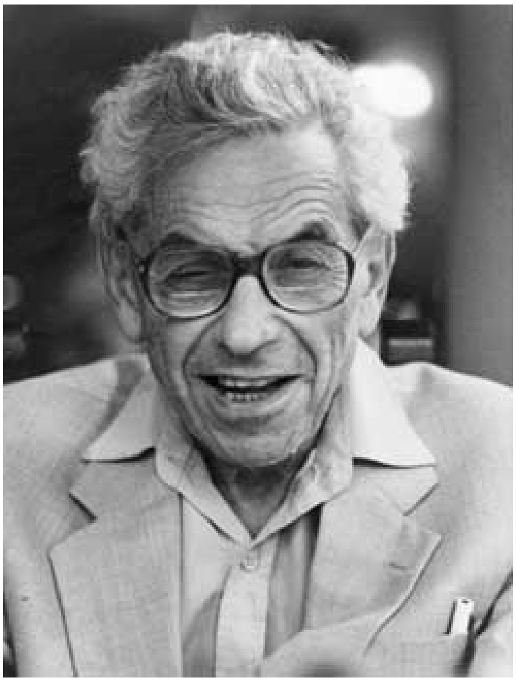
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2013 年第 2 卷第 4 期



保罗•埃尔德什

(Paul Erdös, 1913–1996)

刊首语

本期的封面人物是保罗•埃尔德什(Paul Erdös，1913-1996)。

埃尔德什是20世纪最具传奇色彩的数学家之一。他在60多年的数学研究生涯中，不停地奔波于各大洲的大学数学系和研究中心之间，与大量合作者共同发表了1500多篇学术论文；他的思维能力热情无与伦比，直到古稀之年，他每天还工作19小时；他抛弃一切物质享受，甚至居无定所，追求数学真理就是他生命的一切。

埃尔德什堪称数学界的莫扎特，他也是历史上最多产的数学家之一。今年是埃尔德什诞辰100周年，让我们深切缅怀这位传奇数学家，同时也去细细品味其中的数学文化。

目　录

CONTENT

文献研究

数学史与数学教育研究综述

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

早在 19 世纪，数学史与数学教育之间的关系已经受到欧美数学家和数学教育家的关注。1972 年，在英国 Exeter 召开的第二届国际数学教育大会上，成立了数学史与数学教学关系国际研究小组（*International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, 简称 HPM），1976 年开始隶属于国际数学教育委员会。自此，数学史与数学教育关系（通常我们也称之为 HPM）成了数学教育的重要学术研究领域之一。

HPM 领域的研究工作主要包括以下几个方面。

1 关于"为何"的探讨

数学教学中为什么要运用数学史？欧美学者早在 19 世纪就有讨论。法国数学家泰尔凯（O. Terquem, 1782～1862）、英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806～1872）、丹麦数学家和数学史家邹腾（H. G. Zeuthen, 1839～1920）等都强调数学史的教育价值。（汪晓勤，2001；汪晓勤，2002；汪晓勤等，2003；赵瑶瑶等，2007）HPM 先驱者、美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）指出，一门学科的历史知识乃是"使面包和黄油更加可口的蜂蜜"，"有助于使该学科更具吸引力"（Cajori, 1899），能够激发学生学习兴趣、使他们树立正确的价值观。他在《数学史》前言里指出，通过数学史的介绍，"教师可以让学生明白：数学并不是一门枯燥呆板的学科，而是一门不断进步的生动有趣的学科。"（Cajori, 1911）另一位 HPM 先驱者、美国数学史家和数学教育家史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）则认为，数学史展现了不同方法的成败得失，因而今人可从中汲取思想养料，少走弯路，获取最佳教学方法。他指出：

> "若要考虑该学科（数学）的任何改革问题，就不可不知道几何如何演变为现今的形式；若要理解今天所提倡的改进教学的多种方法，就必须知道早期解方程的几何方法；若要将微积分从现今的地位中挽救出来，知道微积分的早期历史同样很重要。这些只是

数学史对教学的无数教训中的几个例子而已。”（汪晓勤，2010）

以后的许多美国学者对数学史的教育价值都有讨论（汪晓勤，2004）。

HPM 成立之后，西方学者对数学史的教育价值进行了更为广泛的探讨。Fauvel（1991）总结了数学教学中运用数学史的各种理由，共有 15 条：

（1）增加学生的学习动机；

（2）改变学生的数学观；

（3）因为知道并非只有他们自己有困难，因而得到安慰；

（4）使数学不那么可怕；

（5）有助于保持对数学的兴趣；

（6）给予数学以人文的一面；

（7）有助于解释数学在社会中的作用；

（8）有助于发展多元文化进路；

（9）历史发展有助于安排课程内容顺序；

（10）告诉学生概念如何发展，有助于他们对概念的理解；

（11）通过古今方法的对比，确立现代方法的价值；

（12）提供探究的机会；

（13）过去的发展障碍有助于解释今天学生的学习困难；

（14）培养优秀生的远见卓识；

（15）提供跨学科合作的机会。

Tzanakis 和 Arcavi（2000）从数学学习、关于数学本质和数学活动观点的发展、教师的教学背景与知识储备、数学情感、对数学作为文化活动的鉴赏等五个方面总结了数学史对支持、丰富和改进数学教学的作用。Jankvist（2009）则将数学史对于数学教学的作用分成“工具”和“目标”两类。

2 关于“如何”的讨论

Fauvel 和 van Mannen 曾指出：“对于数学史引入数学教学的研究，乃是数学教学研究的重要组成部分。”（Bagni, 2000）HPM 成立以来，特别是 20 世纪 80 年代以来，许多数学教育家、数学教师对于数学史在数学教学上的具体运用方法作了理论探讨。如何将数学史融入数学教学，如今已成了近年来国际上 HPM 研究者们关注的中心课题之一。

Fauvel（1991）总结了数学教学中运用数学史的方式，共有 10 种：

（1）介绍历史上数学家的故事；

（2）运用数学史引入新概念；

（3）鼓励学生理解以所学概念为答案的数学史问题；

（4）讲授“数学史”课；

（5）利用历史上的数学教材设计课堂练习和作业；

（6）举办数学历史主题的展览；

（7）运用历史上的主要例子来说明方法和技术；

（8）探索过去的错误、另类观点以帮助今天的学习者理解并解决困难；

（9）借鉴历史发展设计一个话题的教学方法；

（10）基于历史信息设计大纲范围内主题的顺序和结构。

Tzanakis 和 Arcavi (2000)总结了数学史在数学教学中的三种运用方式：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识。而 Jankvist (2009)则提出另三种方式：点缀法、模块法和基于历史法。

我们将各种分类方法进行整合与改进，得到附加式、复制式、顺应式和重构式四类，见表 1。

表 1　数学教学中运用数学史的方式

类 别	描　述	Fauvel	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
附加式	展示有关的数学家图片，讲述逸闻趣事等，去掉后对教学内容没有什么影响	方法 1	直接运用法	点缀法
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	方法 2-8	直接运用法	模块法
顺应式	根据历史材料，编制数学问题	—	—	基于历史法
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	方法 9-10	间接运用法	基于历史法

如，在对数概念的教学中，讲述对数发明者纳皮尔（J. Napier, 1550～1617）和常用对数发明者布里格斯（H. Briggs, 1561～1630）的故事（汪晓勤，2002b），即属于附加式。在

引入复数概念时，抛开方程 $x^2+1=0$，而直接采用德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646～1716）的二元二次方程组问题：已知 $x^2+y^2=2$，$xy=2$，分别求 $x+y$，x，y。（张小明等，2005）此即属于复制式。在数列概念的教学中，将毕达哥拉斯学派的多边形数理论改编成供学生探究的问题，即属于顺应式。

重构式是数学史最高层次的用法，发生教学法即属于该方式。托普利茨（O. Toeplitz, 1881～1940）曾指出，发生法的本质是追溯一种思想的历史起源，以寻求激发学习动机的最佳方式。（Edwards, 1977）但追溯历史起源、重演历史发展并非原原本本地、精确地复制历史，而是借鉴历史、重构历史。原原本本的历史往往很复杂，而发生法所重构的历史却是线性的。发生法强调知识的自然发生过程，即教学必须建立在学生已有的认知基础之上；同时也强调知识的必要性，即教学必须激发学生的学习动机。例如，通过借鉴椭圆知识的历史，基于古希腊的原始定义（截线定义），用圆柱中的旦德林球来引出椭圆的焦半径性质，（汪晓勤等, 2011；陈锋等，2012）即属于这种方式。

3 教育取向的数学史研究

早年，卡约黎曾研究过如下问题：未知数为什么用 x 来表示？指数记号是如何演进的？谁最早使用了数学归纳法？“数学归纳法”之名是如何产生的？“对数”之名是怎么来的？为什么等差和等比级数又叫算术和几何级数？这些问题具有明显的教育取向。教育取向的历史研究主要通过对数学课程中的概念、公式、定理、问题的历史进行研究，不是为历史而历史，而是为教育而历史。这是 HPM 研究的基础性工作，如果我们不了解一个概念、公式或定理的历史，就无从谈论概念理解的历史相似性以及借鉴历史的概念教学。

美国数学教师协会早在 1969 年就组织数学史家和数学教育家编写了《用于数学课堂的历史话题》（Hallerberg *et al*, 1969），供数学教师使用。Gulikers 和 Blom（2001）在有关几何历史与教学的文献综述中，教育取向的历史研究占了相当大的比例。笔者亦曾致力于这方面的工作（如汪晓勤，2002）。

HPM 为历史研究提供了丰富的问题。例如，“三角公式的几何渊源”、“古代文献中的数列问题”、“平方差公式的历史”、“用字母表示数的历史”等等课题无不源于 HPM 教学实践的需要。

