sin(\pi \pm \alpha)$ 、 $\cos(\pi \pm \alpha)$ 的公式；再把相同项的正余弦相除，便得到了对应的正切的公式。^[11]

² 此处仅画出了 α 位于第一、二象限的情况，其余两个象限与之类似，故不再画出。

推导和角与差角公式的过程较为繁琐，但利用这些公式，诱导公式的推导则十分便捷。但若完整、严谨地推导两任意角的和差公式，则需考虑多种特殊情况，而这时往往又会用到部分诱导公式，这一方法的局限性便在于此。共有 16 种教科书（占 15.0%）采用此法。

4.2.3 利用其他诱导公式

由于六组诱导公式之间均互相关联，所以它们之间大都可以相互推出。例如，Wheeler(1878)运用两次第六组公式推导出了第二组公式^[12]，即在第六组公式中，将 α 替换为 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ，即可得到

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \\ \cos(\pi + \alpha) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \tan \alpha.\end{aligned}$$

类似地，还可运用第三、四组公式推导第二组公式，运用第三、五组公式推导第六组公式，等等。在已获得部分公式的基础上，这一方法显然是推导其余公式最方便快捷又准确的方法。共有 16 种教科书（占 15.0%）采用了这一方法。

4.2.4 图像法

图像法即是根据不同三角函数图像之间的几何关系得出诱导公式的方法。首先需绘制出三角函数的图像。绘图方法主要有两种，第一种是先用描点法画出区间 $[0, 2\pi]$ 上的图像，再根据周期性，即第一组公式画出整条曲线；第二种是先通过描点法或查表法画出区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图像，再依次根据第四、三组公式画出区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 和 $[-\pi, 0]$ 上的图像，最后根据第一组公式画出整个实数域内的图像。完成绘图后，观察图像特点，归纳出部分诱导公式。

例如，Perlin(1955)观察到，将正弦曲线 $y = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到的图像与余弦曲线 $y = \cos x$ 重合^[13]，由此可知对任意角 α ，均有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha。$$

图像法虽然简单直接，但主要通过观察得出结论，终究不太严谨；且在第二种绘图方式中也需用到部分诱导公式，不具通用性。因此，只有 6 种教科书（占 5.6%）采用了这一方法。

4.2.5 直接定义法

直接定义法仅针对第五组公式而言，且基本出现在 20 世纪以前的教科书中。在这 107 种教科书中，共有 21 种（占 19.6%）采用了直接定义法。这一方法即是直接定义某角的余弦是其余角的正弦，余切是其余角的正切，余割是其余角的正割^[9]，用公式表达即为

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \csc \alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)。$$

5 诱导公式推导方法的演变

由上述分析可知，诱导公式的推导方法丰富多彩，各具特色。对于第一组公式来说，由于其本身就是反映三角函数周期性的公式，因此通过函数值的周期变化特点来推导它，无疑是最有效的方法。对于后五组公式来说，比较法从三角函数的定义出发，通过比较坐标的关系得出公式，逻辑清晰，过程严密，具有普适性；而其他方法在这一方面则略有瑕疵。例如，基于和角和差角公式和其他诱导公式的推导方法，需要以其他公式为基础，通用性不强；图像法仅通过观察得出，缺少代数运算推理过程，终究不具有较强的说服力。

为更好地研究早期教科书编者选择诱导公式推导方法的倾向性，本文以 20 年为单位，统计了各时间段诱导公式推导方法的选择情况³，以此粗略地反映各种方法的使用频率。统计结果如图 3-4 所示。

³ 若某种教科书中既有周期性质法/比较法，又有其他方法，则计入周期性质法/比较法。

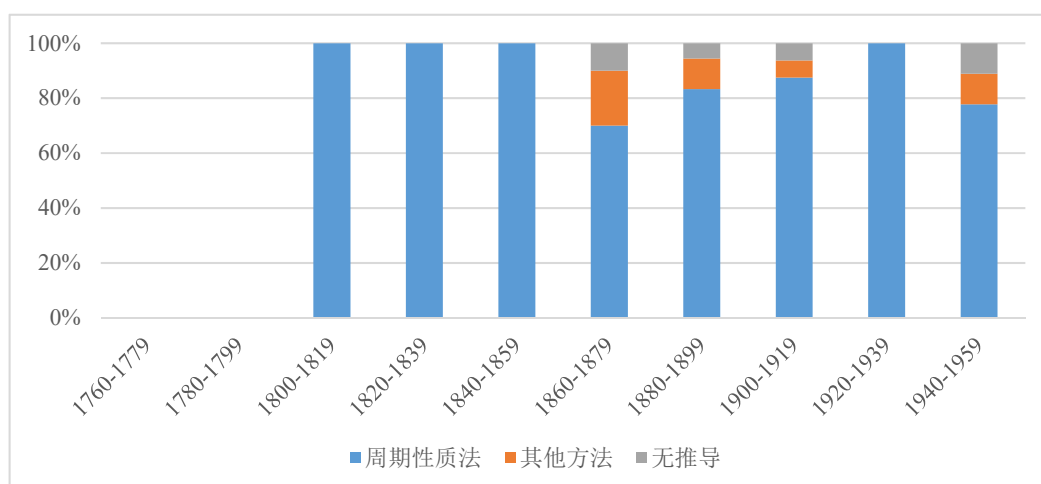


图 3 第一组公式各推导方法的频率变化图

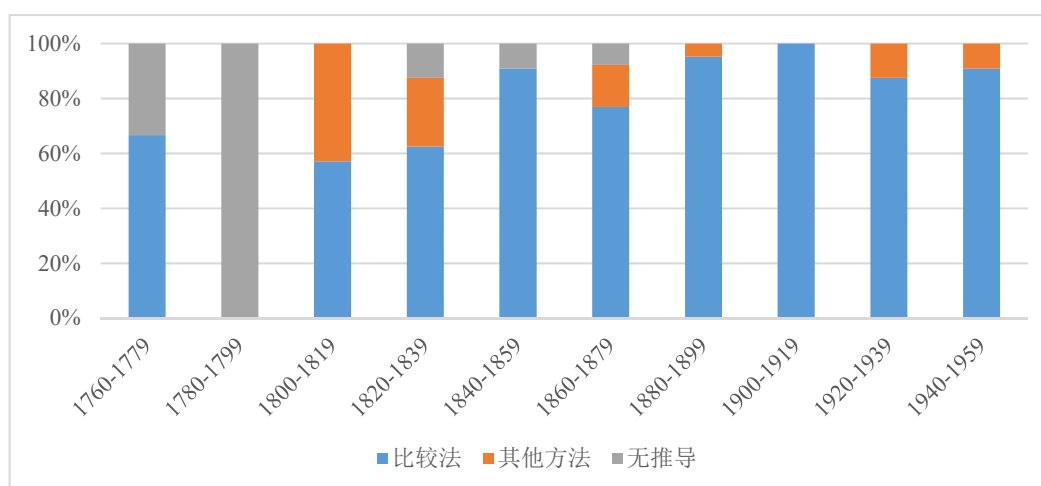


图 4 后五组公式各推导方法的频率变化图

由图 3 可见，周期性质法一直是第一组公式使用最多的方法；由图 4 可见，比较法一直是后五组公式使用最多的方法，且其使用频率大致保持着上升的趋势。而其他方法的占比都很小。这表明，推导过程的逻辑性、严谨性、全面性、普遍性得到了越来越多的重视，显示了教材编写的进步。

6 诱导公式的应用

6.1 任意角三角函数的转化

在计算工具落后的年代，三角函数值往往只能通过查锐角或 $0\sim 45^\circ$ 角的三角函数表得到。因

此, 诱导公式最初的目的就在于将任意角的三角函数转化为锐角或 $0\sim 45^\circ$ 角的三角函数。转化流程大致如图 5 所示。

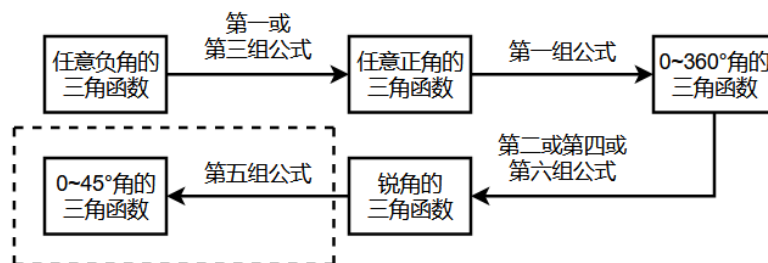


图 5 任意角三角函数转化流程图

6.2 函数值相等的角的集合

利用诱导公式, 还可以方便地获得与已知角 α 具有相同三角函数值的任意角集合。107 种教科书中, 共有 34 种详细介绍或简要提及了这一应用。

根据三角函数的坐标定义可知, 终边上距离顶点相等处具有相同纵坐标的两角正弦值相等, 所以在 $0\sim 2\pi$ 范围内, 与 α (设 $0\leq\alpha<2\pi$) 正弦值相等的角有 α 和 $\pi-\alpha$; 利用第一组公式, 与 α 正弦值相等的任意角有 $2k\pi+\alpha$ 和 $2k\pi+\pi-\alpha$, 可合并写为 $n\pi+(-1)^n\alpha$ (n 为整数)。类似地, 终边上距离顶点相等处具有相同横坐标的两角余弦值相等, 故 $-\alpha$ 与 α 余弦值相等; 再利用第一组公式, 与 α 余弦值相等的任意角有 $2k\pi+\alpha$ 和 $2k\pi-\alpha$, 可合并写为 $2n\pi\pm\alpha$ 。在 $0\sim 2\pi$ 范围内, 与 α 正切值相等的角有 α 和 $\pi+\alpha$; 再利用第一组公式, 与 α 正切值相等的任意角有 $2k\pi+\alpha$ 和 $2k\pi+\pi+\alpha$, 可合并写为 $n\pi+\alpha$ 。上述结论也可用一通用公式来表达^[14]:

$$\sin[n\pi+(-1)^n\alpha]=\sin\alpha, \quad \cos(2n\pi\pm\alpha)=\cos\alpha, \quad \tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha。$$

