上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2014 年第 3 卷第 3 期

斐波那契

（Fibonacci Leonardo,约 1170-1250）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

责任编辑：彭 刚 洪燕君 邹佳晨

编委(按姓氏字母序)：

洪燕君 黄友初 李玲 林佳乐 刘 攀 彭 刚 蒲淑萍 田方琳 汪晓勤 王芳（义乌） 王芳（杭州）王 科 吴 骏 叶晓娟 张小明 邹佳晨 朱琳

目 录

刊首语

本期封面人物是意大利数学家斐波那契（Fibonacci Leonardo，约 1170-1250）。

斐波那契生于比萨（Pisa）的一个商人家庭，早年曾随父在北非的部计（今阿尔及东部的小港贝贾亚）受过教育。

斐波那契的主要著作是《计算之书》，共 15 章；1202 年完成，1228 年又补充修订出版。书中注意了阿拉伯数和零的运用，开始使用分数记号。该书对代数问题和代数方法作了完整的介绍，还给出了求平方根和立方根的方法，求商品价格的二重法则，比例分配及确定金属样品的方法，特别是修订本中载有关于兔子繁殖的问题，导出了著名的“斐波那契数列”。

1220 年，斐波那契完成了纯几何著作《实用几何》，因而成为欧洲第一个应用代数解决几何问题的数学家；1225 年，又写成《平方数》一书。斐波那契在《平方数》书和《开花》（Flos，意指代数学是数学中的花朵）等书中着重讨论了方程、特别是不定方程的解法问题。

在欧洲数学史上，斐波那契还是第一个给出了并不是每个数都可以用希腊式的尺规作图法作出来的例子。他利用自己的拉丁文著作，把东方各国和古希腊的数学成就介绍给了欧洲读者，促进了欧洲数学的复兴，成为中世纪欧洲最伟大的数学家。

让我们谨记先哲的成就，向大师学习！

心语心愿

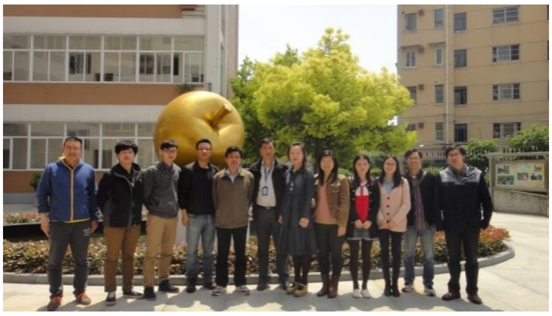
与你同行

一年的光阴如同白驹过隙，转瞬间又是花香袅袅，绿意融融。在一份热切的期盼里，在一个美好的憧憬中，这份《HPM 教学实践专辑》带着浓浓的墨香在大家共同的关爱中快乐出行了！

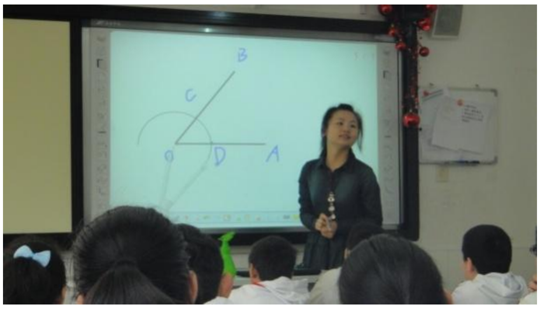
海的激情，岸的坚守。感谢这一年来，上海共富实验学校、罗店中学、经纬实验中学、建平远翔学校、延安初级中学和浙江省义乌中学等学校众多一线教师对 HPM 的热爱和支持。在本刊里，我们能看到他们将数学史通过附加、复制、顺应和重构等方式融入到了课堂教学中，展示了数学史融入数学教学的独特魅力。在上海 HPM 团队的共同努力下，他们的教学设计本着趣味性、科学性、有效性、可学性、创新性等 HPM 设计的五项原则，于是，费马、斐波那契、纳皮尔的数学思想流光溢彩，《几何原本》、《计算之书》的古题隆重登场……

共富实验学校唐羽霞老师公开课

经纬实验中学顾海萍老师公开课



建平远翔学校数学组 HPM 教研活动留影



建平远翔学校胡晓娟老师公开课

浙江省义乌中学金惠萍老师公开课

华东师大 HPM 团队赴罗店中学开展教研活动

罗店中学沈志兴老师公开课

延安初级中学丁捷敏老师公开课

不忘初心，方得始终！

感谢各位辛勤的作者和默默奉献的研究者，也感谢关心、支持本刊的所有朋友们，《上海 HPM 通讯》是我们共同的精神家园！让我们牵手四季，与《上海 HPM 通讯》一起见证 HPM 成长过程中的每一个足印！

教学实践

行程问题：从历史到课堂*

唐羽霞

（上海市共富实验学校，上海，201906）

作为华师大与宝山区沪太路新农村教育发展区合作项目“HPM 与教师专业发展”的学员，我接受了开观摩课的任务，选定的课题是“一元一次方程的应用：行程问题”。这是我任教以来第一次尝试 HPM 教学。意大利学者 Furinghetti 曾提出了数学史融入数学教学的一般过程[1]：了解历史资料→选择合适话题→分析课堂需要→设计课堂活动→实施教学计划→评价课堂活动。按照上述过程，首先需要查阅、搜集有关行程问题的历史材料；然后对历史材料进行加工，用于教学设计，最后实施于课堂。本文介绍该案例的设计、实施过程，为 HPM 教学案例的开发提供参考。

1 历史材料的选择与加工

一元一次方程的历史材料十分丰富[1][2]，其中，中国汉代的《九章算术》和中世纪意大利数学家斐波纳契（Leonardo Fibonacci, 1170～1250）的《计算之书》所含的问题最多。表 1 给出了《计算之书》中的行程问题。

从表 1 可见，斐波纳契是从单个对象到两个对象的顺序来安排行程问题的。在两个对象的情形，当距离和速度已知时，先讲授相向而行的相遇问题，再讲授同向而行的追及问题。他把“距离未知、走完全程所用时间已知、同向而行”的相遇问题放在最后。这充分说明：在斐波纳契眼里，这类问题是所有行程问题中最难的。

借鉴历史，我们在教学中应该先提出距离、速度均已知的相遇问题，再设置距离、速度已知的同向追及问题，然后提出距离未知、全程时间已知的相遇问题。

*上海市沪太路沿线新农村教育发展区项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一，指导教师为华东师范大学数学系汪晓勤教授。华东师大基础教育办公室、宝山区教育局对本项目给予大力支持。华东师大数学系博士研究生邹佳晨、王科、洪燕君、彭刚、曾静、访问学者齐春燕、过静、李海、硕士研究生李玲、叶晓娟等在本案例实施过程中或提出过宝贵意见或建议，或参与学生问卷调查和访谈，在此一并致谢。

表 1 《计算之书》中的行程问题

题次	名称	问 题	类别
1	**狮落陷阱**	狮子在洞中，洞深 50 尺，狮子每天向上爬$\frac{1}{7}$尺，向下爬$\frac{1}{9}$尺。问：狮子需要几天才能爬出洞？	单个对象：距离已知、速度已知
2	**双蛇爬塔**	塔高 100 尺，塔底有一蛇，每天向上爬$\frac{1}{3}$尺，又向下爬$\frac{1}{4}$尺；塔顶有另一条蛇，每天向下爬$\frac{1}{5}$尺，向上爬$\frac{1}{6}$尺。问：几天后两蛇相遇？	两个对象：距离已知、速度已知、相向而行
3	**狐跑犬追**	狐狸在狗前面 50 步，狗在后面追。狗每跑 9 步，狐狸跑 6 步。问狐狸跑几步后被狗追上？	两个对象：距离已知、速度已知、同向而行
4	**两蚁相逐**	两只蚂蚁相距 100 步，朝同一点**同向**而行。第一只蚂蚁每天向前爬$\frac{1}{3}$步，又向后退$\frac{1}{4}$步；第二只蚂蚁每天向前爬$\frac{1}{5}$步，又向后退$\frac{1}{6}$步。问：第一只蚂蚁几天后追上第二只蚂蚁？	两个对象：距离已知、速度已知、同向而行
5	**两船相遇**	第一艘船从甲地到乙地需航行 5 天；第二艘船从乙地到甲地需航行 7 天。今两船分别从甲地和乙地同时出发，相向而行，问它们几天后相遇？	两个对象：距离未知、走完全程所用时间已知、相向而行

2 教学设计与实施

将数学史融入数学教学时，必须考虑趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性五项原则。所谓“趣味性”，指的是教学内容应让学生觉得有趣才行，故应尽量设计数学背后的故事；“科学性”指的是数学史材料应符合史实或历史情境，而不是瞎编乱造；“有效性”指的是教学不是为数学史而数学史，而是为有效地完成三维目标而应用数学史；“可学性”指的是教学设计一定要符合学生的认知基础，易于为学生接受；“新颖性”是指 HPM 视角下的教学设计必须有新意、有特色，对教师专业发展起引领作用；而不是完全照本宣科，或网上下载，或人云亦云。

为了体现趣味性，我们按照斐波纳契年轻时代经商的职业特点，设计了“斐波纳契在

货船上想出了行程问题”的故事。为了体现可学性，我们按照斐波纳契的顺序设置问题，先讲相向相遇问题，再讲同向追及问题。对斐波纳契的问题进行了适当的改编，但都将其“当作”斐波纳契在商途中想出来的“真题”。

例 1（相遇问题） 甲乙两艘货船相距 500 千米，甲船的速度是 30 千米/时，乙船的速度是 20 千米/时，现两船同时出发，相向而行，问多少小时后两船相遇？

例 2（相遇问题） 甲乙两艘货船相隔若干距离，甲船行完这段距离需要 5 日，乙船行完这段距离需要 7 日。今两船同时出发，相向而行，问几日后相遇？

例 3（追及问题） 甲乙两艘货船，甲船的速度是 30 千米/时，乙船的速度是 20 千米/时，现乙船装载着货物去送货，当乙船行驶了 200 千米时，甲船发现有一批货落下了，于是甲船去追乙船，问甲船需要多少时间能追上乙船？

对于每一个问题，引导学生找出已知量、未知量，列出相应表格，建立等量关系，最后列方程、求出未知数。

课堂练习：甲、乙两地间路程为 120km，一列快车从甲站开出，每小时行驶 60km，一列慢车从乙站开出，每小时行驶 40km。（1）两车同时出发，相向而行，多少小时两车相遇？（2）两车同时开出，同向而行，快车多少小时可以追上慢车？

接下来讲说课本上的环形跑道上的相遇问题。

例 4（相遇问题） 小强、小莉分别在 400 米环形跑道上练习跑步，小强每分钟跑 320 米，小莉每分钟跑 120 米，两人同时从同一点同向出发，问几分钟后，小莉与小强第一次相遇？

课堂练习：一条环形跑道长 800 米，甲练习骑自行车平均每分钟行 500 米，乙练习赛跑，平均每分钟跑 200 米，两人同时同地出发。

（1）若两人背向而行，则他们经过多少时间首次相遇？

（2）若两人同向而行，则他们经过多少时间首次相遇？

最后的环节，布置了一个“问题提出”任务：假设你和斐波纳契是合伙人，同在一艘货船上，你能提出比他更好的问题吗？

3 学生反馈

课后的问卷调查表明，98%的学生完全听懂了这节课，83%的学生表示，这堂课让自己喜欢用方程来解应用题；88%的学生表示愿意了解与教学内容有关的数学历史知识；90%的

学生希望以后的数学课也用这种形式来上。这表明，HPM 视角下的行程问题教学受到绝大多数学生的认可。以下是对一名学生的访谈片段：

师：今天上课老师讲了斐波纳契的故事，以前上课时老师讲过数学家或数学史的故事吗？

生：没有，老师偶尔介绍过数学家，但没讲过故事。

师：介绍过哪位数学家？记得吗？

生：不记得。

师：你们喜欢在数学课上听这些数学家的故事？

生：喜欢。

师：平时看课外书时是否关注过数学家和数学史？

生：我只关心数学题。

师：上了今天的课，数学家的故事对你们提高数学兴趣以及提高数学解题能力是否有帮助？

生：有。

师：有没有感觉今天的课和平时有什么不一样？

生：课不像以前那么枯燥了。

师：不枯燥的原因是什么？

生：感觉今天的课很轻松。

师：你喜欢轻松的数学课吗？

生：是的。

师：老师留了作业："假设你和斐波纳契是合伙人，同在一艘货船上，你能提出比他更好的问题吗？"这种作业你喜欢吗？

生：我喜欢编题。

从以上访谈片段可见，数学史融入数学教学，让学生感到数学课变得"轻松"、"不枯燥"。"轻松"源于内容易懂，"不枯燥"源于数学背后的数学家的故事。也就是说，数学史有助于实现情感和知识目标。

