上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2016 年第 5 卷第 3 期

米勒

（George Abram Miller, 1863～1951）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物为美国数学家和数学史家米勒（G. A. Miller, 1863～1951）。

米勒出身贫穷，17 岁开始就一边教书一边读大学。20 岁时，他去了宾夕法尼亚州东部城市阿伦敦，就读于穆伦堡学院，1887 年获学士学位。1887-1888 年间，任堪萨斯州格里利市的中学校长。1888 年，在伊利诺伊州尤里卡学院任教，1890 年获文学硕士学位。1892 年，他获得坎伯兰大学（田纳西州）的博士学位，翌年赴密歇根大学任教。 在那里，米勒开始对群论感兴趣。1895-1897 年，米勒先后到德国莱比锡和法国巴黎求学，听李（M. S. Lie, 1842～1899）和约当（M. E. C. Jordan, 1838～1922）的群论课。回国后，他被康奈尔大学聘为助理教授。1901 年，他转往斯坦福大学任教。1906 年，又转往伊利诺伊大学任教，直至退休。

米勒的主要研究领域是群论，但他对数学史也有浓厚的兴趣。40 年学术生涯中，他焚膏继晷，笔耕不辍，发表了 800 多篇论文，其中很大一部分为数学史方面的论文。

米勒历任纽约数学会（1894 年变成美国数学会）会员、伦敦数学会会员、印度数学会荣誉会员、美国艺术与科学院院士（1919）、美国国家科学院院士（1921）。1909-1915 年间，他担任《美国数学月刊》的编辑，1921-1922 年间，担任美国数学协会的第六任主席。去世前，他向学校捐赠 100 万美元，这在当时是一个庞大的数字，米勒因此被认为是投资理财的高手。在卡特尔（J. M. Cattell, 1860～1944）主编的《美国科学人物》中，有一份美国顶级数学家名单，米勒位居第十。

米勒在数学史方面的代表作是《数学文献历史引论》（Historical Introduction to Mathematical Literature）。此书涉及数学文献的一般概述、算术、代数和几何的典型历史话题、数学家传记等。在该书第一章，米勒概述了数学史的价值：

• 初等数学的历史有助于建立数学家和其他领域的学者（如语言学家、历史学家、哲学家、物理学家、天文学家等）之间的联系；

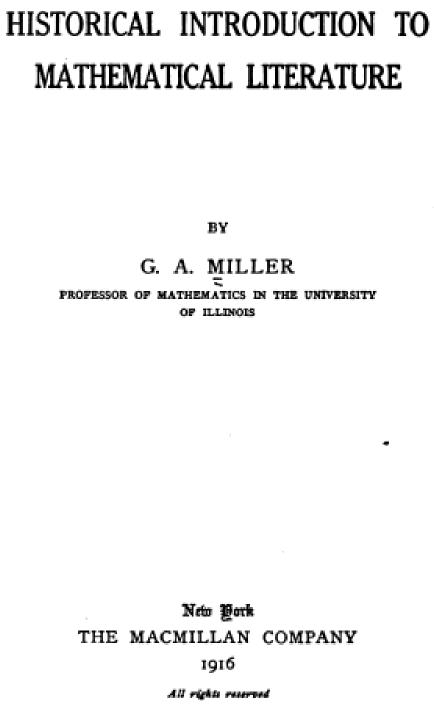
• 数学是唯一一门特别的学科，它拥有两千年以前古人用同样思维过程证明的完美的、富有启发性的结果，因此，数学史引导人们去关注科学成就的永久价值以及这些成就给予世界的智力遗产；

• 数学史让学生得以回归原始文献，因为创立一门学科的大师留下的思想往往比他们的诠释者们更深刻；

• 数学史最重要的价值在于，它为数学学习注入了更多的生命力，它将数学概念由静态变成动态；通过记录先哲们在形成数学思想潮流时所产生的影响，数学史使数学变得人性化。

• 数学史引导人们关注如下事实：个体学习者乃是一个微型的世界，世界学习各种不同数学概念的过程或多或少清晰地反映在个体的发展之中；许多重要的数学概念如此缓慢地进入世界的智力生活，并遭遇重重阻力，这对于初学这些概念的人们或试图把它们教给他人的人们来说，富有启发意义；

• 数学史还展示了许多学校数学课程中所没有的有趣的数学内容，如幻方。



HISTORICAL INTRODUCTION TO
MATHEMATICAL LITERATURE

BY

G. A. MILLER
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS

New York
THE MACMILLAN COMPANY
1916
All rights reserved

《数学文献历史引论》书影

在数学史的学术研究方面，米勒的成就和影响比不上史密斯、卡约黎、M·克莱因等，但对数学史的热爱、对数学史教育价值的高度重视以及众多的数学史著述，使得米勒当之无愧成了 HPM 的先驱者。米勒一生自强、勤奋、坚韧，为我们留下了宝贵的精神财富。

目 录

Content

历史研究

三角形中位线定理的历史

李 霞 汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

HPM 视角下的数学教学日益受到中学数学教师的关注,但历史材料的缺乏成了 HPM 教学实践的主要障碍，因此，笔者之一曾在多篇文章中提及教育取向的数学史研究的重要性[1][2][3]。三角形中位线定理是平面几何中的一个重要定理，教学实践中，人们往往只关注定理的证明和应用，而忽略其背后的历史文化内涵，因而未能充分挖掘它的教育价值。出于 HPM 视角下的教学实践的需要，本文对历史上的有关数学文献进行考察，试图回答以下问题:三角形中位线定理是如何发现的？西方早期几何教科书是如何呈现和证明该定理的？与今日教科书有何异同？中位线定理的历史有何教学启示？

1 古巴比伦泥版上的三角形分割问题

在古代两河流域，中位线知识来源于现实生活中的土地或财产分割。古巴比伦时期（公元前 1800-1600 年）的数学泥版 MLC 1950（图 1）上载有以下问题：三角形的高为 50，用平行于底边的直线将其分割成高分别为 30 和 20 的小三角形和梯形，小梯形的面积为 320，求原来的三角形以及分割得到的小三角形的底边。这其实是现代的“平行线分线段成比例定理”的应用，用中位线来分割三角形，不过是其中特殊的问题而已。

图 1

图 2

而在同时期的数学泥版 YBC 4608（图 2）上，记载着六兄弟分割三角形土地的问题，三角形的面积和高已知，三角形是用平行于底边、且间距相等的直线来分割的。古人已经知道，分割三角形的这些平行线段的长度是按照等差数列递增的。三角形中位线等于底边的一

半，这一性质已经为古人所熟知。

2《几何原本》中的有关命题

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中并没有直接讨论中位线的性质，但卷六给出了更一般的命题（命题 VI.2）：“将三角形两腰分割成成比例的线段，则分点连线段平行于三角形的底边。”[4]欧几里得证明该定理的方法是：将线段之间的关系转化为三角形面积之间的关系，再将三角形面积之间的关系转化为直线的位置关系。这种方法同样适用于三角形中位线定理。如图 3，在 $\triangle ABC$ 中，$AD=DB,\ AE=EC$。联结 BE 和 DC，因 $AD=DB,\ AE=EC,$ 故 $S_{\triangle EAD}=S_{\triangle EDB}$，$S_{\triangle EAD}=S_{\triangle CED}$。于是得 $S_{\triangle EDB}=S_{\triangle EDC}$，故知 $DE \parallel BC$。

另一方面，因为 $S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle BDE}$，而 $\triangle EBC$ 和 $\triangle BDE$ 是等高的，所以，$BC=2DE$。

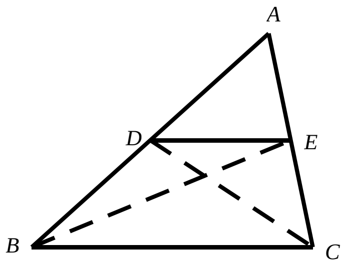


图 3

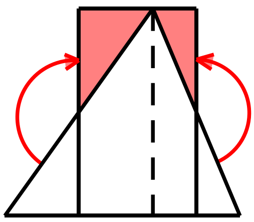


图 4

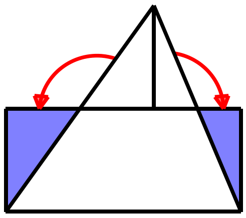


图 5

3 刘徽对三角形面积公式的推导

中国汉代数学典籍《九章算术》方田章载有如下问题：“今有圭田广十二步，正从二十一步。问：为田几何？”“又有圭田广五步二分步之一，从八步三分步之二。问：为田几何？”[5]书中给出的三角形面积公式是：“术曰：半广以乘正从。”这里，“广”就是三角形的底边，“正从”就是三角形的高。术文说的就是：三角形的面积等于底边的一半乘以高。

刘徽（3 世纪）注释说：“半广知，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按半广乘从，以取中平之数，故广从相乘为积步。[5]”这里，刘徽是通过割补的方法来推导三角形面积公式的：取三角形两腰的中点，过中点作底边的垂线，将垂线外侧的小三角形补到上方的相应位置（图 4），得到一个矩形，该矩形的面积等于原来的三角形的面积，它的长等于原

三角形的高，它的宽等于原三角形底边的一半，即三角形面积等于半底乘以高。刘徽的第二种方法是：连接两腰中点（中位线），过顶点作中位线的垂线，将中位线上方的小三角形分割成两个小直角三角形，分别将它们补到相应位置（图 5），得到一个矩形，矩形的长为原三角形的底边长，宽为原三角形高的一半，故三角形的面积等于底乘以半高。

从三角形面积公式的推导过程可以看出，中国古代数学家知道中位线与底边的位置关系和大小关系。事实上，在图 5 中，将中位线上方的两个小直角三角形分别补到相应位置时，所得到的四边形是矩形（因为一组对边平行且相等），故中位线与底边平行，且等于底边之半。

4 近现代几何教材中的三角形中位线定理

在我们所考察的 19-20 世纪出版的 50 种西方几何教科书中，有 41 种以定理或推论的形式给出三角形中位线性质，有 9 种则以习题形式给出该性质。31 种教科书中给出了具体证明，证明的方法有反证法、欧氏面积法、同一法和平行四边形法。

4.1 反证法

18 世纪法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752～1833）在《几何基础》中首先给出平行线分线段成比例定理，据此证明以下定理：“一条直线截三角形两边成比例，则该条直线平行于第三边”[6]。如图 6，已知 $AD : DB = AE : EC$，若 DE 不平行于 BC，设 $DO // BC$，由平行线分线段成比例定理得 $AD : DB = AO : OC$，又已知 $AD : DB = AE : EC$，故 $AO : OC = AE : EC$，这是不可能的，因此 $DE // BC$。这里，勒让德利用反证法证明了欧几里得的命题 VI.2。

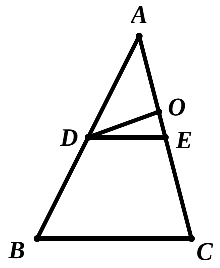


图 6

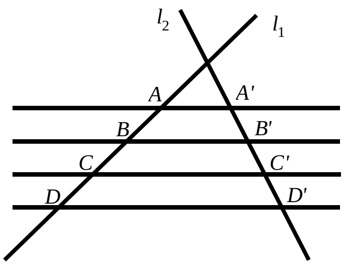


图 7

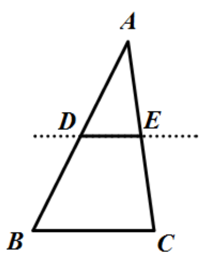


图 8

若不以“平行线分线段成比例”定理作为推理的基础，而运用欧几里得的面积法，则

用勒让德的反证法依然可以证明三角形中位线定理中的位置关系。

4.2 欧氏面积法

苏格兰数学家莱斯利（J. Leslie, 1766～1832）在《几何和平面三角学基础》（1817）中沿用了欧几里得的面积方法来证明三角形中位线定理[7]。这是 50 种几何教科书中第一本不用“过三角形一边中点且平行于另一边的直线必平分第三边”这一定理，而直接证明中位线定理的几何教科书。*

4.3 同一法

Phillips 在《几何基础》[8]（1878）中、Newcomb 在《几何基础》[9]（1899）中都利用“平行线等分线段”定理来证明三角形中位线定理。“平行线等分线段”定理说的是：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等。如图 7 所示。一组平行线截直线 l_1 所得线段 AB、BC、CD 两两相等，则它们截直线 l_2 所得线段 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$也两两相等。如图 8，已知 D 和 E 分别是 AB 和 AC 的中点，过 D 作 BC 的平行线，交 AC 于 E'，则 $AE' = E'C$，因此，DE 和 DE'重合，故有 $DE//BC$。

4.4 平行四边形法

Macine 在《平面和立体几何基础》 (1895)通过构造平行四边形证明：“过三角形一边中点且平行于另一边的直线平分第三边”[10]。然后以推论形式给出三角形中位线定理，利用同一法证明了平行，利用上述平行四边形首次证明了数量关系。因此，这也是 50 种教科书中第一本完整呈现并证明三角形中位线定理的教科书。

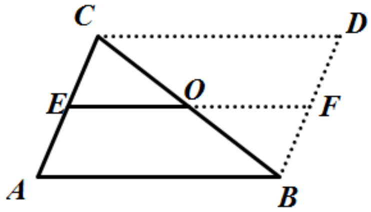


图 9

在 19 世纪末 20 世纪初的几何教科书中，大多数采用图 10 所示的方法来证明三角形中位线定理[11]：过 C 作 AB 的平行线，交 DE 的延长线于点 F，易证 $\Delta ADE \cong \Delta CFE$，四边形 $DBCF$ 为平行四边形，从而得到 $DE // BC$，$BC = DF = DE$。