7 结论与启示

美英早期三角学教科书中, 诱导公式经历了从无到有、从特例到公式、从归纳到推导、从零散到系统的发展历程, 最终形成了如今的六组公式和一个全面的概括公式。百年来人们研究诱导公式的方法、思想和精神无疑是一种永不磨灭的宝贵财富, 我们依然能从中吸取很多有关当今教学的启示。

7.1 掌握知识与发展能力相统一

爱因斯坦说过：“发展独立思考和独立判断的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把获得专业知识放在首位。”^[15]对中学生来说，并不是随时都能使用计算工具来计算三角函数值，因此，仍有必要掌握诱导公式并灵活运用。但在当今的中学教学和考试中，诱导公式的要求程度并不高，学生往往只需记忆和套用公式便可解题。这导致很多学生只关注结果而轻视其推导过程和其中蕴含的数学思想、方法。长此以往，学生的思维得不到锻炼，研究能力也难以提高。因此，教师在教学中可以通过引入数学史，来促进学生对于诱导公式推导过程与方法的重视，引导学生感受百年来诱导公式的发展过程，体会其实际意义和价值；更重要的是，要逐步培养学生的学习和研究能力，习得科学研究的基本方法和思想，为之后的学习、研究和工作打下坚实的基础。

7.2 严谨性与量力性相统一

严谨性是数学学科的基本特点之一，因此诱导公式的叙述必须精确，论证必须严格周密。所以，在教学实践中，教师不能只从部分情况就总结出全面的公式，而应该依照逻辑演绎推理。但诱导公式的完整推导是一个费时费力的过程，部分早期教科书也存在无推导过程或推导不完整的问题。因此，在如今有限的教学时间中往往难以照顾周全。而且受到身心发展水平的限制，学生往往难以在短时间内考虑全面，难以接受过多信息。所以在教学过程中一方面要严谨，另一方面也要量力而行，适应学生的现有水平，逐步深化，对于一些过于繁琐复杂的内容可以暂时用经验验证来代替逻辑推理，做到严谨性与量力性相统一。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社, 2020.
- [2] Martin, B. *The Young Trigonometer's Compleat Guide* (Vol.1)[M]. London: J. Noon, 1736.
- [3] Wright, J. *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. Edinburgh: A. Murray & J. Cochran: 1772.

- [4] Cagnoli, M. *Traité de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique*[M]. Paris: Didot, 1786.
- [5] 欧拉(张延伦译). 无穷分析引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2019: 77-78.
- [6] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892.
- [7] Rothrock, D. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1910.
- [8] Hart, W. W., Hart, H. L. *Plane Trigonometry, Solid Geometry & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1942.
- [9] Loomis, E. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Happer & Brothers, 1848.
- [10] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.
- [11] Clarke, J. B. *Manual of Trigonometry*[M]. Oakland: Pacific Press, 1888.
- [12] Wheeler, H. N. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1878.
- [13] Perlin, I. E. *Trigonometry*[M]. Scranton: International Textbook Company, 1955.
- [14] Plane, C. D. *Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919.
- [15] 爱因斯坦. 爱因斯坦自述[M]. 北京: 新世界出版社, 2012.

美英早期三角学教科书中的倍角公式

姚 瑶

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

倍角公式是平面三角学中三角函数式的恒等变换中的一项重要且非常实用的公式, 具体指把倍角的三角函数用本角的三角函数表示出来。在计算中可以用来化简计算式、减少求三角函数的次数, 在工程中也有广泛的运用。在公元 12 世纪, 印度数学家婆什迦罗就从两角和公式的特殊情形中得到二倍角公式; 1951 年, 法国数学家韦达获得了三倍角公式, 他是将代数变换引入三角学的第一位数学家, 也是最早研究正、余弦一般公式的人; 17、18 世纪开始, 牛顿、棣莫弗、雅各·伯努利、欧拉等著名数学家都通过不同方式得到了 n 倍角公式^[1]。

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》中要求学生能从两角差的余弦公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式, 二倍角的正弦、余弦、正切公式, 了解它们的内在联系; 能用上述公式进行简单的恒等变换^[2]。

在现行教科书中, 苏教版、人教版、北师大版、沪教版教科书均采取的是在两角和的正弦、余弦、正切公式中令两个角相等来推导出二倍角公式。此外, 除了沪教版教科书中“二倍角公式”所在章节名为“常用三角公式”, 苏教版、人教版、北师大版教科书中“二倍角公式”内容均在章节“三角恒等变换”中。现行教科书中还特别标注了: 这里的“倍角”实际上专指“二倍角”, 遇到“三倍角”等名称时, “三”字等不能省去。

数学史告诉我们, 任何公式都不是凭空出现的, 都有其自然发展的过程。鉴于此, 本文对 19 世纪至 20 世纪中叶的美英三角学教科书中所呈现的倍角公式相关内容进行考察, 试图回答以下问题: 历史上如何推导倍角公式? 其推导方法有哪些? 呈现什么样的变化规律? 以期为课堂教学提供更加丰富的素材。

2 早期教科书的选取

从有关数据库中选取 18 世纪初到 20 世纪中叶期间出版的 120 种美英早期三角学教科书为研究对象，其中 43 种出版于美国，77 种出版于英国。

18 世纪的三角学教科书没有出现倍角公式相关内容，因此本文对此类教科书不予考虑。本研究的研究对象最终调整为：19 世纪初到 20 世纪中叶期间出版的 107 种美英早期三角学教科书为研究对象，其中 30 种出版于美国，77 种出版于英国。对于同一作者再版的教科书，若内容无明显变化，则选择最早的版本；若内容有明显变化，则将其视为不同的教科书。若以 20 年为一个时间段，则这 107 种教科书的出版时间分布如图 1 所示。

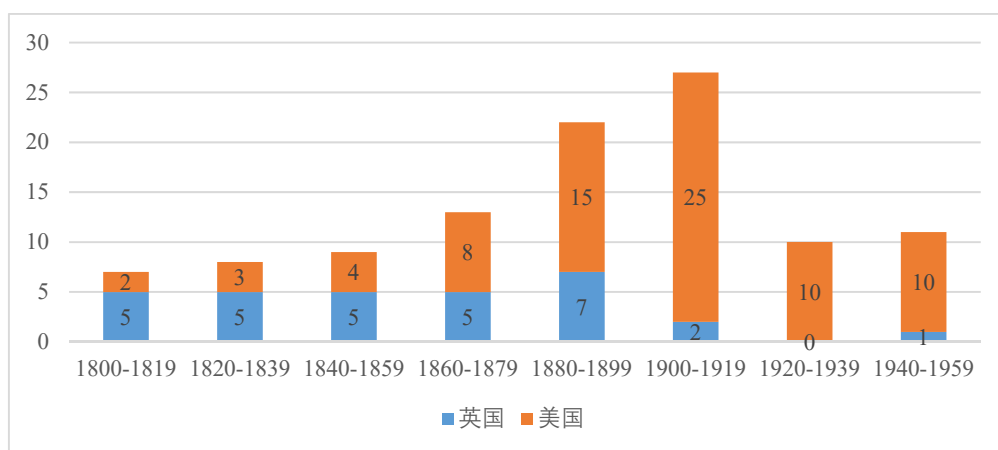


图 1 107 种美英早期三角学教科书出版时间分布

本文采用的统计方法如下：首先，按照年份查找并摘录出研究对象中有关倍角公式的部分；然后，通过内容分析，确定倍角公式推导的分类标准，形成最终的分类框架；最后，依据此框架对研究对象进行分类与统计。

3 二倍角公式的推导

本文所考察的 107 种教科书均给出了二倍角公式的证明，其中二倍角公式证明方法可归纳为代数法、几何法、推理法这三类，并且同一种教科书常常使用了多种不同的方法。

3.1 代数法

3.1.1 利用和角公式

在所有 107 种教科书中,有 100 种教科书均给出了利用和角公式的方法来推导二倍角公式。

在和角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

中令 $\alpha = \beta$, 即可得二倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

其中,在余弦二倍角公式中,借助三角函数基本关系 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 可得余弦二倍角公式的另外两种表示:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

3.1.2 利用半角公式

Todhunter 在教科书《三角学入门》^[3]中给出了与其他教科书不同的二倍角公式推导方法。

大部分教科书采用的是先利用和角公式得到二倍角公式,再通过换元法得到半角公式,而上述教科书则是先得到半角公式,再通过换元法得到二倍角公式。

3.2 几何法

3.2.1 利用圆中角的性质

有 10 种教科书通过此种几何证明方法来导出二倍角公式,其中有 2 种教科书以习题的形式

出现，以给读者充分的思考空间。

如图 2 所示， P 是以 O 为圆心、 OR 为半径的半圆弧上的一点，设 $\angle ROP = 2A$ ，过 P 作 $PM \perp LR$ 于 M ，又由于 $OL = OP$ ，故可知 $\angle OLP = \frac{1}{2}\angle ROP = A$ 。根据 $\angle MPR$ 、 $\angle OLP$ 都是 $\angle MPL$ 的余角，故 $\angle MPR = \angle OLP = A$ 。

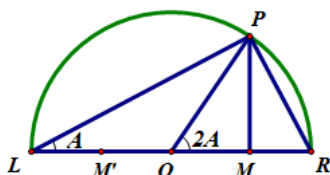


图 2 利用圆中角的性质的几何证明方法

从而，

$$\sin 2A = \frac{MP}{OP} = \frac{2MP}{2OP} = \frac{2MP}{LR} = \frac{2MP \cdot PR}{LR \cdot PR} = 2 \cos \angle MPR \sin \angle PLR = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \frac{OM}{OP} = \frac{LM - LO}{OP} = \frac{2LM}{2OP} - \frac{LO}{OP} = \frac{2LM \cdot LP}{LP \cdot LR} - \frac{OP}{OP} = 2 \cos \angle MLP \cos \angle PLR = 2 \cos^2 A - 1.$$

在 OL 上取一点 M' 使得 $OM' = OM$ ，可知 $2OM = M'M = LM - LM' = LM - MR$ ，从而

$$\cos 2A = \frac{2OM}{2OP} = \frac{LM - MR}{LR} = \frac{LM}{LR} - \frac{MR}{LR} = \frac{LM \cdot LP}{LP \cdot LR} - \frac{MR \cdot PR}{PR \cdot LR} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2MP}{2OM} = \frac{2MP}{LM - MR} = \frac{\frac{2MP}{LM}}{\frac{LM}{LM} - \frac{MR}{LM}} = \frac{2 \tan A}{1 - \frac{MR \cdot MP}{MP \cdot ML}} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