数学教育取向的数学史研究的另一目的是获取相关知识点（概念、公式、定理等）的教

学启示。卡约黎的《初等数学史》就是早期的例子。如，卡约黎根据负数的历史得出结论："在教代数的时候，给出负数的图形表示是十分重要的。如果我们不用线段、温度等来说明负数，那么现在的中学生就会与早期代数学家一样，认为它们是荒谬的东西。"（Cajori, 1917）M·克莱因（M. Kline, 1908～1992）基于数学史的研究，对美国的"新数运动"提出尖锐的批评（Kline, 1958），并强调直觉对于数学理解的重要性（Kline, 1970）。

类似地，Malik（1980）通过对函数概念的历史考察获得启示：中学阶段应该教简单易懂的函数概念；Ponte（1993）通过对函数历史的考察获得启示：在中学，将函数定义为数集之间的对应关系是合适的；在中学数学中必须强调具有解析式的函数例子。Filep（2001）通过对分数概念历史考察，获得教学启示：分数概念时的引入必须与度量联系起来，而不是两数相除。

数学史是一个宝藏，不论时代如何变迁，数学教育工作者总是可以并且也有必要从中汲取有益的思想养料。

4 历史相似性研究

所谓历史发生原理，指的是个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展顺序，这就是我们通常所说的"历史相似性"。对发生原理的认识可以上溯到 19 世纪法国哲学家孔德（A. Comte, 1798～1857）的著述。孔德认为，"个体教育必然在其次第连续的重大阶段，仿效群体的教育，在感情上如此，在思想上也是如此。"（孔德，1999）英国教育家斯宾塞（H. Spenser, 1820～1903）据此指出：

> "对儿童的教育在方式和顺序上都必须符合历史上人类的教育，换言之，个体知识的发生必须遵循人类知识的发生过程。…因此，在确定正确的教育方法时，研究一下文明中的方法，有助于为我们提供指南。"（Spencer, 1862）

发生原理又受到德国生物学家海克尔（E. Haeckel, 1834～1919）所提出的生物发基本定律——"个体发育重演种族发展"的支持。（Radford, 2000）

早期学者似乎坚信个体数学理解过程与数学思想的历史发展之间存在严格的相似性。如，马塞（J. Macé, 1815～1894）认为，儿童的学习一如人类的学习，"尽管起点离我们已经很远，但人类漫长的教育在每一个儿童身上又会重新开始。"（Mace, 1862）布兰福德（Benchara Branford）则指出："为教育之目的，几何学最有效的讲授方式乃是遵循科学历史演进的顺序"。（Branford, 1921）他还将人类与个体数学经验的发展进行了对比。

卡约黎和史密斯则从学生学习困难的角度来诠释历史发生原理。卡约黎指出："学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难。"（Cajori, 1899）而史密斯则认为："困扰世界的东西也会困扰儿童，世界克服其困难的方式提示我们，儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难。"（Smith, 1900）美国数学家和数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908～1992）的观点与卡约黎和史密斯一脉相承："历史上数学家所遇到的困难，正是学生也会遇到的学习障碍，因而数学史是教学的指南。"（汪晓勤，2004a）

F. 克莱因（F. Klein, 1849～1925）、庞加莱（Poincare, 1854～1912）、波利亚（G. Polya, 1887～1985）、弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905～1990）等都是历史发生原理的支持者，当然，他们已经摆脱了严格相似性的狭隘观点。

克莱因（F. Klein, 1849～1925）指出：

> "生物发生学的一项基本定律指出，个体的成长要经历种族成长的所有阶段，顺序相同，只是所经历的时间缩短；而教授数学和其他任何事情一样，至少在一般意义上要遵循这项定律。鉴于年轻人的本能，教学应慢慢将其引向更高级的事物，最终到达抽象形式。为此，教学应遵循人类从知识的原始状态到更高级形式的道路。……推广这种自然的真正科学的教学的主要障碍是缺乏历史知识。"（Klein, 1932）

这里，克莱因所说的借鉴生物发生定律、基于历史知识的"自然的"和"科学的"教学方法就是发生教学法。

庞加莱说："教育工作者的任务就是让儿童的思维经历其祖先之所经历，迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段；鉴于此，科学史应该是我们的指南。"（Poincaré, 1899）

波利亚指出："只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断。"（Pòlya, 1965）

弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905～1990）将人类看作一个"学习者"，其学习过程就是历史。他告诉我们："数学史是一个图式化不断演进的系统化的学习过程，儿童无需重蹈人类的历史，但他们也不可能从前人止步的地方开始。从某种意义上说，儿童应该重蹈历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道我们今天有幸知道的东西，将会发生的历史。"（Freudenthal, 1980）

历史相似性的研究对数学教育具有重要意义。因为，如果某一概念的历史相似性得到检验，那么，我们可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而有针对性地制订相关教学策略，最有效地让学生跨越学习障碍。

一些欧美学者就符号代数、角的概念、平面概念、数轴上序关系、函数极限等，对有关被试的理解进行了实证研究，印证了历史相似性的存在。Harper (1987) 通过对两所文法学校 1-6 年级 144 名学生的测试，发现学生对符号代数的理解过程经历修辞代数、缩略代数和符号代数三个阶段，具有历史相似性；Bagni (2000) 通过对 88 名 16-18 岁、尚未学过无穷级数概念的高中生的测试和访谈发现，就发散的无穷级数而言，历史发展与个体认知发展是相似的。

Keiser (2004)通过课堂观察和访谈调查发现，六年级学生对角的理解涉及“质”、“量”和“关系”三个方面，与古希腊数学家的理解具有相似性；Zormbala & Tzanakis (2004)通过对 51 名大学非数学专业毕业、从事各类社会职业的人员的调查，发现被试对平面概念的理解与历史上巴门尼德(Parmenides, 前 5 世纪)、海伦(Heron, 1 世纪)、莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646～1716)、辛松（R. Simson, 1687～1768)、高斯（C. F. Gauss, 1777～1855)、皮埃里（M. Pieri, 1860～1930）等数学家的理解具有相似性；Thomaidis & Tzanakis（2007）研究发现，学生对数轴上序关系的理解与历史上数学家的理解也存在一定的相似性。Juter (2006)的研究则表明，关于函数的极限，大一学生中只有成绩优秀的学生才表现出理解上的历史相似性。

类似地，针对学生对虚数、发散级数、函数、古典概率、切线、符号代数、数列极限等的理解，我们也进行了一些初步的实证研究（如汪晓勤等, 2005；汪晓勤等, 2006；任明俊等, 2007）。以切线为例。对鄂、苏、沪、皖四地 332 名高中生的调查表明：绝大多数高中生对切线的理解只达到古典几何阶段，他们只是根据公共点个数、直线与曲线相对位置或直线与圆半径位置关系来判别切线，与古希腊欧几里得、阿波罗尼斯、阿基米德等的理解具有相似性；绝大多数被试未能从特殊曲线的切线顺利过渡到一般曲线的切线，这也表现出高度的历史相似性，因为从古典几何阶段过渡到近代分析阶段，历史上的切线概念也经历了漫长而艰辛的过程。（殷克明，2011）

5 教学实践

关于数学史融入数学教学，迄今已积累了相当多各层次的实践案例，我们按改进后的分类法依次对其作一概述。

5.1 附加式

早在 1977 年，McBride 和 Rollins 就进行了一项为期 12 周的 HPM 教学实验。在每一次

代数课上，教师用 5 分钟时间附加式地介绍数学史，结果发现，教学中使用数学史，有助于提高学生的学习数学积极性。（Marshall & Rich, 2000）

Brown (1991) 利用每节数学课的开头五分钟作“微型演讲”：向学生讲述数学故事、趣闻、数学家传记、数学名家名言、甚至数学小诗等。Gardner (1991)让小学生探究“风走得有多快”，借机讲述梅森（Merssene, 1588～1648）测声速的故事以及伽利略（G. Galilei, 1564～1642）测光速的实验。Ofir (1991) 在数学课堂中设计了以下活动：在七年级，介绍古代埃及、巴比伦、罗马的记数制度，并让学生将其与今天的记数制作比较；在八年级，介绍古埃及的乘法和分数的拆分、古代巴比伦人、古希腊阿基米德、中国刘徽以及犹太人求圆周率的方法和结果。Führer（1991）在他的数学课上多次使用三个故事：一是古希腊数学家埃拉托色尼（Eratosthenes）测量地球大圆周长，二是圆周率的历史，三是复数的历史。

5.2 复制式

Ransom(1991) 利用 1747 年拉丁文版《几何原本》第一卷命题 47 来讲授勾股定理，并从英国数学家波尼卡斯特（Bonnycastle）《测量与实用几何引论》中选取勾股定理应用问题供学生探究，如：

- 顶撑距建筑物直柱 12 英尺，支撑一离地 20 英尺高的门窗，求顶撑长度；
- 河岸悬崖高 103 英尺，自崖顶引线至对岸，线长 320 英尺，求河宽。

Perkins (1991) 在女子学校通过让学生解决历史上数学家觉得很难的概率问题来增加她们的学习自信心：

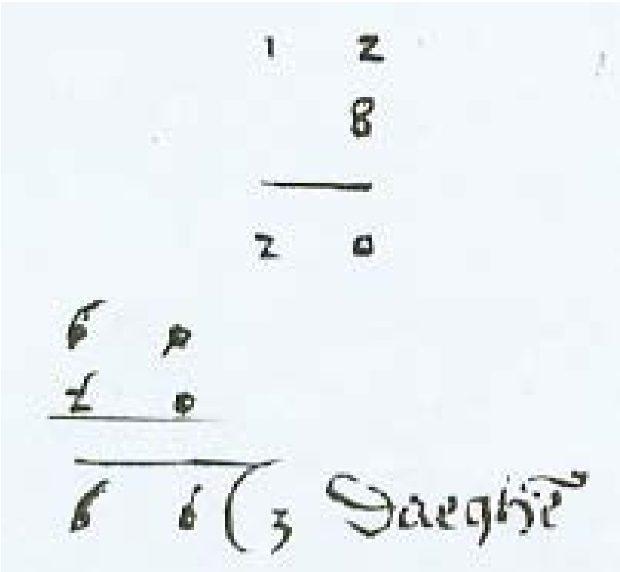
- 一次同时掷三颗骰子，比较 9 点和 10 点的概率大小。(伽利略与图斯坎尼大公)
- 一颗骰子掷 4 次，至少一次出现 6 点的概率，与两颗骰子掷 24 次，至少一次出现双 6 点的概率大小。（德·梅勒）
- 一次同时掷 6 颗骰子，至少出现一个 6 点的概率，与一次同时掷 12 颗骰子，至少出现两个 6 点的概率大小。（裴皮斯致牛顿）