4 反思

"今天是个值得纪念的日子。作为新教师的我，在听课老师比学生多出近一倍的教室里，

圆满完成了我的亮相课。过程很艰辛，但收获很多。同时也知道自己仍有很多不足，还需要继续努力和学习。”这是笔者在微博上发的一条信息。

本节课中，笔者用斐波纳契的故事将直线跑道中的相遇问题和追及问题串了起来，使教学设计变得完整而流畅；数学史激发了学生的兴趣，开阔了学生的眼界，增长了课本以外的知识。这也是笔者对整个教学设计最满意之处。可惜的是，我未能将后面环形跑道中的相遇问题也归入斐波纳契商途中所提出的问题，从而使直线跑道问题与环形跑道问题脱节，不够自然。实际上，我们完全可以想象，斐波纳契需要在地中海沿岸各处卸货，也有环形路线问题，因此可以将操场跑道相遇问题改成商船环形路线相遇问题。另外，由于是首次接触数学史，斐波纳契的故事讲得还不够生动、流畅，未能收到应有的效果；课后，有听课教师还提出，如果通过斐波纳契的“航海日志”，把各问题串联起来，课堂效果会更好。

在课后交流中，有教师提出质疑：为什么要用斐波纳契的行程问题，而不用中国古代的行程问题？后者不是更有助于进行爱国主义教育吗？对于这个问题，笔者的想法是，HPM 教学首先要体现趣味性，所以需要数学家的故事。中国古代的《九章算术》中有不少行程问题，但由于《九章算术》的作者不明确，而《计算之书》有明确的作者斐波纳契，斐波纳契因为经商而游历世界各地，易于产生故事。总之，《计算之书》让我们更容易挖掘“人的元素”。这是笔者选择斐波纳契行程问题的原因。

通过本次授课，笔者深深感到，数学史不仅为教师提供了丰富的教学素材，而且也提供了有益的思想养料，可以有效促进教师的专业发展。同时，笔者也深感自己数学史知识的匮乏。今后，笔者将多阅读数学史书籍，积累数学史素材，更多、更有效地在课堂中融入数学史。最后，笔者也希望教师培训课程中能增加数学史课程，让新手教师有机会较为系统地学习数学史。

参考文献

[1] Furinghetti, F. The long tradition of history in mathematics teaching: an old Italian case. In V. Katz（Ed.）, *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. 49-58

[2] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(I). 中学数学教学参考, 2007, (11): 51-53

[3] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(II). 中学数学教学参考, 2007, (12): 54-56

HPM 视角下的“加减消元法”教学*

沈志兴

（上海师范大学附属罗店中学，上海，201908）

解方程是初中代数教学的核心内容之一。上海数学教材六年级下第六章第四节共分四个课时，“二元一次方程组的解法——加减消元法”是其中第三个课时的内容，紧接在代入消元法之后，同时，又为后面的“二元一次方程组的应用”服务。

教学中，我们需要解决的问题是：如何自然地引出加减消元法？要解决这个问题，就必须解决以下两个问题：

- 主题的可学性问题：学生的认知起点是什么？
- 主题的必要性问题：有了代入消元法，为什么还要学加减消元法？

由于二元一次方程组问题都可以用学生熟悉的一元一次方程来解决，而一元一次方程又都可以用学生熟悉的算术方法来解决，因此，我们可以将算术方法作为学生的认知起点，来解决“可学性”问题。对于第二个问题，或许我们会想到用代入法解起来比较麻烦的问题，但这个理由并不充分，毕竟用代入消元法已经能解决所有二元一次方程组问题了。

作为华东师范大学与上海市宝山区沪太路新农村教育发展区合作项目“HPM 与教师专业发展”的学员，笔者希望尝试将数学史融入数学教学，以此来检验数学史是否有助于同时解决上述“可学性”和“必要性”的问题。已有的教学实践表明，数学史融入数学教学有助于更好地实现三维目标[1]，笔者也希望通过自己的实践来检验这一结论。本文展示的是“数学史融入加减消元法”的具体设计、实施和评价过程。

1 历史问题的选择

数学史上有四类二元一次方程组问题[2][3]，其中有两类是学生在小学里已经接触过的：

- 已知二量之和为c_1，第一个量的 a 倍与第二个量的 b 倍之和（或差）为c_2，求二量，

*上海市沪太路沿线新农村教育发展区项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一，指导教师为华东师范大学数学系汪晓勤教授。华东师大基础教育办公室、宝山区教育局对本项目给予大力支持。华东师范大学数学系博士研究生邹佳晨、王科、洪燕君、彭刚、硕士研究生林佳乐、李玲、叶晓娟、访问学者齐春燕、过静等在本案例实施过程中参与讨论交流，并对学生进行问卷调查和访谈，在此一并致谢。

如“鸡兔同笼”、“僧分馒头”、“二果问价”等问题；

● 若干人共同出钱购物，若每人出 a_1，则多（或少）了 c_1；若每人出 a_2，则少（或多）了 c_2，求人数与物价。此即中国古代著名的“盈不足”问题。

经过比较，笔者决定选择第一类问题中的《孙子算经》中的“鸡兔同笼”问题，理由是：

● 该问题为绝大多数学生所耳熟能详，符合他们的认知基础，具有可学性；

● 六年级学生大都比较喜欢小动物，对该问题会很感兴趣，故符合 HPM 教学设计的“趣味性”原则；

●“鸡兔同笼”问题的古代算术解法——“减足法”与加减消元法等价，故可以通过该问题自然引出本节课的主题，从而解决“必要性”问题。

但是，数学史上的第一类问题用代入消元法也易于解决，为了凸显加减消元法的优越性，笔者选择明代数学家程大位《算法统宗》中的一道一次方程组问题（属于数学史上的第三类方程组问题，见文献[2][3]）作为例题加减消元法的例题。

2 教学设计与实施

2.1 提出问题

通过阅读数学史相关资料—“鸡兔同笼”，提出问题：有若干只鸡和兔被关在同一个笼子里，从上面数，有八个头；从下面数，有二十六只脚。求笼中各有几只鸡和兔？

由于《孙子算经》原题中数据比较大，不利于计算，而本节课的重点在于加减消元法的获得而并不是计算，所以问题中的改成稍小数据方便计算。

教师问：你有办法解决上面的问题吗？

生 1 列出一元一次方程，而生 2 则列出二元一次方程组。

教师引导学生观察上面两种解法，发现：生 1 所列出的一元一次方程正是对生 2 所列方程组实施代入消元法的结果。

2.2 追溯古法

接着，教师展示《孙子算经》原书中的算术解法：脚数的一半减头数，即为兔数；头数减兔数即为鸡数。

教师问：你能理解这种解法吗？

教师对古法进行了解释：假设砍去每只鸡和每只兔的脚，则每只鸡就变成了“独脚鸡”，而每只兔就变成了“双脚兔”。这样，“独脚鸡”和“双脚兔”的脚就由 26 只变成了 13 只；而每只“鸡”的头数与脚数之比变为 1：1，每只“兔”的头数与脚数之比变为 1：2。由此可知，有一只“双脚兔”，脚的数量就会比头的数量多 1。所以，“独脚鸡”和“双脚兔”的脚的数量与他们的头的数量之差即：13-8=5，就是兔子的只数。

设计意图：通过给出对于古代算式解法的详细思考过程，不仅仅只是停留在形式以及增强学生的兴趣上，而是为了分析古代解法和今天的加减消元法之间的必然联系。

2.3 引出新课

对照生 2 所列的二元一次方程组，对照古代解法，自然引出加减消元法。（板书标题）

教师给出程大位《算法统宗》中的问题：“今有马三匹 、牛四头 ，共价银一百一十四两；又马四匹、牛五头，共价一百六十二两五钱。问马、牛价各多少？”

设计意图：让学生看到数学史上“原汁原味”二元一次方程组的古题，会激发学生学习数学的好奇心，从而使学生具有挑战困难的意识。

2.5 归纳方法

通过练习，引导学生归纳加减消元法的解题步骤：

① 化：若原题中有一个未知数的系数相同或者相反数则跳过第一个步骤，若没有一个未知数的系数相同或者相反数则将其中一个未知数的系数化成相同（或互为相反数）；

② 消：通过相减（或相加）消去这个系数相同或者相反数未知数，得到一个一元一次方程；

③ 解：解这个一元一次方程，得到这个未知数的值；

④ 代：将求得的未知数的值代入原方程组中的任一个方程，求得另一个未知数的值；

⑤ 答：写出方程组的解。

2.6 课堂总结

让学生总结本节课上的学习收获，并让他们思考：代入消元法有不同的消元方式及可以消不同的元，那么加减消元法是否也有不同的消元方式及可以消不同的元呢？

设计意图：让学生比较不同方法中的难易度，体会加减消元法的优越性。

2.7 布置作业

教师从挑选了历史上的 4 类二元一次方程组问题，允许学生查阅资料，在课外思考完成。

设计意图：希望通过历史问题，让学生在巩固加减消元法的同时，了解历史上丰富、有趣方程组问题，增加兴趣，开阔视野，感受数学文化的多元性。

3 学生反馈

课后，我们对全班 47 名学生做了问卷调查，并对部分学生进行了访谈。针对问题："我对于古代数学题能理解题意"，64%的学生回答"同意"和"非常同意"，32%的学生回答"一般"。这些数据说明，对于一些数学史的问题，在课堂中引用时还需要给予一定的解释来帮助学生理解题意，毕竟理解问题是正确解题的前提。

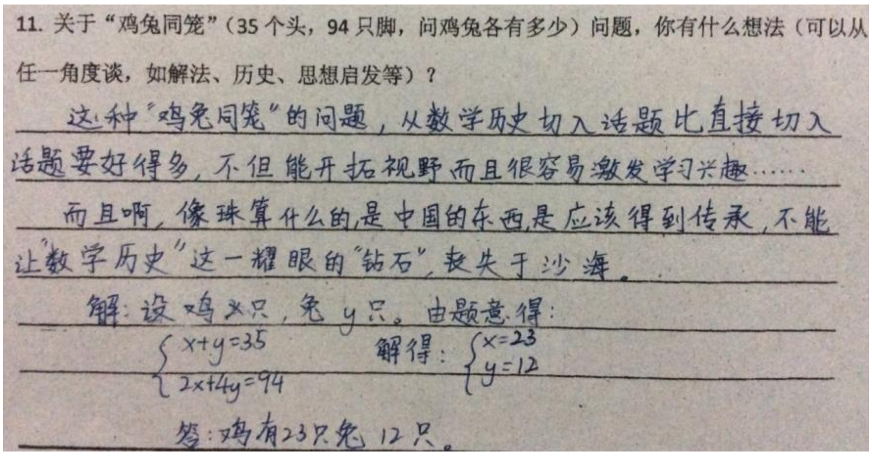
针对问题："希望以后的数学课也用这种形式上课"和"我愿意了解与教学内容有关的数学历史知识"，回答"同意"和"非常同意"的分别占 81%和 85%。问卷调查和访谈结果表明，大多数同学对于数学史融入数学教学是持赞成态度的，认为数学史能带给他们学习数学的乐趣和动力。

针对主观题："关于"鸡兔同笼"问题（35 个头，94 只脚，问鸡、兔各有多少），你有什么想法（可以从任一角度谈，如解法、历史、思想启发等）？"42 人谈到了解法、35 人列了二元一次方程组、20 人提到可以用一元一次方程组求解、18 人提到古代的是算术解法、3 人提到可以去列表一个一个算。以下是对学生观点的归纳：