即得二倍角公式。

3.2.2 利用等腰三角形性质

有三种教材提出了第二种几何证明方法，其中只有 Whitaker^[4]直接给出证明，Moritz^[5]、Rider & Davis^[6]均是在习题中出现留给读者自证。

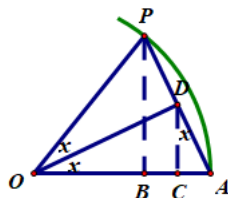


图 3 利用等腰三角形性质的几何证明方法

如图 3，以 O 为圆心构造单位圆， A 、 P 都为圆上的点，在 PA 上取一点 D ，使

$\angle POD = \angle AOD = x$ ，过点 P 作 $PB \perp OA$ 于点 B ，过点 D 作 $DC \perp OA$ 于点 C 。借助平面几何知识，我们即可得二倍角公式：

$$\sin 2x = BP = 2CD = 2OD \sin x = 2OA \cos x \sin x$$

$$\cos 2x = OB = OC - BC = OC - CA = OD \cos x - AD \sin x = OA \cos^2 x - OA \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{BP}{OB} = \frac{2CD}{OC - CA} = \frac{2OC \tan x}{OC - CD \tan x} = \frac{2OC \tan x}{OC - OC \tan^2 x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

3.2.3 构造平行线法

第三种几何证明方式仅有一种教科书提及，Whitaker 在教科书《三角学基础》^[7]中通过构造平行线推导出了二倍角公式。

如图 4，直角三角形 ABC 中，令 $\angle DBA = x$ ， $\angle CAB = 2x$ ，过 B 作 $BE \parallel AD$ 交 CA 的延长线于 E ， F 是 BE 的中点。

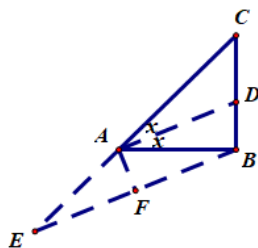


图 4 构造平行线的几何证明方法

由平行线可得 $\angle E = \angle ABE = x$ ， $AE = AB$ ， $\triangle CAD \sim \triangle CEB$ ，从而可得到如下的比例关系

$$\frac{EB}{AD} = \frac{EC}{AC}, \frac{BD}{EA} = \frac{BC}{EC}$$

两式相乘即得

$$\frac{EB}{AE} \times \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

即

$$2 \cos x \sin x = \sin 2x$$

又由比例关系

$$\frac{AB}{BD} = \frac{EA}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC}$$

可以得到

$$\cot x = \csc 2x + \cot 2x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}, \tan 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

结合正弦的二倍角公式可将上述两个等式化为

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

从而可推出余弦的二倍角公式：

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

3.2.4 借助相似三角形

4 种教科书借助了和差化积公式推导正弦的二倍角公式，考虑两个角大小的特殊关系——相等情况下的证明，其中 3 种教科书均为 19 世纪初出版，出版时间非常相近，是美英早期三角学在倍角公式上的初步发展。

如图 5，在以 E 为圆心、 R 为半径的圆弧上有 A 、 B 、 C 、 D 四个点，其中 C 是弧 BD 的中点， $\angle CEA = \alpha$ ， $\angle DEC = \angle CEB = \beta$ 。过 B 、 C 、 I 、 D 分别向 AE 作垂线交于 F 、 G 、 K 、 H ，过 B 、 I 分别向 DH 作垂线交于 L 、 M 。

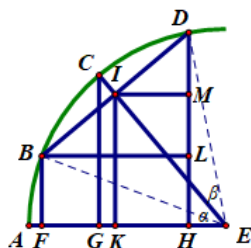


图 5 借助相似三角形的几何证明方法

由 $\triangle CGE \sim \triangle IKE$ 可得 $\frac{CE}{IE} = \frac{CG}{IK}$ ，而 $IE = R \cos \beta$ ， $CG = R \sin \alpha$ ， $IK = \frac{1}{2}(BF + DH) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$ ，代入可得：

$$\frac{1}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]}$$

即可推出三角函数积化和差公式。

若点 B 与点 A 重合，则有 $\alpha = \beta$ ，那么上式即可化为正弦的二倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

3.2.5 利用角平分线定理

Todhunter 在教科书《三角学入门》^[3]中还提出了推导半角公式的一种几何证明方法，我们受到此种方法的启发，将其角度都乘两倍，即可利用角平分线定理证明二倍角公式。

如图 6, 令 $\angle BOC = 2\alpha$, 过 OC 上一点 P 作 $PM \perp OB$ 于 M , OQ 是 $\angle BOC$ 的角平分线, 设 $OP = x$ 。

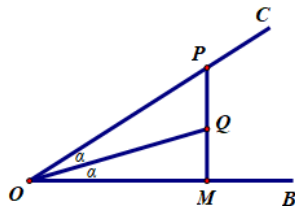


图 6 利用角平分线定理的几何证明方法

根据条件可知 $PM = x \sin 2\alpha$, $OM = x \cos 2\alpha$, 又由角平分线定理可得 $\triangle OPM$ 中的比例关系

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{OP}{OM}$$

我们知道 $\frac{OP}{OM} = \frac{x}{x \cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$, 故代入上述等式可得

$$\frac{PM - QM}{QM} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

再代入 PM 即可得到 $QM = \frac{x \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, 从而

$$\tan \alpha = \frac{QM}{OM} = \frac{\frac{x \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}{x \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

利用三角函数之间的关系进行如下转化

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha &= \frac{\sin^2 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)^2} = \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)^2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \\ \sec^2 \alpha &= 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \sin 2\alpha &= (1 + \cos 2\alpha) \tan \alpha = 2 \cos^2 \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

即可推得二倍角公式。

3.3 推理法——由一般到特殊

有 34 种教科书给出了 n 倍角的正余弦表达形式, 其中 14 种教科书选择了先给出 n 倍角公式再代入 $n=2,3,4,\dots$ 得到二倍角公式、三倍角公式、四倍角公式等。这是一种演绎推理法, 蕴含

了由一般到特殊的数学思想方法。关于 n 倍角公式的具体推导方法将在下文做具体阐述。

4 n 倍角公式的推导

在 34 种给出 n 倍角表达式的教科书中, n 倍角公式的推导方法涉及到以下 3 种具体方法。

4.1 利用和角公式

Young 在教科书《平面与球面三角学基础》^[8]中利用两个角的和角公式, 将 $n\alpha$ 分解为 $(n-1)\alpha$ 和 α 两个角, 从而可用 $(n-1)\alpha$ 和 α 来表示 n 倍角公式, 即

$$\begin{aligned}\sin n\alpha &= \sin[(n-1)\alpha + \alpha] = \sin(n-1)\alpha \cos \alpha + \cos(n-1)\alpha \sin \alpha \\ \cos n\alpha &= \cos[(n-1)\alpha + \alpha] = \cos(n-1)\alpha \cos \alpha - \sin(n-1)\alpha \sin \alpha\end{aligned}$$

此外, Davison 在教科书《中学平面三角学》^[9]中提出了更一般的方法, 即先求出 n 个角的和角公式, 从而推出 n 倍角公式的表达式。

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是任意 n 个角, 记 ${}_nS_r$ 为 r 个角的正弦值与 $(n-r)$ 个角的余弦值之积的全部和。

利用数学归纳法可以证得如下关系式:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) &= {}_nS_1 - {}_nS_3 + {}_nS_5 - \dots \\ \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) &= {}_nS_0 - {}_nS_2 + {}_nS_4 - \dots\end{aligned}$$

令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, 则 ${}_nS_r$ 中的系数为 $\frac{n_r}{r!}$, 其中 $n_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$, 即

$${}_nS_r = \frac{n_r}{r!} \sin^r \alpha \cos^{n-r} \alpha$$

从而

$$\sin n\alpha = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \frac{n_3}{3!} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \frac{n_5}{5!} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots$$

同理可得

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \frac{n_2}{2!} \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \frac{n_4}{4!} \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots$$

按照类似方法也可推出正切的 n 倍角公式。

4.2 棣莫弗定理

28 种教科书中提到了棣莫弗定理, 其中 18 种教科书具体地介绍了如何用棣莫弗定理推导出正余弦的 n 倍角公式。

根据棣莫弗定理的结论

$$(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$$

将等式左边用二项式定理展开, 对比实数项和虚数项即可得

$$\begin{aligned}\sin n\alpha &= n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots \\ \cos n\alpha &= \cos^n \alpha - \frac{n(n-1)}{2!} \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots\end{aligned}$$

4.3 利用和差化积公式

1569 年, 德国数理天文学家、哥白尼的学生雷提卡斯 (G.J. Rheticus)^[1] 获得了 n 倍角公式的另一种表示方法, 即用 $(n-1)$ 、 $(n-2)$ 倍角来表示的 n 倍角公式。

12 种教科书利用和差化积公式来推导 n 倍角公式的表达式, 即利用如下公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

在上述公式中, 令 $\alpha = (n-1)\beta$, 可得

$$\begin{aligned}\sin n\beta &= 2 \sin(n-1)\beta \cos \beta - \sin(n-2)\beta \\ \cos n\beta &= 2 \cos(n-1)\beta \cos \beta - \cos(n-2)\beta\end{aligned}$$

5 倍角公式推导方法的演变

5.1 二倍角公式推导方法的演变

以 40 年为一个时间段, 图 7 给出了三角函数二倍角公式推导方法的时间段分布情况。如图 7 所示, 二倍角公式的推导方法丰富多彩, 但利用和角公式法从 19 世纪至 20 世纪中叶一直占据主流地位, 在 4 个时间段均占比达到 70%, 这一推导方法也是我国现行教科书中普遍采用的推导方法, 直观且便捷。