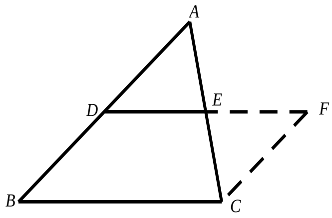


图 10

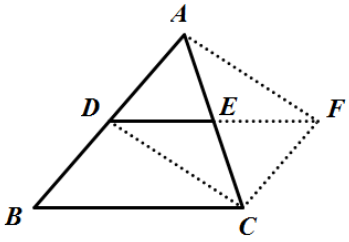


图 11

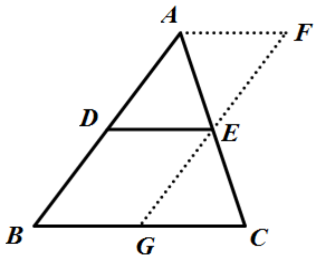


图 12

上述方法在现代课堂教学中已经衍生出多种形式：如图 10，延长 DE 至 F 使得 $DE = EF$，连接 CF，可证 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$，进而四边形 $DBCF$ 为平行四边形得证，之后定理得证；如图 11，延长 DE 至 F 使得 $DE = EF$，连接 AF、CF、CD，则四边形 $ADCF$ 为平行四边形，再有四边形 $DBCF$ 为平行四边形,从而定理得证;如图 12，过 A 作 AF 平行于 BC，过 E 作 GF 平行于 AB，则四边形 $ABGF$ 为平行四边形，易证 $\triangle AEF \cong \triangle CEG$，另可证四边形 $ADEF$ 和 $DBGE$ 为平行四边形，之后定理得证。

4.5 各种方法的分布

图 13 和 14 分别给出了 50 种教科书中各种证法的频数分布以及年代情况。

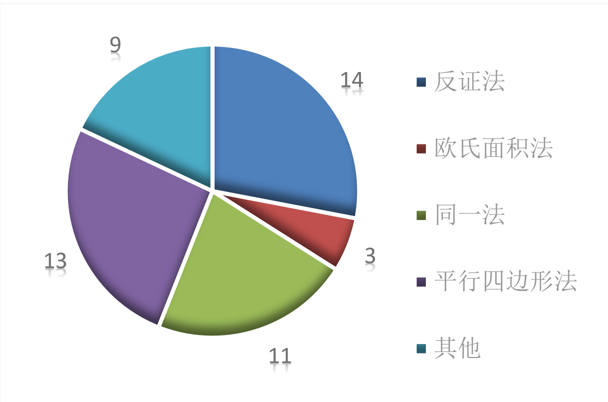


图 13

从图 13 和 14 可见，西方百年几何教科书主要利用平行线分线段成比例定理来证明中位线定理。到了 18 世纪末 19 世纪初，教科书中虽然淡化了中位线定理，但定理证明的方法更加多样。

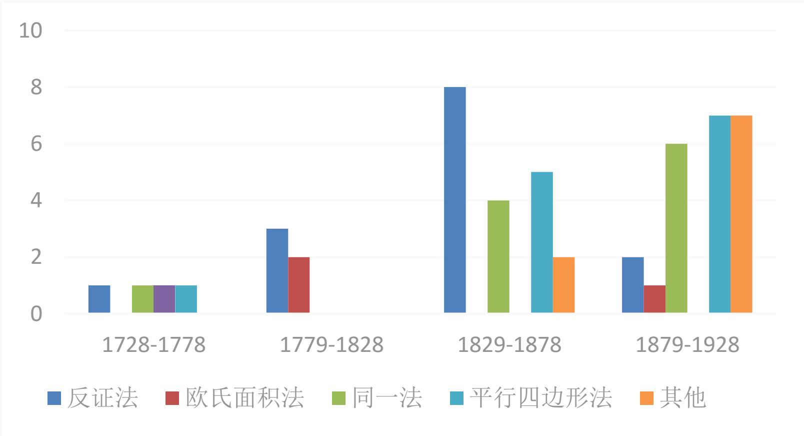


图 14

此外不同年代呈现中位线定理的方式也各有不同，如图 15 给出了 50 种教科书中三角形中位线定理的呈现方式的年代分布情况。

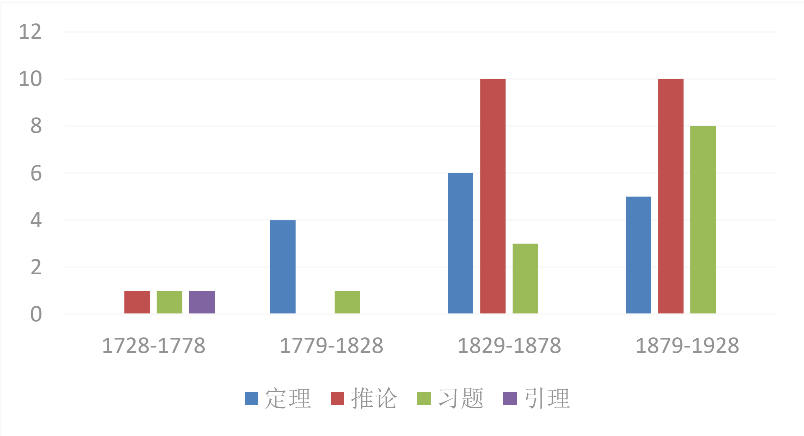


图 15

5 结论与教学启示

以上我们看到，古巴比伦人在三角形土地的分割实践中，已经知道三角形中位线定理。古希腊数学家欧几里得则证明了更一般的定理。中国数学家刘徽在推导三角形面积公式时，实际上也得出了这个定理，尽管他并未明确提出来。19-20 世纪的西方几何教科书中，该定理主要是以更一般的“平行线分线段成比例”定理或“平行线等分线段”定理的推论呈现的，是一个并不受特别关注的“配角”。相比之下，它在今日教科书的地位要高得多。今日教科书先讲三角形中位线定理，后讲“平行线分线段成比例”定理，更符合学生的认知规律。但今天教师在课堂上经常采用的反证法、同一法、平行四边形法都是历史上教科书作者们曾经使用过的方法。

三角形中位线定理的历史为今日课堂教学提供了许多启示。

一是知识之谐。为什么要学习三角形中位线定理？现行教科书和课堂教学并没有关注到学生的学习动机。教师可以从两河流域中的有关土地分割问题出发，引入中位线问题，使得该定理的出现更为自然。

二是方法之美。可以采用欧几里得的面积法、平行四边形法等多种方法对定理进行证明，拓宽学生的思维，让学生感受不同的转化思想。

三是探究之乐。教师可以从三角形面积公式的出入相补推导法出发，引导学生从中发现三角形中位线的性质，感受数学探究的乐趣，获得成功的体验。

四是文化之魅。古巴比伦、古希腊、古代中国以及近现代欧美的数学文献中都有关于三角形中位线的内容，让学生感悟数学的悠久历史以及数学文化的多元性。

五是德育之效。通过数学史的融入，教师可以创造机会，让学生穿越时空，与古人对话，从而亲近数学、增加数学学习的自信心。

参考文献

[1] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006. 15(1): 16-18.

[2] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012. (2): 3-7.

[3] 赵东霞, 汪晓勤. 关于数学文化教育价值与课堂运用现状的网上调查[J]. 中学数学月刊, 2013. (3): 41-44.

[4] 欧几里得. 几何原本[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003. 153-154.

[5] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2009. 49-51.

[6] Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge : Hilliard & Metcalf, 1825. 49-61.

[7] Leslie, J. *Elements of Geometry* [M]. Edinburgh: James Ballantyne & Co., 1817. 35-36.

[8] Phillips, W. H. H.. *Elements of Geometry* [M]. New York: Sheldon & Co., 1878. 31-32.

[9] Newcomb, S. *Elements of Geometry* [M]. New York: H. Holt, 1899. 59.

[10] Macnie, J.. *Elements of geometry: plane and solid* [M]. New York : American Book Company, c1895. 67.

[11] Williams, C. L.. Syllabus of Plane Geometry [M]. Berkeley: Standard Press, 1905. 52-53.

教学实践

数学史融入“加减消元法”的课堂教学*

洪燕君[1]　李霞[1]　常道宽[2]

（1. 华东师范大学数学系，上海，200241；2. 友爱实验中学，上海, 200241）

1 引　言

沪教版数学 6 年级下册的教科书里介绍了二元一次方程组的解法：代入消元法和加减消元法，从历史上看它们都有着丰富的文化内涵[1]，比如古代数学家使用过“直除法”、“互乘相消法”、“方程新术”等方法，但现行课本中利用“鸡兔同笼”古题给出“代入消元法”的定义，开门见山地给出“加减消元法”的概念，不涉及历史文化的内容，实际教学中人们通常也只关注方法及其步骤，没有给学生创造足够的学习动机。此外，既然代入法可以解决二元一次方程组的问题，为什么还要学习加减法？如何体现“加减消元法”解决问题的优越性，这些都是本研究拟解决的问题。

于是，我们从HPM（History and Pedagogy of Mathematics）的视角对“加减消元法”的教学做了设计和实施，拟定了如下教学目标：

（1）理解加减消元法的内涵，掌握加减消元法的化归思想；

（2）体会加减消元方法解决问题的优越性和必要性；

（3）通过古代问题的探索，让学生体会数学历史的发展演进、感悟丰富的数学文化。

2 历史钩沉

历史上的线性方程组不仅源于生活实际问题，而且其解法经历了如下发展。

2.1 直除法

我国古代没有未知数的概念, 就没有所谓的“消去法”一说，但我们有适合自己的解方程组的方法。比如《九章算术》中第八章“方程”中对于一次方程组的问题，采用分离系数的方法表示线性方程组，相当于现在的矩阵，然后行与行直接相减，以一行某项系数乘另一

行，然后以该行多次相减那一行，直至该项系数为 0，这种方法叫做“直除法”，这里的“除”是“减”的意思。“直除法”与现在矩阵的初等变换雷同，它是世界上出现最早的、完整的线性方程组的解法，亦可运用于解多元方程组，比西方数学史上德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646-1716）最早提出的线性方程组解法还早了 1700 多年。

2.2 互乘相消法

公元 3 世纪的魏晋时期数学家刘徽认为《九章算术》中用“直除法”解线性方程组比较麻烦，后来在方程章的注释中，对“直除法”加以改进，创立了“互乘相消法”。例如对方程组，刘徽是这样解的：式(1)×2，式(2)×5，得：，则(4)式减去(3)式，得 $21y=20$(下略)。

显然，这种方法与现代的“加减消元法”一致，不过那时用的是筹算。刘徽认为，这种方法可以推广到多元，“以小推大，虽四、五行不异也”，他还进一步指出，“相消”时要看两方程首项系数的同异，同则相减，异则相加。刘徽的工作，大大简化了线性方程组解法。

2.3 方程新术

《九章算术》方程章的一个题目：今有五雀六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻。一雀一燕交而处，横适平。并雀、燕重一斤。问雀、燕一枚各重几何？用现代语言翻译过来，大意是：五雀比六燕重, 各交换一只后一样重, 即 4 雀+1 燕=5 燕+1 雀。并且共重 1 斤，问各多重（古题中, 1 斤等于 16 量）[2,3]。

于是，设每只雀 x 斤, 每只燕 y 斤,《九章算术》的解法是通过“损益术”列出方程:，用直除法求出:，即每只雀两，每只燕两。后来，刘徽提出了新的解法：此四燕一雀与一燕五雀，其重等，是三雀四燕相等，雀率重四，燕率重三也，即两行直接相减得 $3x-4y=0$，因此 $x:y=4:3$，则有，于是。这种消常数的方法被称为“方程新术”，它是刘徽的一项创造。

2.4 历史素材的选取

现代教科书中的“加减消元法”与古代数学家刘徽的“互乘相消法”在本质上毫无二致，所以我们直接运用古题，并在学生解题探究中牵引给出对应的数学家及“互乘相消”、“方程新术”历史方法的介绍，这种重构数学史料融入课堂的教学，一方面能创造学生的学习动机，增强学生的学习自信心，有助于学生更好地理解数学的本质；另一方面通过古今方法的演绎，拓宽学生的思维，使得学生通过走近古人，从而走进古人的心灵，体会深刻的数学思想。

3 教学设计与实施

3.1 温故知新

教师直接给出古希腊数学家丢番图（Diophantus，公元 246-330）在其著作《算术》中的一道题：$\begin{cases} x+y=100 \\ x-y=-40 \end{cases}$，要求学生口述解题思路，旨在让学生一方面对“代入消元法”的学习知识进行巩固，另一方面让学生通过观察题目的特点，利用学过的等式性质，牵引出“加减消元法”的思路—加减和消元，从而给出“加减消元法”的概念。

师：同学们，看看这道题怎么做?

生 1：代入消元法。

生 2：第二个式子把 x 表示出来，代入第一个式子。

生 3：把第一个式子里的 x 求出来，代到第二个式子，求出 y。

师：大家说的都对。再看看这两个式子的左边，有什么特点，想想还有没其他方法呢?

生 4：x 的系数相等，y 的系数相反。

生 5：相同未知量前的系数绝对值相等。

师：很好，那这两个式子能不能相加呢?

生 6：可以。

师：为什么可以相加，利用什么性质?

生 7：（因为有）等式的性质：等式两边加减同一个数，等式仍成立。

师：对，等式性质 1：等式两边加减同一个数或同一个含有字母的式子，等式仍成立。那么，请同学们动手做一下，相加会得到什么结果，相减又会怎样?