同时，用 16 世纪初德国百科全书《知识明珠》（*Margarita Phylosophica*）中的两幅插图来引发学生对“女性与数学”这一话题的探讨。两幅插图中，各有一位优雅的女性，一个代表几何学，一个代表算术。Thomaidis (1991) 在平面几何课上向学生讲解几何定理在古代天文学上的应用，如托勒密定理是如何帮助天文学家亚里士塔丘（Aristachus）计算出月半圆时日地距离与月地距离的比值在 18 和 20 之间的。Van Maanen (1991)选择 17 世纪法国数学家

洛必达（L'Hopital, 1661～1704）《无穷小分析》中的力学问题作为其所教文法学校毕业考试的题目。Chun Ip Fung 等人将刘徽《海岛算经》第一题、海伦的测量问题以及达·芬奇的“猫眼图”用于教学设计。（Fauvel & van Maanen, 2000）

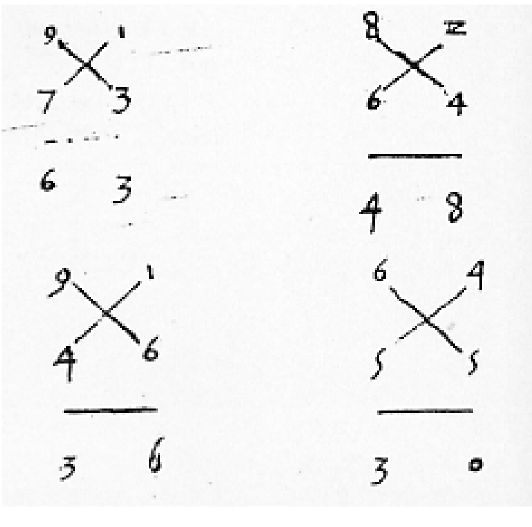
Kool (2003) 选择 16 世纪荷兰数学教科书上的问题，对 20 名 11-12 岁的小学生进行了课堂教学实验：

● 甲从帕里希出发到安特卫普去，日行 8 英里；乙从安特卫普出发到帕里希去，日行 12 英里。两人走同一条路，且同时出发。帕里希和安特卫普之间的距离为 60 英里。问几天后甲乙二人相遇？（Peter van Halle, 1568）



Peter van Halle 的解法

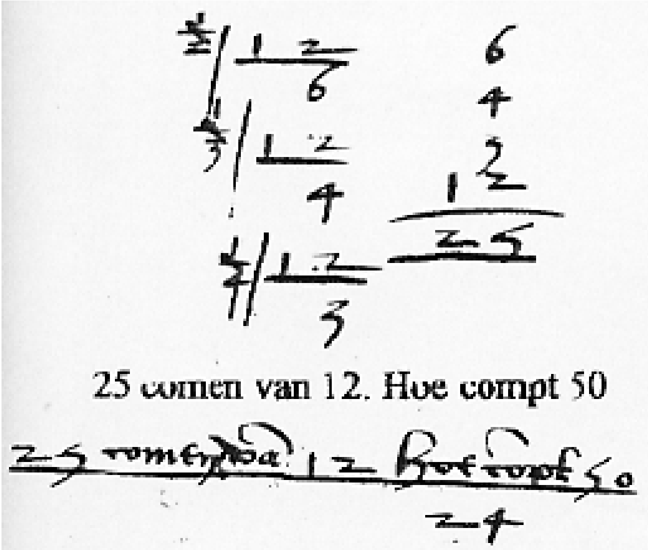
● 如果忘记九九表中某两数的乘积，如何求出这个乘积呢？（Peter van Halle, 1568）



Peter van Halle 的解法

● 皮尔特对简说：“你 50 岁了！”“不”，简说，“我没到 50 岁。如果我取我年龄的一半，

加上我年龄的 1/3，加上我年龄的 1/4，最后加上我的年龄，总数才是 50 岁。”问简的年龄多大？（Christianus van Varenbraken, 1532）



Christianus van Varenbraken 给出的解法

作者将原教科书上的解法称为“班级里的一名额外学生”。

Paola 将历史上著名的“点数问题”（或称“分配问题”）用于概率的教学，且在课堂上发现了学生解法的历史相似性（Furinghetti & Radford, 2002；Furinghetti & Paola, 2003）。Massa 等（2006）将古希腊天文学家亚里士塔丘《论日月的大小与距离》中的命题 7（即上文提到的日地、月地距离关系推导）、《几何原本》第一卷命题 47（勾股定理）以及雷格蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436～1476）《论各种三角形》卷 1 命题 27（已知直角三角形三边，求各角）用于三角学的教学。

5.3 顺应式

Van Maanen (1992)利用荷兰数学家舒腾（F. van Shooten, 1615～1660）的圆锥曲线作图工具，编制高中毕业考试题目。

舒腾的其中一种椭圆作图工具如图 1 所示。短杆 AB 可绕 A 转动，$AB = a$；长杆 BE 通过 B 处铰链与 AB 连接，$BE = b$。BE 上的钉子 D 可沿 KL 移动，$AB = BD$。舒腾说，当 D 在 KL 上移动时，E 处的笔尖即画出了椭圆。

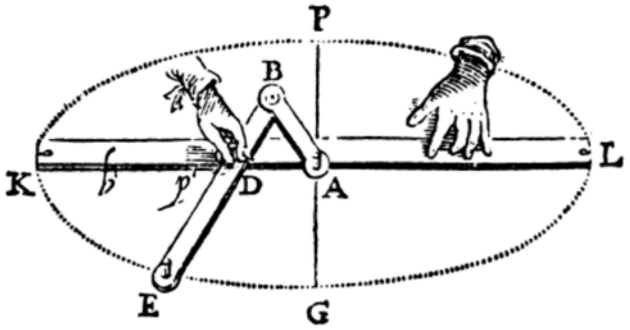


图 1 舒腾的椭圆作图工具

（1）若以 A 为原点，KL 为 x 轴，BE 与 KL 的夹角为 φ，用 a、b 和 φ 来表示点 E 的直角坐标。

（2）求点 E 的轨迹的直角坐标方程。E 的轨迹是否真的椭圆？

（3）舒腾的这一工具是否适合椭圆作图（像用圆规画圆一样）？

类似地，张小明老师利用我国古代数学中的基本立体图形“鳖臑”来编制如下问题（汪晓勤，2012）：

我国古代数学家对立体图形有深刻的研究，著名数学家刘徽在此方面取得了很大的成就，他发现：“邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也”．这个结果被称为“刘徽原理”，其中鳖臑是指四个面都为直角三角形的四面体。在如图所示的鳖臑中，$\angle AOC=\angle BOC=\angle OBA=\angle ABC=90°$，$AB=OC=2$，$OB=a$ （$a>0$），F 为线段 OB 上的动点，E 为 DB 的中点，问，当点 F 运动到什么位置时，直线 AF 与 OE 所成的角最小？

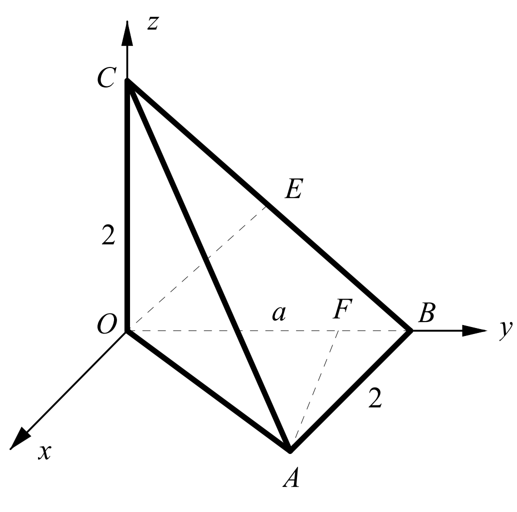


图 2　鳖臑问题

Bagni (2000)采用邦贝利（R. Bombelli, 1526～1572）《代数学》（1572）中的关于 1、-1、i、$-i$ 的运算法则以及凯莱（A. Caylay, 1821～1895）的乘法表来引入群概念的教学，试图验

证利用数学史来引入新概念教学的有效性。

Earnest (1998)让师范生利用数学史料编制作业单，结果，职前教师们设计出丰富多彩的问题，涉及卡洛儿钟表问题、古印度梵天塔问题、芝诺悖论、古埃及分数、拉马努金整数拆分问题、贾宪三角与二项式展开、古代记数制度、欧拉多面体公式、数学与音乐、九宫图、古罗马马赛克中的对称图案等，这些作业单大多为数学史的顺应式应用。

在针对师范生所设计的“倾听学生”工作坊上，Arcavi & Isoda (2007)将莱茵得纸草书上的“猫和老鼠”问题（等比数列问题）进行改编，让学生猜测象形文所表示的数字并复原古埃及的乘法运算。

5.4 重构式

早在 19 世纪，英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806～1871）已经对有关数学知识的演进进行过重构。以符号代数为例。（De Morgan, 1902）德摩根指出，代数学上一般数量关系的发现始于特例。如：两个数的和的一半加上它们的差的一半等于较大的数。首先，取 16 和 10，它们的和的一半为 13，差的一半为 3。13 和 3 相加，得 16，为较大数。上述结果对于其他数对也是成立的，如 27 和 8，15 和 9，等等。利用运算符号，可以发现以下事实：

$$\frac{16+10}{2}+\frac{16-10}{2}=16,$$
$$\frac{27+8}{2}+\frac{27-8}{2}=27,$$
$$\frac{15+9}{2}+\frac{15-9}{2}=15,$$