（1）数学史的融入激发了学生对数学的兴趣。

S1：古代的人很聪明，不用方程也能求出"鸡兔同笼"问题。让我更加想进一步了解数学史，激发了我对数学的兴趣。

S2：从数学历史话题比直接切入话题要好得多，不但能开拓视野而且很容易激发学习兴趣。（如图 1）



11. 关于“鸡兔同笼”（35 个头，94 只脚，问鸡兔各有多少）问题，你有什么想法（可以从任一角度谈，如解法、历史、思想启发等）？

这种“鸡兔同笼”的问题，从数学历史切入话题比直接切入话题要好得多，不但能开拓视野而且很容易激发学习兴趣……

而且啊，像珠算什么的是中国的东西是应该得到传承，不能让“数学历史”这一耀眼的“钻石”丧失于沙海。

解：设鸡x只，兔y只。由题意得：

$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x=23 \\ y=12 \end{cases}$

答：鸡有23只兔12只。

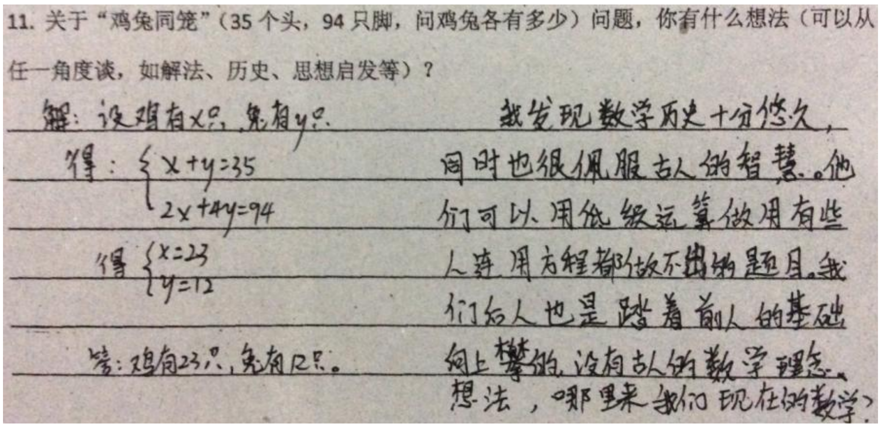
图 1 S2 关于数学史的观点

S3：我认为鸡兔同笼这个问题非常好……激发了每个人对数学的兴趣，我希望更多地了解数学史。

（2）数学史让学生感受到古人的智慧。

S4：这个问题是有关生活实际的，题目较独特，激发读者的兴趣，可以使读者有自己的思考空间，且在古代，人们可以写出这种问题是非常了得的。

S5：我发现数学历史十分悠久，同时也很佩服古人的智慧。他们可以用低级运算做出有些人连用方程都做不出的题目。我们后人也是踏着前人的基础向上攀的，没有古人的数学理念、想法，哪里来我们现在的数学？（图 2）



11. 关于“鸡兔同笼”（35 个头，94 只脚，问鸡兔各有多少）问题，你有什么想法（可以从任一角度谈，如解法、历史、思想启发等）？

解：设鸡有x只，兔有y只。

得：$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=23 \\ y=12 \end{cases}$

答：鸡有23只，兔有12只。

我发现数学历史十分悠久，同时也很佩服古人的智慧。他们可以用低级运算做出有些人连用方程都做不出的题目。我们后人也是踏着前人的基础向上攀的，没有古人的数学理念、想法，哪里来我们现在的数学？

图 2 S5 关于数学史的观点

S6：我认为古人用过这种方法来算很聪明，我也喜欢这种方法。因为这样很方便，必用方程快多了。

S7：每个“鸡兔同笼”的问题，总有两种解法。可是古人的解法大大出乎我们之意料，让我们佩服不已。

4 教学反思

对于这节课，笔者觉得有如下几点不足：

（1）引入环节

教学引入环节有点拖泥带水，而且众多听课老师在场时，学生也比较紧张，课堂相对平时有点沉闷，尽管笔者试着多花了些精力去启发和引导他们，但效果总体还是不够理想，部分同学回答问题的时间比预计的要多，这也是以后教学教师需要注意的地方。

（2）过渡环节

从“减足法”到“加减消元法”的过渡是本节课的核心，因为这是体现加减消元法必要性的关键点，而且也是发生教学法极好的切入点之一，笔者在这个环节的处理上有些生硬，加减消元法的必要性问题解决得还不够到位。

（3）数学思想

对于加减消元法，除了强调“化归”的思想，还应该让学生明白“等量”的思想，即欧几里得《几何原本》中关于等量的公理，简言之就是“等量加减等量不变，以及等量的同倍量、同分量相等”，这一点笔者关注度是不够的。

5 结语

问卷调查表明，学生对于“鸡兔同笼”问题的古代算术解法印象深刻，并给出很高的评价，这表明，鸡兔同笼问题确实很好地解决了“可学性”问题。但由于古今方法过渡环节处理得不够好，几乎没有学生通过古今方法的对比而提及加减消元法的优越性。这表明，本节课中的“必要性”问题还解决得不够理想。

从三维目标上看，绝大多数学生对古代数学问题产生了浓厚的兴趣，并感受到数学悠久的历史、古人的智慧以及数学知识的传承，并激起他们进一步了解数学史的动机。因此，数学史的融入有效地促进了“情感、态度与价值观”目标的达成。本节课中，虽然数学史在“知识与技能”、“过程与方法”这两个目标上也起了重要作用，不过，就这两个目标而言，数学史材料似乎是可以替代的。

尽管本次 HPM 教学还存在许多不足，但笔者本人的收获却很多，十分期待自己能够继续 HPM 教学，开发更多更好的案例。

参考文献

[1] 汪晓勤. 数学史与数学教育. 教育研究与评论, 2014, (1): 8-14

[2] 汪晓勤. HPM 视角下二元一次方程组概念的教学设计.中学数学教学参考. 2007, (5): 28-31

[3] 汪晓勤. HPM 视角下的消元法教学设计. 中学数学教学参考, 2007, (6): 52-54

一次方程组的应用：从历史到课堂*

顾海萍

（上海师范大学附属经纬实验学校，上海，200444）

1 引 言

实践表明，数学史有助于更好地实现数学教学的三维目标[1]，因此，如何将数学史融入数学教学，已经成为中学数学教师日益关注的课题。作为华东师范大学与上海市宝山区沪太路新农村教育发展区合作项目“HPM 与教师专业发展”的学员，笔者承担了一项 HPM 课例开发的任务，并选择“一次方程组的应用”作为课题。本文展示的就是该课例的设计、实施和评价过程。

意大利学者 Furinghetti 曾提出数学史融入数学教学的一般过程[2]，我们对其进行改进，拟定如下过程：确定课例主题→考察相关历史→选取合适素材→分析课堂需求→设计课堂活动→实施教学计划→评价课堂活动。

其中，课堂需求指的是数学史材料必须符合趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性五项原则。趣味性原则指的是数学史料必须能激发学生的学习兴趣，故应尽量设计数学背后的故事；科学性原则指的是数学史料必须符合史实或历史情境；有效性原则指的是数学史料必须服务于教学目标；可学性原则指的是数学史料必须符合学生的认知基础，易于为学生接受；新颖性原则是指数学史料新颖、教学设计有特色。

按照上述过程，在确定课题之后，我们首先需要考察二元一次方程组的历史。事实上，文[3]已经搜集了相当丰富的教学素材，为本案例的设计打下了良好的基础。基于上述五项原则，选取有关问题进行教学设计，然后将该设计实施于课堂，最后通过问卷调查和访谈，获取学生的反馈信息，通过评课交流，获取教师的反馈信息，并据此对教学进行评价和反思。

本节课的教学目标是：能利用一次方程组解决一些简单的实际问题；经历运用一次方程组解应用题的过程，体会方程思想在解决实际问题中的重要性；通过古今解方程组的方法的

---

*上海市沪太路沿线新农村教育发展区项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一，指导教师为华东师大数学系汪晓勤教授。华东师大基础教育办公室、宝山区教育局对本项目给予大力支持。华东师大数学系博士研究生邹佳晨、王科、洪燕君、彭刚、硕士研究生林佳乐、田方琳等参与交流讨论，并对学生进行问卷调查，在此一并致谢。

对比，感受代数方法的优越性；激发学习兴趣，拓宽知识视野，感受数学的悠久历史，感悟数学文化的多元性。

2 历史材料的选择

古代数学文献中有着十分丰富的二元一次方程组问题，文[3]将其分为四类，见表 1。

表 1 历史上的二元一次方程组问题

类别	方程组	问题举例	出处
1	$\begin{cases} x+y=c_1 \\ ax \pm by = c_2 \end{cases}$	为了鼓励儿子学好算术，儿子每做对一题，父亲给他 8 分钱；做错一题，罚 5 分钱。做完 26 题后，谁也不用给谁钱。问：儿子做对几题？	克拉维斯《代数》（1608）
2	$\begin{cases} a_1x=y+b_1 \\ a_2x=y-b_2 \end{cases}$	今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问：人数、物价各几何？	《九章算术》（1 世纪）
3	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$	9 个李子、7 个苹果共值 107；7 个李子 9 个苹果共值 110。问：一个李子和一个苹果各值多少？	摩诃毗罗《文集》（9 世纪）
4	$\begin{cases} x+a_1=b_1(y-a_1) \\ y+a_2=b_2(x-a_2) \end{cases}$	甲对乙说：“如果你给我 10 迈纳（古希腊货币单位），那么我的钱将是你的 3 倍。”乙对甲说：“如果我从你那儿拿同样多的钱，那么我的钱将是你的 5 倍。”问甲、乙各有多少钱？	（《希腊选集》）（5 世纪）

我们在各类问题中各选取一题，以使问题具有代表性；同时，为了凸显数学文化的多元性，我们决定从古代巴比伦、中国和中世纪欧洲的数学文献中分别选取问题；为了增加趣味性和新颖性，笔者设计了如图 1 所示的世界地图，通过时空转换，将这些问题串联起来；笔者还截取英国 BBC 制作的视频《数学的故事》的片段，使得时空转换变得自然而然。

3 教学设计与实施

先通过 PPT 展示世界地图，告诉学生：数学有着悠久的历史，古代不同文明都对数学的发展做出过贡献。今天，且让我们穿越时空，踏上二元一次方程组的探索之旅。我们的第

一站是中国。

播放《数学的故事》中关于中国古代数学的片段，其中有如下的：

问题 1　1 个李子、3 个桃子共重 15 克；2 个李子 1 个桃子共重 10 克。问：一个李子和一个桃子各重多少？

图 1　跨越时空的一次方程组之旅

该问题属于表 1 中的第 3 类问题。视频中将其作为《九章算术》中的问题（实际上并不是）来介绍，并介绍了古人的算术解法。让学生自行完成解答，并让他们思考古人的算术方法与今天的方程组解法之间的关系。以下是教学片断：

师：（视频解答后）请同学们描述一下古代的方法是怎样的？

生：求出两个李子、六个桃子的总重量，然后减去两个李子、一个桃子的重量，然后就可以得出五个桃子的重量，就知道了一个桃子的重量。

师：通过视频古代算法的解释，你们有什么发现？

生：一样的。

师：哪里一样？

生：他们的算法和我们的是一样的，其实就是用算术方法来代替了我们的加减消元法，解题的思路都是就是消去一个元。

师：是的，那你们觉得哪个方法更好呢？

生：现代的好。

生：古代的好，算起来快。

生：两个都行，都可以做题。

生：我觉得用方程组的方法思路更清楚，万一不是两倍什么的就不好做了。

生：不是两倍也可以凑的呀，跟我们加减消元法一样的咯，凑一个系数相等就可以了。

生：哦，那其实两个方法不就是一样的了么。

师：是的，从本质上来讲其实都运用到了加减消元的思想，不过我们今天用的是代数方法，而古人用的是算术方法。

接下来，教师给出明代数学家程大位《算法统宗》（1494）中以诗歌表达的一个问题：

问题 2 隔墙听得客分银，不知人数不知银；七两分之多四两，九两分之少半斤。试问各位善算者，多少人分多少银？

本题属于表 1 中的第 2 类问题，即中国古代数学中著名的“盈不足”问题，有一定的难度，学生需要具备一定的古文阅读理解能力才能读懂题意。让学生合作讨论，解答此题。

教师引出下一个问题：“中国古代数学丰富多彩，那么，其他古代文明是否也有数学呢？且让我们把视线转向国外。”播放视频《数学的故事》中介绍古巴比伦数学的片段。PPT 出示如下问题：