……

师：像这样,通过两个方程相加(或相减)消去一个未知数,将方程组转化为一元一次方程,这种解法叫做“加减消元法”。

之后，教师和学生们一起分析出“加减”的本质目的是为了“消元”，从这个角度来说，它就与“代入消元法”目标一致。然后教师对这道题的出处做了介绍，给出了数学家丢番图的肖像图片，简述了他在代数上的伟大贡献。

接下来，教师趁热打铁给出了一道练习题$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$，让学生学会观察特点，可以

用代入消元法求解，也可以直接加减，从而消元，熟悉“加减消元法”的步骤。

3.2 探索新知

当学生对“加减消元法”有了初步认识后，教师给出了题目：$\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$，并介绍它出自中国的经典古籍《九章算术》：今有牛五、羊二，值金十两；牛二、羊五，值金八两，牛羊各值几何。用现代语言来说，5 头牛和 2 只羊,共值金子 10 两；2 头牛和 5 只羊,共值金子 8 两，问一头牛和一只羊各值金子多少两?

师：大家看看，这道题怎么做?

生 8：代入（消元）法。

师：可以的。如果用加减消元法，能不能做呢?

生 9:（直接）加和减都很麻烦。

师：加、减是为了什么啊?

生 10：消元。

师：对的。我再提示下，我们学过的等式性质 2 怎么说的?

生 11：等式两边同乘以一个数，等式仍成立。

师：好，那我们能不能乘了以后再“加”或者“减”呢?

师：大家现在小组探讨一下，动手做题。

在这个过程中，老师首先引导学生通过观察题目的特点，考虑怎样顺利达到“消元”的目的，然后放手让学生去探究，并找了两个同学在黑板上演示自己的解法。

师：我看到有同学用的是代入法，有的（同学）用的是加减消元法，还有同学两种方法都做了，你们觉得哪个方法好用呢?

生 12：代入法做的时候是分数计算，有点麻烦。

生 13：用加减法吧，乘一下就可以消掉一个未知数，这样就简单了。

生 14：看特点吧，(未知数）系数不为 1 的最好还是使用加减法。

师：很好，大家说的是对的。

这个环节中，学生明白了学习“加减消元法”的必要性。随后，教师介绍了刘徽的“互乘相消法”就是我们今天的“加减消元法”，并和学生一起总结归纳了“加减消元法”的解题步骤。

3.3 拓展新知

接下来，教师给出了如下二元一次方程组的题目，让学生口答解题思路。

（1）$\begin{cases} x-3y=26 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} 9x-3y=16 \\ 9x+11y=-12 \end{cases}$；（3）$\begin{cases} 5x-3y=12 \\ 3x+4y=-8 \end{cases}$；（4）$\begin{cases} 4x+y=8 \\ x+5y=8 \end{cases}$

学生们很顺利的对上述 4 道题做了正确的判断。

师：大家看看第 4 题除了刚才说的代入法，或者先乘以 4 或 5 再进行加减消元法，还有没有其他方法?

生：……

师：我们观察一下等号右边的常数项?

生 15：一样的。

生 16：哦，可以两式相减。

师：是的，直接相减会怎样？这样做会比刚才的一些解法简单吗?

生 17：$3x-4y=0$.

师：对，下面我们一起来算算。

这时老师告诉学生，这个第 4 题出自《九章算术》的“燕雀齐衡”问题，这种消常数的方法源于刘徽的“方程新术”。随后，师生一起对“加减消元法”的使用特点作了归纳：解题时应该根据方程组的特点，以计算简便为原则，选择“代入消元法”还是“加减消元法”，而且使用“加减消元法”时，加减后可以选择消 x、消 y 或者消常数。最后，师生进一步梳理和完善了二元一次方程组的解题步骤。

4 教学反馈

本节课的教学设计在上海某中学 6 年级的两个班级进行了实践，课后对 59 名听课学生做了问卷调查，51%的同学表示“非常喜欢”这节课，38%的同学表示“比较喜欢”这节课，11%的同学表示“一般喜欢”这节课，因为他们认为数学史料让他们觉得“有趣”，能知道“为什么学”，即学习的必要性，帮助他们更好地“理解知识”、“拓宽知识面”，而且“能认识到古人的智慧”。

访谈过程中，学生们纷纷畅谈自己对这节课的收获，有学生说“学习了一种新的消元方法”，大部分学生还谈到对数学史料很感兴趣，使数学变得亲和、愉悦，培养了学生的见识。

如有的学生说“数学家刘徽和《九章算术》，古人的智慧让我们觉得很自豪，（加减消元法的发明）比西方早了 1000 多年”，“古人的贡献为我们今天的方法作了引入（铺垫），让我们今天的方法（改进得）更简单、更实用了，”“古代数学家都是鼻祖，没有他们（的努力）就没有演变到现在的我们今天的方法”。

5 结 语

本节数学史融入方程组解法的教学中，数学史料显示了如下优势：

（1）知识之谐

在教学过程中，学生首先经历“代入消元法”和“加减消元法”的选择，对“消元”这个核心思想有了明确的认识；然后在使用“加减消元法”时，发现可以通过直接加减或者乘某个数后再加减，目的都是为了“消元”；接下来，在“消元”过程中，知道不但可以“消”任何一个未知数，甚至还可以“消”常数。学生经历的这些过程在历史上同样都留下了相应的发展痕迹，这样，数学史料成为了教学线索，使得“代入消元法”过渡到这节课的“加减消元法”的学习中，知识的呈现自然而然，且突出了“加减消元法”学习的必要性，符合学生认知基础，具有可学性。

（2）方法之美

在二元一次方程组解法的历史讲解时，由于“直除法”相当于现在数学中对方程组的系数矩阵进行初等变换，且比较繁琐，所以教师只是提到有这样的一个历史缘起，没有做详细介绍；“互乘相消法”虽和今天的“加减消元法”雷同，但当时是用筹算，不如现在的符号表示简洁明晰；刘徽的“方程新术”使用比率进行计算，符合那个历史时期的发展水平，但不如现在直接代入计算便捷。通过古今这些消元法的对比，拓宽了学生的思维，让他们领略到不同方法的优劣，对方法之美有了深刻的体会。

（3）探究之乐

数学史上这些丰富多彩的数学问题给学生们提供了探究学习的机会，不仅加深了学生对数学知识本质的理解，拓宽了学生的知识视野，体会到了知识的和谐之美、方法之美，而且让学生在数学活动的探究乐趣中，提升了学习数学的自信心。

（4）文化之魅

通过数学史上古题的引入和探究，让学生感受数学学科的历史演进性，使他们穿越时空，与历史上的数学家进行“对话”，如课后的问卷调查中，73%的学生记得数学家“刘徽”，27%

的学生记得“丢番图”，并且64%的学生表示对《九章算术》非常感兴趣。可见，这些数学史料容易创造学生学习的动机，从而拉近他们与数学之间的距离，使之更加理解数学、亲近数学。

（5）德育之效

学生们在访谈中说“加减消元法”是自己探究出来的，与古代数学家不谋而合，如“挺高兴的，我们也想出了类似数学家的方法”，并且数学史融入课堂的教学激发了学生的学习兴趣，使他们成为了学习的主人，如 “我希望以后的数学课也这样上，多讲讲数学家的故事”,“我想看看《九章算术》” 。

综上所述，数学史融入课堂的教学，不仅能激发学习动机，使我们获得了对数学思想过程的重要认识，更加清晰的理解现在的问题，而且它把数学发展中同时期的和不同时期的数学文化联系起来，使数学史成为支持教与学的必要组成部分[4]。

参考文献

[1] 汪晓勤．HPM 视角下的消元法教学设计[J]．中学数学教学参考, 2007, (6): 52-54.

[2] 汪晓勤. HPM 视角下的二元一次方程组概念的教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2007, (5): 48-51.

[3] 郭书春．汇校《九章算术》[M]．沈阳：辽宁教育出版社，2004.

[4] Jahnke H N. The Historical Dimension of Mathematical Understanding: Objectifying the Subjective [A]. In: J P Ponte, J F Matos. Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education [C]. Lisbon: University of Lisbon, 1994.

HPM 视角下可化为一元二次方程的分式方程教学*

王倩[1]　沈中宇[2]　洪燕君[2]

（1.友爱实验中学，上海, 200241; 2.华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引　言

“可化为一元二次方程的分式方程”是沪教版数学教科书八年级下册“代数方程”章第二节的内容，学生在七年级已经学习过“可化为一元一次方程的分式方程”，本节内容是在此基础上的深入学习。课标上对本节的要求是引导学生探索可化为一元二次方程的分式方程的解法，归纳得到解分式方程的一般步骤；使学生获得探索过程的经历，领会分式方程“整式化”的化归思想和方法[1]。在教学实践中，要注重对学生探究精神的培养，对于学生经常发生的增根和失根错误，教师虽然可以批评指正，但学生的数学自信可能因此降低。同时数学文化在数学教学中的渗透，数学作为文化活动对学生的培养也日益受到关注。这就给我们提出了以下问题，如何在本节内容中培养学生的探究精神？如何在指出学生错误的同时培养学生的数学自信？如何在本节课中更好的融入数学文化？这些都是教师需要考虑的问题。HPM 视角下的数学教学可以为以上问题的解决提供一定的启示，英国学者 John Fauvel 总结了数学教学中运用数学史的 15 种理由，其中第二条为“改变学生的数学观”，第三条为“因为知道并非只是他们有困难，所以得以安慰”，第十条为“提供探究的机会”[2]，从情感态度价值观而言，数学史可以更加激发学生学习数学的兴趣，让学生亲近数学。揭示数学作为人类文化活动的本质，感受数学背后的人文精神。

结合以上的思考与启示，我们从 HPM 的视角设计和实施教学，拟定了以下教学目标：

（1）掌握可化为一元二次方程的分式方程的解法并能够解简单的分式方程，知道解分式方程时“去分母”可能产生增根的原因，掌握验根的方法；

（2）在探索分式方程解法的过程中感悟类比和化归的数学思想；

（3）体会数学家的艰辛、数学家也会犯错误，让学生建立学习数学的信心，并能从中体会有志者事竟成的道理。

2 数学史料及其运用

在东西方的文献中，分式方程都出现的比较晚。在西方，在 9 世纪的时候，波斯（今

* 上海市教育科研项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“数学史融入中小学数学课程的实践研究”（项目编号：D1508）系列教学案例之一。

伊朗）数学家花拉子米（Al – Khwarizmi，约 780-850）的《代数学》中已经有分式方程，比如“将 10 分成两份，将分得的第一份被第二份除，再将第二份被第一份除，它们的和是二又六分之一[3]”，其实质就是分式方程 $\frac{10-\mathrm{x}}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$，而 13 世纪意大利的数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci，约 1170-1250）的《计算之书》中出现的分式方程问题也源于花拉子米。在东方，只有到 13 世纪，才在中国数学家李冶（1192-1279）的《测圆海镜》中找到分式方程的例子。对于分式方程的解法，从已有的文献来看，斐波那契是最早尝试解分式方程的欧洲数学家。他的《计算之书》第 15 章中提出了大量的分式方程的问题[4]。其中有一些“分钱问题”，比如“若干人平分 20 第纳尔，每人得若干。若加上二人，再平分 60 第纳尔，则每人所得比前面多了 5 第纳尔。请问有多少人？”

到近代，是英国著名盲人数学家、剑桥大学第四任卢卡斯数学教授桑德森（N.Saunderson，1682—1739）第一个将分式方程写入教材 [5]。桑德森一岁时因得天花而失明，接受教育在当时对于一个失明的儿童来说特别困难，只有靠着别人读书给他听才能学习。尽管如此，他还是通过自身努力受到了很好的教育，学习了拉丁语、希腊语、法语和数学，很快掌握了希腊原版的《几何原本》，不仅如此，他还成为了一名有才华的音乐家，长于演奏长笛。1707 年，桑德森在朋友的鼓励下走进了剑桥大学，他用特制的黑板，学生们无不为他高超的教学技巧所折服，称他为“不用自己的双眼却教会他人如何使用双眼的人”。随着桑德森作为教师的荣誉逐渐增加，他的教学任务越来越繁重，经常要一天教学七或八个小时。随着身体情况的恶化，他的友人认为如果没有将他的教学写成书籍，这个世界将丢失一份宝贵的财富。因此他决定将他的课程写成书。随着身体的好转，桑德森开始将很长的时间花在写作上，从而在 1739 年完成《代数学基础》，这本书被称为“仔细论证的典范，让人想起双目失明后口述‘代数’的欧拉”。

在《代数学基础》中，桑德森给出了一个分式方程的解法：$\frac{42\mathrm{x}}{x-2}=\frac{35x}{x-3}\to\frac{42}{x-2}=\frac{35}{x-3}$ $\to 42(x-3)=35(x-2)\to x=8$。[6]因为方程两边约去了未知数，从未造成了失根的情况。因为当时人们往往不区分分式方程与分数系数方程，不同分式方程所用技巧也不相同，对增根与失根也没有清楚的认识。

数学史在数学教学中的融入可以分为四种方式，分别为附加式、复制式、顺应式和重构式四种类型[7]，本节课中，我们采用了附加式、复制式和顺应式三种方式如下：

（1）附加式：斐波那契和李冶对分式方程的贡献，东、西方分式方程的出现，盲人数学家桑德森的故事；

（2）复制式：斐波那契在《计算之书》中的分钱问题；

（3）顺应式：《代数学基础》中桑德森的问题和解法。

3 教学设计与实施

3.1 复习引入

复习分式方程的概念及其解法并简单求解方程 $\frac{4}{x-3}=\frac{1}{3-x}+2$。设计意图是通过对可化为一元一次方程的分式方程的求解，帮助学生回顾分式方程转化为整式方程的方法步骤，强调检验的方法、重要性以及理由，为本节课的教学做好铺垫。