等等。但如何表达上述结果对于任何一对数都成立呢？我们将较大数称为第一数，较小数称为第二数，就有

$$\frac{\text{第一数}+\text{第二数}}{2}+\frac{\text{第一数}-\text{第二数}}{2}=\text{第一数}$$

类似地，我们也可以得到其他等式，如

$$(\text{第一数}+\text{第二数})\times(\text{第一数}-\text{第二数})=\text{第一数}\times\text{第一数}-\text{第二数}\times\text{第二数}$$

但每次写“第一数”、“第二数”很麻烦，若用 x 表示“第一数”，用 y 表示“第二数”，则上面的恒等式可以写成：

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x,$$
$$(x+y)\cdot(x-y)=x\cdot x-y\cdot y\text{。}$$

对于一个代数恒等式，从特例，到文字表达，再到字母表示，正是对符号代数发展过程的重构。

Radford & Guérette (2000)基于古巴比伦的“原始几何”方法，设计了一元二次方程求根公式的教学。整个设计共含五部分。

（1）几何方法之引入

教师先提出如下问题：“已知矩形的半周长等于 20，面积等于 96，问矩形的长和宽各为多少？”让学生分组合作，用任何方法来解决。学生完成后，教师在黑板上用纸版拼图来解释“原始几何”：取边长为 10 的正方形，其面积为 100。从中割去一个边长为 2 的小正方形，余下的图形的面积为 96。沿虚线割去一矩形，并将其竖直补到右边，于是得所求边长为 12 和 8。如图 3 所示。

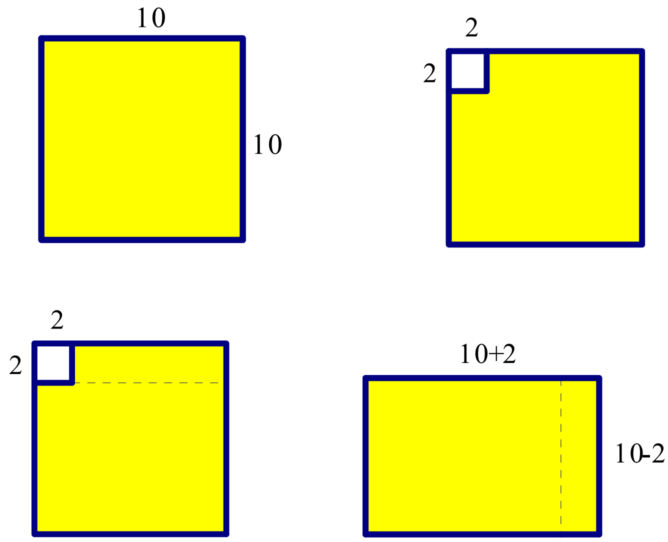


图 3 矩形问题的几何解法

然后，教师给出另一个类似问题：“已知矩形面积为 30，半周长为 12。求矩形的长和宽。”（丢番图《算术》卷 1 问题 27）教师要求学生在第二次课上介绍解这类问题的步骤，要求步骤清晰，能让同年级另一个班级的任一个学生听懂。

（2）合作讨论与提出问题

小组讨论解题步骤，派代表向全班介绍本组讨论结果。接着，让学生自己提出类似的问题，要求：所求矩形的边长必须为整数；不一定为整数。

（3）新矩形问题

教师让学生解第二个问题："矩形长为 10，宽未知。在长度未知的边上做一正方形，正方形连同矩形的面积共为 39，求矩形的宽。"（花拉子米问题的几何形式）教师在黑板上用纸版拼图来解释解法：将原矩形一分为二，将其中之一粘到正方形底边上。补一边长为 5 的小正方形，则新的大正方形面积为 39+25=64。其边长为 8。故 $x+5=8$，$x=3$。

接着教师给出类似问题，让学生分组合作解决。并要求他们写出解这类问题的一般步骤。

（4）合作讨论与提出问题

讨论学生所写的解题步骤。并让他们自己提出类似的问题，满足下列条件：（1）矩形的边长必须为整数；（2）矩形的边长必须为分数；（3）矩形的边长必须为无理数。

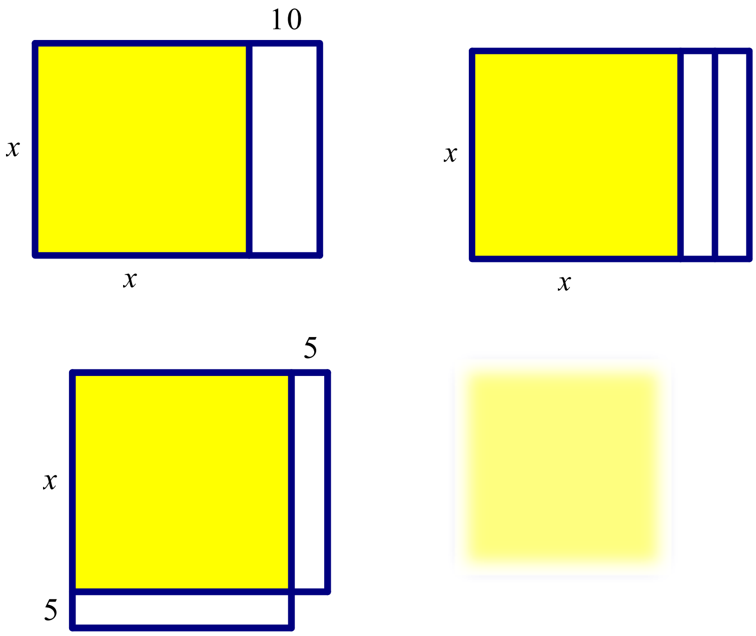


图 4　新矩形问题的几何解法

（5）求根公式之再发现

教师引导学生寻找解上面第三和第四部分中的问题的公式。教师提示：在学生所写的解题步骤的第四步，用字母来代替文字，用字母"b"来表示矩形的底，"c"表示总面积。经小组合作讨论，得公式

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2},$$

接下来，教师将几何问题翻译成代数语言：若未知的一边为“x”，则正方形面积为“x^2”，矩形面积为 bx；于是两者之和等于 c，即：$x^2+bx=c$。为将方程与上述公式联系起来，教师给出一些具体的方程（如 $x^2+8x=9$，$x^2+15x=75$）让他们运用公式来求解。

接着，教师引导学生找出方程 $ax^2+bx=c$ 的求根公式。学生可能会想到：方程两边同除以 a，即得前面讨论过的形式。只需在前面的公式中，用 b/a 代替 b，c/a 代替 c 即可：

$$x=\sqrt{\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a};$$

最后让学生考虑一般方程 $ax^2+bx+c=0$：只需用-c 来代替方程 $ax^2+bx=c$ 中的 c，即得。故在上述公式中用-c 代替 c，即得一般公式

$$x=\sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}，或 x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

为了得到所有的根，需考虑 b^2-4ac 的负根，于是得公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

类似的案例还有：Panagiotou(2011)借鉴对数的历史进行对数概念的教学设计，并将其付诸实践。

在台湾，基于数学史的教学设计的主要采用学习单的方式，已有案例涉及圆与圆周率、对数、三角函数、数学归纳法、曲线下的面积等等。

近年来，中国大陆也开始关注 HPM 视角下的数学教学。一个典型的例子是椭圆的概念与方程。椭圆的历史大致可以分成椭圆的发现、截线定义的形成、基本性质的推导、焦半径性质的获得、机械作图的产生、轨迹定义的确立以及椭圆方程的推导等七个重要环节，但教材只截取了最后三个环节，显然，所呈现的椭圆知识并非自然发生。鉴于椭圆历史的复杂性，我们对椭圆历史进行了重构（如图 5）。从球的影子、建筑、水杯等现实例子出发将椭圆知识建立在生活经验基础之上；利用圆柱中的旦德林双球，推导出椭圆焦半径性质，从而实现了从古希腊截线定义到课本轨迹定义的自然过渡，并创造学生的学习动机。该设计在上海、浙江、新疆等地的实施都取得了理想的效果。（汪晓勤等，2011；陈锋等，2012）

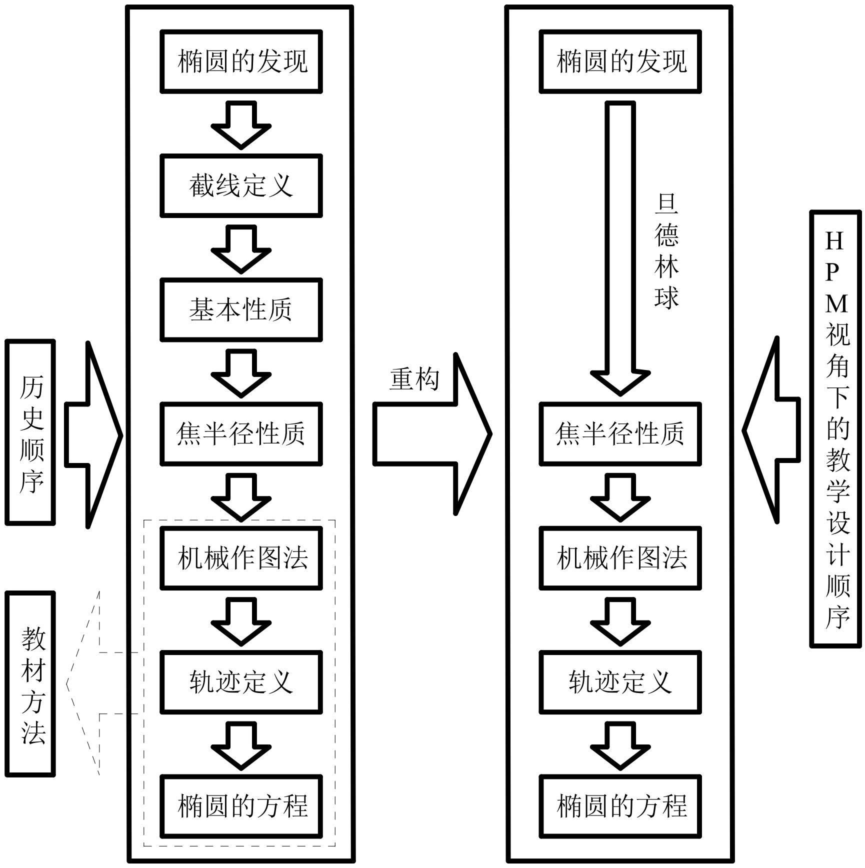


图 5 椭圆的历史及其重构

6 结语

以上我们看到，在 HPM 领域，关于“为何在数学教学中运用数学史”和“如何在数学教学中运用数学史”的讨论很多，前者较为成熟，后者尚无定论，相关讨论还将继续下去。在我国，关于“为何”的讨论很多，而关于“如何”的讨论却很少。我们所提出的“附加式”、“复制式”、“顺应式”和“重构式”四种方式基本上能够涵盖已有的实践案例，但有待于实践的进一步检验。在教育取向的数学史研究上，尽管西方文献丰富多彩，但可用于课堂教学的素材并没有我们想象的多。历史相似性研究案例仍然屈指可数，研究工具有待于开发，研究方法有待于改善。而在 HPM 教学实践方面，尽管西方学者作了很多尝试，但成功案例凤毛麟角，且绝大多数案例也并不适合我们的课堂。