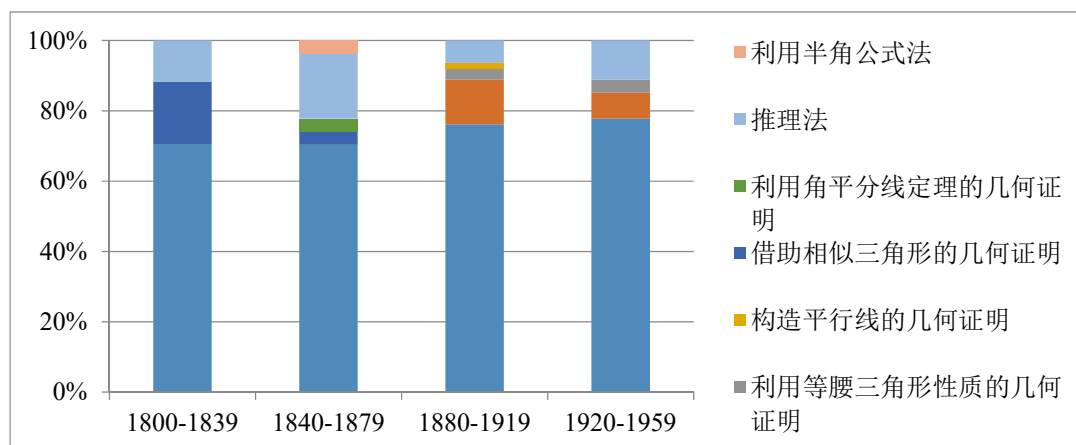


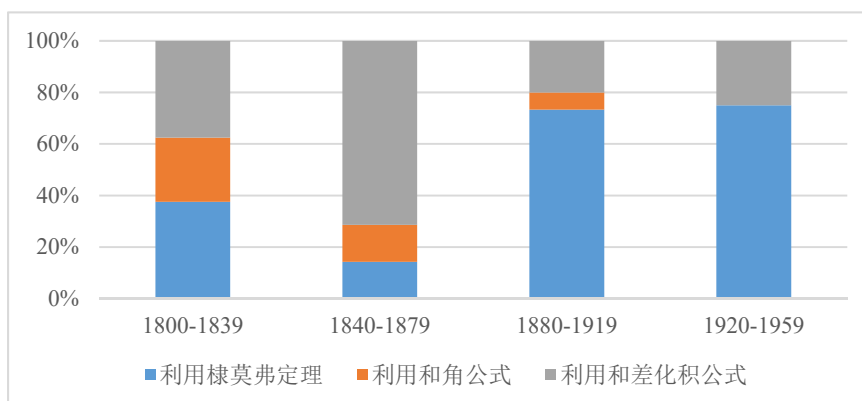
图 7 二倍角公式推导方法的演变

除了利用和角公式法，推理法也是每个时间段都采用的一种推导方法，即从一般到特殊的演绎推理法，这一方法有利于培养学生的数学学科核心素养，提高学生在数学抽象、逻辑推理方面的能力，贯彻了数学中“特殊”与“一般”的数学思想。

在几何证明方面，借助相似三角形的几何证明方法在十九世纪初较为普遍，随着时代的发展，在 19 世纪末和 20 世纪初，教科书中的几何证明方法更倾向于利用圆中角的性质进行证明。几何证明方法的演变趋势实际上是将较为复杂的几何证明方法化为更简单直观的几何图形来进行证明，抓住“二倍角”为切入点、利用单位圆，使三角函数的表示更直观便捷。

5.2 n 倍角公式推导方法的演变

以 40 年为一个时间段，图 8 给出了三角函数 n 倍角公式推导方法的时间段分布情况。如图 8 所示，3 种不同推导方法在不同时间段的占比变化都较为明显。

图 8 n 倍角公式推导方法的演变

我们知道,在所研究的教科书中,利用和角公式大多仅能导出 n 倍角三角函数和 $n-1$ 倍角三角函数之间的递推关系,同样,利用和差化积公式仅能导出 n 倍角三角函数和 $n-1$ 、 $n-2$ 倍角三角函数之间的递推关系。这两种方法并没有能具体地用本角三角函数表示出 n 倍角三角函数,因此随着时间的发展,教科书中对于这两个方法的使用逐渐减少。

而利用棣莫弗定理推导 n 倍角公式的方法逐渐占据主流。借助棣莫弗定理和二项式定理,我们可以直接得到 n 倍角公式的具体表达式,且该形式的表达式在今后的数学发展中起到了重要作用,与泰勒公式、傅里叶展开等重要公式定理有着密不可分的联系,这一方法也对今后教科书的编写产生了深远影响。

6 结论与启示

以上我们看到,推导倍角公式主要分为了推导二倍角公式和推导 n 倍角公式两个方面。美英早期三角学教科书中的倍角公式推导方法丰富多彩,充分结合了几何与代数方法,也体现了分类、转化、一般与特殊等重要数学思想;同时,美英早期三角学教科书中倍角公式也有着主流的推导方法。

早期教科书中倍角公式的推导方法及其演变过程可以为我们今日倍角公式的教学提供如下启示和建议。

其一,注重前后知识的互相联系。在学习二倍角公式的推导前,教师可以先让学生复习正弦、余弦、正切的两角和公式,引导学生考虑两角和公式的特殊情形,从而推导出二倍角公式。充分利用知识点之间的关系,为学生建立三角函数恒等变换公式之间的联系。

其二,利用数形结合思想,培养发散思维。虽然现行教科书中仅利用代数的推导得到二倍角公式,但教师也应当适当引导学生思考三角函数恒等关系的几何证明,拓宽学生的思路,做到代数与几何相互转化,强调数形结合的数学思想。

其三,推广结论,提高推理能力。虽然我国现行高中数学教科书中并未涉及 n 倍角公式的相关知识,但教师可引导学生思考如何将二倍角公式推广至一般的 n 倍角公式,以拓展学生知识面、提高学生的逻辑推理和数学抽象能力,为将来的数学学习提供经验基础。

其四,注重例题、习题的设置。在美英早期三角学的部分教科书中,十分注重对例题、习题的设置来巩固知识点的学习。利用倍角公式,通常可以推导出一些三角函数恒等关系的结论,

同时, 倍角公式与和角公式、和差化积公式、积化和差公式、半角公式等三角函数恒等式有密不可分的关系, 因此教科书中通常会出现要求证明某个三角函数恒等式一类的题型。教师在教学过程中, 要注意例题设置的层次性, 并辅以相关习题进行练习。

其五, 融入数学史, 弘扬数学文化。在教学过程中, 可以尝试结合丰富的历史素材, 来增强课堂的趣味性, 使课堂充满浓郁的历史文化气息, 让学生体会到数学知识由来的悠久历史, 从而吸引学生兴趣, 帮助学生突破重难点。

参考文献

- [1] 汪晓勤. n 倍角正、余弦公式史略[J]. 中等数学, 1998(01): 24-26.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017.
- [3] Todhunter, I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London: Macmillan & Company, 1866.
- [4] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge, 1898.
- [5] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915.
- [6] Rider, P. R., Davis, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1923.
- [7] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge, 1898.
- [8] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Souter, 1833.
- [9] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919.

教学实践

HPM 视角下圆锥曲线的光学性质及其应用的教学

王文雅¹ 刘梦哲²

(1. 浙江大学附属中学, 浙江 310007; 2. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

圆锥曲线是高中数学的重点与难点, 从圆锥曲线的标准方程到几何性质, 不仅蕴含数形结合等思想, 还对学生的数学抽象素养提出了一定的要求。在圆锥曲线的几何性质中, 几何光学性质在生活中有比较重要的应用。例如, 椭圆镜面用来制作电影放映机的聚光灯、双曲面用来设计汽车后视镜、抛物面用来制作探照灯等。

从已有的教学设计中发现, 大部分教师侧重于性质的证明和浅显的应用, 而忽视对深层次应用的挖掘, 这导致学生对于圆锥曲线光学性质的学习流于表层。鉴于上述问题, 许多教师对圆锥曲线的光学性质及其应用的教学进行了探索。有的教师尝试 STEM 与中学教学的融合实践探索, 引导学生发现与探究圆锥曲线的光学性质及其在数学与生活中的应用, 进而开展小组合作设计天文望远镜, 丰富学生数学的学习过程, 培养学生创新思维^[1]。有的教师开展“嵌入式”数学建模课堂教学, 通过百发百中的弹珠、反射镜及太阳灶三大模型, 将学生置于“数学应用”的环境中, 再从所给的情境中提取数学信息, 并转换成数学语言, 最终构建模型证明圆锥曲线的光学性质^[2]。

随着新课程新改革的不断推进, 为了更好地发挥新教材阅读材料作为学生数学核心素养培养的载体作用, 可以尝试让数学文化走进课堂。HPM 让数学课堂充满历史底蕴, 从而架起历史与现实之间的桥梁, 对学生理解知识、掌握技能以及落实立德树人根本任务起到了十分重要的作用。鉴于此, 本节课从 HPM 视角, 就圆锥曲线章节的阅读与思考板块, 结合在杭州市教育局主办的“双新”实施国家级示范区教学展示活动中开设的“圆锥曲线的光学性质及其应用”, 谈谈设计过程中的几个想法。本节课拟订的教学目标如下。

(1) 通过分析探索圆锥曲线光学性质在现实生活中的应用, 提升数学建模素养。

(2) 通过几何图形的构造巧妙证明圆锥曲线光学性质的过程, 提升逻辑推理素养。

(3) 通过圆锥曲线光学性质的代数应用与变式拓展, 提升数学运算素养。

2 历史材料及其运用

(一) 光学的发展历史

光学是希腊人创立的, 从毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约 570 B.C.-490 B.C.) 以后的几乎所有希腊哲学家都探讨过光的性质、视象和光色^[3]。欧几里得 (Euclid, 约 325 B.C.-265 B.C.) 的《光学》和《镜面反射》是光学方面的第一批系统性的著作。《光学》研究视象问题以及怎样从视象确定物体的大小。《镜面反射》则描述从平面镜、凹面镜和凸面镜反射出来的光的习性以及它对我们视觉的影响, 在这其中就有今天所说的反射定律。

海伦 (Heron, 约 10-75) 从反射定律出发, 在《镜面反射》一书中推出了一个重要的结论^[3]。如图 1, 若 P 及 Q 是在直线 ST 同侧的任意两点, 则从点 P 到直线再到点 Q 的一切路径中, 以通过直线上点 R 使线段 PR 及 QR 与 ST 的夹角相等的那个路径为最短, 而这恰好就是光线所要经过的路径。所以, 光线从 P 出发照过镜面再到 Q 是采取最短路程的。