3.2 新课讲解

设计意图：首先从实际例题出发，让学生明白数学源于实际生活，将应用题转化为表格让学生求解，从而减小难度，并为后续的学习打下基础，另外在学生求解的过程中，让学生自己有前面复习的可化为一元一次方程的求解概括出解题步骤，强化解题步骤，最后让学生合作讨论为什么要检验，教师之后补充理由，更加清晰的让学生理解和激发学生主动学习。

在学生回顾了求解分式方程的一般步骤之后，教师向学生介绍分式方程的起源，教学片断如下：

师：大家知道吗？无论是在西方还是东方，分式方程都出现的比较晚，直到 13 世纪，在意大利的数学家斐波那契的《计算之书》和中国数学家李冶的《测圆海镜》中才找到分式的例子。接下来我们来看看在《计算之书》里，斐波纳契已经解决了的分式方程问题。

之后给出斐波那契在《计算之书》之中的问题：若干人平分 20 第纳尔，每人得若干。若加上二人，再平分 60 第纳尔，则每人所得比前面多了 5 第纳尔。请问有多少人？这里的第纳尔相当于我们现在的货币单位元、角、分。请同学们用列方程的方法求解。在学生求解过程中进行巡视，启发学生填写出下表从而列方程求解。

	钱总数	人数	人均所得
原来	20	x	$\frac{20}{x}$
现在	60	$x+2$	$\frac{60}{x+2}$

师：如果我们设原来的人数为 x 人，我们请一位同学说说他的求解过程

生：$\frac{60}{x+2}-\frac{20}{x}=5$（1）

师：这是什么方程，如何求解？

生：分式方程，去分母，方程两边同乘以分母的最简公分母$x(x+2)$，得到

$60x-20(x+2)=5x(x+2)$ 整理，得：$x^2-6x+8=0$.（2）

师：我们可以看到一元二次方程（2）是由方程（1）去分母得来，所以我们称方程（1）是可化为一元二次方程的分式方程，这就是我们今天所学的内容（出示课题：可化为一元二次方程的分式方程），它的方法依然是去分母，将分式方程转化为我们熟悉的整式方程求解，这是一种化归的数学思想。求解过程和前面可化为一元一次方程的一样，大家一起说说看求解的一般步骤有哪些?

生：1. 去分母，将分式方程化为整式方程；2. 解整式方程；3. 检验所得解是否为原方程的根；4. 写出原方程的根.

师：为什么要检验?

生 1：因为定义域范围扩大了。

生 2：因为分式方程的定义域是分母不为 0，而整式方程的定义域是一切实数。

师：很好，其实分式方程转化为整式方程的时候，根据等式的性质，等式两边乘以的同一个整式，等式依然成立，但是化为整式后，未知数允许的取值范围扩大了，所以要检验。

接下来让同学回顾检验的方法，得出两种检验方法，分别是代入最简公分母和代入方程的左边和右边。

3.3 牛刀小试

设计意图：所选例 1 来自于教材，例 2 来自于数学史料，目的让学生熟悉求解的一般过程、规范解题步骤，其中例 2 用于引出桑德森的解法与故事。

接下来请大家求解方程$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$、$\frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}$，请两个同学上台求解，其余学生自己求解，教师在课堂中进行巡视。

其中第 2 个问题学生的在黑板上求解如下：

$$\frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}$$

解：$42x(x-3)=35x(x-2)$

$$7x^2-56x=0$$

$$x_1=0, x_2=8$$

检验：当 $x=0$ 时，$(x-2)(x-3)\neq 0$，当 $x=8$ 时，$(x-2)(x-3)\neq 0$。因此两个都是方程的解。

3.4 合作探究

设计意图：让学生在体验知错就改的同时，加深对增根和失根的理解，并让学生知道桑德森的伟大之处在于他对学习的执着和热爱，从而达到三维目标中的情感态度价值观。

接下来指出第二个问题正是第二个方程恰好是以前的一个数学家桑德森的求解过的分式方程，他的解法如下：

$$\frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}$$

解：$\frac{42}{x-2}=\frac{35}{x-3}$

$$42(x-3)=35(x-2)$$

$$42x-126=35x-70$$

$$7x=56$$

$$x=8$$

展示之后，将其与之前学生的答案列在一起，提问学生：数学家和我们求解的一样吗？有什么不同之处呢？让同学进行讨论。

生 1：我们讨论发现数学家桑德森求解过程中，左右两边同时约去了未知数 x.

生 2：在桑德森消去 x 以后，他求解出来的解只有一个，而我们有两个解。

师：那桑德森这种做法对吗？可以两边同时约去一个含有未知数的式子吗?

生 1：不可以，因为这样就会产生失根的现象。

生 2：可以，因为左右都有相同的式子啊。

师：大家再想想等式的基本性质中说，等式两边同时除以一个什么数，等式依然成立。

生：同一个不为零的数。

师：所以等式两边同时除以一个非零的数，等式依然成立，但是桑德森在左右两边同时约去 x 的时候，x 一定不为零吗?

生：不一定。

师：所以可以同时约去含有一个含有未知数的式子吗?

生：不可以，这样会有失根的现象。

师：这样看来，我们数学家也会犯错，所以犯错不要怕，关键是知错就改，但是桑德森之所以会这样犯错，是因为在那个时期，不承认 x 为 0，那接下来我们一起来看看这位伟大的数学家桑德森的故事，说他的伟大，绝不仅仅因为他对数学史的贡献，而是因为他本身就是一个传奇。桑德森（1682-1739）是近代第一个将分式方程写入教材的英国著名盲人数学家，剑桥大学第四任卢卡斯数学教授，大家知道吗？我们熟悉的牛顿和霍金也是卢卡斯教授哦，不仅如此，桑德森幼年失明，光靠别人读书给他听， 尽管如此，他还是受到了很好的教育，他每天用特制的黑板，每天坚持学习八小时，这个毅力真让人折服，还有，他不仅精通数学，还精通四门外语，还是一位杰出的音乐家。他擅长长笛。想象一下，作为一个盲人，桑德森能如此的坚持，更何况是我们在座的各位，我们还有何理由抱怨，我们应该站在伟人的肩膀上站的更高，看的更远。

3.5 课堂小结

让学生谈谈这节课学到了什么，学生陈述如下： 我知道了如何求解分式方程，采用的方法就是去分母、我知道了，求解分式方程需要检验，需要代入最简公分母检验、我知道了犯错不怕，只要知错能改、我知道了每个人都应该为自己的将来奋斗，每个人没有抱怨的理由。最后教师总结到：其实我们还学习了一种化归的思想，由于时间的关系，今天的课堂到此为止，最后由一个小小的拓展题，请同学们回去独立思考完成。

4 教学反馈

课后，我们对学生做了问卷调查。百分之九十以上的同学表示完全听懂了这节课并且喜欢这节课。

对于当你看到“分式方程”这两个字时，你会想到什么？学生的回答可以分为三类。（1）有关分式方程的概念，典型回答包括，分母之中含有未知数（字母）、有分式的方程；方程

中只含整式和分式。（2）与分式方程解法相关，典型回答包括，分式方程需检验；去分母；找最简公分母；化为整式方程；一元二次方程；约分。（3）有关数学史，典型回答包括，桑德森；历史名人；实际应用；双目失明伟人计算犯错；斐波那契。

对于主观题“今天这节课你印象最深的是什么”，学生的回答可分为三类。（1）有关分式方程，典型回答包括，去分母，化整式。（2）有关教师的教学，典型回答包括，老师的教学方法；上课时老师的互动；老师的教学方法十分生动，引人入胜，可以锻炼思维；（3）有关数学史，典型回答包括，了解分式方程的来源；数学家的历史，有意义； 数学家桑德尔的错误；盲人数学家； 数学史，更能了解分式方程；让我印象深刻的是两位数学家，在严肃的学习中加入故事，很有趣；名人也犯了错，让我们明白犯错并不可怕，要知错能改。

课堂观察和课后访谈表明，学生能理解本节课的上课内容，且对于数学史融入的教学方式表现出一定的兴趣，学生通过本节课掌握了可化为一元二次方程的分式方程的解法，对于增根和失根的情况有了更深入的理解，值得特别提出的是，学生对本节课中桑德森和斐波那契的故事印象深刻，并充分的体会到了数学家也会犯错误，知错能改即可的道理，增进了学生的数学兴趣，提升了数学自信。

5 结语

本节课中，数学史发挥的价值有以下几点。

首先，培养了学生的探究精神，教师在本节课中的多个环节利用数学史的材料引起学生的自主探究，在新课讲解环节，利用斐波那契的问题让学生探究可化为一元二次方程的分式方程的解法以及增根出现的原因。在合作探究环节，给学生展示桑德森的解法，让学生比较自己的解法与桑德森的解法的异同，从而引起学生探究的兴趣，在一定的引导下让学生自己探究出失根的原因，在以上两个课堂的关键环节中，都有利用数学史引起探究的出现。

其次，数学史培养了学生的数学自信，激发了学生兴趣，并且给本节课增添了人的元素、文化的气息。在合作探究的环节，向学生充分展示了桑德森这么伟大的数学家也会犯错误，说明了错误并不可怕，只要知错能改即可，从而，在理解失根原因的同时大大增加了学生的数学自信。在对桑德森虽然条件艰苦，仍然坚持不懈学习数学，最终做出卓越数学贡献的故事中，让学生感受到了数学背后的人文精神。

最后，在与历史上数学家解同一问题的时候，学生得以亲近数学，也促进了学生对数学本质的认识。数学是人做出来的，数学的魅力在于思考和探究，数学并不是冷冰冰的，而是一种火热的文化活动。

参考文献

[1] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准（试行稿）[M]. 上海: 上海教育出版社, 2004. 62.

[2] 田方琳, 孙蒙蒙. HPM 视角下的分式方程教学设计[J]. 上海中学数学, 2015. (1):56-59.

[3] Al – Khwarizmi. The Algebra of Mohammed Ben Musa[M]. London: J. L. Cox, 1831. 44.

[4] 洪燕君, 顾海萍. “可化为一元一次方程的分式方程”: 按五项原则融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015. (1): 42-46.

[5] Manning, K. R. A.. A History of Extraneous Solution[J]. Mathematics teacher, 1970. (2): 166.

[6] Saunderson, N.. The Elements of Algebra In Ten Books[M]. Cambridge: University Press, 1740.

[7] 汪晓勤. HPM 的若干研究和展望[J]. 中学数学月刊, 2012. (2): 1-3.

HPM 视角下的“直线的倾斜角与斜率”教学[*]

杨懿荔

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引言

直线的倾斜角与斜率是沪教版高中教材高二下第 11 章节第 2 小节的内容，其中 11.1 内容为直线的方程。教科书先给出直线倾斜角概念，然后直接将倾斜角的正切值定义为斜率。为什么要用倾斜角的正切而不用倾斜角的正弦或余弦来定义斜率呢？这个问题一直困惑着许多高中数学教师。另一方面，学生在初中已经学过一次函数的图像，多数学生知道一次函数 $y = kx + b$ 中 k 的几何意义；高中教科书抛开了这一认知起点，因而在知识的衔接上显得不够自然。我们希望借鉴斜率概念的历史进行教学设计，既解决教师的困惑，也引导学生经历斜率概念的自然产生过程。教学目标如下：

（1）发现斜率 k 的几何意义，理解斜率与倾斜角之间的关系，并且能根据倾斜角求斜率，反之亦然；

（2）通过对定理的证明和应用，培养独立解决问题的能力和数形结合、“类比—猜想—证明”的数学思想；

（3）通过探究活动，体会数学发现由特殊到一般再由一般到特殊的过程，积累数学活动经验，培养探索精神和创新意识；感悟数学概念的演进性。

2 历史溯源

早在 17 世纪，解析几何的发明者之一、法国数学家费马（P. de Fermat, 1601-1665）在其《平面与立体轨迹引论》中已经证明，二元一次方程 $ax = by$ 和 $c - ax = by$ 表示直线。但费马并没有进一步讨论方程系数的几何意义。在费马之后的一个半世纪里，人们似乎并未在费马的基础上前进一步。19 世纪，斜率概念的诞生经历了三个阶段。

第一阶段：从几何比到直线方程。

Hamilton(1826) 通过相似三角形性质，证明直线方程具有 $y = ax + b$ 的形式；并通过正

[*] 本文是课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）教学案例之一。

弦定理，探究在斜坐标系下与直角坐标系下参数 a 的几何意义[1]。

第二阶段：从三角比到直线方程。

Hymers (1837) 只讨论在直角坐标系下的直线方程，并直接从直线与 x 轴（正方向）所成角的正切作为出发点进行方程推导，此时斜率的概念已呼之欲出[2]。

第三阶段：斜率概念的出现。

据考证，斜率意义上的“slope”一词最早出现于 1829 年出版的《实用测量与地形图绘制》一书。此前，在同类著作中，“slope”只含“斜坡”之意，并没有坡度，抑或斜率的意义。在笔者所考察的西方解析几何教科书中，Peck(1875)最早了引入了斜率概念。该教材首先对倾斜角进行定义，然后给出过两定点的直线的倾斜角公式；最后将“倾斜角的正切值”称为“斜率”[3]。

综上所述，在斜率成为解析几何基本概念之前，人们已经熟悉了直线方程的斜截式、点斜式甚至两点式，已经知道在直角坐标系中斜截式方程 $y=ax+b$ 中 x 的系数 a 是“直线与 x 轴所成角”的正切。用倾斜角的正切来定义斜率，成了人们惟一的选择。这样，“为什么用正切而不用正弦或余弦来定义斜率”这个问题，也就迎刃而解了。

我们主要采用重构式来运用数学史。由历史可知，在西方早期教科书中，直线方程的出现远远早于斜率概念，因此，本设计从直线方程入手，从中引导学生探索斜率的几何意义。在此基础之上，再定义倾斜角与斜率，让学生在认知上有一个过渡。此外，学生在初中并未接触过直线方程的概念，只知道一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线；而在早期教科书中，$y=kx+b$ 是作为直线方程来使用的。因此，需要向学生梳理清楚一次函数与直线方程的关系。

3 教学过程

3.1 情境引入

3.1.1 生活引例

师：同学们对滑雪这项运动了解多少呢？在北方，每到冬天，天然雪道自然形成，游客络绎不绝，只为亲身经历一番滑雪的快感。但是，滑雪这项运动有着其自身存在的危险性，山坡越陡峭，危险指数陡然上升。据统计，初学者所滑雪的山坡坡度不宜超过 15 度，而普

通玩家也不宜超过 30 度。那么，我们如何来刻画山坡的坡度呢?