因此，HPM 为我们留下了广阔的研究空间，在这里，我们将大有可为。

参考文献

[1] Albers, D. J. & Alexanderson, G. L. 1985. *Mathematical People: Profiles and Interview*. Boston: Birkhäuser

[2] Arcavi, A., Isoda, M. 2007. Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2): 111-129

[3] Bagni, G. T. 2000. The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. In: Schwank, I. (Ed.), *Proceedings of CERME-1*. Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, II, 220-231

[4] Bagni, G. T. 2000. Difficulties with series in history and in the classroom. In: Fauvel, J. & van Maanen, J. (eds.).*History in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 82-85

[5] Branford, B. 1921. *A Study of Mathematical Education*. Oxford: Oxford University Press

[6] Brown, G. 1991. Integrating the history and philosophy of mathematics into core curriculum math courses from a cultural and humanistic viewpoint. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 13-14

[7] Cajori, F. 1899. The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 7(5): 278-285

[8] Cajori, F. 1911. *A History of Mathematics*. New York: The Macmillan Company, 1-3

[9] Cajori, F. 1917. *A History of Elementary Mathematics*. New York: The Macmillan Company

[10] 陈锋, 王芳 2012. 基于旦德林双球模型的椭圆教学. 数学教学, (4)

[11] Edwards, H. M. 1977. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer-Verlag, vi-vii

[12] Ernest, P. 1998. The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4): 25-31

[13] Farmaki, V., Klaoudatos, N., Paschos, T. 2004. Integrating the history of mathematics in educational praxis. An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.3, 505–512

[14] Farmaki, V., Paschos, T. 2007. Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in

classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 66 (1): 83-106

[15] Fauvel, J. 1991. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

[16] Fauvel, J., van Maanen J. 2000. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 262-264; 272-273

[17] Filep, L. 2001. The development and the developing of the concept of a fraction. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, April 18th.

[18] Freudenthal, H. 1981. Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2): 133-150.

[19] Führer, L. 1991. Historical stories in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 24-31

[20] Furinghetti, F., Radford, L. 2002. Historical conceptual development and the teaching of mathematics : from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 631-654

[21] Furinghetti, F., Paola, D. 2003. History as a crossroads of mathematical cuture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 2003, 32(1)

[22] Gardner, J. H. 1991. "How fast does the wind travel?": history in the primary mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 17-20

[23] Gulikers, I., Blom, K. 2001. 'A historical angle': A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, **47**: 223-258

[24] Hallerberg, A. et al. 1969. *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Washington: NCTM

[25] Jankvist, U. T. 2009. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[26] Juter, K. 2006. Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning*, 8 (4): 407-431

[27] Klein, F. 1932. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. London: Macmillan

& Co. 146

[28] Kline, M. 1958. The ancients versus the moderns: a new battle of the books. *Mathematics Teacher*, **51**(6): 418-427

[29] Kline, M. 1970. Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, **77**(3): 264-282

[30] 孔德 1999. 论实证精神(黄建华译). 北京：商务印书馆. 94

[31] Kool, M. 2003. An extra student in your classroom: How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school. *Mathematics in School*, **32** (1): 19-22.

[32] van Maanen, J. 1991. L'Hôpital's weight problem. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 44-47

[33] van Maanen, J. 1992. Seventeenth instruments for drawing conic sections. *The Mathematical Gazette*, 76 (476): 222-230

[34] Mace, J. 1862. *L'Arithmetique du Grand-Papa*. Paris: Imprimerie de J. Claye. 11

[35] Malik, M. A. 1980. Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **11**(4): 489-492

[36] Marshall, G. L., Rich B. S. 2000. The Role of history in a mathematics class. *Mathematics Teacher*, **93**（8）: 704-706

[37] Massa, R. *et. al*. 2006. Teaching mathematics through history: some trigonometric concepts. *Proceedings of the 2th ICESHS*, 150-157

[38] De Morgan, A. 1902. *On the Study and Difficulties of Mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company

[39] Ofir, R. 1991. Historical happenings in the mathematical classroom. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 21-23

[40] Panagiotou, E. N. 2011. Using history to teach mathematics: the case of logarithms. *Science & Education*, 20: 1-35

[41] Perkins, P. 1991. Using history to enrich mathematics lessons in a girls' school. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 9-10

[42] Poincaré, H. 1899. La logique et l'intuition dans la science mathematique et dans L' enseignement. *L' Enseignement Mathématique*, 1: 157-162

[43] Pólya, G. 1965. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons. 132-133

[44] Ponte, J. P. 1993. The history of concept of function and some educational implications. *The mathematics Educator*, **3** (2):

[45] Radford, L. 2000. Historical formation and student understanding of mathematics, J. Fauvel, & J. van Maanen (Ed.). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 143-170

[46] Radford, L., Guérette, G. 2000. Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. In: V. J. Katz (ed.), *Using History to Teach Mathematics*, Washington: *Mathematical Association of America*, 69-75

[47] Ransom, P. 1991. Whys and hows. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 7-9

[48] 任明俊，汪晓勤 2007. 中学生对函数概念的理解：历史相似性研究. 数学教育学报, 16(4): 84-87

[49] Smith, D. E. 1900. *Teaching of Elementary Mathematics*. New York: The Macmillan Company. 42-43

[50] Spencer, H. 1862. *Education: Intellectual, Moral, & Physical*. New York: Hurst & Company. 123-125

[51] Thomaidis, Y. 1991. Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 37-43

[52] Thomaidis, Y., Tzanakis, C. 2007. Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line: the notion of historical "parallelism" revisited. *Educational Studies in Mathematics,* **66**:165-183.

[53] Tzanakis, C., Arcavi, A. 2000. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen（Eds.）, *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201-240

[54] 汪晓勤 2004. 美国学者眼中数学史的教育价值. 自然辩证法研究, **20** (6): 73-77

[55] 汪晓勤 2010. 史密斯：杰出的数学史家、数学教育家与人文主义者. 自然辩证法通讯, 32 (1): 98-107

[56] 汪晓勤 2001. 德摩根：杰出的数学家、数学史家和数学教育家. 自然辩证法通讯, **23** (1): 70-84

[57] 汪晓勤 2002a. 泰尔凯: 19 世纪前瞻的数学史家. 自然辩证法研究, **18** (8): 78-80

[58] 汪晓勤 2002b. 你需要数学史吗？数学教学，(4)

[59] 汪晓勤 2012. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, (2): 1-4

[60] 汪晓勤, 韩祥临 2002. 中学数学中的数学史. 北京: 科学出版社

[61] 汪晓勤等 2005. 从一次测试看关于学生认知的历史发生原理. 数学教育学报, **14**(3): 30-33.

[62] 汪晓勤等 2006. 高中生对实无穷概念的理解. 数学教育学报, 15(4): 90-93

[63] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨 2011. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例. 数学教育学报, 20 (5): 20-23

[64] 王进敬 2011. 数学史融入初中数学教学的行动研究. 华东师范大学硕士论文

[65] 殷克明 2011. 高中生对切线的理解: 历史相似性研究. 华东师范大学硕士论文

[66] 赵瑶瑶, 汪晓勤 2007. 邹腾: 19 世纪数学史家、丹麦数学的先驱者. 自然辩证法通讯, **29** (3): 76-84

[67] 张小明, 汪晓勤 2007. 复数概念的 HPM 教学设计. 中学数学教学参考, (6): 4-7

[68] Zormbala, K., Tzanakis, C. 2004. The concept of the plane in geometry: elements of the historical evolution inherent in modern views. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2): 37-61

关于数学文化教育价值与运用现状的网上调查

赵东霞，汪晓勤

(华东师范大学数学系，上海, 200241)

《普通高中数学课程标准》在“课程基本理念”中指出：“数学是人类文化的重要组成部分。数学课程应反映数学的历史、应用和发展趋势，数学对推动社会发展的作用，数学的社会需求，社会发展对数学发展的推动作用，数学科学的思想体系，数学的美学价值，数学家的创新精神。数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观。为此，高中数学课程提倡体现数学的文化价值，并在适当的内容中提出对数学文化的学习要求。”[1]从中我们大致可以将数学文化的内涵概括为：数学的历史、数学的思想、数学的精神、数学与人类其他知识领域之间的关联。

近年来，数学文化日益受到国内数学教育工作者的重视，高校数学文化选修课方兴未艾，中学数学文化校本课程悄然兴起，数学文化融入数学教学业已成为一个重要而富有生命力的学术研究领域。那么，在中学数学教师眼里，数学文化究竟有哪些教育价值？数学文化在中学数学课堂中的运用现状如何？中学数学教师运用数学文化的困难是什么？在高中数学新课程实施十年、课程标准即将修订之际，对上述问题进行研究，无疑是有现实意义的。

为了回答上述研究问题，我们在上海市十二五市级共享课程“数学史与数学文化”的在线 BBS 讨论区发起了主题为数学文化教育价值的讨论，得到了教师的积极响应。从 10 月 26 日起截止到 11 月 6 日，共产生 778 个帖子。