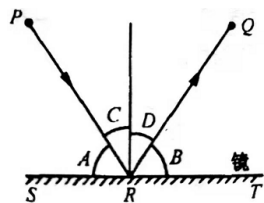


图 1 海伦在光学上的研究

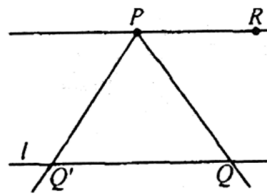


图 2 开普勒的研究

阿基米德 (Archimedes, 287 B.C.-212 B.C.) 所著而现已失传的《镜面反射》, 以及狄奥克勒斯 (Diocles, 约 240 B.C.-180 B.C.) 和阿波罗尼奥斯 (Apollonius, 约 262 B.C.-190 B.C.) 所写书名同为《论点火镜》的两部著作都论述了光线在各种形状镜面上的反射。阿波罗尼奥斯肯定知道抛物镜面能把焦点处发出的光反射成平行于镜面轴的光束。反之, 若照射的光线平行于轴, 则反射后就聚集在焦点处。据说阿基米德就是利用抛物镜面的这一性质, 把日光集中到罗马船上使他们起火的^[3]。他 also 知道其他圆锥曲线的反射性质, 例如, 从椭球面镜一焦点发出的光经反射后会集中到另一焦点上。他在所述《圆锥曲线》第三篇里讲述了椭圆和双曲线的有关几何性质, 却没有提到抛物线的性质^[4]。

中世纪科学家对光学也有着浓厚的兴趣，一些科学家根据光被透镜折射的知识，定出了一些透镜的焦距，研究了透镜的组合，改进了解释彩虹的理论。中世纪后，光学继续成为一门重要科学，开普勒（Kepler, 1571-1630）、伽利略（Galileo, 1564-1642）、费马（Fermat, 1601-1665）、牛顿（Newton, 1643-1727）等科学家都在这方面进行工作。

（二）开普勒的工作

1604 年，开普勒决定要给平行线增添一个无穷远点^[3]。如图 2，对于通过 P 而交于 l 的每根直线，有 l 上的一点 Q 与之对应。但对于过 P 而平行于 l 的直线 PR ，却没有 l 上的点同它对应。但若增添 PR 及 l 所共有的一个无穷远点，开普勒便可断言通过 P 的每根直线都交于 l 。此外，在 Q 往右移向“无穷远”而 PQ 变为 PR 后，可把 PR 与 l 的交点看成是 P 左边的一个无穷远点，而当 PR 继续绕 P 旋转时， PR 与 l 的交点 Q' 就从左边移进。这样，就使 PR 与 l 交点的移动保持连续性。换言之，开普勒认为直线的两“端”是在“无穷远”处汇合的，因而认为直线和圆有同样的结构。事实上，开普勒确乎把一根直线看做是圆心在无穷远处的一个圆。

基于笛沙格（Desargues, 1591-1661）、帕斯卡（Pascal, 1623-1662）和拉海尔（La Hire, 1640-1718）等人得出的一些定理，17 世纪开始出现了一种新的思想和观点，即一个数学对象从一个形状连续变到另一个形状的思想^[3]。这里的数学对象就是几何图形。开普勒在 1604 年所著的《天文学的光学部分》里指出：抛物线、椭圆、双曲线、圆、由两直线组成的退化圆锥曲线，都可以从其中之一连续变为另一个。为实现从一个图形连续变换为另一个图形的过程，开普勒设想一个焦点固定，而让另一个焦点在它们的连线上移动。若让动点移向无穷远（同时让偏心率为 1），椭圆就变成抛物线；然后让那个动焦点又出现在定焦点的另一方，这时抛物线就变成双曲线。当两焦点合而为一，椭圆变成圆；当双曲线的两焦点合在一起，双曲线变退化为两直线。要使一焦点从一个方向移往无穷远，而又从另一个方向重新出现，开普勒就假定了（如前所指出过的）直线向两端无限延伸之点在无穷远处合成一点，从而赋予直线以圆的性质。虽然在直观上这样看待直线并不令人满意，但这种思想在逻辑上是合理的，而且事实上在 19 世纪的射影几何里成为了一个基本原理。

（三）费马的工作

古希腊时期，欧几里得在其《镜面反射》证明了反射定律，而后，海伦把最短路径和最少时间原理应用到了凹和凸的球面镜的反射问题上去。根据这种反射现象，还根据哲学、神学和

审美的原则，在希腊时代以后的哲学家和科学家们提出了一种学说，就是大自然以最短捷的可能途径行动。中世纪时期，自然是以这一方式行动的观点也普遍地为人们所接受。

17 世纪的科学家至少是容易接受这种观念的，但是，作为科学家，他们企图把这种观念和支持这种观念的现象联系起来。费马知道反射时光线所需时间最少的路径，而且相信自然确实是简单而又经济地行动的。在 1657 年和 1662 年的信件中，他确认了它的最小时间原理，这个原理说：光线永远取花时间最少的路径行进。他曾怀疑过光的折射定律的正确性，但当他在 1661 年发现他能够从他的原理导出光的折射定律时，他不但解除了对折射定律的怀疑，而且更加确信他的原理是正确的^[5]。

费马在最初提出这一原理时，将其称为“最小时间原理”，今天，我们则将其称为“费马原理”，其内容为：光传播的路径是光程取极值的路径。这个极值可能是最大值、最小值，甚至是函数的拐点。

3 教学设计与实施

（一）问题引入 激发兴趣

从平面反射到曲面反射，教师带领学生回忆反射原理，为后面探究光线在特殊曲线上的反射做铺垫。如图 3，已知入射光线 AB 和入射光线 QP ，请学生画出反射光线。

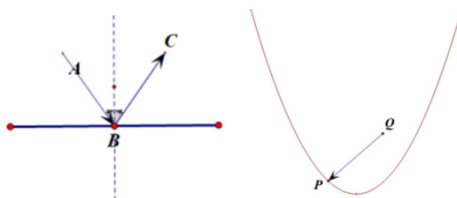


图 3 入射光线的反射光线

师：如图 4，如果我们把点光源放在 Q 点，会有怎样的反射现象？

师：这样的反射现象能否为生活所用呢？

师：如图 5，如果我们把曲线变成某种特殊的曲线比如抛物线， Q 点从某些特殊的点出发，

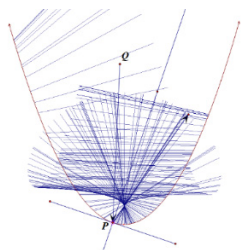


图 4 实验操作（一）

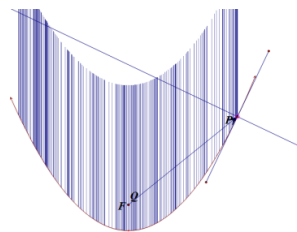


图 5 实验操作（二）

比如焦点，会有怎样的反射现象呢？

【设计意图】通过问题串，引导学生从杂乱的现象入手思考特殊曲线特殊光线是否给有特殊的反射现象。从现象中带领学生发现和提出问题，激发学生的探究兴趣。

（二）联系生活 发现性质

师：通过上述实验，你发现抛物线有怎样的光学性质？

生：抛物线从焦点发射的光经曲线反射，反射光线会平行于对称轴。

师：这样光学性质在现实生活中有什么应用？

生：卫星接收器，手电筒。

师：你能解释背后的设计原理吗？

（案例 1：卫星接收器）对于卫星接收发射器，我们可以把信号源放在抛物面焦点处，信号经抛物面反射变成平行信号可以远距离传输给卫星。

（案例 2：手电筒）手电筒的设计里含有一个抛物面，如果我们把灯放在焦点处，入射光线经反射后，反射光线是平行光线，可以照得更远。

师：在实际生活中，抛物线的光学性质可以帮助我们实现长距离的信号传输，而对于短距离的定点传输有时候我们也会借助椭球面，你知道为什么吗？

师：如图 6，剧院通常设计成椭球形，如图 7，美国发明了一个椭球玻璃房用来测试喇叭音质，你能否猜测椭圆的光学性质吗？



图 6 椭球玻璃房

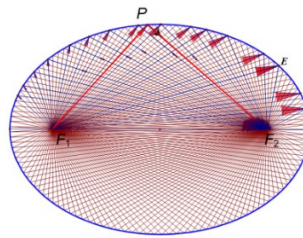


图 7 椭球玻璃房测喇叭音质原理

生：椭圆从一个焦点发出的光经反射会经过另一个焦点。

师：你能否试着解释为什么椭球面可以应用于短距离的信号传送以及音质测试原理？

（案例 3：短距离信号传送）信号源位于焦点处，朝各个方向发射，经反射后都会经过另一个焦点，因此 F_2 处的信号接收器可以接收到较强的信号。

（案例 4：椭球玻璃房测喇叭音质原理）如图 7，我们把喇叭放在 F_1 处，喇叭朝各个方向发射声波，经反射后都会等波程抵达另一个焦点，因此声波之间不会相互干扰， F_2 处可以检测到原始声波。

师：双曲线有怎样的光学性质？

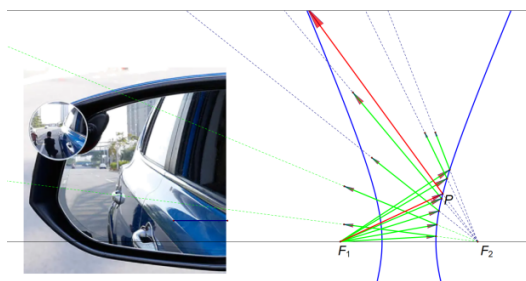


图 8 汽车后视镜

生：双曲线从焦点发射的光经反射后，反射光线反向聚焦到另一个焦点。

师：观察图 8，你能试着解释为什么在汽车反光镜上安装曲面镜有助于扩大视野范围？

生：如果司机把眼睛放在焦点处，从焦点处发射的光经反射后发散可以增加视觉范围。

【设计意图】教师通过问题串引导学生从现象入手，发现圆锥曲线的光学性质，并进一步解释生活应用背后的数学原理。

（三）追本溯源 证明性质

（1）椭圆的光学性质

师：我们如何来证明椭圆的光学性质呢？

师：如图 9，圆 O 的半径为定长 r ， A 是圆 O 内一个定点， P 是圆 O 上任意一点，线段 AP 的垂直平分线 l 和半径 OP 相交于点 Q ，当点 P 在圆上运动时，点 Q 的轨迹是什么？

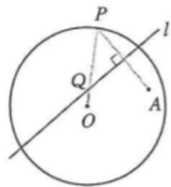


图 9 椭圆的轨迹

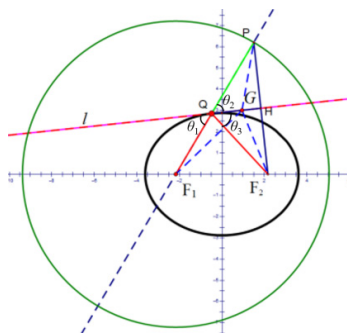


图 10 椭圆的光学性质

生: 椭圆, Q 到定点 O 、 A 距离之和为定值 r , 两定点距离 $OA < r$, Q 点满足椭圆定义。

师: O 、 A 是椭圆的什么?