生：(沉默……)

师：滑雪者在雪道上留下的痕迹是怎样的呢？（给出图 1，供学生观察）

生：直线!

师：很好。我们发现滑雪者们自上而下滑动的轨迹通常是一条直线，因此我们可以利用这些平行的直线来刻画山坡的坡度。(给出图 2)

图 1

图 2

3.1.2 旧知引入

引入旧知的目的是让学生挖掘出自己的认知缺陷，激发学习的积极性。此外，此节应当注意引导学生从一次函数的思想过渡到直线方程。

师：我们曾经在初中学习过一次函数，还有同学记得吗?

生：记得！是 $y=kx+b$。

师：我们都知道一次函数的图像是一条直线。而由上一节可知，若直线平行于向量 (u,v)，则直线方程为 $v(x-x_0)=u(y-y_0)$。当 $u\neq 0$ 时，对此方程进行转换即可得到：$y=\frac{v}{u}x+\left(y_0-\frac{v}{u}x_0\right)$。令 $k=\frac{v}{u},b=y_0-\frac{v}{u}x_0$，即得 $y=kx+b$。因此，我们将 $y=kx+b$ 也称为直线方程的一种形式。该方程中出现了两个参数，分别为 k,b，有谁知道这两个字母的意义吗?

生：(七嘴八舌讨论……)

师：先来说说参数 b 的几何意义吧?

生：指的是直线在 y 轴上的截距。

师：很好，那么字母 k 呢?

生：斜率！（初中教师在教学中已告诉学生 k 是斜率，但没有做出进一步的解释）

师：不错，k 的确是斜率，但斜率究竟有何几何意义呢？我们能否用它来刻画山坡的坡度呢？

3.2 讲授新知

3.2.1 特殊直线方程中 k 的几何意义

在几何画板中演示过原点、且绕着原点旋转的一系列直线（经过第一、三象限），并显示它们的方程，让学生观察方程 $y=kx$ 中 k 值的变化规律。学生很自然地发现，直线越陡峭，k 的值越大。引导学生发现，k 刻画了直线的倾斜程度，可用来解决山坡的坡度问题。

接下来探索 k 的几何意义。先作一层铺垫：如图 3 所示，在直线上任取三点 A_1, A_2, A_3，分别向 x 轴作垂线，垂足为 B_1, B_2, B_3。易知 ΔOA_1B_1、ΔOA_2B_2 和 ΔOA_3B_3 两两相似，故得 $\frac{A_1B_1}{OB_1}=\frac{A_2B_2}{OB_2}=\frac{A_3B_3}{OB_3}$。因此，在同一条过原点的直线上，每一点的纵坐标与横坐标的比值是不变的！

如图 4，在任意一条过原点的直线 $y=kx$（$k>0$）上取一点 $M\left(x_1, kx_1\right)$，则 $|ON|=x_1$，$|MN|=kx_1$。于是，$k=\frac{|ON|}{|MN|}=\tan\angle MON$。

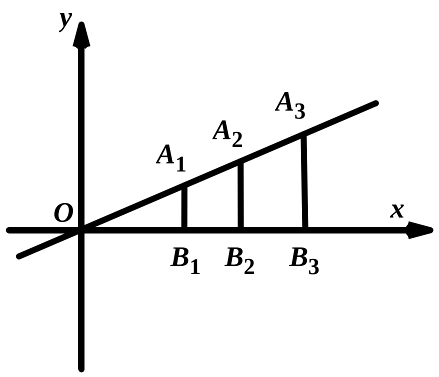


图 3

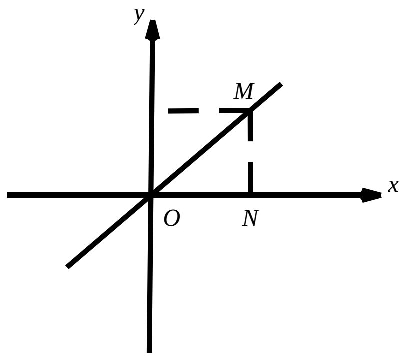


图 4

3.2.2 一般直线方程中 k 的几何意义

接下来，探究方程 $y=kx+b\ (b\neq 0)$ 中参数 k 的几何意义，不妨先设 $k>0$。如图 5，直线 $y=kx+b\ (b\neq 0)$ 与坐标轴的交点分别为 $A\left(-\frac{b}{k},0\right)$ 和 $B(0,b)$，则 $k=\frac{b}{\left|-\frac{b}{k}\right|}=\frac{|OB|}{|OA|}=\tan\angle BAO$。

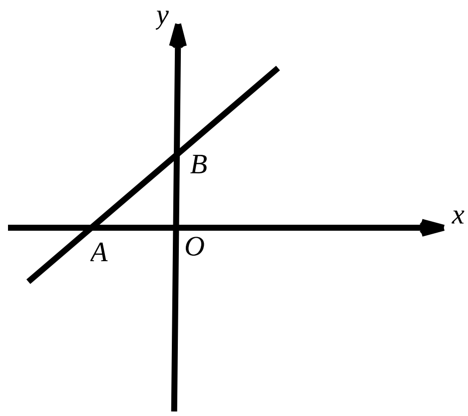


图 5

引导学生猜想：在直线 $y=kx$ 和 $y=kx+b$ 中，参数 k 和直线与 x 轴正方向所成角的正切值有关。

3.2.3 给出倾斜角与斜率的定义

根据上面的发现，要定义 k，首先需要定义直线与 x 轴正方向所成的角——倾斜角。再次打开几何画板，向学生演示直线绕原点旋转的情形，并将直线拖动至第二、四象限，引导学生发现，此时参数 $k<0$。教师抛出问题：直线与 x 轴正方向所成角发生了怎样的变化？应当如何定义倾斜角，倾斜角所对应的范围又是什么呢？让学生分组进行讨论。学生给出了以下四类范围：$[0,\pi)$、$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$[0,2\pi)$ 和 $(-\infty,+\infty)$。

教师指出：历史上不同数学家也给出了上述四类范围，真可谓“英雄所见略同”。接着，教师给出倾斜角的定义与范围。结合前面的讨论，让学生给出参数 k 的定义：$k=\tan\alpha$，并将其称为斜率。强调两种特殊情况：① $\tan\frac{\pi}{2}$ 无意义，故当倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 时，直线的斜率

不存在；②当直线的倾斜角为0时，直线平行于x轴，此时$k=\tan 0=0$，方程变成$y=b$。

设计以下 3 个例题，对斜率与倾斜角α（$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$）进行换算。

例 1：已知一条直线的倾斜角为15°，则该直线的斜率为__________.

例 2：已知直线方程为$y=\sqrt{3}x+2$，该直线的倾斜角为_______________.

例 3：直线$x=1$的倾斜角是_____________，斜率为_____________。

3.2.4 探究倾斜角为钝角的情况，验证斜率定义完备性

教师提出新问题：若直线的倾斜角为钝角，是否仍有$k=\tan\alpha$呢？请两位同学板演，老师巡视指导。

如图 6，当$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，直线与坐标轴的交点分别为$A\left(-\frac{b}{k},0\right)$和$B\left(0,b\right)$，于是$\frac{|OB|}{|OA|}=\frac{b}{-\frac{b}{k}}=-k$。又$\frac{|OB|}{|OA|}=\tan\angle BAO=\tan\left(\pi-\alpha\right)=-\tan\alpha$，故$k=\tan\alpha$。因此，斜率的定义是完备的。

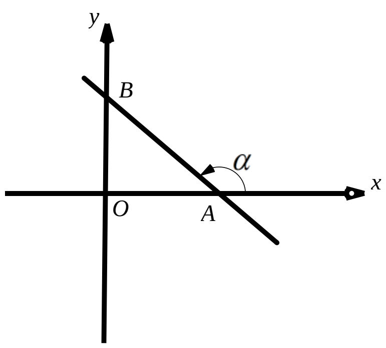


图 6 倾斜角为钝角时斜率的几何意义

以下两个例题针对的是倾斜角为钝角情形中的斜率与倾斜角之间的换算。

例 4：已知一条直线的倾斜角为120°，则该直线的斜率为________.

例 5：已知直线方程为$y=-x+5$，则该直线的倾斜角为_________.

3.2.5 经过已知两点的直线斜率

引入斜率的坐标公式。在平面直角坐标系中，已知两点 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$，如何确定过这两点的直线的斜率呢？在黑板上画出图 7 和图 8，并请两名学生分别就两种不同的情况进行板演。

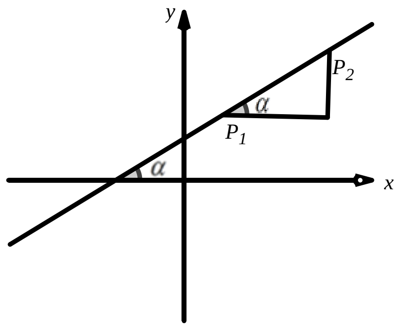


图 7

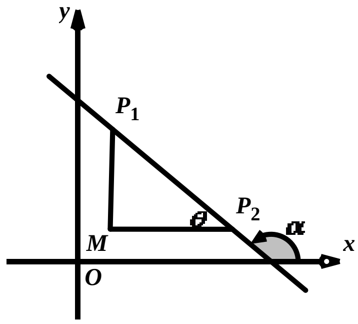


图 8

（1）如图 7 所示，当 α 为锐角时，$k=\tan\alpha=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（$x_1\neq x_2$）；

（2）如图 8 所示，当 α 为钝角时，$k=\tan\alpha=\tan\left(\pi-\theta\right)=-\tan\theta$，而 $\tan\theta=\dfrac{\left|P_1M\right|}{\left|P_2M\right|}$

$=\dfrac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$，因此 $k=-\tan\theta=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（$x_1\neq x_2$）。

当 $x_1=x_2$ 时，直线与 x 轴垂直，斜率不存在。

以下三个例题是斜率公式的应用，并增加了倾斜角为 0 和 $\dfrac{\pi}{2}$ 的特殊情形。

例 6：直线 l 经过点 $A\left(-3,0\right),B\left(2,1\right)$，那么直线 l 的斜率为________；

例 7：经过两点 $A\left(-1,2\right),B\left(3,2\right)$，那么直线 l 的斜率为________，倾斜角为________；

例 8：经过两点 $A\left(4,2\right),B\left(4,-5\right)$，那么直线 l 的倾斜角为________。

3.3 介绍斜率概念的历史

通过微视频，向学生介绍本文第 2 节所概括的斜率的历史溯源，让学生体会，数学概念并非从天而降，而有其发生发展的历史。斜率概念的诞生迟于直线方程，因此，用倾斜角的正切值来定义直线的斜率是必然的，而不是随意的或强加的。

3.4 课堂小结

让学生自由发言，总结本节课的主要学习内容。最后，教师指出：数学的发展是很美妙的，在本节课，同学们在探索斜率的几何意义以及定义倾斜角时，都重复了过去数学家们的工作，大家都是数学家。

4 学生反馈

在课堂结束后，我们对 40 名学生进行了问卷调查，实收 39 份问卷。

调查结果表明，30 人（76.9%）喜欢数学课，其中 16 人表示非常喜欢；38 人（97.4%）听懂了本节课的内容；28 人（71.8%）认为，将数学史融入斜率概念的教学很有意思。对于“这节课探究斜率的几何意义是浪费时间，不如按照课本中的形式直接定义，然后多讲几个例题”这一说法，35 人（89.7%）表示不赞同。可见，大多数学生对于本节课持正面评价。

关于倾斜角的定义与范围，30 人（76.9%）受教学和教材的采用了$\left[0,\pi\right)$。有 9 人给出了历史上出现过的结果：4 人认为倾斜角是直线与 x 轴的夹角，直线可绕 x 轴上某定点旋转任意角度，故倾斜角的范围应为 R；2 人忽视了直线同时过二、四象限的情形，认为倾斜角的范围是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；2 人认为倾斜角是直线与 x 轴正方向所成角，而直线本身并没有方向，故给出范围$\left[0,2\pi\right)$；1 人认为倾斜角的范围是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，逆时针为正角，顺时针为负角。这些学生的观点具有明显的历史相似性。这也表明，将数学史融入数学教学不仅是有意义的，而且也是必要的。