1 教师眼中数学文化的教育价值

经过对在线教师所发帖子的逐条整理分析，我们得到关于数学文化教育价值的 344 个有效观点，涉及对学生和教师自身两方面的影响，涵盖数学文化的德育功能、理性精神、学习兴趣、数学知识和能力培养方面。

在所有观点中，所占比例最高的是“激发学生兴趣，形成积极的数学情感态度”。在教师看来，相当多的学生对数学缺乏兴趣，普通中学的情况更是不容乐观。一位教师写道：

我是普通完中的高中老师，最切身的体会就是：老师教得非常累，学生学得非常累，

简单的知识教了就忘，公式背了就忘，抄作业现象很普遍，学生的厌学情绪很浓，没有丝毫学习兴趣，还有什么情感、态度、价值观？

数学文化有着丰富多彩的内涵，生动有趣的故事、穿越时空的智慧、贴近生活的问题、赏心悦目的艺术等等，都可以充分调动学生的积极性，使他们形成良好的数学情感态度。在讨论中，一位教师写道：

兴趣是最好的老师，好奇心是研究的源泉。数学教学就是要培养学生的好奇心和兴趣，有了兴趣和好奇心，学生才能更加主动地学习数学。但是，我们在数学教学中往往把“火热”的数学教成“冰冷的美丽”的“骨干美人”，数学的枯燥无味埋没了多少学习数学的热情，让多少学生望而却步！这不得不说是我们数学教学的悲哀。如果我们数学教师能更好地了解数学史，就能深度理解数学的教学内容，从而做好数学教学演绎，把数学课上成让人回味无穷的艺术性和科学性并存的好课！

居于第二位的是“加强爱国主义教育，增强民族自豪感，培养社会责任感”。数学文化带有强烈的时代和民族特色。将数学文化应用于日常教学，向学生介绍中国古代具有世界意义的数学成就（如《周髀算经》中的勾股定理、刘徽的割圆术、祖冲之的圆周率等），让他们了解祖先的伟大智慧和创造力，可以增强他们的民族自豪感，激发他们的爱国热情。当然，笔者之一发帖提出了“爱国爱错”现象：勾股定理常常在课堂上被错误地说成是“中国人最早发现的”，但实际上更早的古巴比伦人已熟练运用过该定理。对此，一些老师认为自己确实对历史知识不甚了了，今后应多多学习；但也有部分教师认为：谁最早发现并不重要，重要的是我们的祖先确实做出过独立的发现。

居于第三位的教育功能是“汲取榜样的力量，锤炼坚强的意志，养成良好的心理品质”。数学史上，很多数学家都是逆境成才、永不言弃的典范；很多数学家都是勤学不怠、百折不挠的楷模；很多数学成都是历经挫折、失败甚至付出生命代价后取得的。一位教师写道：

泰勒斯因天文观测而掉入阴沟，希帕索斯因发现无理数而葬身大海，阿那克萨格拉身陷囹圄而探索不止，阿基米德因沉迷数学而被罗马士兵杀害，希帕蒂亚因追求真理而死于基督徒之手，索菲·热尔曼在墨水结冰的冬夜仍勤奋学习，斯坦纳家境贫寒而自强不息……这些优秀历史人物的事迹可用来激励学生努力学习、坚忍不拔。

位居第四的观点是“体会数学与现实生活之间的普遍联系，经历良好的数学体验，树立正确的数学观”。相当多的学生持有十分消极的数学观，一位教师引用文献中的说法[2]：

什么是数学？对于这个问题，有些学生的回答很有意思：“数学是一些居心叵测的

成年人为青年学生挖的陷阱”；“数学问题是一些仅仅出现在课本和试卷上的、让某些老师看着学生崴脚而感到窃喜的东西。”听到学生这样的回答，开始还觉得挺新鲜，可是仔细一想，就感到一阵心酸。我们这些用尽心血努力教学的教师在学生心目中无非就是一些布雷高手，而数学成为教师惩治学生的工具，与学生的个人发展并无太大关系，这样的结果无疑是数学教学的一种悲哀。

因此，有教师指出，课堂上为学生提供数学与现实生活密切联系的例子，让学生体会数学的价值，从中获得良好的数学体验，从而形成正确的数学观。

教师眼中数学文化的其他教育价值有：拓宽国际视野，培养包容并蓄的民族文化观；提高美学修养，欣赏数学美；培养理性的科学态度和严谨的思维方式；树立创新意识，发展探索能力；学习解决问题的思想和方法；理清知识结构，理解知识本质。

图 1 给出了各种观点的分布情况。

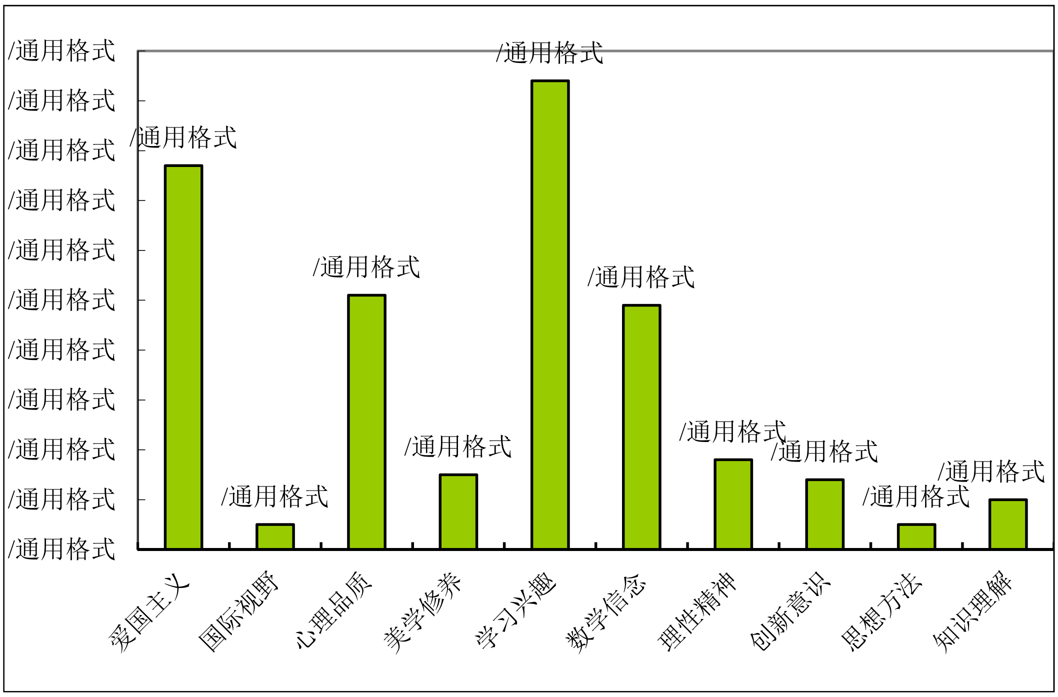


图 1 教师眼中数学文化的教育价值

从图 1 可见，在中学数学教师眼中，数学文化的教育价值主要体现在三维教学目标中的“情感态度价值观”上，数学文化很少能与“知识与技能”、“过程和方法”建立关联。

此外，少数教师在讨论中还提到数学文化对于教师自身专业发展的作用，认为数学文化知识的学习有助于提高教师数学素养，丰富自己的知识储备；同时，历史上曾经困扰过古人的问题，根据历史相似性原理，也很可能是今日学生学习上的困惑点，所以加强数学文化的学习，可以帮助教师更好地把握教学重、难点，从而选择恰当的教学方法与策略。

2 课堂上的数学文化例子

在线讨论中，许多教师分享了自己在课堂上运用过的具体的数学文化例子。使用频率最高的例子是勾股定理，其次是圆周率，接下来依次为“无理数的由来”、“黄金分割”和“国际象棋棋盘问题”等。笔者对讨论中出现三次以上的数学文化例子进行了统计，详见图 2。

此外，还有一些数学文化例子也为个别教师所用，如：

（1）数学史上的名人轶事，如希帕索斯与无理数、纳皮尔与对数、高斯与等差数列求和公式、韦达与他的定理、刘徽与极限概念，杨辉与多项式乘法、加菲尔德与勾股定理、陈景润与哥德巴赫猜想等。

（2）历史上的数学名题或著名公式，如芝诺悖论（阿喀琉斯追龟问题）、丢番图墓志铭、泰勒斯测量金字塔高度、鸡兔同笼问题、理发师悖论、欧拉公式、赌金分配问题（“点数”问题）、格尼斯堡七桥问题等。

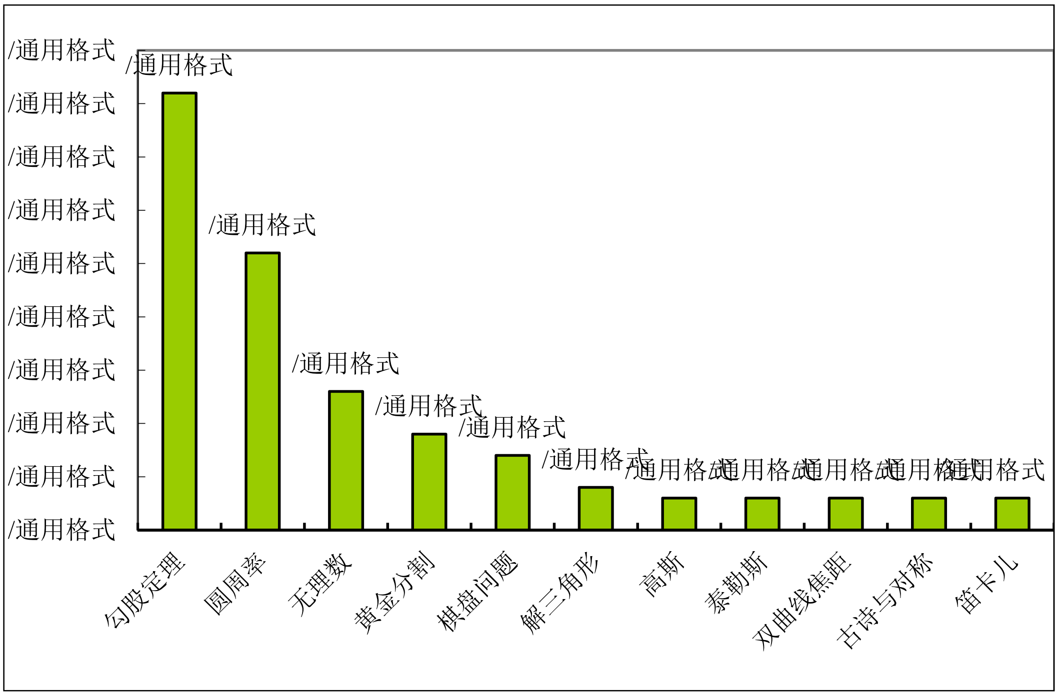


图 2 教师在课堂教学中使用过的数学文化例子

（3）生活中的数学问题，如地铁发车时间安排与最小公倍数、天平平衡与等式的性质、遮阳棚的设计与三角形稳定性和铺地砖与平面镶嵌问题、风车、陀螺与旋转、电影院座位与坐标、体操运动员花样动作平衡点与向量、点燃鞭炮与数学归纳法、上海市出租车计价问题与分段函数、经贸大厦与东方明珠的距离与解斜三角形、牙膏口径与圆柱体积、双曲线与导航技术、引体向上与向量运算等。