生: 两个焦点。

师: 中垂线 l 和椭圆的位置关系是什么? 如何证明?

生: 相切。假设 l 与椭圆存在另一个交点 G , $GF_1 + GF_2 > r$, G 在椭圆外, 与假设矛盾。

师: 如何进一步证明椭圆的光学性质?

生: 如图 10, 只要证明入射光线, 反射光线与镜面的夹角相等就可, 也就是只用证明 $\theta_1 = \theta_3$ 。

因为对顶角相等, 所以 $\theta_1 = \theta_2$, 又因为中垂线构造的全等, 所以 $\theta_2 = \theta_3$, 则 $\theta_1 = \theta_3$ 。

(2) 双曲线的光学性质

师: 如图 11, 如果把给定圆的半径变小, A 点是圆 O 外一定点, 也就是: 圆 O 的半径为定长 r , A 是圆 O 外一个定点, P 是圆 O 上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线 l 与直线 OP 相交于点 Q , 当点 P 在圆 O 上运动时, 点 Q 的轨迹是什么?

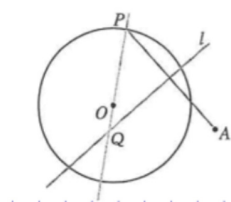


图 11 双曲线的轨迹

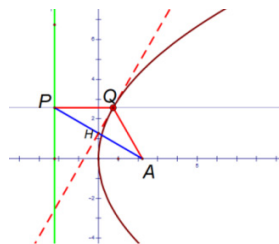


图 12 抛物线的轨迹

生: 双曲线, Q 到两定点 A 、 O 距离之差为 r , 两定点距离 $AP > r$, Q 点满足双曲线定义。

师: O 、 A 是双曲线的什么?

生: 焦点。

师：中垂线 l 和椭圆的位置关系是什么？如何证明？

生：相切。我们可类比椭圆进行证明。

师：你能否进一步证明双曲线的光学性质？

生：我们只要证明入射光线，反射光线与镜面的夹角相等就可，证明过程也与椭圆同理。

（3）抛物线的光学性质

教师首先介绍数学史材料：数学史上开普勒指出直线是圆心在无穷远处的一个圆。

师：请大家结合数学史材料，如果我们把给定圆 O 的半径变无穷大？会出现什么情况？

教师引导学生类比画出图 12，此图即为课本上产生抛物线的轨迹图。

师：你能否证明轨迹是抛物线？

生：如图 12， Q 点到定点和定直线的距离相等，且定点不在定直线上。

师：你能否证明抛物线的光学性质？

生：同样的道理证明角度相等即可。

【设计意图】通过问题串引导学生发现轨迹，定点定直线与轨迹的关系，并借助镜面反射原理从角度入手实现圆锥曲线光学性质的统一证明。整个过程不仅展现了圆锥曲线的内部联系，也揭露了光学性质背后的本质。

（四）升华理解 综合统一

师：17 世纪初，开普勒大胆地指出，抛物线相当于在无限远处闭合的椭圆，“抛物线”还有一个“无穷远”处的“焦点”。此外，当椭圆的另一个焦点 F_2 绕过无穷远点又回到平面的有限位置，但 F_1 、 F_2 左右位置关系反转了，此时曲线在有限位置的可见部分变成了双曲线的两支。

师：结合上述数学史材料，你认为圆锥曲线的光学性质有什么共同点？

生：可以理解为从一个焦点出发经曲线反射，反射光线经过另一个焦点。抛物线另一个焦点在无穷远处，双曲线从焦点发生的光反射后，反射光线经过无穷远处又回到另一个焦点。

随后，教师利用几何画板验证学生的猜想，即抛物线和双曲线在无穷远处是连通的，且从一个焦点发射的光经反射会经过另一个焦点（图 13）。

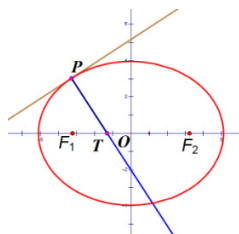


图 14 动弦中垂问题 1 图

生 1: 从光学角度理解, PT 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 因此只用求角平分线与 x 轴交点范围。

生 2: 我们也可以把它转换成求椭圆割线 AB 的中垂线与 x 轴的交点范围。

师: 为什么可以这样转换?

生 2: 因为割线的极限状态就是切线。

师: 很好, 我们可以把这个问题进行如下转换。

问题 2: 如图 15, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A, B 是椭圆上的两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交 $T(t, 0)$, 求 T 点横坐标的范围。

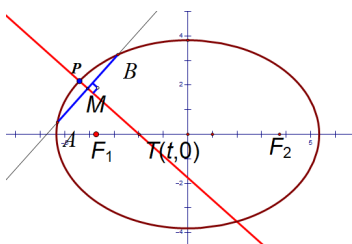


图 15 动弦中垂问题 2 图

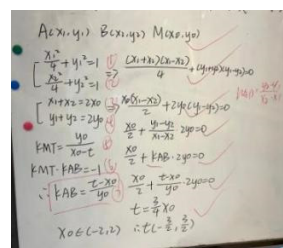


图 16 动弦中垂问题 2 学生板书

生: 学生板书见图 16。

推广 1: 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A, B 是椭圆上的两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于 $T(t, 0)$, 求 T 点横坐标的范围。

类似于动弦中垂问题 2 的做法, 学生计算可得 $t = e^2 x_0$ 。

师: x_0 的范围是多少?

生: $x_0 \in (-a, a)$ 。

师: 割线 AB 的中垂线与 x 轴交点的横坐标范围是多少?

生: $t \in (-ce, ce)$ 。

推广 2: 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1 、 F_2 分别为其左右焦点, 点 P 是椭圆上除长轴端点外的任一点, 连接 PF_1 、 PF_2 , 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PT 交椭圆的长轴于点 $T(t, 0)$, 求 t 的取值范围?

生: 一样的, 过 P 点的法线与 x 轴的交点范围 T 的横坐标 t 的范围也是 $t \in (-ce, ce)$ 。

师: 还可以有哪些探究呢? 其实我们可以考虑将其设计成开放性试题, 或者将其类比推广到双曲线和抛物线, 具体的留给同学们课后探索。

序号	思考题	几何画板截图
1	(i) A、B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点, A、B 的中垂线是否会过焦点? (ii) A、B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点, A、B 不垂直于 x 轴, 是否存在以焦点 F_1 为顶点, AB 为底边的等腰三角形?	
2	已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, A 、 B 是双曲线同一支上两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于 $T(t, 0)$, 求 T 点横坐标的范围?	
3	抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, A 、 B 是抛物线上两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于 $T(t, 0)$, 求 T 点横坐标范围?	

【设计意图】以反射模型中的法线为载体展开讨论, 再利用极限思想巧妙地解决动弦中垂与 x 轴交点范围问题。结合学生的具体情况也将这个问题进行进一步拓展思考。

(3) 椭圆上的点到对称轴上的点的最值问题

师: 如果我们把问题反过来, 给定 x 轴上一点 T , 此时椭圆上的点到 T 点的距离一定存在最值。当 PT 取最小值时, T 点可能在哪里取到? (几何画板演示)

生: 图 17, T 点可能是在切点处取最值, 也可能是在顶点处取最值。

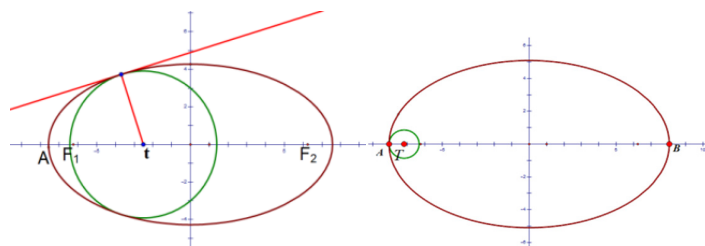


图 17 PT 取最小值时不同的状态图

师：下面我们一起来探索下 T 在不同位置时取最小值的情况。

问题：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1 、 F_2 分别为其左右焦点, 令 $T(t, 0)$, P 为椭圆上任意一点, (i) 若 PT 最小值时, P 不在长轴端点处取到, 则 t 的范围_____；(ii) 若 PT 最小值时, P 在长轴端点处取到, 则 t 的范围_____。

师：你能否猜测并证明 PT 取最小值时, P 不在端点处取得时 t 的范围？

生：猜测 $t \in (-ce, ce)$ 。

师： PT 取最小值时, P 在端点处取得时 t 的范围？

生： $(-\infty, -ce) \cup (ce, +\infty)$ 。

师：如何证明？

生：可以从代数角度证明。

师：能否从几何角度进一步理解呢？

【设计意图】椭圆上的点到对称轴上的点的最值问题是动弦中垂问题的逆向变式，该类问题对学生来讲较理解较为困难，但是结合光学背景可以快速解决。

（六）总结升华 纳入体系

总结 1：我们从生活现象出发，发现了现象背后的数学原理，并用焦点来统一圆锥曲线的光学性质，以法线为背景展开讨论。

总结 2：我们要学会用类比的方法来进行学习，椭圆双曲线抛物线之间有着密切的联系。

总结 3：数学从生活中来到生活中去。我们要用数学的眼光发现和提出问题，并用数学工具分析和解决问题。

4 结语

从学生的角度，本节课以圆锥曲线的光学性质为背景，帮助学生搭建脚手架，轻松解决生活以及数学中的问题。本节课在引导学生发现问题过程中，做到聚焦高考，延展课外，即帮助学生掌握知识，也培养了数学核心素养。