问题 3 已知两块地共 5 亩，第一块地亩产 4 担粮食，第二块地亩产 3 担粮食。第一块地的产量比第二块的产量多 6 担。问：两块地的面积各为多少？

本题属于表 1 中的第 1 类问题，教师让学生独立解答。

接下来，教师介绍 13 世纪意大利数学家斐波纳契和他的《计算之书》，并引出如下问题：

问题 4 若甲得乙之 7 第纳尔，则甲的钱是乙的 5 倍；若乙得甲之 5 第纳尔，则乙的钱是甲的 7 倍。问：甲、乙各有多少钱？

此系表 1 中的第 4 类问题。让学生独立解答，并让一名学生板演。

最后，教师给出**拓展问题：**

问题 5　六（2）班某同学参加某项考试，试卷一共十道题，答对一题 4 分，不答得 1 分，答错得 0 分。某同学的最终成绩为 20 分。请问他答对几道题？答错几道题？未答几道题？

设计本题的目的是拓展一次不定方程组特殊解，拓展学生的思维。

最后，让学生总结本节课的收获。以下是部分学生的回答：

（1）学会用方程（组）解决实际问题。

（2）感受到了数学的实用性，数学非常贴近我们的生活实际。

（3）了解了古巴比伦、中国古代的一些文化，以及诗歌中的数学。

（4）了解了中国古代的方程组问题，感受了古代方法和我们使用的方法的异同。

4 学生反馈

课后，我们对学生进行了问卷调查。32 名学生中，有 31 人表示喜欢数学史；30 人表示理解古代数学题的题意；28 人表示教师有必要在课堂上介绍的数学史知识；29 人表示数学史有助于自己的数学学习，但 29 人表示自己不太了解数学史。

对于问题“请写出你所知道的若干数学家的名字”，学生回答的统计结果如图 2 所示。

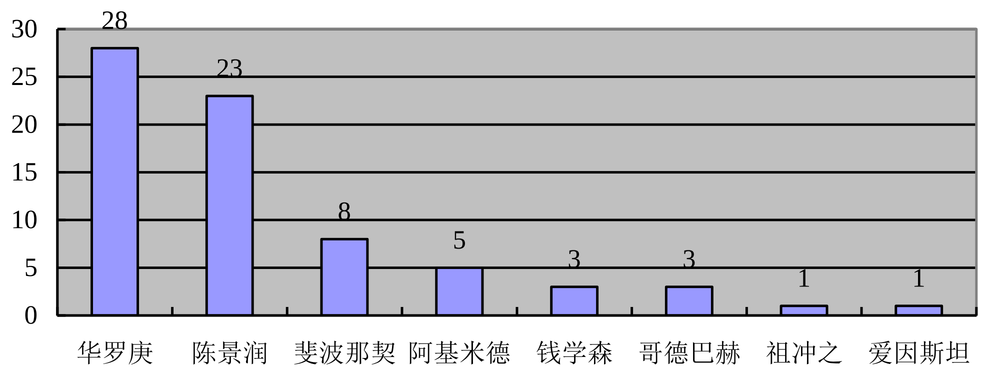


图 2 学生所知道的数学家

由图 2 可见，学生所知道的数学家主要集中于华罗庚和陈景润，这表明，他们对数学家了解甚少，这与上述统计结果是完全一致的。

此外，我们还选取 6 名学生（3 男 3 女，代表不同的成绩等第）进行了访谈。以下是访谈片段。

师：这节课你们印象最深刻的内容是什么？为什么？

生 1：桃子和李子问题，看起来很好玩。

生 2：我觉得是分赃问题，古人也很有趣。

生 3：我觉得那首小诗比较好玩，做起来感觉题目没那么枯燥。

生 4：我觉得那个桃子和李子称重问题很好玩。视频中的解释让我们很直观地理解古人的算术做法。

生 5：我觉得泥版上的问题蛮有意思的，感觉像是历史课，题目都有背景的。

师：我们以前也上过类似的应用题的课，你们觉得这节课和以前的课有何不同？

生 2：以前遇到的应用题也有背景，但是没这么好玩，有些东西虽然也比较贴合我们的实际，像买东西啊什么的，但是没有今天这样看看视频、讲讲故事这么有意思。

生 4：以前的题目稍微有点枯燥，有时候题目一长都懒得看，今天那个小诗虽然乍一看

很怪，但是我觉得很好玩，容易引起我们的兴趣。

生 5：其实我觉得平时我们的数学课也蛮有趣的，不过今天的课更加新颖。

生 6：我觉得今天的课既让我做了数学题，又比较有趣，感觉一点都不累。

师：这节课是否改变了你对数学的看法？

生 1：其实我觉得像这样能够结合一些故事啊，古代的题目啊，都可以帮助我们理解数学。

生 2：对的，就像我们学数的时候，数也是一步步发展来的。这节课也让我感觉数学是一步步发展来的，从算术方法到方程的方法，古代的问题和今天的问题有很多相似的地方，很好玩。

生 3：有一点吧，其实我一直觉得数学是很实用的，今天感觉更贴近生活了。

生 5：课上讲讲数学史很有趣，还可以让我们开阔眼界。

生 6：今天这节课让我觉得数学就是一步步发展过来的，古代的解题方法和现代的方法有共同的地方，不过我们的解题方法比古代的方法更简便。

4 结语

与非 HPM 视角的教学一样，本节课达成了“利用一次方程组解实际问题、经历运用一次方程组解应用题的过程、体会方程思想重要性”的教学目标。同时，课堂观察、学生收获、课后问卷调查和访谈表明，HPM 视角下的教学也显示出特有的优势：

- 古代数学问题激发了学生的兴趣（学生觉得“好玩”、“新颖”、“有意思”、“不枯燥”、“引起兴趣”）；
- 数学史让课堂氛围更轻松（学生觉得做题“不累”）；
- 古代数学问题让学生体会到数学有其发展的历程（“数学是一步步发展过来的”）；
- 古代数学问题让学生体会到今天的代数方法的优越性（“更简便”）；
- 古代数学问题让学生体会到古代不同文明的数学文化，开阔了他们的视野，

因此，本节课较好地达成了本文引言中所设定的其他教学目标。

在课后的点评中，不少教师指出，本节课中，问题的选取没有体现出难易的递进性。一如上文所指出的那样，在教学设计中，我们只关注到古代一次方程组的不同类型，而没有刻意区分问题的难度。数学史上的方程问题丰富多彩，兼顾问题类型和难度完全是可以做到的。此外，笔者未能向学生指出 BBC 视频“数学的故事”中的错误。本节课的缺点让笔者深深

感受到自身数学史知识的不足。要开发完善、精彩的 HPM 案例，教师需要阅读更多的数学史书籍，积累更丰富的数学史素材，并对数学史素材进行必要的裁剪和加工；在教学设计环节，还需要与 HPM 研究者进行深入交流研讨。

有人戏称：“开课就像剥皮，痛过以后就是脱胎换骨”。本节课虽留下遗憾，但笔者的收获以及对于 HPM 教学的期待却很多很多。

参考文献

[1] 汪晓勤. 数学史与数学教育. 教育研究与评论, 2014, (1): 8-14

[2] Furinghetti, F. The long tradition of history in mathematics teaching: an old Italian case. In V. Katz（Ed.）, *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. 49-58

[3] 汪晓勤. HPM 视角下的二元一次方程组概念的教学设计. 中学数学教学参考, 2007, (5): 48-51

HPM 视角下“角的和、差、倍”的教学

李玲 [1]　胡晓娟 [2]

（1. 华东师范大学数学系，上海, 200241;　2.上海市建平远翔学校，上海, 200129）

1 引 言

“角的和、差、倍”是上海六年级数学（下）中的一个知识点。教材首先通过三角尺作特殊角的和与差，然后通过例题介绍两角和的作图；接着，通过折纸引入角平分线概念，通过例题介绍用量角器作角平分线的方法；最后，介绍角平分线的尺规作图法。

本节课的教学目标是：（1）理解两个角的和、差、倍的意义，并会画角的和、差、倍；（2）理解角平分线的意义，并会画已知角的平分线；（3）理解尺规作图的意义，体会几何学的价值；（3）了解历史上数学家作角平分线的方法，激发学习兴趣，拓宽知识视野。本节课的重点是角平分线的作图、尺规作图的意义。

我们采用“翻转课堂”的模式来实现目标（1）和（2）；而为了达成目标（3）和（4），则需要从 HPM（数学史融入数学教学）的视角来进行教学设计。

一般地说，HPM 视角下的数学教学设计与实施的一般过程是[1]：确定课例主题→考察相关历史→选取合适素材→分析课堂需求→设计课堂活动→实施教学计划→评价课堂活动。

根据上述过程，首先需要了解有关角平分线尺规作图的历史，从中选取合适的素材，基于课堂需要，在趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性五项原的指导下，将相关历史素材融入教学设计之中。然后将教学设计实施于课堂，通过学生问卷调查和访谈、教师评课交流，获取师生反馈信息，据此进行教学反思。

2 尺规作图的历史材料

根据所设定的教学目标，我们从“角的尺规作图”、“角的三等分问题”、“尺规作图的意义”三个方面来搜集数学史素材。

2.1 角的作图

《几何原本》第 1 卷命题 9：“平分一个已知直线角。”[2]此即：作一个已知角的平分

线。欧几里得给出如下的作图法：如图 1，在 *OA* 和 *OB* 上分别取点 *D* 和 *E*，连接 *DE*，在 *DE* 上作等边三角形 *DEF*，则 *OF* 就是角 *AOB* 的平分线。欧几里得的作图法是书本上作图法的特殊情形。

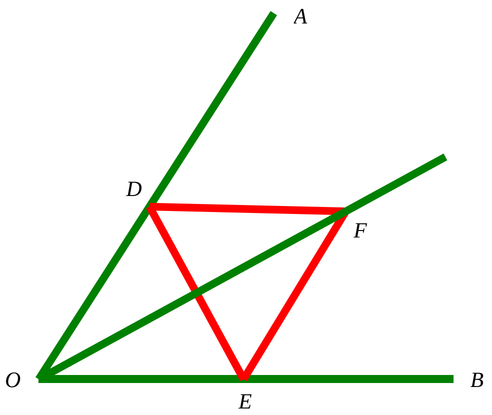


图 1 《几何原本》卷 1 命题 9

《几何原本》第 1 卷命题 23：在一条已知直线上，过已知点作一个直线角，使其等于已知直线角。

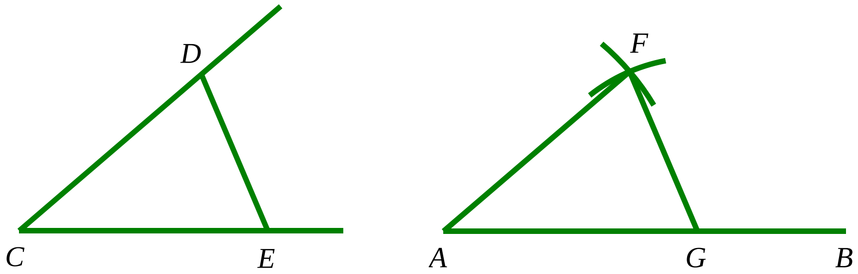


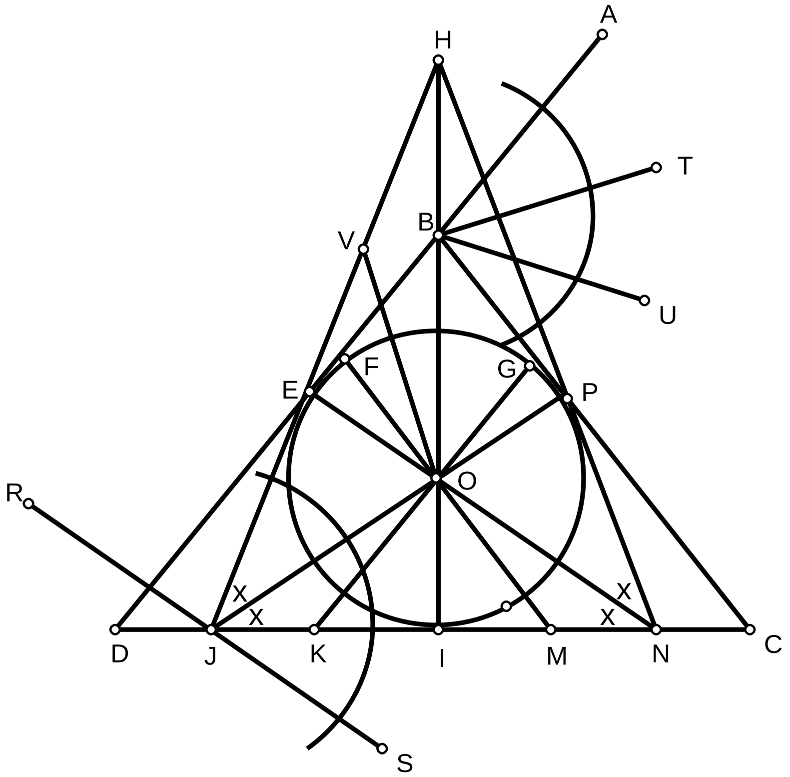
图 2

欧几里得的作法如下：在已知角 *DCE* 的两条边上分别任取点 *D* 和 *E*，连接 *DE*。在已知直线 *AB* 上作三角形 *AGF*，使得 *AG*=*CE*，*AF*=*CD*，*GF*=*ED*。这里欧几里得利用了命题 22："作一个三角形，使其三边分别等于三条已知线段。"但公元 5 世纪哲学家普罗克拉斯（Proclus, 412-485）对上述作图法作了简化，相当于取 *CD* =*CE*，这就是今天教材中的方法。