（4）趣味数学，如“抢 31”问题、“24 点”游戏、“蜗牛爬井”问题等。

（5）动物生活中的数学原理，如蜂房与平面镶嵌问题、蜘蛛网与图形对称问题、猫的睡姿与最小表面积问题等。

（6）数学概念的起源与发展，如函数概念的起源、负数概念的历史等等，帮同学理清概念的来龙去脉，更好地理解知识内容。

（7）文学作品中的数学思想，如惠施命题“一尺之棰，日取其半，万世不竭”蕴含了无穷思想，李白名句“孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流”形象地描写出极限的意境，杜甫名句“两个黄鹂鸣翠柳，一行白鹭上青天”展示了优美的对称性；陈子昂名篇“前不见古人，后不见来者；念天地之悠悠，独怆然而涕下”记录了作者对时间和空间的感知；华罗庚诗词阐明数形结合思想的重要性；王蒙利用黄金分割来阐述人的能力与他所得回报之间的理想关系，等等。

（8）建筑中的数学问题，如黄金分割在建筑中的应用，胡夫金字塔中所蕴含的数学。

（9）天文学、物理学上的数学，如天王星的发现、做功与数量积。

（10）音乐中的数学问题，如旋律的节奏与数学的周期。

（11）绘画技巧中的数学原理。

上述统计表明，大部分教师所了解的数学文化例子都很少，只有极少数教师知道较多的例子。从数学史料、文化现象、实际应用到教学设计、实证研究，关于勾股定理与圆周率这两个案例的文献很多，网上资源铺天盖地，且两者也是中国古代典型的数学成就，因而成为教师运用最多的数学文化例子。

教师主要采用以下几种方式来运用数学文化：

（1）在序言课中介绍数学史；

（2）用故事引入新课；

（3）将数学史用作课外阅读材料；

（4）开设数学史讲座；

（5）开展数学知识小竞赛；

（6）开设以数学文化为主题的拓展课；

（7）借助现代技术来呈现数学文化。

其中，教师采用得最多的是用故事引入新课。

3 教师运用数学文化的困难

尽管多数教师已经认识到数学文化的某些教育价值，但在实际教学中，运用数学文化存在很多困难。

3.1 课上无时间

在线讨论中，教师普遍反映没有充足的时间讲授数学文化。

T1：说说容易，其实做起来就不是那回事情了。你想，现在各校都在赶进度，赶进度的后果就是砍掉了数学史在课堂中的教学。

T2：我经常纠结于课时不足，现有的课时数仅够课本内容的讲解，若要拓展提高，时间就紧巴巴。课本以及所用的导学都有一些数学史知识，如雪花曲线，课本上的阅读材料介绍得很详细，苦于没有时间利用这一内容。

3.2 手中无资料

巧妇难为无米之炊。几乎所有的在线教师都感觉到手头缺乏适合于课堂教学的数学文化资料，他们一致建议，高校教师能够编写有关参考书。

T3：我浏览过很多有关数学史和数学文化的书，很少有针对中学数学教学来写的，但这往往是中学数学老师迫切需要的。所以很多老师在做教学设计时，由于时间、精力等限制，无法查阅大量的文献或资料。而我觉得，在数学课尤其是一些重要的概念课（比如函数的概念，曲线与方程、数学归纳法等）中，渗透数学史与数学文化是最适合不过的了。很希望能有一本针对中学数学教学的数学史与数学文化的书，选择几个重要的概念，追本溯源，也可附上几篇精彩的教学设计，方便数学老师借鉴和参考。

一些教师则强烈希望建立“数学典故资源库”。

3.3 考试无要求

无疑，升学率是评价学校和教师工作绩效的主要标准，在这种情况下，不少教师认为，只要考试无要求，数学文化就很难受到重视。

T4：在高考的压力下，讲数学史有点“奢侈”，不知道该怎么处理？

T5：要是哪次考试卷里包含数学史内容，数学史就会引起教师和社会的重视。

T6：有了数学文化，必然促进数学观的正确形成，可惜，目前的考试制度和形式让这些都成为浮云啊！

3.4 学生无基础

部分教师认为，经过年复一年的各种考试，“会解题才是王道”的思想已经深植于学生内心，除了训练解题技巧方法以外的其他内容，学生参与度不高，高中尤为明显。

T7：数学文化的教学应该从小学开始，不然都到了高中，你想搞个情境引入什么的，学生早就没心情听了。他们都觉得是浪费时间，还不如做题有用。

T8：二期课改的教材中引进的数学史以及数学家的故事，的确比过去多了很多，但是在实际教学中，存在着两大问题：一方面是教学的老师可能忽略关于数学史的教学；另一方面是，在教学中，很多同学感觉你是在浪费时间，不如直接讲教学内容。我想，这是长期的应试教学带来的后果。

一些教师担心，学生的基础本来就差，加入数学文化内容反而会增加学生的学习负担，最后本末倒置，该掌握的反而没掌握。

T8：有些学生连最基本的知识都弄不清楚，学数学史也是无用的。

T9：对有些学生来说，数学文化无形中会不会又加重了学习负担？的确，有些女生本来学数学就很辛苦，要不要教给学生[数学文化]，我觉得是要看对象的。

此外，教师对数学文化的理解还存在许多误区。如，不少教师误认为数学文化就是数学史，或者数学文化就是数学趣题或者名人故事。

4 结论与启示

通过对教师在线讨论的整理和分析，我们可以得到如下结论：

（1）中学数学教师眼中的数学文化教育价值较为片面，主要局限于情感态度价值观方面，特别是在激发兴趣和爱国主义教育方面，而对于数学文化在认知方面的价值不甚了了。他们的认识多源于网络文献。

（2）中学数学教师自身的数学文化知识比较欠缺，他们所知道的有关例子十分单一，且绝大多数来自教材；他们因为所阅读的相关书籍很少而过于依赖网上资源；他们深感缺乏数学文化资料，期待实用的数学文化参考读本的出版。

（3）中学数学教师主要采用附加式来运用数学文化，因而部分教师认为数学文化会过

多占用教学时间、甚至增加学生学习负担。

（4）数学文化“高评价、低应用”的现状并未改变。升学压力大、教学进度快、教师自身文化素养低、数学文化资料严重缺乏、数学文化认识片面、学生基础薄弱、视野狭隘等原因造成了数学文化教育的巨大困难。

根据上述结论，我们获得如下启示。

（1）数学教学呼唤教育取向的数学文化研究。开发与中学教学内容相契合的数学文化案例，编著数学文化实用参考书，为中学数学教学提供有关文化素材，将是 HPM 研究的重要内容之一。

（2）中学数学教师数学文化在职培训势在必行。教师所反映的课上无时间、考试无要求、学生无基础等问题，都源于教师对于数学文化运用方式的无知。附加式地运用数学文化，为文化而文化，势必会加重课堂负担，挤占课堂时间，同时，也未能在数学文化与数学知识之间建立起内在的联系，难以促进学生对知识的理解，从而也就无法体现数学文化在认知上的价值和在应试上的优势。事实上，数学文化的运用除了附加式，还有复制式、顺应式和重构式等方式[3]，高层次的运用方式，并不以教学时间为代价，也不与考试成绩相冲突，数学文化在其中将起到润物细无声的教育作用。教师培训应采用案例教学的方式。

（3）高校数学文化研究者与教研员、一线教师的合作不可或缺。只有通过这种合作，学术形态的数学史材料才能真正转化为教学材料，而融入数学文化的数学教学设计才能付诸实施，实施的效果才能得到检验，从而，成功的 HPM 案例的开发才变得可期可待，HPM 研究也就能够越走越远。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准. 北京: 人民教育出版社, 2003

[2] 谭立新. 浅谈对数学文化的认识. 新课程（下）, 2007(9): 48-49

[3] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, 2012(2): 1-5

从倾听古人到倾听学生*

Abraham Arcavi, Masami Isoda

1 倾听学生

定义“倾听”学生：全神贯注地倾听学生所言（并观察他们之所为），尽量理解这些及其来源和需求。一些研究者将倾听学生的多种方式作为教学程序的组成部分。例如，Moschkovich（2004）详细研究了一名教师是如何通过以学生想法为前提的互动，从而促使自身能力得到提升。在数学教育实践中，倾听为实施建构主义方法服务，同时倾听也具有其他重要的智力和情感的作用。比如，对学生而言，教师的倾听的发展可能是师生对话中一种“关怀性质的，善于接纳的，感同深受的”组成部分。如果教师经常采取这种模式，学生会感受到自己的价值，也会感觉自己受到无比尊重。当然，倾听也会受益于倾听者本身，使其在倾听他人的同时，重新检查自己已有的知识，促进数学的再学习。