其一，聚焦高考，分析解决一类高考难题。光路最值，动弦中垂问题，椭圆上的点到对称轴上的点的最值问题等问题，运算较为困难，但借助光学背景，可以较好地帮助学生攻克。

其二，延展课外，本节课融入数学史材料，可以帮助学生更好地站在高观点理解知识，进而较好地统一性质。如开普勒指出直线是圆心在无穷远处的一个圆，融入极限后，学生可以较地将圆锥曲线的光学性质进行统一。如费马对于光路传播特点的描述有助于学生进一步理解光程问题。

从教师教的角度，本节课基于学生最近发展区的问题串设计，试题选择，几何画板软件辅助为课程的推进起到了良好的促进作用。同时，数学史材料的使用，虽不多但是都恰到好处地达成了教师预设的目的。师生在探究过程中无不惊叹圆锥曲线的奥秘。而留有的遗憾是课堂节奏会稍显紧促，因此教师可以结合具体情况拓展，或可以考虑课前提前下发预习清单。

参考文献

- [1] 赵静茹. STEM 理论在高中数学教学中的实践——以《圆锥曲线的光学性质及其应用探索》为例[J]. 读写算, 2021(31): 93-94.
- [2] 罗秋. 数学建模教学模式探索之嵌入式——以探究圆锥曲线的光学性质为例[J]. 广西教育, 2021(06): 64-66.
- [3] M·克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 189-191+339+349.
- [4] 阿波罗尼斯(朱恩宽等译). 圆锥曲线论[M]. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2007.
- [5] M·克莱因. 古今数学思想(第二册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 330-331.

学术动态

万物皆比寻根源，育智育德浸课堂

——“比的意义”课例研讨活动

王智洋 刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2021 年 12 月 2 日，数学史与数学教育（HPM）工作室及上海市延安初级中学“指向学科德育的初中数学课例研究”课题组开展了主题为“比的意义”线上课例研讨活动。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授和邹佳晨老师，长宁区教育学院教研员栗小妮老师，上海市延安初级中学的杨欣乐老师。此外，华东师范大学 HPM 工作室成员及 HPM 方向的硕博研究生，上海市延安初级中学杨欣乐老师课题组成员也参与了此次研讨活动。本次活动主要分为课堂教学展示、课后交流研讨、活动总结共三个环节。

一、课堂教学展示

教学展示 1：

上海市延安初级中学的李素珍老师首先通过“两个部落间交换物品”的情境引导学生给出不同交换方案，再让学生思考最“公平”的交换方案。接着，李老师将情境转换为“三个部落间兑换货币”，请学生思考并分享自己的兑换过程，并由此提到度量衡的统一。然后，李老师播放微视频向学生阐述度量衡的含义，介绍中国早期的测量方式和单位，如“布手知尺”等，并亲用手示范测量讲台的尺寸。随后，李老师引导学生总结比的定义，并且对定义进行解析，从两个数或量的关系的角度揭示了比的意义。之后，学生在李老师的组织下独立思考、分组讨论，并交流分享了比、分数、除法三者之间的关系。最后，师生共同列举了生活中的比，用定义验证其是否满足课本中比的定义，包括球赛比分、黄金比等，并对本节课进行总结。



图 1 李老师的课堂教学



图 2 李老师的课堂教学

教学展示 2:

上海市教育学会宝山实验学校的吴琼老师利用“物物交换”的问题情境，让学生小组讨论给出交换方案，再全班讨论哪一种交换方案更好。接着，吴老师通过学生们的分享引出本节课的主题“比的意义”，并请学生提出了当下的问题与困惑，包括比的定义，比的对象等，并一一解答学生在理解上的困难。之后，吴老师组织学生小组交流讨论了比、除法和分数三者之间的区别和联系，让学生们对比的定义有了更深刻的理解，对比的书写形式也有了进一步的掌握。然后，吴老师让学生们进行练习巩固，并上黑板演示，在师生讨论中强化了比值的计算方法。最后，吴老师和学生一起列举了生活中的比，包括黄金比等，并通过改编课前的问题情境，抛出利润分配问题，为之后比例的学习做铺垫。

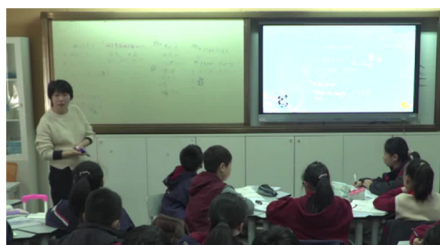


图 3 吴老师的课堂教学



图 4 吴老师的课堂教学

二、课后交流研讨

观摩之后，两位老师介绍了自己的教学设计意图，并且分享实施感受。接着，参与活动的老师就本节课进行了交流与研讨。

上海市新杨中学的李德虎老师将观课体会总结为一句话“沟通了历史与现实，横跨了代数与几何”。李老师说到，两位老师均从物物交换的角度引入课堂，实现知识之谐；以物易物让学生体会比是表示两个数量关系的一种最有效方法，体现了方法之美；运用黄金比、度量衡等古今中外的例子彰显了文化之魅；在课堂上渗透“公平”的思想、制定分配规则，达成了德育

之效。其次，两位老师带领学生探究比的定义的过程中结合运算、分数、相似比等概念，架起了代数与几何之间的桥梁。

上海市延河中学的孙洲老师用“由点及面，处处开花”来形容李素珍老师的课。孙老师说到，从物物交换这一个“点”出发，与学生交流探讨，引出了比的意义这一个“面”。李老师的课中每个环节都渗透了文化和德育，还包括美育，让学生体会到数学与生活息息相关，对比的概念既有了直观形象的认识，又理解了抽象的定义。在 HPM 的视角下，通过李老师精心的设计和史料的融合，课堂呈现出“处处开花”的局面。

上海民办建平远翔学校的贾彬老师认为李素珍老师的课有主题、有思想、有突破。李老师围绕着古代物物交换的情境，每个环节通过问题串联结，同时老师渗透的德育思想，并通过融入古代、现代的多个问题情境让学生全方位、深层次地感受到比的意义。李老师课堂上提出的“公平”思想，与如今的时代背景非常吻合。吴琼老师同样以问题串的形式引出课堂，给予学生更多的主动性，值得大家学习。最后，贾老师对于问题情境的选择以及课堂的引入，结合自身的教学经验提出了个人的建议。

上海市延安初级中学的杨欣乐老师提出李素珍老师采用情境教学的方式，建立了生活和数学之间的联系。李老师的课堂结构清晰，首先利用数学史引出比，然后引导学生认识比，感受比，拓展比，教学设计具有整体性和流畅性。同时，李老师在课堂的各个环节渗透了德育，为老师们做出了很好的学习模范。

华东师范大学的刘思璐博士生提出，吴琼老师的第一个问题情境让学生对两个量关系的描述，教学实施时学生们的回答情况与预期不符，这点值得反思。另外，吴老师课堂上有一大亮点，即鼓励学生主动提问。吴老师给予了学生充分的主动性去发现和提出问题，并在老师的启发下分析和解决问题。

三、课例活动总结

活动最后，汪晓勤教授从四个方面总结了两位老师的课堂教学。其一，从历史到课堂。两位老师从古代交换和度量的角度进行问题情境的创设，引出本节课的探究主题。其二，从生活到数学。课堂上师生举的例子涉及到了分配、审美、融合、兑换等生活的各个方面。其三，从知识到能力。两位老师运用互动式教学，给课堂留白，以知识为载体培养学生的能力。其四，

从育智到育德。两位老师结合历史素材，从理性、信念、品质等方面渗透了德育，揭示了数学有用、有源、有美。

近三个小时的研讨活动在汪老师的精彩点评中逐渐落下了帷幕。活动虽已结束，但 HPM 团队将数学史融入数学课堂的研究和探索的脚步永远不会停止，相信在团队成员的共同努力下，未来一定会涌现出更多精彩的课例！

共话 HPM 开启新篇章

——记第一届全国小学 HPM（数学史与数学教育）研讨会

岳增成

（杭州师范大学教育学院，浙江 杭州 311121）

从价值到实践，从实践到理论，在理论与实践的互动中，HPM 理念生根、发芽、开花、结果，HPM 共同体迅速壮大。为了更好地传播 HPM 理念，让更多的小学数学教师更好地将数学史融入教学、开展学科育人活动，并从中受益，第一届全国小学 HPM 研讨会系列活动于 2021 年 12 月 12 日至 2022 年 1 月 1 日的每个周末以线上的形式顺利开展。



1 专家报告

2021 年 12 月 12 日，华东师范大学、杭州师范大学、北京教育学院、石河子大学的高校专

家介绍了相关的 HPM 研究成果,浙江杭州、山东青岛、陕西西安、江苏苏州、河北迁安、福建莆田等地团队负责人介绍了所在区域的 HPM 教研成果,小学教学(数学版)主编介绍了期刊中的数学史、数学文化选文特点(表 1)。

表 1 会议安排

主题	报告人	时间安排
开场	杭州师范大学 岳增成博士	8:55-9:00
理想照进现实——HPM 北京实践之路	北京教育学院 潘丽云博士	9:00-9:30
基于数学史的小学数学单元统整教学研究	青岛市小学数学教研员 刘仍轩	9:30-10:00
从数学史到数学史+	苏州市姑苏区小学数学教研员 蔡宏圣	10:00-10:30
我在中国大陆的 HPM 实践与思考	“超脑麦斯”创意思维数学课程 首席教师 王圣昌	10:30-11:00
期刊中的数学史与数学文化——以“小学 教学(数学版)”为例	小学教学主编 殷现宾	11:00-11:30
HPM 的若干研究与展望	华东师范大学 汪晓勤教授	13:00-13:30
从个体到区域——杭州小学 HPM 的实践 路径演进	杭州师范大学 岳增成博士	13:30-13:55
小学 HPM 教研:我们做了什么?我们从中 获得了什么?我们期待什么?	HPM 工作室杭州小学教研基地 东城第二实验学校 徐彬 杭州十四中附校 陈爱君	13:55-14:20
数学史融入数学课堂,让学科素养培养落 地	陕西省小学数学学科带头人工 作坊主持人 李蕾	14:20-14:45
数学史融入新疆小学数学课堂教学的实践 与探讨	石河子大学 洪燕君博士	14:45-15:10
区域小学数学教师数学史素养现状调查与	迁安市小学数学教研员	15:10-15:35