2.2 三等分角问题

继二等分角之后，古希腊数学家继续研究三等分角的尺规作图问题，这是古希腊三大几何难题之一。他们的尝试均以失败而告终。一些古希腊数学家找到了解决这个问题的其他办法，有人借助尺规以外的机械工具，有人构造两种不同运动，都涉及超越曲线。当然，这些方法都不能通过尺规作图来实现。直到 19 世纪，数学家彻底证明：三等分角的尺规作图

是不可能的。然而，古往今来，很多人迷恋于三等分角问题，无谓地浪费了宝贵的人生年华。



错误而神秘的三等分角作图法

2.3 尺规作图的意义

古希腊数学家所用的直尺是没有刻度的，圆规双脚若同时离地就自动合拢，直尺和圆规被后人称为欧几里得工具。古希腊数学家轻视几何学的实用性，他们崇尚几何学对于训练理性思维的价值。当一名去亚历山大求学的年轻人问欧几里得：“我学了几何学能获得什么实际好处呢？”欧几里得让手下人给了他 3 个硬币，打发他走了。在欧几里得看来，这样功利的学生值不值一教的。古希腊哲学家们坚信，几何学能将人的灵魂引向真理。他们坚持使用欧几里得工具，因为尺规作图的每一步都必须是有依据的，所以尺规作图和其他几何证明问题一样，都可以训练人的逻辑思维能力。

历史上，无数人通过几何的学习，得到了逻辑思维的训练，取得了视野的成功。美国总统林肯就是其中典型的例子。

3 教学设计与实施

课前让学生观看微视频，主要涉及两角和与差的作图以及角平分线的作图，让学生对

本节课内容有一个初步的了解。

3.1 两个角的和与差

首先让学生思考“什么是角？”，分别从“静态”和“动态”的角度阐释了角的概念：

静态：具有公共端点的两条射线所组成的图形叫做角。

动态：由一条射线绕着它的端点旋转到另一个位置所形成的图形。

教师通过几何画板的动态演示来解释角的概念（逆时针旋转），以此推出两角和、两角差（逆时针、顺时针方向的旋转）。

接下来，让学生讨论怎样用直尺和圆规画两角和、两角差。

讨论 1（画两角和） 给定两个角$\angle\alpha,\angle\beta$，你会用直尺、圆规来画一个角，使它等于$\angle\alpha+\angle\beta$吗？

黑板上展示，同向旋转即得两角和，并小结画两角和的步骤。任何事物都有两面性，有和必有差，我们已经知道怎样用直尺和圆规画两角和，那么怎样类比画出两角差呢？

问题 2（画两角差） 我们已经知道怎样画两个已知角的和，那么怎样画两个已知角的差呢？

请学生到黑板上演示，并作点评，画两角差与两角和的不同之处在于方向由“同向”变成“反向”。

3.2 角平分线的作图

师：公元前 3 世纪，欧几里得在他的《几何原本》中记载了角平分线的作法，你们想知道他当时是怎样画角平分线的吗？

讨论 1 历史上，欧几里得在《几何原本》中是怎样画已知角的角平分线的？

教师在黑板上演示欧几里得的角平分线尺规作图法。让学生思考：欧几里得是以线段为半径做圆弧，以其他长度为半径作弧可以吗？

在让学生自己动手操作熟悉角平分线的画法后，教师提出两个思考问题：

讨论 2 这样用尺规画角平分线的依据是什么？

由于学生尚未学过全等三角形知识，教师通过“翻折-重合”来代替三角形的全等，并与视频中的折纸活动联系起来。

讨论 3 如何将一个已知角四等分？

现在我们已经指导角平分线的画法，画角平分线其实就是将一个角二等分，那怎样将一个角四等分、八等分、十六等分……呢？让学生自己动手将一个角四等分。

3.3 三等分角问题

师：刚才我们将一个角二等分、四等分，但是我们是不是遗漏了中间还有三等分，那么我们怎样将一个角三等分呢？

大多数学生先画一个是 3 的整数倍的角，计算出其三分之一，再用量角器测量。教师让学生思考，如果给定的角不是 3 的整数倍，比如 58.1°，量角器还有效吗？能用尺规将其三等分吗？

教师介绍三等分角问题的历史。

3.4 尺规作图的意义

教师让学生讨论并比较用量角器作图与用尺规作图的特点，并总结：当给出的数学问题是可数、可列、可测、可量时，用量角器作图是便捷的，但是当问题是不可数、不可列、不可测、不可量时，数学家总会回归到原点，用常人看似舍近求远的方式，利用数学原理来寻求解决问题的一般方法，而不是借助工具寻求问题的答案，数学工具给我们解决问题带来了方便，而数学原理给我们解决问题带来了思想方法。

最后，教师对本堂课作了简短的小结。

4 学生反馈

课后，我们对班上 36 名学生进行了问卷调查。36 名学生均表示听懂可本节课的内容，30 名学生表示以后还希望用这种形式上课，有 35 名学生表示希望多了解与教学相关的数学史知识。

对于问题“谈谈你对尺规作图意义的理解”，学生回答的统计结果如图 3 所示。

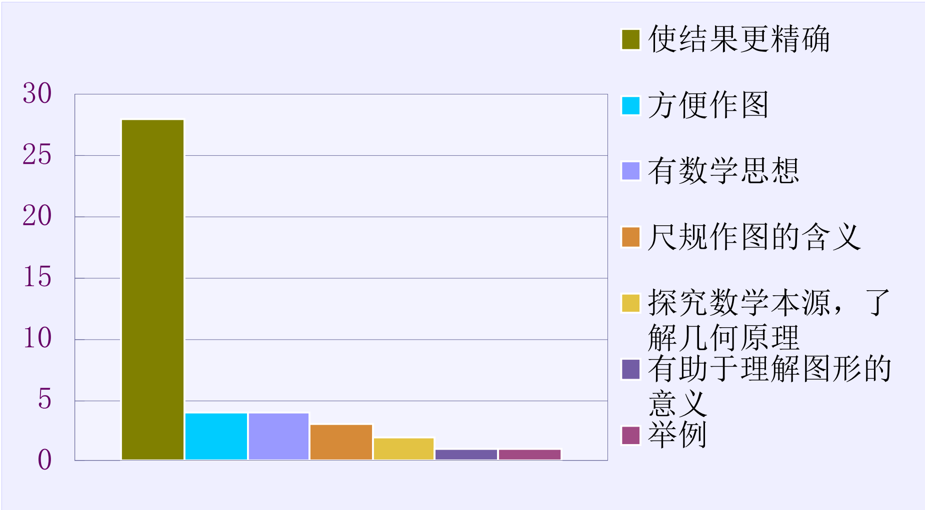
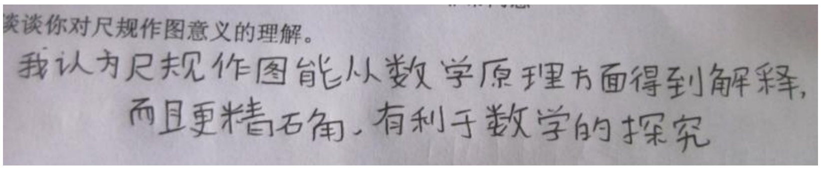
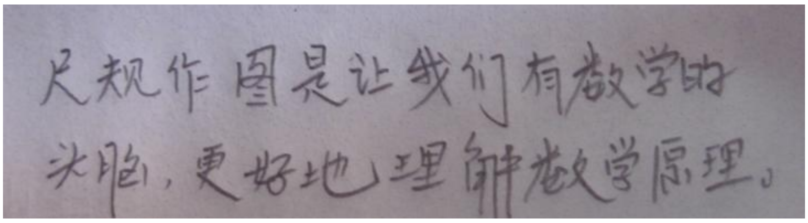
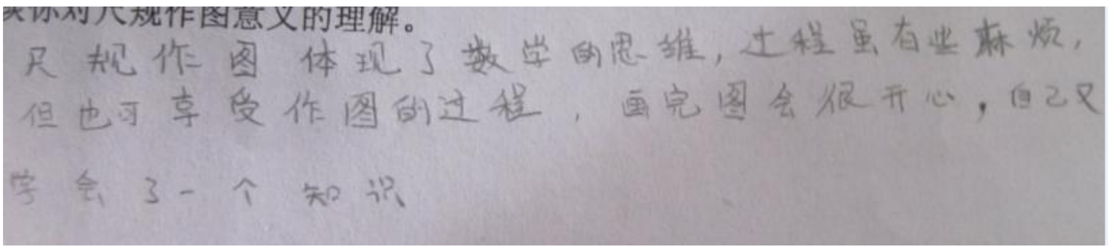


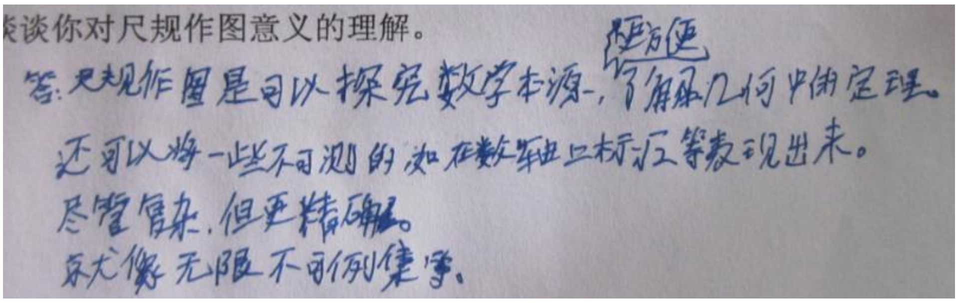
图 3 学生对尺规作图意义的理解

由于有些同学在回答中写了多于一条，以上统计结果有交叉的部分，并不是加起来等于总人数 36。从统计结果来看，大部分学生都认同用尺规作图会使作出的图形更精确，也有不少学生提到了数学思想和几何原理，说明他们对尺规作图的本质有了一定的理解，能够较好地消化课上老师所讲的相关内容，事实上这对六年级学生来说是有一定难度的，认知要求比较高。另外，也有不少学生提到尺规作图相对麻烦，但更精确。学生作答的部分问卷截图如下。

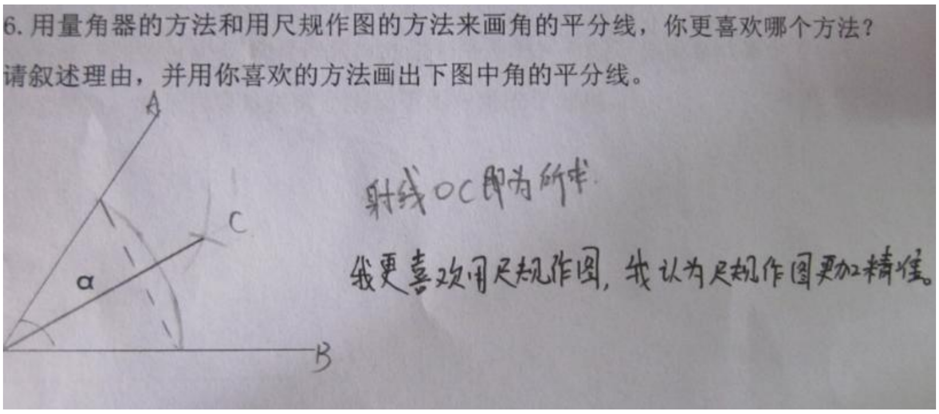

谈谈你对尺规作图意义的理解。
我认为尺规作图能从数学原理方面得到解释，而且更精确，有利于数学的探究


尺规作图是让我们有数学的头脑，更好地理解数学原理。


谈你对尺规作图意义的理解。
尺规作图体现了数学的思维，过程虽有些麻烦，但也可享受作图的过程，画完图会很开心，自己又学会了一个知识



问卷最后一题是问学生对于用量角器和尺规作图的方法画给角平分线这两种方法中更喜欢哪一种，说明理由，并用自己喜欢的方法画出给定角的角平分线。有 29 名学生表示更喜欢尺规，2 名学生表示更喜欢量角器，2 名学生表示两者都喜欢，另外几名学生则没有明确表示更喜欢哪一种方法。总体来看，学生还是倾向于尺规作图，对其意义有了较深入的理解，有些学生也提到，当所给的角比较麻烦时，尺规作图会更精确。从作图结果来看，只有 1 名学生的角平分线画错了，其他学生都作的图都是正确的。以下是学生作答的部分问卷截图。