对于“为何用倾斜角的正切值，而不用其正弦或余弦值来定义斜率”这个问题，学生给出了精彩的回答，主要有以下 4 类：

（1）9 人认为，正切值具有确定性，清晰、方便；

（2）5 人认为，正比例函数中每一个点的纵、横坐标之比$\frac{y}{x}$的值恒定，而$\frac{y}{x}$的几何意义刚好是斜率的正切值；

（3）3 人认为“正、余弦无法表示水平距离和垂直距离的比值”；

（4）多数学生寻求历史原因，指出“斜率的出现晚于直线方程 $y=kx+b$”。

关于对本堂课的印象，学生的回答主要有以下几类：

（1）教师所制作的微视频；

（2）斜率概念的历史。学生认为能收获数学史知识感觉很棒，将数学史融入课堂是有意义的，更贴近学生思维，可以更好地掌握知识点；

（3）自由探究讨论倾斜角的定义与范围的过程。学生提到："不是老师强行给出定义从而被迫接受的感觉很快乐。"

（4）几何画板的展示过程有意思，可以很直观的看到直线的倾斜程度与 k 的关系。

5 结语

历史上，斜率概念一开始被用来刻画平面的倾斜程度，与直线方程"形同陌路"、风马牛不相及；后来，人们将其用于刻画直线的倾斜程度，当人们探讨直线方程中参数的几何意义时，才实现了两者的"联姻"。显然，直接用倾斜角的正切来定义斜率，并不符合斜率概念在历史上的发生过程。本节课采用重构历史的方法，从现实情境出发，在已知的一次函数、直线方程和未知的斜率概念之间架起了一座桥梁，让学生经历斜率概念的自然产生过程，呈现了知识之谐，同时，也让他们感受到了探究之乐。

斜率概念具有多重表征方式，一次函数或方程 $y = kx + b$ 中的参数 k 是斜率的符号表征，而倾斜角的正切是斜率的三角表征，教学过程中出现的几何比则是斜率的几何表征。本节课中，通过几何表征，在符号表征和三角表征之间也架起了一座桥梁，学生得以在不同表征之间建立联系，加深了对斜率概念的理解，也感受到了方法之美。

最后，斜率概念的历史激发了学生的兴趣和动机，同时，让学生明白，我们在课上能够像数学家那样发现斜率概念；我们对倾斜角的认识与历史上数学家的认识不谋而合。因此，历史的再现增加了学生的自信心，并让他们在不知不觉中更加亲近数学，这正反映了数学史的德育之效。

参考文献

[1] Hamilton, H. P.. *The Principles of Analytical Geometry* [M]. London: J. Deighton & Sons, 1826. 55-58.

[2] Hymers, J.. *A Treatise on Conic Sections and the Application of Algebra to Geometry* [M]. London: G. Bell, 1837. 7-12.

[3] Peck, W. G.. *A Treatise on Analytical Geometry* [M]. New York: A. S. Barnes & Co, 1875. 17-24.

HPM 视角下的二项式定理教学*

方 倩

（华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引 言

二项式定理是高中数学的重要内容之一。人教版高中数学教科书选修 2-3 中，运用多项式乘法法则得到$(a+b)^2$的展开式，将其写成$(a+b)(a+b)$的形式，运用组合知识分析推导，仿照此过程猜想并证明了$(a+b)^n$的展开式。沪教版教科书则先给出$a+b$的 1-3 次幂的展开式，运用组合知识分析$(a+b)^4$的展开式，据此得出二项式定理。

关于二项式定理有各种各样的教学设计，其中大多数都结合初中的有关公式，先给出$(a+b)^2,(a+b)^3$的展开式，接着让学生通过计算得到$(a+b)^4$、$(a+b)^5$和$(a+b)^6$的展开式，然后从中归纳出$(a+b)^n$的展开式，最后用组合知识对公式做出解释。还有设计是通过不同的二项式相乘，结合排列组合知识将系数转换成组合数；或者将写出的二项式公式系数直接转换成组合数；还有将写出的系数通过观察性质转换成组合数；又有用现实情境引入，再结合组合知识进行讲解。

传统的教学设计往往存在一些不足：1）未激发学生的学习动机，学生不理解为何要学习二项式定理；2）教学内容单调，并未揭示定理背后的多元文化知识；3）未关注到学生的认知起点，学生不易接受被灌输的知识；4）偏向于关注学生的知识技能，而忽视了学生的情感信念。

普通高中数学课程标准的教学建议指出，要注重整体把握教学内容，将数学建模与数学探究、数学文化等主线贯穿始终。二项式定理研究的是$(a+b)^n$的展开式，学生往往将其作为一个公式运用，并不知其由来。因此，为了弥补传统教学设计的不足，我们从 HPM 的视角来设计教学。我们设定的教学目标如下：（1）掌握二项式定理的证明与应用；（2）激发学生的学习动机和兴趣；（3）感受数学文化的多元性。

* 本文系人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）教学案例之一，作者在第十三届国际数学教育大会（德国汉堡）TSG 25 上做了报告。

2 二项式定理的历史概述

二项式定理最初用于开高次方。在中国，成书于公元 1 世纪的《九章算术》提出世界上最早的多位正整数开平方、开立方的一般程序。由于三次以上开方的需要，11 世纪中叶，中国数学家贾宪给出了直到六次幂的二项式系数表。如图 1 所示，其中第 i 层即为$(a+b)^{i-1}$展开式的系数。贾宪称整张数表为“开方作法本原”。今称“贾宪三角”。但贾宪未给出二项系数的一般公式，因而未能建立一般正整数次幂的二项式定理。贾宪的数学著作已失传，13 世纪数学家杨辉在《详解九章算法》（1261）中引用了开方作法本原图，注明此图出“《释锁算书》，贾宪用此术”，因而流传至今。14 世纪初，数学家朱世杰在《四元玉鉴》（1303）中复载此图，但增了两层，并添了两组平行斜线[1]（图 2）。

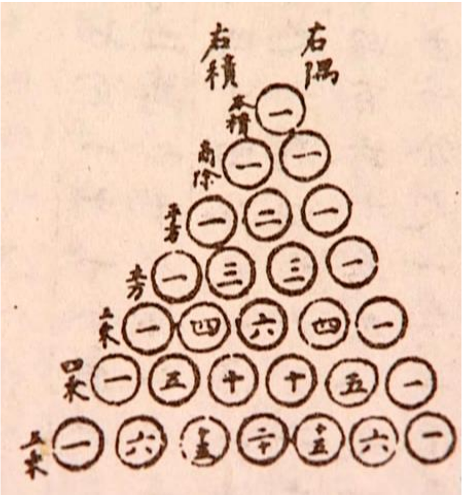


图 1 贾宪三角（采自杨辉《详解九章算法》）

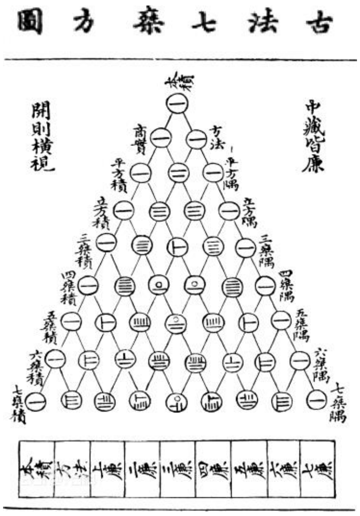


图 4 朱世杰的算术三角形

在阿拉伯，10 世纪数学家阿尔•卡拉吉（al-Karaji, 953～1029）已经知道二项系数表的构造方法，每一列中的任一数等于上一列中同一行中的数加上该数上面一数。11-12 世纪，奥马 海牙姆 (Omar Khayyam,1048? ～1131) 将印度人的开平方、立方运算推广到任意高次，因而研究了高次二项展开式。13 世纪，纳绥尔丁（Nasir al-Din al-Tusī, 1201～1274）在其《算板与沙盘算法集成》（1265）一书中给出高次幂开方近似公式，并用到二项系数表。15 世纪，阿尔 ·卡西（al-Kashi）在其《算术之钥》（1427）中介绍任意高次开方法，给出二项系数的两种造表法，一种是利用公式$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$，另一种则与贾宪的方法完全相同。他给出了直到 9 次幂的数表[1]。在欧洲，13 世纪德国数学家约丹努斯（N. Jordanus, ? ～1236）在一本未出版的算术书中给出一张二项系数表，形状与贾宪三角一样。16 世纪，许多欧洲数

学家都在书中载有二项系数表。1654 年，法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623～1662）最早建立了正整数次幂的二项式定理：

$$\left(a+b\right)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n \text{，}$$

算术三角形至今在西方仍以他的名字命名。1665 年，牛顿（I. Newton, 1642～1727）将二项式定理推广到有理指数的情形。18 世纪，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707～1783）和意大利数学家卡斯蒂隆（De Castillon, 1708～1791）分别采用采用待定系数法和“先异后同”法证明了实指数情形的二项式定理[1][2]。

整个教学设计借鉴、重构了二项式定理的历史。 首先，通过现实情境中的开方问题（顺应式），引出二项式展开问题；其次，利用卡斯蒂隆的方法，导出二项式定理（复制式）；最后，播放关于二项式定理历史的微视频（附加式）。

3 教学设计与实施

3.1 情景引入

教师从神舟十号的有关数据引入本节课：

2016 年下半年，神舟十一号飞船将在天宫二号发射后择机发射，并与天宫二号对接，目的是为了更好地掌握空间交会对接技术，开展地球观测和空间地球系统科学、空间应用新技术、空间技术和航天医学等领域的应用和试验。在期待神舟十一号载人飞船的同时，我们先来回顾一下于 2013 年发射的神舟 10 号（播放 2 分钟的视频，将下列数据显示于 PPT 上进行讲解）。

神舟 10 号飞船绕地球一圈时间为 90 分钟，为了掌握它的运动轨迹，我们需要计算出飞船做匀速圆周运动的线速度：$v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$，轨道半径：$r=\sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}$。

已知地球的质量 $M=5.977\times10^{24}kg$，常量 $G=6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg$，周期 $T=90\min=5400s$，代入公式计算得：

$$r=\sqrt[3]{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.977\times10^{24}\times5400^2}{4\pi^2}}\approx\sqrt[3]{295}\times10^6\approx6.657\times10^6 m\text{，}$$

$$v=\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.977\times10^{24}}{6.657\times10^6}}\approx\sqrt{60}\times10^3\approx7.74\times10^3 m/s\text{。}$$

教师提问：根据上面的公式，在没有计算器的情况下，我们如何计算$\sqrt[3]{295}$和$\sqrt{60}$的值呢？有学生回答二分法，但大多数没有想出解答方法。

师：在估算的过程中，我们先观察$\sqrt[3]{295}$的整数部分为多少？

生：6。

师：我们可以将其写成$\sqrt[3]{295}=6+x$ ，x 表示小数部分，将式子两边同时进行立方得$295=\left(6+x\right)^3=216+108x+18x^2+x^3$，舍去$x$的二次以上的项，得$x\approx 0.73$，接下来进一步估算，可以写成什么？

生：$\sqrt[3]{295}=6.73+x$。

学生学会了估算的一般步骤之后，通过相同的算法在黑板上写出了估算的过程如下：

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{295}=6+x\\
&\Rightarrow 295=\left(6+x\right)^3=216+108x+18x^2+x^3\\
&\Rightarrow x\approx 0.73
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{295}=6.73+\mathrm{y}\\
&\Rightarrow 295=\left(6.73+y\right)^3=304.821217+135.8787y+20.19y^2+y^3,\\
&\Rightarrow y\approx -0.072\\
&\Rightarrow \sqrt[3]{295}\approx 6.658
\end{aligned}$$

师：与计算器算出的值比较，很接近吧？若想得到更准确的数值我们可以通过多次的迭代计算，那么，若是计算$\sqrt[7]{295}$的估算值呢？

生：我们需要知道$\left(a+b\right)^7$的展开式。

师：从上述算法得知，要想知道根号下的任意数值，就需要知道$\left(a+b\right)^n$的展开式，即我们今天所学的内容：二项式定理。

3.2 问题探索

让学生观察以下等式（利用 PPT 展示）

$$\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+\left(a+b\right)x+ab \tag{1}$$

$$\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)=x^3+\left(a+b+c\right)x^2+\left(ab+ac+bc\right)x+abc \tag{2}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd \tag{3}$$

师：以（3）式为例，结合之前学习的排列组合知识，能发现等式有什么规律吗？

生：没看出来。

师：观察等式，若每个括号中都选 x 得 x^4，即第一项；若从其中三个括号中选 x，剩余括号中选 a，b，c，d 之一，则可得第二项 $(a+b+c+d)x^3$；若从其中两个括号中选 x，另两个括号中选 a，b，c，d 之二，可得第三项 $(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$；若从其中一个括号中选 x，另三个括号中选 a，b，c，d 之三，可得第四项 $(abc+abd+acd+bcd)x$；若从四个括号中选 a，b，c，d，则得第五项 $abcd$。

师：进一步考察 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$ 的展开式，x^4 的系数是什么？

生：将 a，b，c，d，e 相加，得 $a+b+c+d+e$。

师：x^3 前面的系数又是什么？

生：从 a，b，c，d，e 中选两个相乘，再将乘积相加，得 $ab+ac+ad+\cdots+de$。

3.3 问题解决

接下来，教师引导学生考虑 n 个因子相乘的情形。

师：考察 n 个因子的乘积 $(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$（板书），第一项是 x^n，第二项呢？

生：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}$。

教师与学生的互动中在黑板上演示完成如下等式：

$$\begin{aligned}&(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)\\&=x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+\cdots+a_1a_2\cdots a_n\end{aligned}$$