启示——以河北省迁安市为例	王志军	
基于数学史的小学数学教研的困境	莆田市林青名师工作室负责人	15:35-15:50
	林青	
会议总结	小学教学主编 殷现宾	15:50-16:00

2 教学观摩与研讨

2021 年 12 月 18 日、2021 年 12 月 25 日、2022 年 1 月 1 日四个地域的 6 位老师进行了课例展示，殷现宾、潘丽云、栗小妮、岳增成、王志军、汤佳锋、蒋燕芬等老师参与了课例的研讨（表 2）。

表 2 课例展示的基本情况

课题	授课教师	所在单位
观察物体（二）	徐炎	杭州市桐庐县分水实验小学
在历史中探寻分数的秘密	吴金华	北京市昌平区昌盛园小学
面积	李建良	杭州市萧山区夹灶小学
百分数的认识	王小娟	迁安市马兰庄社区小学
平面图形再思考	陈爱君	浙江省杭州第十四中学附属学校
五音不全	王圣昌	“超脑麦斯”创意思维数学课程首席教师

3 圆桌会议

2021 年 1 月 1 日晚，基于前四场活动的报告内容与课例展示及研讨，殷现宾主编、潘丽云博士、栗小妮博士、岳增成博士、罗曼琳校长参与了题为“小学 HPM 的现状与未来”的圆桌会议，就小学 HPM 领域的重要议题进行了深度探讨。

本次研讨会是小学 HPM 的一次盛会，有来自全国 11 个地区的 14 位高校研究者、教研员、期刊主编、小学教师进行了专题报告，内容涵盖县域教师的 HPM 素养调研、省市级名师工作室与市区级教研室相关教研成果的推介、教研成果的刊发、教师教育与教师培训、小学 HPM 的回顾与展望等，向云端同行呈现了小学 HPM 的多元样态；有来自四个地区五个主题的三种类型的

六节展示课及研讨，向云端同行呈现了数学史与数学教学深度融合；有高校教师、期刊主编、教研员、名师工作室主持人参与的“小学 HPM 的现状与未来”的圆桌会议，就共同体关注、影响小学 HPM 走向深度的问题进行了深度探讨，以期对未来小学 HPM 的发展提供参考。研讨会共吸引了累积超过 5 万的观看量，受到了较好的评价，很好地完成了预期的会议目标。期待数学史更多、更好地融入小学数学教育，更好地展现出数学学科的育人价值。

2021 年 HPM 研究成果总汇

理论探讨

- [1] 汪晓勤. 对数的历史及其德育价值——兼论对数教学设计. 教育研究与评论(中学教育教学), 2021(03): 67-72.
- [2] 汪晓勤. 从古希腊几何难题引出的数学问题. 数学通报, 2021, 60(03): 8-12+17.
- [3] 王鑫, 岳增成, 汪晓勤. HPM 研究的框架与进展. 数学通报, 2021, 60(06): 7-12+19. 人大复印报刊资料转载.
- [4] 汪晓勤, 邹佳晨. 高中数学教学中实施课程思政的路径. 数学教学, 2021(08): 1-6.
- [5] 汪晓勤. 关于 HPM 课堂教学评价的案例分析. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.

历史研究

- [6] 韩粟. 美英早期代数教科书中的等差数列知识. 数学教学, 2021(02): 6-12.
- [7] 邵爱娣, 栗小妮, 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的“负负得正”解释方式研究. 数学教育学报, 2021, 30(01): 85-90.
- [8] 纪妍琳, 汪晓勤. 美英早期立体几何教科书中的类比思想. 中学数学月刊, 2021(02): 56-60.
- [9] 杨孝曼, 汪晓勤. 美英早期教科书中的负数概念. 数学通讯, 2021(07): 1-5+18.
- [10] 狄迈, 汪晓勤. 美英早期代数教科书中的复数概念. 数学通讯, 2021(08): 5-8+25.
- [11] 闫欣, 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的集合概念. 中学数学月刊, 2021(04): 55-58+66.
- [12] 狄迈, 汪晓勤. 美英早期代数教科书中的复数引入方式. 数学教学, 2021(05): 1-6.
- [13] 韩粟. 周期函数概念的历史. 中学数学月刊, 2021(05): 50-54.
- [14] 刘思璐, 沈中宇, 汪晓勤. 英美早期代数教科书中的函数概念. 数学教育学报, 2021, 30(04): 55-62.
- [15] 杨孝曼. 美国早期代数教科书中的分式方程. 中学数学杂志, 2021(08): 62-66.
- [16] 张佳淳, 汪晓勤. 美英早期教科书中的切线概念及其应用. 数学通讯, 2021(16): 1-7.
- [17] 司睿, 汪晓勤. 美英早期教科书中的一元二次方程解法. 数学教学, 2021(10): 14-19.

- [18] 钱秦,汪晓勤. 美英早期几何教科书中的等腰三角形性质与判定定理. 中学数学杂志, 2021(12): 58-62.
- [19] 韩粟. 美英早期代数教科书中的组合知识. 数学之友, 2021(06): 1-6.
- [20] 汪晓勤. 西方几何书籍中立体直观图画法的演进. 数学教学, 2021(12): 17-22.
- [21] 秦语真, 汪晓勤. 美英早期教科书中的三角形中位线定理. 中小数学(初中版), 2021(12): 13-16.

教学实践

- [22] 张益明,纪妍琳. 立体几何中的类比推理——基于数学史,提升专题学习质效. 数学教学, 2021(01): 4-11.
- [23] 张佳淳,舒适,秦语真. HPM 视角下的双曲线高三复习课教学研究. 中小学课堂教学研究, 2021(04): 4-9.
- [24] 韩粟. HPM 视角下的函数周期性同课异构课例分析. 数学教学, 2021(05): 7-13.
- [25] 蔡东山, 张佳淳,秦语真. 从椭圆到双曲线: 基于数学史的类比教学. 中小数学(高中版), 2021(05): 38-43.
- [26] 张冰,蔡春梦,雷沛瑶. HPM 视角下的指数函数概念教学设计研究. 中小学课堂教学研究, 2021(06): 5-10.
- [27] 徐洁岚, 韩粟. “函数的周期性”教学: 基于相似性, 重构数学史. 教育研究与评论(中学教育教学), 2021(07): 76-82.
- [28] 狄迈, 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的圆周率探究活动的设计与实施. 中小学课堂教学研究, 2021(08): 6-10.
- [29] 陈佳,杨孝曼. 基于课程思政的“感受可能性”教学设计与实施. 数学教学, 2021(08): 11-16.
- [30] 李晓郁, 韩粟. “辨析”为跨越历史,“经历”促素养生根——HPM 视角下“周期函数”概念的教学. 中小数学(高中版), 2021(Z2): 12-15.
- [31] 钟萍,耿亮,纪妍琳. HPM 视角下高三复数专题复习教学. 上海中学数学, 2021(09): 38-41.
- [32] 狄迈, 纪妍琳. 复数概念教学: 基于历史, 数形结合. 教育研究与评论(课堂观察), 2021(05): 46-50.

- [33] 吴秀燕,刘思璐,孙丹丹. 基于 HPM 的初中函数概念教学设计与实践. 中学数学研究(华南师范大学版), 2021(20): 8-12.
- [34] 李德虎, 汪晓勤. HPM 视角下的项目化数学教学设计——以“长方体直观图的画法”教学为例. 中小学课堂教学研究, 2021(11): 5-10.
- [35] 姜鸿雁, 秦语真, 孙丹丹. 古今碰撞 迈好证明“第一步”——以苏科版“三角形内角和定理”证明为例. 数学通报, 2021, 60(11): 50-54.

实证研究

- [36] 刘思璐,沈中宇,汪晓勤. HPM 视角下的高中函数概念教学对学生函数概念理解的影响. 数学通报, 2021, 60(02): 25-31+35.
- [37] 刘思璐,汪晓勤. 20 世纪晚期数学名师的数学史教育价值观探析. 数学教学, 2021(03): 5-9+25.
- [38] 司睿,余庆纯,汪晓勤. HPM 视角下的“一元二次方程根与系数关系”同课异构课例研究. 数学教学, 2021(04): 5-11.
- [39] 栗小妮,汪晓勤. HPM 课例研究对教师 MKT 的影响. 数学教育学报, 2021, 30(03): 83-89.

教材研究

- [40] 张佳淳,张璇. 微积分内容在普通高中数学课程与 IB DP 数学课程的差异比较研究. 中学数学杂志, 2021(05): 23-28.
- [41] 韩粟,华旻珂,杨孝曼. 沪教版高中数学教科书必修第一册的旁白研究. 上海课程教学研究, 2021(09): 18-23.
- [42] 汪晓勤, 邹佳晨等. 中、美、法三国数高中学教科书中的数学文化比较研究. 见王建磐主编, 主要国家高中数学教科书比较研究, 上海: 华东师大出版社, 2021.

名师访谈

- [43] 王华. 不懈追求思索 精彩数学人生——顾鸿达先生访谈录. 数学教学, 2021(01): 1-3+40.

- [44] 刘思璐,沈中宇,邹佳晨. 数学教育,让生活更美好——王华老师访谈录. 数学教学, 2021(02): 1-5.
- [45] 赵丽红,李怡泉,沈中宇. 扎根课堂实践,潜心教学研究——胡军老师访谈录. 数学教学, 2021(03): 1-4+37.
- [46] 张佳淳,纪妍琳. 知然研教铸慧,做研究型教师——黄根初老师访谈录. 数学教学, 2021(04): 1-4+11.
- [47] 沈中宇,刘思璐,邹佳晨. 专家型数学教师的研究与展望——李业平教授访谈录. 数学教育学报, 2021, 30(02): 61-66.
- [48] 赵丽红,李怡泉. 学习推动教学研修,反思促进专业成长——任升录老师访谈录. 数学教学, 2021(07): 1-5.
- [49] 彭思维,王海雯. 唤起想象,启迪思维,激发情感——杨家政老师访谈录. 数学教学, 2021(09): 1-6.