5 反思

授课教师认为，本节课有以下几处不足之处：

（1）开场直接从回顾提问知识点，不能体现生动性。这里不妨从一个生活实例出发，或许既能缓和开场的紧张气氛，又能为下文角平分线埋下伏笔。

如图，要在叉路的中间装路灯，灯柱该装在哪儿？

如果这样开场，下文讲到角平分线时就不会显得那么突兀了。

（2）数学史的内容过少，并且向学生呈现时不够形象化。其实从介绍角的概念时就可以先介绍历史上是怎样描述角的概念（三方面描述：质，量，关系），并配以图片。在介绍欧几里得的角平分线作法时，应该也配以图片，那样将更加形象，给学生以视觉冲击。

（3）仅是片面的将历史融入课堂，而没有将生活也融入课堂，缺少了趣味性。

在课后点评中，大家一致认为，对一个新教师来说这节课是上得比较成功的，从学生的课堂表现和课后反馈来看，教学效果也是有目共睹的。并且大家都很认可“翻转课堂（即教师在课前创建好视频，学生在家中或课外观看视频，回到课堂上师生面对面交流讨论并完成作业的这样一种教学形态）”这一教学形式，这也是本节课的一个创新之处。

但也有不少老师提到，本堂课在数学史运用的趣味性上展现不够，可以加入 PPT 展示，通过古代数学家画像或是原始数学素材的呈现，让学生直观感受到数学知识的发生过程。同时，课堂联系生活这一点也没有得到足够的体现，没有涉及到“为什么要学习角平分线？”这个问题，教师可以在生活中取材。

本节课的缺点让授课教师深深感受到自身数学史知识的不足。要开发完善、精彩的 HPM 案例，教师需要阅读更多的数学史书籍，积累更丰富的数学史素材，并对数学史素材进行必要的裁剪和加工；在教学设计环节，还需要与 HPM 研究者进行深入交流研讨。这也是每一个对 HPM 跃跃欲试的教师要做的。

参考文献

[1] Furinghetti, F. The long tradition of history in mathematics teaching: an old Italian case. In V. Katz（Ed.）, *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. 49-58.

[2] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge: The University Press, 1968. 264-267; 294-296

基于数感的无理数教学

——$\sqrt{2}$ 的认识

叶晓娟

（华东师大数学系，上海，200241）

《全日制义务教育数学课程标准（2011 版）》（以下简称《新课标》）中明确写道："在数学课程中，应当注重发展学生的数感、符号意识、空间概念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。……数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。"[1]新课标把数感放在首要位置，可见数感在数学学习过程中的重要性。

七年级学生已经完成了有理数的学习，而无理数对于他们来说是一个全新的领域。如何通过发展学生的数感来促进学生对无理数概念的理解，是无理数教学中需要解决的问题。$\sqrt{2}$ 是学生学习的第一个真正意义上的无理数，对于 $\sqrt{2}$ 的数感的建立对后续无理数学习具有十分重要的意义。因此，我们根据数感的组成成分，来设计"$\sqrt{2}$ 的认识"的教学。

1 与 $\sqrt{2}$ 相关的数感成分

关于数感的组成成分，虽然不同学者的看法互有不同，但他们对其中一些主要成分都是认同的。表 1 给出数感的五种成分[2]以及 $\sqrt{2}$ 所对应的具体内涵。

从表 1 可见，$\sqrt{2}$ 这一特殊无理数涉及数感组成成分中的四个。因本节课是让学生第一次认识 $\sqrt{2}$，因此，教学中着重需要考虑第一个成分：$\sqrt{2}$ 的产生、$\sqrt{2}$ 的几何表征以及 $\sqrt{2}$ 的属性。

公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派将"万物皆数"的理念作为其哲学的根基。这里所谓的"数"，即是我们今天所说的正有理数（正整数或正分数）。但该学派的西帕斯（Hippasus，公元前 5 世纪）发现，正方形对角线与边长"不可公度"，即两者之比并不属于他们所熟悉的"数"。于是，无理数诞生了。

表 1 与 $\sqrt{2}$ 相关的数感成分

序号	数感成分	$\sqrt{2}$ 所对应的数感成分
1	了解数字的基本意义	$\sqrt{2}$ 的产生；$\sqrt{2}$ 的几何表征；$\sqrt{2}$ 不能表示成分数
2	比较数字大小的能力	在 1 和 2 之中，$\sqrt{2}$ 更接近哪一个数
3	了解运算对数字的意义和影响之能力	--
4	发展并灵活运用参考点的能力	估计 $\sqrt{2}$ 在 $\sqrt{1}$ 和 $\sqrt{4}$ 之间
5	发展心算和估算策略，判断运算结果之合理性的能力	估计 $\sqrt{2}$ 的近似值

$\sqrt{2}$ 的产生、几何表征和属性，都与数学史息息相关，因此，我们采用了 HPM 视角来设计“$\sqrt{2}$ 的认识”的教学。希帕索斯在发现无理数的过程中，利用了勾股定理（西方称为毕达哥拉斯定理），而七年级学生尚未学过该定理，因此，我们采用重构式，通过面积计算来引入 $\sqrt{2}$ 。关于 $\sqrt{2}$ 不是有理数证明，我们采用了复制式，即古希腊哲学家亚里士多德所提及的反证法，很可能是希帕索斯本人给出的。接着，我们采用附加式，向学生介绍无理数的历史。最后，设计“在数轴上标出 $\sqrt{2}$ 准确位置”的活动，来凸显 $\sqrt{2}$ 的几何表征。

2 教学过程

2.1 操作

为了充分发挥学生的主体性，我们设计了一些操作内容，以一种更自然的方式引入无理数。

操作 1：分别画一个边长为 1*cm* 的正方形和 1*dm* 的正方形。

操作 2：度量这两个正方形的对角线。

通过直尺度量，学生得出两个正方形的对角线分别在 1.4*cm* 到 1.5*cm* 和 14.1*cm* 到 14.2*cm* 之间。

操作 3：画一个面积为 $1\,cm^2$ 的等腰直角三角形。

学生观察到该三角形的直角边即为边长为 $1cm$ 的正方形的对角线。接下来，教师让学生思考：它的直角边长是多少？

2.2 $\sqrt{2}$ 是无理数的证明

为了回答上述问题，学生通过等腰直角三角形的面积公式列出了方程：

设等腰直角三角形的边长为 x，则 $\frac{1}{2}x^2=1$，即 $x^2=2$。为了验证之前的测量是否准确，这里检查了 1.4，1.5，1.41 及 1.42 的平方值，推出这几个测量值都不是 x 的精确值。那么 x 的精确值究竟是多少呢？不难得出，其值在整数 1 和 2 之间，因此 x 不是整数。

接下来要进一步说明它不是分数，此时学生能感觉出它不是个分数，但无法说清理由，这里发生了一个有意思的片段，以下是师生对话：

T：你感觉它不是分数，你能说清楚吗？好（指向某学生），你说说看。

S1：因为分数能在数轴上表示，而且一定有一个固定值。

T：好，你讲到了分数能在数轴上表示，你觉得它（x）不能在数轴上表示，所以你觉得它不是个分数？

S1：因为没有一个数字的平方等于 2。

T：好，我们带着这个问题，先不管对错。提得非常好，大家可以去思考一下……

接下来，教师给出了完整的证明过程。

证明：假设 x 是有理数，那么可以得到 $x=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 都是整数，a 与 b 互素。两边平方得 $2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$，即 $a^2=2b^2$，则 a 是 2 的倍数。

再设 $a=2m$，其中 m 是整数，则有 $(2m)^2=2b^2$，即 $b^2=2m^2$，所以 b 也是 2 的倍数，这样 a 与 b 不互素，与前面假设 a 与 b 互素矛盾。

因此 x 不是有理数，由于这个数与 2 有关，我们现在用 $\sqrt{2}$（根号 2）来表示。

该部分从无理数的定义出发，给出 $\sqrt{2}$ 是无理数的证明过程。在该证明过程中，对数的理解和运算要求是比较高的，这一富有挑战性的内容更能激发学生的思考。

2.3 $\sqrt{2}$ 的历史

以 PPT 的形式介绍了与毕达哥拉斯学派的数学成就、“万物皆数”思想等，以及希帕索斯发现无理数、第一次数学危机、数域的扩充等内容。以下是 PPT 内容。

“希帕索斯，生活于大约公元前 500 年，属于毕达哥拉斯学派门生。

公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，世界上只有整数和分数(有理数)。而希帕索斯却发现了一个惊人的事实:一个正方形的对角线与其一边长的长度是不可公度的（即：若正方形的边长为 1，则对角线的长不是一个有理数）令该学派感到恐慌，并引发了第一次数学危机。有传言说最终希帕索斯被判决淹死。

希帕索斯是发现无理数的第一人。

无理数发现后，数域得到了扩充。”

2.4 实数的分类

先回顾有理数的分类，然后加入无理数这一类，构成整个实数数域：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\\text{分数}\end{cases}\\\text{无理数}\end{cases}$$

2.5 $\sqrt{2}$ 在数轴上的表示

教师向学生展示了正方形和等腰直角三角形互换的过程，随后提出思考：$\sqrt{2}$ 究竟能不能在数轴上表示呢？

学生从前面拼一个面积为 $1\,cm^2$ 的等腰直角三角形中获得灵感，在数轴上成功地作出了 $\sqrt{2}$ 。

以下是学生在黑板上展示的两种正确作法：

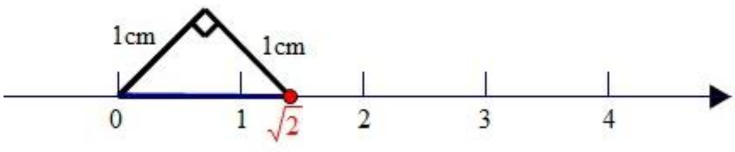


图 1 学生作图方法之一

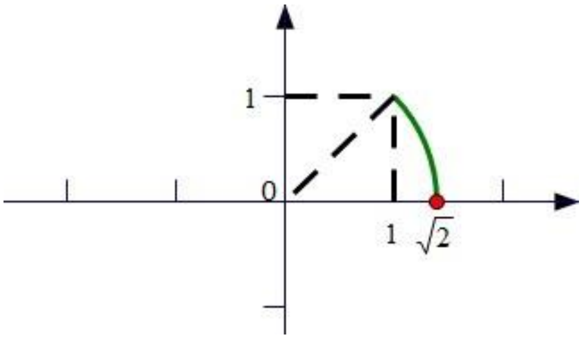


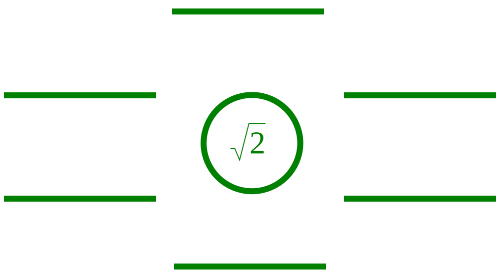
图 2 学生作图法之二

通过这一练习过程，就解决了 2.2 中学生的困惑，即 $\sqrt{2}$ 是可以在数轴上表示的。

3 学生反馈

课后，我们对学生进行了问卷调查，并选取 3 名学生进行了访谈。

问卷中设置了这样一个问题："谈到 $\sqrt{2}$，你想到哪些内容？请把想到的内容写在下图中的横线上，并简单说明理由。"