师：现在我们令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$，则等式左边变成 $(x+a)^n$，而等式右边呢？第一项还是 x^n，第二项呢？

生：nax^{n-1}。

师：即 $C_n^1ax^{n-1}$。第三项呢？

生：$C_n^2a^2x^{n-2}$。

师：我们观察第 $k+1$ 项可以发现，含有 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中之 k 个的项的数目，与一次从 n 件物品中取出 k 件的组合数即 C_n^k 相等，而这样的项显然又含有 x^{n-k}，又因为 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$，因此第 $k+1$ 项为 $C_n^ka^kx^{n-k}$，以此可以推出 $\left(x+a\right)^n$ 的展开式为

$$(x+a)^n=x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}x+a^n$$

我们称 $T_{k+1}=C_n^ka^kx^{n-k}$ 为通项，称 C_n^k 为二项式系数。

3.4 知识巩固

例 1：求 $\left(1+x\right)^4$ 的展开式；

例 2：求 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式。 让两名学生在黑板上做题，随后根据学生的答案运用二项式公式进行讲解，例 1 主要考察学生对二项式公式的运用，并且解释了二项式系数与系数的区别。例 2 直接计算较为复杂，采用先化简再运用公式较为简便。

例 3：估算 $\sqrt[7]{295}$ 的数值（精确到小数点后三位）。让学生了解二项式定理来源于开高次方，与之前内容相呼应，让学生感受二项式定理的价值。

3.5 知识延伸

学生熟悉了二项式定理之后，运用 PPT 展示 $\left(x+a\right)$ 指数幂为 0-6 次的展开式的二项式系数，将其排列成三角形数表，由此引出二项式定理相关数学史内容（播放 3 分钟微视频）。

微视频主要内容：将上文所介绍的二项式定理的历史录制成视频，并加入相关图片进行解说。

4 学生反馈

课后，对全班 49 名学生进行了问卷调查。结果表明，所有学生均表示听懂了本节课内容。61.2%学生喜欢这种引入方式，并有 51%的学生希望之后的数学课能用数学史来引入，65.3%的学生希望在课堂上了解数学概念的发生、发展的历史。

关于二项式定理的掌握情况，96%的学生正确写出了$\left(1+x\right)^6$的展开式；82%的学生正确写出了$\left(1+x\right)^6\left(1-2x\right)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{11}x^{11}$中的所有系数。

关于问题 3：看到“二项式定理”能想到什么？ 除了 6 名学生未给出回答，其余回答主要有以下 3 类：

（1）与二项式定理内容相关（47%）：组合数、二项式系数、二项式公式、二项式通项$T_{k+1}=C_n^ka^kb^{n-k}$以及恒等式$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$、$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots$。

（2）与二项式定理历史相关（41%）：杨辉三角、开方、历史人物、帕斯卡三角、《详解九章算法》等。

（3）其他回答（12%）：神舟十号、函数、级数展开、多项式展开、爱国情怀、其他知名的定理、天体运动、伟大的数学。

对于问题 4：二项式定理能解决什么问题？15 名学生没有作答，其余学生回答如下：（1）运用二项式定理解数学问题，占 41%；（2）开方，占 36%；（3）代数、数论、组合、生物，占 18%；（4）航天问题，占 5%。

对于问题 5：这节课印象最深的是什么？20 名学生没有作答，其余学生回答如下：（1）神舟十号的引入，占 31%；（2）二项式定理，占 17%；（3）数学史：杨辉三角、发展的时间顺序、杨辉三角的各国表示方式、二项式定理的发展过程，占 28%；（4）其他：教师的教学方式、爱国情怀等，占 24%。

5 结语

本节课中，数学史的作用可以概括为以下几个方面。

一是“知识之谐”。二项式定理并非源于多项式乘法，而是源于开高次方。借鉴历史，正本清源，我们通过神舟十号的轨道运算来引出开平方、开立方算法，凸显二项式定理的必要性，使定理的产生自然而然，从而激发了学生的学习动机。

二是“方法之美”。对于 48 种西方早期代数教科书的考察表明，18 世纪意大利数学家卡斯蒂隆（De Castillon,1708～1791） “先异后同”证明方法[3][4][5]具有一定的优越性：从不同二项式的乘积中找出系数规律，由此过渡到相同二项式，使学生易于理解展开式系数与组合数之间的关系。

三是“文化之魅”，微视频“二项式定理的历史”让学生体会数学文化的多元性，不同

时空的数学家对同一个定理都做出过自己的贡献，从而拓宽他们的视野，并培养他们“善于倾听”、“乐于包容”的品格。

参考文献

[1] 汪晓勤. 二项式定理史略[J]. 中学数学杂志（高中版）, 1999. (6).

[2] Coolidge, J. L. The story of the binomial theorem [J]. *American Mathematical Monthly*, 1949. 56: 147-157.

[3] Ray, J. M. D. *Elements of Algebra* [M]. New York: American Book Company, 1890. 310-313.

[4] Crawford, J. T.. *Senior High School Algebra* [M]. Toronto: The Macmillan Company, 1935. 147-183.

[5] Milne, W. J.. *High School Algebra* [M]. New York: American Book Company, 1906. 332-365.

学术活动

HPM 的新天地

——紫竹小学教学观摩与研讨活动

岳增成

（华东师范大学数学系，上海， 200241）

对华东师范大学数学系汪晓勤教授及其 HPM 团队来说，2016 年 5 月 11 日是一个特殊的日子，这一天，HPM 开始进入小学数学课堂，第一站是华东师范大学附属紫竹小学四年级、二年级的课堂。

课堂一：相遇问题复习课

第一节课由程赟老师讲授。本节课以斐波那契在航海过程中遭遇的各类相遇问题为线索，运用变式将题目由浅入深的串联起来：斐波那契何许人也？通过对他生平的简单介绍，引出其著作《计算之书》中的行程问题，激发了学生的学习兴趣，指引学生“跟随斐波那契的脚步，走进他的数学世界，一起去探讨这些行程问题”；以简单的相遇问题（同时出发，路程、速度已知）作为开胃菜，引导学生回忆起已学习的内容，通过题目分析、线段图辅助、动画演示等帮助学生理解相遇问题的本质；以相对复杂的两道变式（改变“开胃菜”的题目背景，增加问题难度）作为主餐，引导学生按照已有的解题策略探求问题的解决方法，让学生进一步理解相遇问题的本质，体验万变不离其宗的宗旨；接着，通过改变问题情境呈现了更为复杂的问题作为饭后甜点，让学生在课后完成；最后，进一步升华相遇问题的本质问题，让学生对其有更深入的认识。

课堂二：位置的表示方法

第二节课由华妹老师讲授。本节课以笛卡儿一天的活动为线索，通过附加式、重构式两种数学史融入课堂教学的方式串联起了整个教学活动：从早上笛卡儿沉思如何表示苍蝇从天花板的边界飞落到天花板中间时的位置开始，通过引发认知冲突，将学生引入了笛卡儿的世界。在笛卡儿的世界里，学生通过合作、探究，创造出了表示苍蝇在天花板中间位置的表示方法，成为了小小数学家，深切地感受到了“如果我们在那个年代，我们创造的这些方法可能会在数学史上留下很重要的一笔”，通过应用数对表示苍蝇位置的过程，对

有序数对的概念有了深刻的认识；起床后，学生“跟随”笛卡儿脚步进入了教室，在安迪、梅西、爱丽丝介绍自己的位置与辨认调皮学生瓦特、齐齐的位置后，学会了用数对表示人的位置；课后，学生“顺着”笛卡儿、玲达、梅西的欢声笑语，进入了歌剧院，帮助他们找到了自己的位置，并发现了他们位置的特点，在欣赏歌剧的同时，帮助歌剧的主人公找到了宝藏。最后，学生“穿越”回现代，了解了数对的现实应用。

教学观摩结束后，华东师范大学 HPM 团队分别对两个课堂的学生进行了问卷调查和访谈，并与紫竹小学数学教研组教师进行可深入的交流。

（交流及其研讨活动）

交流活动中，两位授课教师首先介绍了自己的教学思路，然后与会者也纷纷讲述了对数学史融入数学教学的看法。教研组的老师纷纷表达了对数学史融入数学教学的肯定，她们认识到了数学史不仅仅是激发学生兴趣的课堂“附属物”，数学史的确能为课堂带来不一样的东西，同时，她们也表达了对数学史融入课堂教学的一些困惑，特别是在数学史素材的选取与使用方面，并期望双方更频繁、更深入的交流与合作；HPM 团队的成员从不同的角度对这两节了进行了点评，特别是在一些细节方面，比如如何更好地各教学环节有机的结合在一起。

最后，汪晓勤教授对这次研讨活动作了全面的总结。他肯定了两节课的效果，在分别点评两节课的基础上，借用课堂中出现的“读杰出的书，有如和过去最杰出的人物促膝交流”来说明课堂中出现人（指古代数学家）的重要性，并具体而深入地分享了其中体现出的教育价值。

好的开端是成功的一半，衷心地期望 HPM 在小学遍地开花，而今天远航的风帆正迎风飘扬。

“聚焦数学核心素养”学术研讨会

暨第二届数学教育研究生论坛召开

洪燕君

（华东师范大学数学系，上海， 200241）

中国中小学数学课程的改革和数学教育研究近两年出现了“聚焦数学核心素养”的新动向。继 2015 年 5 月 28 日~5 月 30 日第一届数学教育研究生学术论坛在华东师范大学成功举办之后，第二届论坛于 2016 年 5 月 20 日~5 月 22 日，以苏州大学为基地，由苏州大学数学科学学院主办，通过设置专家大会报告、专家分论坛报告、学生报告、专家点评等活动，继续为数学教育方向研究生搭建了拓宽学术视野、激发创新热情、交流创新思维的学术平台。

本次论坛围绕“聚焦数学核心素养”的主题设置了如下专题：

- 分论坛 1：数学核心素养的内涵与教育价值；
- 分论坛 2：国际视野下的数学核心素养；
- 分论坛 3：数学核心素养的（任务）教学设计；
- 分论坛 4：数学核心素养的评价与测试；
- 分论坛 5：数学核心素养与教师专业发展。

论坛邀请了韩国首尔国立大学 SHIN Hyunyong 教授、南京师范大学喻平教授、华东师范大学徐斌艳教授、汪晓勤教授、上海教科院杨玉东教授等作前沿学术报告，同时也邀请了国内师范院校数学教育领域的专家、中学教授级高级教师，进行主题报告并就学生报告作专家点评。全国数学教育领域的研究生、青年学者近 200 人积极参加了本次学术论坛。下面重点介绍此次大会主场的报告内容。

1SHIN Hyunyong：音乐和设计中的数学

韩国首尔国立大学 SHIN Hyunyong 教授认为韩国学生在数学教育的认知和情感方面的表现都欠佳。由于数学具有表征形式，使得找到音乐和设计与数学的联络成为可能，即能让我们实现“听设计、看音乐”。为此，他在报告中提出了音乐和设计与数学融合的素材，说明了这种教学实施对学生理解数学的情感方面起到了促进作用。

2 喻平：数学学科核心素养要素析取的实证研究

数学核心素养是学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备数学品格和数学关键能力。南京师范大学喻平教授在报告中，从理论分析的基础上初步析出数学核心素养要素，再采用大样本问卷，对数据进行因素分析和不同的聚类分析，得到数学核心素养的两种结构，一种是由数学抽象、运算能力、推理能力、数学建模、数据处理、空间能力、问题解决能力、数学文化品格等 8 种基本成分组成；另一种是由数学抽象、运算能力、推理能力、建模与数据处理、空间能力、问题解决能力、数学文化品格等 7 种基本成分组成。

3 汪晓勤：高中 HPM 教学案例中的数学史问题分析——核心素养的视角

华东师范大学汪晓勤教授认为数学史为数学教学提供了丰富多彩的数学问题（以下简称“历史数学问题”），要在数学教学中融入数学史，历史数学问题往往是最主要的素材. 他给出了历史数学问题的提出方式与数学史融入方式的关系，如下图 1：

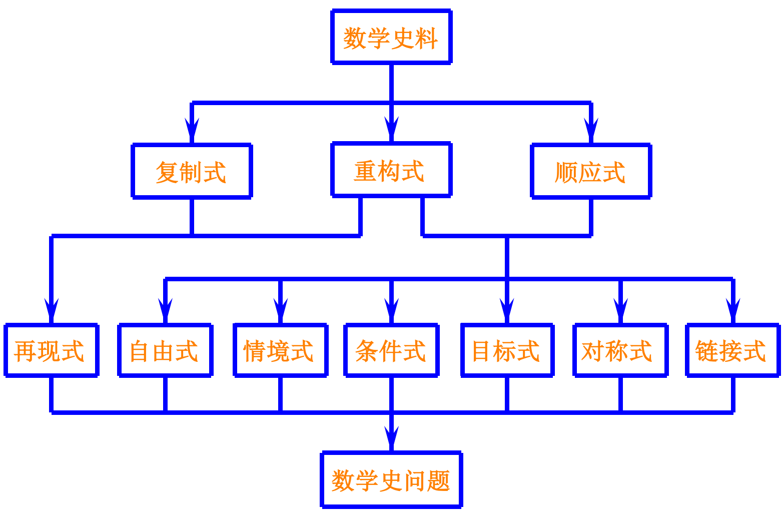


图 1：历史数学问题的提出方式与数学史融入方式的关系

之后，对已经开发的 20 个 HPM 高中教学案例中的历史数学问题的提出方式和教学功能进行深入分析，揭示了历史数学问题与数学核心素养之间的关系（如下图 2），指出数学史问题在各教学案例中的主要功能涉及两个方面：（1）在核心素养方面，数学史问题涉及数学抽象、数学模型、逻辑推理、数学运算、直观想象五类素养；（2）在情感与信念方面，数学史问题激发了学生的学习兴趣和学习动机，增强了他们的自信心，促进了他们对数学和数学活动本质的认识。