42 份有效问卷中，共有 243 条回答。

有 41 名学生（98%）的回答涉及 $\sqrt{2}$ 的基本属性，比如 $\sqrt{2}$ 是无理数，$\sqrt{2}$ 是无限不循环小数，$\sqrt{2}$ 不能用分数表示等等。从学生回答的数量上来看，有关 $\sqrt{2}$ 的属性共计 115 条，平均每人写出了接近 3 条有关 $\sqrt{2}$ 的基本属性。

$\sqrt{2}$ 的几何表征作为本节课的重点内容之一，也引起了学生的注意，有 32 名（78%）学生的回答涉及几何表征，如数轴、面积为 1 的正方形的对角线等等。此类回答共计 51 条。

19 名（45%）学生的回答涉及 $\sqrt{2}$ 的历史，如希帕索斯、第一次数学危机、无理数的发现等等。此类回答共 23 条。

此外，有 36 条回答与 $\sqrt{2}$ 的近似值有关，如 $\sqrt{2}$ 在 1 和 2 之间，$\sqrt{2}$ 约等于 1.41 等等；

11 条回答与运算有关，如$\sqrt{2}$的平方为 2、乘法口诀等；还有 6 条回答是关于$\sqrt{2}$的符号表征的，此类回答均为“根号”。

以下是访谈片段。

对学生 S2（女）的访谈：

T：教师让你们在数轴上找一个点，画出来的那个点是精确值吗？

S2：不是，画出来不可能是精确的，而且$\sqrt{2}$不是有理数。

T: 正方形的对角线是$\sqrt{2}$，那么用尺规作图把这个对角线画到数轴上，它是精确值吗？

S2：……

T:你再想一想，没关系。

S2:（犹豫之后回答）不精确。

…………

T：证明$\sqrt{2}$不能用分数表示，用了一个假设，你能回想起来吗？

S2：忘记了。

T：你相信$\sqrt{2}$不能用分数表示吗？

S2：是的。

T：教师对$\sqrt{2}$有个估算，关于估算值，你是怎么做的呢？

S2：我觉得无理数很难估算，能够证明$\sqrt{2}$是无理数我觉得就可以了。

T：如果让你估算$\sqrt{5}$，你能估算吗？

S2：还没有学。

对学生 S3（男）的访谈：

T：教师用作图的方法在数轴上画出了$\sqrt{2}$的点，你觉得这个点是精确的吗？

S3：我觉得是精确的。

T：为什么？

S3：因为只要正方形的精确的，那么对角线就一定是$\sqrt{2}$，然后移下来，它就肯定是精确的。

T：怎么样移下来？

S3：用圆规移下来。

T：那如果有同学是用直尺移过来的话呢？

S3：不精确，因为直尺最多只能到毫米。

T：你现在还能回想起教师是如何证明 $\sqrt{2}$ 不能用分数表示的吗？

S3：因为两个数的乘积是 2，其中一个数就是 $\sqrt{2}$ ……

T：……要证明它不是一个分数？先假设？

S3：……（此时有另外一位女同学在旁边，回答出假设 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$，m,n 都是整数且互素，再两边平方……该同学表示自己能写出整个证明过程）

S3 觉得自己无法写出完整的证明过程，但他坚信 $\sqrt{2}$ 不能用分数表示。

T：你能估算 $\sqrt{5}$ 的大小吗？

S3：（稍加思索）应该在 2 到 3 之间。因为二二得四，三三得九，5 在 4 和 9 之间。

从访谈可以看出，仍有学生对 $\sqrt{2}$ 在数轴上的表示是否精确存在疑虑，这对于刚学习无理数知识的七年级学生来说也是在意料之中。尽管学生对 $\sqrt{2}$ 不是无理数的证明过程理解得不是很透彻，接受访谈的 3 名同学均坚信 $\sqrt{2}$ 不能用分数表示。这一信念正是建立在数感的基础上的。

从估算 $\sqrt{5}$ 的大小来看，部分学生在认识无理数之初，就已经具备一定程度的发展并灵活运用参考点的能力。

3 结语

本节课中操作内容的设计是一大亮点，学生将无理数这一抽象的概念化为实物，自己动手拼出了边长为 $\sqrt{2}$ cm 的等腰三角形，在这一基础之上，学生很轻松地在数轴上画出了 $\sqrt{2}$，无理数教学中的一大难点就这样轻松而自然地解决了。数感本是看不见摸不着的，而这一抽象的概念在本节课中却以一种形象的方式得到了演绎。对学生来说，这一定是一堂生动而难忘的课，而无理数的引入也必然是成功的。

本节课讲授了 $\sqrt{2}$ 是无理数的一个证明方法，这一内容对学生来说是有难度的，学生也

并不能够完全理解这一过程。但通过该证明过程，学生坚定了 $\sqrt{2}$ 是无理数这一信念。这也是培养数感的一种方式。

从问卷和访谈的结果来看，平均每位学生由 $\sqrt{2}$ 能想到 5 条以上的有关内容，且覆盖了与数感有关的绝大部分成分：$\sqrt{2}$ 的产生；$\sqrt{2}$ 的几何表征；$\sqrt{2}$ 不能表示成分数；估计 $\sqrt{2}$ 在 $\sqrt{1}$ 和 $\sqrt{4}$ 之间；估计 $\sqrt{2}$ 的近似值。因此，HPM 视角下的教学对于培养学生对无理数的数感是有效的。但访谈中所暴露出的一些问题也表明，无理数对学生而言是一个难学的概念，有关数感的建立并非一蹴而就之事，尚需在后续学习中不断发展。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育阶段数学课程标准. 北京: 人民教育出版社, 2011

[2] 杨德清. 从教学活动中帮助国小六年级学生发展数字常识之研究. 科学教育学刊, 2002, 10(3): 233-259.

[3] 吴晨昊. 六年级学生数感的发展. 华东师范大学硕士学位论文, 上海: 华东师范大学, 2013

HPM 视角下“对数”概念的教学*

金惠萍，王芳

（浙江省义乌中学，义乌，322000）

1 问题的提出

人教版普通高中数学课程标准实验教科书《必修①》中，“对数”概念是通过人口增长模型 $y=13\times1.01^x$，在已知底数和幂值 y 的条件下求指数 x 的问题引入的。这种引入方式结合实际问题，简明扼要地指出了“对数”研究的必要性，揭示了对数与指数之间的内在关系，有利于保持“基本初等函数”这一章节的系统性。

尽管如此，对学生而言，“对数”毕竟是一种新的运算，它的表示及其运算规则都是之前所不熟悉的。在“对数”学习中，学生普遍存在着两个现象：一是对“对数”的必要性认识仍然比较模糊；二是盲目套用对数运算法则，出现 $\log_a(MN)=\log_a M\cdot\log_a N$、$\log_a(M+N)=\log_a M\cdot\log_a N$ 之类的错误。导致上述现象的原因，是缺乏“对数”产生背景的了解，如若未能领悟其中的“算理”，接受起来自然比较困难。英国数学史家福弗尔（J. Fauvel, 1947-2001）认为，这种透过指数的定义方式太过于抽象和形式化，非但“无法带给学生任何的启蒙”，而且还造成学生在对数概念学习上的“内在洞察力的丧失”[1]。

为了弥补这一缺憾，教材在“课后阅读与思考”中特别介绍了“对数的发明”，供学生了解对数的发展史。但从实施情况来看，大部分学生并未给予应有的关注，而教师常常因为课时的限制未能将之纳入到课堂之内，辜负了教材编写者的良苦用心。能否寻求这样一种方式，既不挤占太多教学时间又能清楚地诠释“对数”的算理，既不致于让本课异化为“数学史课”又能还学生一个“有血有肉”的对数？

2 来自数学史的启迪

对数概念的发生源于人们对计算方法的改良。早在公元前 3 世纪，古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 前 287-212）已经认识到等差数列和等比数列之间的对应关系，并提出指数律。15 世纪，法国数学家许凯（N. Chuquet, 1445-1488）在其《算学三部》中给出了双数列

*本文是课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）的 HPM 案例之一，由浙江省义乌市王芳数学教育工作室设计和实施。

1	2	4	8	16	32	…	1048576
0	1	2	3	4	5	…	20

之间的对应关系[3]，如：

• 4 对应的数 16 自乘，等于 8 对应的 256；

• 7 对应的 128 乘以 9 对应的 512，等于 16 对应的 65536，

等等。16 世纪，德国数学家施雷伯（H. Schreyber, 1495-1525）、鲁道夫（C. Rudolff, 1499-1545）、斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）、克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）、荷兰数学家弗里修斯（G. Frisius, 1508-1555）、法国数学家佩勒蒂埃（J. Peletier, 1517-1582）、拉姆斯（P. Ramus, 1515-1572）等，都曾利用等差和等比数列的对应关系来简化计算。其中，斯蒂菲尔针对双数列

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \dots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \dots \end{array}$$

明确提出四条一般的运算法则[2]：

(1) 等差数列中的加法对应于等比数列中的乘法；

(2) 等差数列中的减法对应于等比数列中的除法；

(3) 等差数列中的简单乘法对应于等比数列中的乘方；

(4) 等差数列中的除法对应于等比数列中的开方。

由于人们所使用的等比数列的公比都是大于 1 的正整数，随着项数的增大，两项之间的间隔越来越大，因而在实际计算中用处不大。鉴于此，苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）采用了十分接近 1 的公比，利用递减等比数列[3]

$$10^7，10^7\left(1-10^{-7}\right)，10^7\left(1-10^{-7}\right)^2，10^7\left(1-10^{-7}\right)^3，\dots，10^7\left(1-10^{-7}\right)^n，\dots$$

与首项为 0、公差为 1 的等差数列相对应，保证在一定范围内相邻两项间隔非常小，在该范围内小于10^7的任何整数均可在同一个等比数列中找到，这样，就可以利用对应关系来简化乘除运算了，纳皮尔还将离散的数列转化为连续的运动模型。1614 年，纳皮尔出版《奇妙的对数定理说明书》，成了对数的发明者。为了这一具有划时代意义的发明，纳皮尔整整花费了 20 年时间！不久，布里格斯 （H. Briggs, 1561-1630）改造了纳皮尔的对数，发明了常用对数。

对数的发现早于指数，但直到 1728 年，瑞士大数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）理顺了指对关系，提出“对数源于指数”之后，“对数”才被世人广泛接受。

由上可知，对数的发展大体可分为简化运算思想的形成、对数表的发明、指对关系的发现三个阶段。随着计算工具的不断变革与普及，对数表逐渐淡出了人们的视野，新版教材也应时而变，略去了对数发展的前两个阶段。但这段横跨两百多年跌宕起伏、动人心魄的发展史，仍然耐人寻味，而其间每个阶段所凝聚的思想、智慧与精神，至今闪烁着动人的光芒。

为此，我们沿着对数的发展脉络，把前两个阶段也纳入到课堂教学之中，进行了一次历史的“重构”。对于“第一阶段”，依据当时的历史事实，设计了一个“天文数字计算”情景，以繁杂的计算为映衬，凸显出“简化运算”的迫切性。对于“第二阶段”则进行了适当的教育加工，设计了一场从“指数表”演化为“对数表”的探究活动。考虑到高一学生的认知水平，用“以 2 为底”代替“以 10 为底”，提高规律的识别度，突出数表的强大作用，使学生的思维专注于“算理”的探究与运用上，进而深层次理解“对数”概念的数学本质。

对于“第三阶段”的“指对关系”，并不单独呈现，而是将之作为一种思想方法，渗透至上述各环节之中。整合后的教学过程如图 1 所示，下文给出的是几个主要环节的课堂实录。

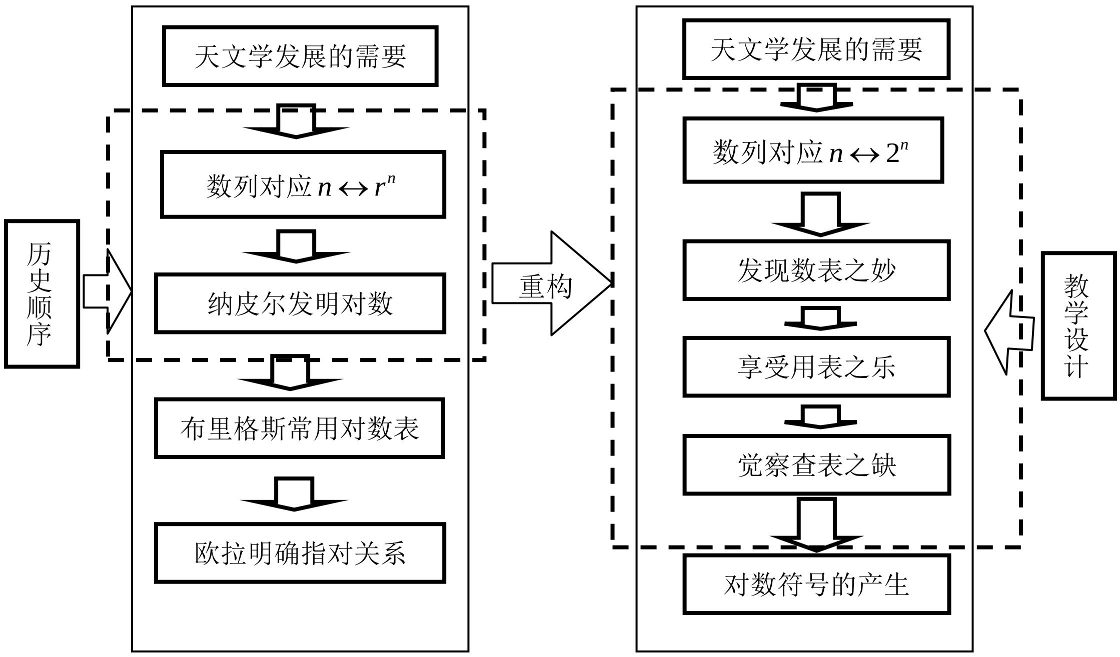


图 1

3 课堂实录

3.1 感受运算之繁

师：今天老师想考验大家的速算水平，请计算：299792.468+31536000=?