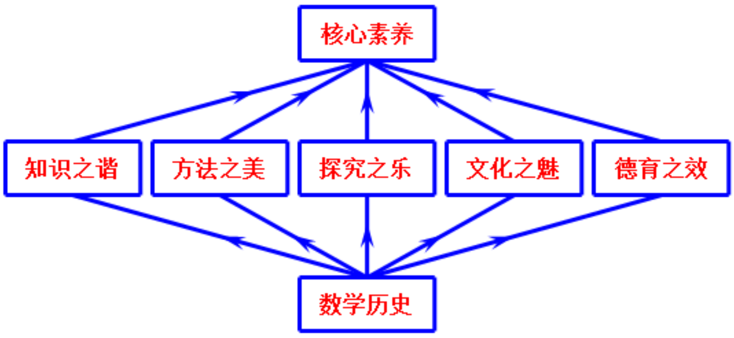


图 2：历史数学问题与数学核心素养之间的关系

本课题的研究为未来的 HPM 理论探讨和实践研究以及教材编写者提供了参考。

4 徐斌艳：义务教育阶段学生数学学科核心能力内涵及测评

华东师范大学徐斌艳教授通过文献分析、国际比较构建了由能力成分、能力水平和数学内容构成的数学学科核心能力框架，并细化能力成分与能力水平，编制测试工具，采用整群抽样方法对八年级学生进行调查分析，研究结果为数学学业评价提供了指导。

5 杨玉东：数学课堂教学中的核心素养：从数学任务设计的视角看

上海市教育科学研究院的杨玉东教授指出学生的数学核心素养取决于学生学习怎样的数学、教师怎样以怎样的方式提出数学任务。首先他以一个课堂教学实例引发对课堂中数学任务设计的关注，特别是数学任务中的情境是撬动数学核心素养的杠杆；其次，基于 PISA 数学素养框架情境分类和其它情境研究，构建了分析数学问题情境的 4 个维度，即背景素材特征、语境呈现方式、语境干扰程度和任务挑战水平；最后，杨教授对数学教育任务设计举出了几个实例，揭示数学任务设计的理论基点和任务设计中的两难问题。

本次论坛上，专家们渊博的学识、独到的见解、生动的实例、机智幽默的语言，为“聚焦数学核心素养”的数学教育研究带来了启迪和借鉴，让大家品到了一场丰盛的精神盛宴。

第五届上海数学史会议召开

沈中宇　邹佳晨

(华东师范大学数学系，上海，200241)

2016 年 5 月 28 日到 29 日，华东师大 HPM 团队的部分成员在汪晓勤教授的带领下，来到东华大学松江校区图文信息中心报告厅参加第五届上海数学史会议。本次会议由东华大学人文学院承办，有来自中国科学院、中国科学技术大学、清华大学、上海交通大学、复旦大学、华东师范大学、上海师范大学和东华大学等 10 余所国内知名高校、科研院所的 80 余名数学史领域的学者和研究生代表参会。

本次会议分两天举行，每天都有 3 组报告，每组有 3 到 4 场报告，一共进行了 21 场报告，每场报告 30 分钟，在每场报告后均有 10 分钟时间供大家就前面的报告提出问题，交流思想。接下来我们将围绕此次会议的 6 组报告和大家一起分享其中的部分观点。

第一组：

内蒙古师范大学科学技术史研究院的郭世荣教授的报告是“《几何原本》在朝鲜半岛的流传与影响”，报告中分析了《几何原本》在朝鲜半岛的流传情况，最早传入朝鲜的可能是我国明代数学家李之藻（1565—1630）编辑的《天学初函》本；18 世纪中期以后在朝鲜数学家中流传开来，越来越多的人研究《几何原本》，但一般的数学著作中引用较少；《几何原本》在朝鲜半岛的流传与影响有专门的论述，值得进一步研究。

中山大学哲学系的朱一文博士做了题为“秦九韶《数书九章》算图连线系统初探”的报告，报告中认为学术界对于该抄本所反映的秦九韶算图连线系统缺乏研究，而报告人以统计的方法系统研究了该书写系统，发现在基于书写筹码的基础上，秦九韶利用算图连线系统的主流表征来标识加减乘除四种运算，实际上是创造了一种新的数学书写系统，而这与学术界

先前认为秦九韶的主要数学成就（如大衍总数术语、正负开方术、方程术等）有正相关的联系，可以将其归纳为“筹算的文本化”。

上午的最后一个报告是浙江大学校史研究会的钱永红老师，报告的题目是“胡文耀: 一位鲜为人知的数学教育家”。报告中将蒙尘近百年的胡文耀数学教育工作的史料公之于世，让听众走近这位鲜为人知的数学教育家。胡文耀先生 1913 年毕业于比利时鲁汶大学，获数学博士学位。1942 年入天主教，曾任北京大学、北京高等师范学校等校教师，上海国立中法工学院教务长、代理院长，震旦大学校长，兼任震旦大学附中和萨坡赛小学校长。报告中将胡文耀先生的一生分为三个部分：“震旦三文”、“数学园丁”和“震旦校长”来介绍，重点介绍了他在数学教育领域的贡献。

第二组：

下午第一个报告的是上海交通大学科学史与科学文化研究院的纪志刚教授，报告题目“汉译几何原本后九卷的谜与思”，英国传教士伟烈亚力（Alexander Wylie，1815-1887）与李善兰（1810-1882）合译《几何原本》后九卷在晚清中西数学交流史上具有重要意义，但也存留一些引人思考的历史疑案，报告中从伟烈亚力和李善兰的语句、后世的各种争议中进行梳理，希望重构汉译《几何原本》翻译的历史现场，并为从文化史的视角探析《几何原本》对近代中国的历史意义提供文献学的基础。

上海交通大学科学史与科学文化研究院的博士生王宏晨做了题为“佩尔捷与克拉维乌斯关于‘切角’问题的争论”的报告，“切角”在《几何原本》中首见于第三卷第十六条命题，由于书中未加以明确定义，导致历来《原本》注家对于“切角”问题的理解产生分歧，未能达成统一意见。其中，十六世纪后期欧洲的两位《原本》注释者：佩尔捷（Jacques Peletier 1517-1582）与克拉维乌斯（Christopher Clavius 1537-1612）针对这一问题的争论时间长达十余年，报告中将这一争论分为前后两个阶段，并就其影响作了讨论。

上海交通大学科学史与科学文化研究院的博士生曹婧博做了题为“约翰迪伊‘数学序言’文献探源”的报告，1570 年由亨利比林斯利（H.Billingsley）翻译的欧几里得《原本》是目前可考的最早的英译原本，该本附有一篇约翰·迪伊（John Dee）所作的长篇序言——即著名的“数学序言”，对于该版本的研究工作，一直是《原本》版本链中至为关键的环节。报告中首先简要追溯了西方数学作为基础学科的分类史。其次讲述了古希腊经典著作的翻译运动在欧洲各国进入本土化翻译的阶段，最后讲述了迪伊在序言中体现其学术研究特点的数学谱系图和建立起的实用数学体系的基本框架。

第三组：

下午的最后一组报告由上海交通大学科学史与科学文化研究院的硕士生何磊开始，讲述的是“梅文鼎与《欧罗巴西镜录》”。《欧罗巴西镜录》一书不知何人所作，至今只有一册孤

本传世。这个孤本由清初梅文鼎手抄并写有订注，并没有印刷。

内蒙古师范大学科学技术史研究院的硕士生魏雪刚做了题为"晚清代数学对天元术的影响"的报告，吴嘉善和李鏐的天元术工作在晚清具有代表性，报告在考察他们相关工作的基础上，重点分析了传入的代数学对天元术产生的影响，认为代数学使天元术逐渐失去了原来的意义，并由此实现了天元术的西化。

第一天的最后一个报告人是东华大学人文学院的硕士生田春芝，报告题目为"川边信一对《周髀算经》的校勘和注解及其与戴震的比较"，《周髀算经》存在的历史源远流长，是中国古代一部重要的数理天文学经典，江户时期的川边信一与乾隆时期的戴震生活年代大致相同，他们在经学范式下分别独自对《周髀算经》进行了校勘和注解。报告中对他们的注解进行了比较，认为川边在注释方面的工作更为细致，也敢于批评前人的注解工作。

第四组：

第二天的第一个报告由中国科学院自然科学史研究所邹大海研究员带来的"秦汉时期特殊的计量方式"，邹老师给大家介绍了从秦国和秦代政府粮食管理部门一种特殊的计量制度——石、桶的多值制到衍生的完全对等的多值桶制，再到单一的斛制发展的历史，不同的计量方式存在时代交叉。

中国科学技术大学科学史系的特任研究员关瑜桢的报告题目是"试论西方科学史界精密科学史研究的转向"，作为西方科学史研究中的一个传统领域，精密科学史（History of Exact Sciences）一直以来都是科学史研究的重要组成部分。报告从科学编史学的角度对于以下问题做一讨论，精密科学史的研究对象有哪些？对于研究者而言，精密科学史的研究方法与科学史相比有何异同？在精密科学史与科学史之间，是否存在类似斯诺提出的"两种文化"的隔膜？

中国科学院自然科学史研究所的郭园园博士报告的是"12～15 世纪伊斯兰数学中双假设法研究"，双假设法在多个古代数学文明中反复出现，并在其演化发展过程中扮演者重要的角色，双假设法是一种求解线性关系问题精确解的一般性算法，报告中先后对 12～15 世纪七位阿拉伯数学家著作中的双假设法进行解读和研究，其中涉及到的解法包括双假设法和天平法。该研究对于剖析双假设法在伊斯兰数学中的演化脉络有着积极意义。

复旦大学历史系的郑方磊博士做了题为"欧几里得《原本》中的命题之形式及其定理与问题之两分"的报告，欧几里得《原本》在数学史和科学史上之重要性，并非因其所含知识之繁难高深，而在于其阐述知识的形式，即所谓公理化演绎体系。《原本》的公理化演绎体系是如何运作的？本报告以其中的命题为对象，对其形式要素和指针作详细的、可作为操作指令的描述；并对一些要素的功能或其存在原因进行一定的分析。

第五组：

下午的报告从安徽师范大学数学学院陈克胜副教授的报告“南京市摄山星城小学设计数学史体验馆主题设计”开始，陈老师介绍了其对小学数学史体验馆的总体设计，包括墙面板块、动手操作板块和天花板。并征求了各位专家的意见。

华东师范大学数学系的硕士生李玲报告了“数学史融入数列教学的行动研究”，数列的重要性体现在多个方面，其在高中教科书上占据一整章的篇幅，并与其他知识，如函数联系紧密，是高中阶段一个很重要的知识点，李玲报告了“数列的概念”、“递推数列”、“等差数列的前 n 项和”、“等比数列的概念”、“等比数列的前 n 项和”等五个数学史融入教学的案例，从学生和教师的角度阐释了数学史在数列教学中的不同教育价值。

华东师范大学数学系的硕士生叶晓娟报告了“初中生对无理数的理解”，国内外大量的实证研究表明，中学生和职前教师在无理数理解方面存在着诸多问题。报告中整理了无理数的发展历史，从无理数的概念定义和概念意象、学生的无理数理解和数学概念的二重性理论三方面对调查结果进行分析。得出了若干结论，揭示了学生对无理数理解的二重性。

第六组：

最后一组报告由中国科学院自然科学史研究所的硕士生杜良开始，题为“顾澄与概率论和数理统计学知识的传入”，1910 年和 1913 年，顾澄先后翻译出版了《最小二乘法》与《统计学之理论》两书，概率论与数理统计学由此系统传入中国。杜良从顾澄生平、《最小二乘法》和《统计学之理论》的出版背景及原作者、《最小二乘法》和《统计学之理论》的内容和翻译情况三个部分介绍顾澄对于概率论与数理统计学的译介工作。

内蒙古师范大学科学技术史研究院的硕士生王鑫义做了题为“清代天算家张作楠的算学交游”的报告，报告中疏理了张作楠的历算交流，讨论了他对待西学中源的态度，意在明晰他所处的学术环境，希冀能为探究清中期一般学者的历算思想做些准备。

上海师范大学哲学系的硕士生张滕做了题为“笛卡尔‘万能数学’思想释义”的报告，“万能数学”（Mathesisuniversalis）是笛卡尔哲学体系中一个重要概念，报告中对对笛卡尔著作中“万能数学”的描述进行分析和研究，并对其思想演化过程进行了系统的梳理。

最后一个报告由东华大学人文学院的硕士生张希萌所做，题为“埃奇沃思的《伦理学新旧方法》研究”，弗朗西斯伊西德罗埃奇沃思（Francis YsidroEdgeworth，1845～1926）是 19 世纪著名的经济学家、数理统计学家。报告从伦理学、经济学、统计学三方面对其主要思想和著作展开介绍和评论。

最后，华东师范大学数学系的汪晓勤教授作了会议总结，本次会议涉及的内容广泛，数学史与数学教育的结合成为数学史研究一个新的有待发展的方向，本次会议与会人员可以分为老中青三代，其中中青年学者正在茁壮成长，他们具有宽广的国际学术视野和扎实的科学研究功底，是中国数学史研究的希望。