生：31536792.468。

师：那把“＋”变成“×”的话呢？

生：……（众说不一，抱怨数据太大）

师：看来乘法比加法要难。数据太大，但来自生活，299792.468 是光在真空中的速度（km/s），31536000 是一年的总秒数，因此两数的乘积就是天文学中一光年的大小。光年是天文学单位。天文学中计算的数据是以这个数据为基础的。

生：这么大，难怪叫天文数字。

师：在十六、十七世纪，天文学开始迅速发展，并带动了很多领域的发展。天文学家为了计算一个行星的位置，时常需耗费几个月甚至几年的时间，问题只要就集中在复杂的数据运算上。改进数字运算成为数学家们的当务之急。

3.2 发现数表之妙

师：当时的数学家也在试图改进运算，并在研究中发现了一些规律。请大家填写下表，并找出它的规律。

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	2	4	8	16	32			…

生：分别填 64，128，规律是 $y=2^x$。

师：那你能继续算一下 x=10 时，y 所对应的数是多少？

生：1024.

师：那 15 对应的呢？（稍顿）

师：大家能算吗？动手试试？

生 1：15 个 2 相乘可得（大家都笑了）。

生 2：2^{15} 可拆成 $2^5\times2^{10}$（新颖的想法激起很多同学的兴趣）。

生 3：我觉得它可以有很多种拆法。只要拆出来的两个数对应的指数之和等于 15 就可以。

师：很好，那还能算 2^{13}、2^{14} 以及其它的数吗？

生：可以，只要像上面一样拆就可以了。

师：通过这种方法，我们可以制作成一张表格。

3.3 享受用表之乐

师：同学们来看第二个问题：16×128=?

生：2048。

师：算的很快，能不能再算一个，128×256=?

生：32768。

师：我们请这位同学说说他的方法，怎么可以算的这么快。

生：$128=2^7, 256=2^8$；由 7+8=15 得到 $2^7\times2^8=2^{15}$，可以从表格中查得（表现得颇有成就

感）。

师：是吗？居然不用计算，查查表就可以了！你们愿意再挑战一下吗？ $0.125\times1024=?$

生：$2^{-3}\times2^{10}=2^{7}=128$。

师：那 $4096\times16384=?$

生：16384 是 2 的几次？

师：同学们请拿出课前发给大家的表格 A（课前发放，查表应用时只涉及 $2^{12}\times2^{16}$ 对应的数据，下面的 B 表同此），同学们看看有没有？

生 1：有。$2^{12}\times2^{14}=2^{26}$，查得 67108864。（感觉表 A 很好用）

生 2：若要算 67108864×512 呢？表中没有啊。

表 A

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$y=2^x$	0.00097656	0.00195313	0.0039063	0.0078125	0.015625	0.03125	0.0625	0.125	0.25	0.5
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y=2^x$	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$y=2^x$	2097152	4194304	8388608	16777216	33554432	67108864	134217728	268435456	536870912	1073741824

生 3：这个表最大只能查到 2^{29}，如果要算 2^{35} 就不行了。有没有更大的表？

师：请看 B 表。

表 B

x	31	32	33	34	35
$y=2^x$	2147483648	4294967296	8589934592	17179869184	34359738368
x	36	37	38	39	40
$y=2^x$	68719476736	137438953472	274877906944	549755813888	1099511627776
x	41	42	43	44	45
$y=2^x$	2199023255552	4398046511104	8796093022208	17592186044416	35184372088832
x	46	47	48	49	50
$y=2^x$	70368744177664	140737488355328	281474976710656	562949953421312	1125899906842624
x	51	52	53	54	55
$y=2^x$	2251799813685248	4503599627370496	9007199254740992	18014398509481984	36028797018963968
x	56	57	58	59	60
$y=2^x$	72057594037927936	144115188075855872	288230376151711744	576460752303423488	1152921504606846976

生 1：B 表也只能算到 2 的 60 次幂，虽然数据已经很大，但还是不够用啊？

生 2：我认为这个问题还可以解决，只要我们按上面的方法把表格造出来就可以了。但我觉得有个更大的问题——这个表只能查 2 的整数指数幂，对于其它数值，比如 3×5 就不行。

师：看来还有大问题。那怎么办？

生：能不能把表做的更细一点，把 3 是 2 的几次方，5 是 2 的几次方都做进去？

师：可以。在 16 世纪，数学家已经可以借助微积分计算出分数，小数指数幂的近似值。这个是《中学数学用表》（展示《中学数学用表》），里面有张表格可以用来查询你所需要的数，其实初中时大家也都发过，只是很少应用。但要说明一下，它是以 10 为底的，原理是一样的。

生：哇，好厉害。

师：表虽然好用，但造表的难度却相当大，不过一旦做好了就能一劳永逸。500 年前苏格兰数学家约翰·纳皮尔，他用了人生中宝贵的 20 年时间，研究运算规律，并制作了一张可查的表格。数学家拉普拉斯说："对数用缩短计算的时间来使天文学家的寿命加倍"。伽利略更是发出了豪言壮语："给我时间、空间和对数，我可以创造出一个宇宙来"。对数表曾在几个世纪内为数学家、会计师、航海家和科学家广泛使用。想象纳皮尔的整整 20 年时间，每天在不停地计算，计算……而我们有时候可能算五分钟的计算时间就已经没有耐心了。如果我们也能花这样的精力去做一件事情的话，每个人或许都能成为伟人。（学生们被历史故事深深吸引，连连点头表示认同，部分学生陷入沉思之中）

师：纳皮尔把表上行的数称为"logarithm"。在康熙年间传入中国，《数理精蕴》中把这个数表下行称之为真数，上面那个借来用一下的数称为"借数"，也是下面的数所"对应的数"，后来简称为"对数"。

生：（顿悟）原来"对数"的"对"不是指"对"（"错"的反义词）的数，而是"对应"的数啊！

3.4 体验查表之缺

师：请思考之前的问题 299792.458×31536000，如何解决？

生：如果有表格，则只需要找到 299792.458 对应的 x。同理找到 31536000 对应的 y。只需求得 $x+y$ 的值，查表即得 299792.458×31536000 的结果。

师：我们采用 excel 模拟操作。请同学们观察这个计算存在什么问题？

生：查表所得到的乘积跟手工算得值不相等，查表只是近似值。

生：那能不能精确表示呢？（师生共同讨论，发现数表解决不了这个问题，感觉比较失望）

3.5 引入符号之需

师：大家一起回顾一下初中里学习无理数时的场景，$\sqrt{2}$ 表示什么？

生：它是一个符号，表示 $x^2=2$ 的正解。

师：是估计值吗？

生：是精确值。

生：对了，我们是不是也可以找一个记号来表示它们？（小声嘀咕，不太敢说）

师：嗯，你的意思是通过“定义”一个记号来表示新产生的对数。如何表示呢？历史上采用了 logarithm 的缩写 log 来表示对数。例如 $2^x=3$ 中 x 就表示为 $\log 3$，那 $2^x=5$ 呢？

生：$x=\log 5$。

生：老师这样好像有问题。如果我要表示 $3^y=3$，那不也是 $\log 3$ 吗？重复使用了。

师： 是有这个问题，怎么解决呢？

生：我觉得是不是可以把底数也表示进去？

师：嗯，数学家也这么认为。他们把底数也写入到记号中，例如 $2^x=3$ 中的 x 表示为 $x=\log_2 3$，而 $3^y=3$ 中 $y=\log_3 3$。

师：把这些记号一般化，就有了“对数”的定义：若 $a^x=N$，则数 x 就叫做以 a 为底、N 的对数。记作：$x=\log_a N$，其中的 a 称为底数，N 称为真数。

4 课后调查

本节课的授课对象是一所普通高中的高一普通班学生，课后的问卷调查结果显示：

（1）在概念的理解上，86.4%的学生认同符号“log”，95.5%的学生能够准确判断“log”与“a”、“N”的关系，四题“指对互化”小题的答题正确率达 98%，87.7%的学生在看到对数式“$x=\log_a b$”时，第一反应是“$a^x=b$”，说明课堂并未影响学生对指对关系的认识。虽然本课未讲授对数运算法则，但有 75% 的学生认为 $\log_2(a+b)=\log_2 a\cdot\log_2 b$（$a>0,b>0$）是“错误的”，明显高于该年段的其他班级。这表明学生已充分认识了“对数”中的简化运算思想，基本理解了对数“化乘法为加法”的“算理”。

（2）在数表的应用上，教师课前存有顾虑：一是对数表本身数据多，会否让学生感觉繁杂？二是教材中已经略去了“对数表”，现在虽经改良，但在短暂的时间内能否起到应有的价值？为此，问卷调查中特别设计相关问题，所得的结果令人惊喜。89.5%的学生认为数表在课前发的，且上课时仅仅用到了表中的若干数据，并无繁杂之感；92%的学生觉得大开眼界，认为“这些貌似冰冷的数字居然蕴含了如此丰厚的数学思想”；54%的学生“突然明

白了初中时发下来的那本数表居然这么有用”，有 3 位同学提出“把那本陈旧的‘数表’翻出来再研究一番”。

（3）在教学形式的认可上，95.5%的学生表示适应这样的课堂形式，93.2%的学生认为这节课的内容比教材介绍的丰富多了。93.2%的学生对课堂所涉及到的数学史知识很感兴趣，包括纳皮尔的故事、课堂开始时制作的简易对数表格、常用对数表的查表等等。访谈中有不少学生表示喜欢这种授课方式，认为这样可以拓宽知识面，增进对数学的理解。访谈中所有的学生都认为纳皮尔的执着与坚持给了他们很大的触动，认为要学习科学家们潜心研究的创新精神。学生还认为现在的数学课比较单调，对于象这样有生动背景的课堂是他们想要的。

5 结语

对数的出现，源于航海、天文等方面的计算需求。看似深奥的对数理论，其起源却是朴素的，因而更能贴近学生的思维，打动学生的心灵。早在 2010 年，我国学者章建跃就曾提出“理解数学，理解学生，理解教学”是高中数学课改的基石[4]。要真正践行这三个“理解”，数学史是不可或缺的重要载体。以史为鉴，即是把“现成的知识”还原为“现实的问题”，在问题解决中经历数学知识的发生、发展过程，通过追寻大师的足迹、仰望大师的风采，汲取人类文明中的无穷智慧。这，正是开展高品质教育的“人间正道”。

参考文献

[1] Fauvel, J. Revisiting the history of logarithm. In F. Swetz et al (Eds.). *Learn from the Masters*. The Mathematical Association of America, 39-48.

[2] Smith, D. E. The law of exponents in the works of the sixteenth century. In C. G. Knott (Ed.) , *Napier Tercentenary Memorial Volume*, London: Longmans, Green & Company, 1915. 81-91

[3] 徐斌, 汪晓勤. 从指数律到对数. 数学教学, 2010(6): 35-38

[4] 章建跃. 中学数学课改的十个论题. 中学数学教学参考, 2010 (3): 2-5; (4): 2-6; (5): 2-5