2 倾听的挑战

倾听是一种核心的教学能力，教师应该不断地学习、培养和发展此能力。然而，倾听并不是一件容易的事情，面临以下挑战。

2.1 包装过的知识（Packaged knowledge）

一旦我们理解了某种数学思想，或者学会了某个知识，我们倾向于忘记，甚至无意识地将我们曾经学习过程中的经验从脑海中移除。一个人完全掌握了一种活动，当初“怎样”和“为什么”这样的问题不需要再问，也不可能再问。这种现象阻碍了我们感同身受地去倾听那些正处于学习过程中的人。

---

* Abraham Arcavi & Masami Isoda. Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, 2007, 66(2): 111-129. 由林佳乐翻译、整理。

2.2“去自我中心”能力

弄清楚学生的想法并不容易，学生们使用自己的语言和自己的框架，这些并不一定顺应教师的思维方式。可以听懂学生所说的，这是一种远远胜过于教师的性格气质、敏锐的听觉以及知识的能力，尽管这种能力是建立在以上种种基础之上的。我们借用皮亚杰的“离心”的思想，本文中指的是采纳其他人观点的能力，尽可能放弃自己主观的想法，对于我们所听到的理解进行循环往复地测验，尽可能挖掘它，应用它一段时间。这样一种“离心”涉及到为了学习和练习所付出的巨大的智力上的努力。

2.3 倾听的不同方式

Confrey(1991)将带有建构主义数学观点的发现学习的不同方式进行比较，其延伸到教学时，可能会导致在倾听方式上的不同——“可评估的”以及与之相反的“专心倾听”。前者是以预想正确答案为背景的倾听，暗含一种对学生目前的状态和标准答案之间的距离的虚拟的衡量。这种倾听方式容易忽视学生答案背后的思维，而后者则相反，不带有任何主观评价，只是专心听学生所说，观察学生所做，从而理解学生的思维活动。

2.4 不可避免的偏见

一些研究者描述了教师“倾听不足”或者“过分倾听”的现象。教师似乎总是通过自己个人的主观想法或者依据自己的经验来理解别人，然而，想象教师可以完全理解学生的所言所行，也是不切实际的。

2.5 耗费时间

由于倾听学生是一种维持对话、提出问题、探索发现等不同方式的技能的运用，这是耗费时间的，而且结果往往可能不是立竿见影的。能够理解其他人的观点往往发生在我们重新审视与学生的长期对话之后。

3 研究问题

尽管完全理解学生的想法是不可能的，但在“充耳不闻”和完全倾听之间我们仍是需要做一些事情。基于以上，我们确定主要的研究问题为：

（1）为了发展令人满意的倾听能力，应该精心安排什么样的经验？

（2）为发展倾听学生想法、来源以及需求的能力，在专业学习与发展方面，应该设计什么样的课程和教学方法？

（3）这样一种课程在教师课程中如何起作用，在多大程度上可以获得学会倾听这种能力？

4 基本原则

为了发展和培养放弃自我，理解他人观点和想法的能力，我们在此提出了一种方法。即基于对数学史的原始材料的理解而设计出一种特殊的方式。有几个基本假设：

（a）为了彻底理解历史（有关数学方面）的资料，我们需要一种与倾听学生所必需的类似的放弃自我想法的能力。

（b）这样一种放弃自我想法的能力可以通过学习获得。

（c）支持这种学习的学习环境可以被设计。

我们认为，经历理解数学史材料的过程能够为理解学生而做完善的准备。理由如下：

（1）许多学生的答案如果与预期的答案不同，很容易被忽视。当我们面对历史素材的时候，我们知道由于文化背景的不同，所以不能轻易以对错来判断它。因此，经常做这样的训练，对于养成不忽视任何解法，并寻求具有特质风格的数学解法的这种习惯具有积极作用。

（2）当面对原始的历史素材时，我们必须开发工具而使其具有意义。主要的工具包括，剖析材料，围绕材料提出讨论问题，用自己的语言和现代符号解释材料，总结已经理解的部分，确定并表达仍需要澄清的部分，组合比较零散部分的。从某种意义上来说，这暗含一种“诠释学”的练习。我们提出这样一种适合诠释数学史素材的工具和程序，教师可以利用数学史素材，使其能够很好地为理解学生的想法和观点服务。

5 研讨班

研习班是日本驻波大学职前教师为了获得数学教育硕士学位而学习的课程之一。研习班分两段时间段进行，共 17 人参加，其中 15 人是已在数学、建筑或工程专业取得本科学位的学生，或毕业于师范院校数学系的学生，另外两人是有经验的在职中学教师。第一阶段持续了 3 小时，第二阶段持续了 4 小时 10 分钟。整个研习班全程录像，并有两次问卷调查。研习班分为两个不同的方面：历史方面和教学方面。

历史方面：

- 引言

首先提出一个问题："在你看来，从运用数学史进行数学教学的活动中，我们能够学习到什么？"讨论之后，研习班的主持人解释此次研习班的目的，主要是希望学习参与者的经验和观点。

- 第一阶段

我们围绕改编自之前的著作（Arcavi 1987; Arcavi and Bruckheimer 2000）中的"埃及数学"呈现了一个活动。

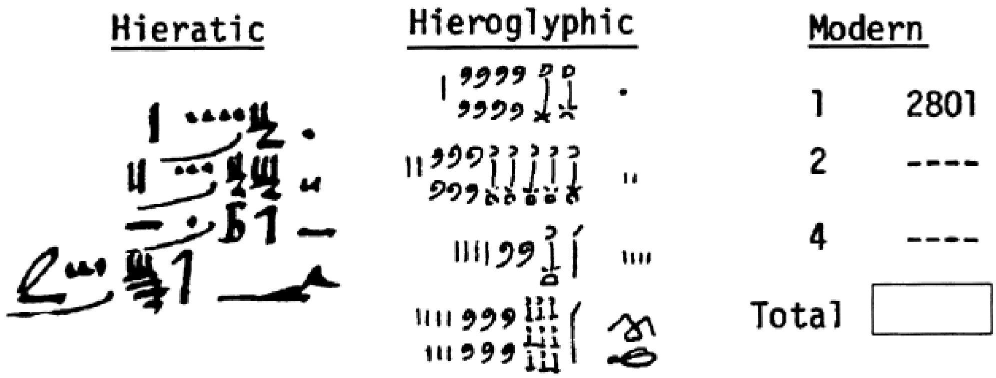


图 1 问题 74 中的计算

要求读者读完每一阶段后暂停，在读评注之前回答下面的问题。

（1）基于第一个已经被翻译成现代符号，说出每一个象形文字符号代表什么意思。

（2）填写空白处。

（3）解释一下，摘录中进行了什么样的运算。

评注：

我们可以观察两列数字，一个小木棍代表数字 1,1-9 是小木棍依次累加。代表 100，莲花状的代表 1000，"弯曲的手指"的含义是 10000，这就可以看出空白处应为：

1	2801
2	5602
4	11204
Total	19607

这个解释提供一种对数系的特征的观察：写法是从右到左，十进位的，数字是符号并列产生的，但是一种符号重复累加，仍代表一个数字，因此此系统中不需要有 0 的符号。此阶段，

我们可以大致了解这个步骤，“total”代表一列数字的加和。此时进行的运算为，$1\times2801+2\times2801+4\times2801$，或者$7\times2801$。由此理解此材料有两个清晰的水平：由象形文字到现代符号的转换使得我们意识到进行了加法，然后又意识到乘法运算的进行，确切说基于乘法分配律的运算。

- 第二阶段

下面呈现了另一个运算过程。

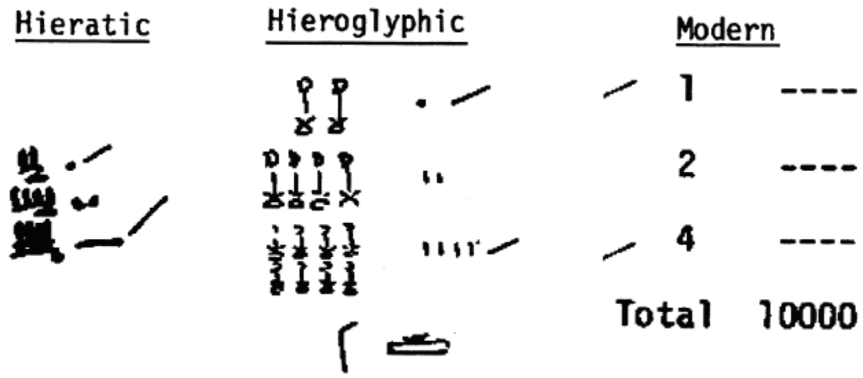


图 2 问题 52 中的计算

（1）基于先前的经验，针对以上新材料你能提出什么问题？

暂停，收集问题。

（2）基于之前由象形文字到现代符号的翻译，说说每一个符号的含义。

（3）填写空白处。

（4）解释一下，在此案例中进行了什么运算，并解释斜杠的含义。

（5）用古代埃及的方法计算13×27。

（6）是否任意一组数字的乘法都可以用此方法进行计算，解释原因。

评注：

此例子中，得出5×2000，并不需要所有加倍的量，但为了得到需要的加数（$1\times2000+4\times2000$），这些是中间的必备过程。方法的一般性质变得很清晰：产生正确的加数，选择正确的加数。在开始回答引导性问题之前，要求参与者自己提出问题，使其不借助外界的帮助而练习理解材料的能力。计算13×27的目的是巩固理解，循环练习这种方法，将“他人的观点”应用到新的例子中。在面对理解学生答案的情况时，我们需要类似的工具：好的问题，保留原始核心思想的清晰的解释，对隐含的关键知识的揭示，方法的一般性

的检验，与学生现有的知识的结合，并要考虑如何在未来的数学活动中将其整合。

- 第三阶段

（1）提出问题，使得答案能帮助你理解以下线性方程的解法。

暂停，收集问题并讨论。

（2）用现代符号表示以下材料中第一句话的方程并求解。

3-9 的问题目的在于帮助理解此解法。

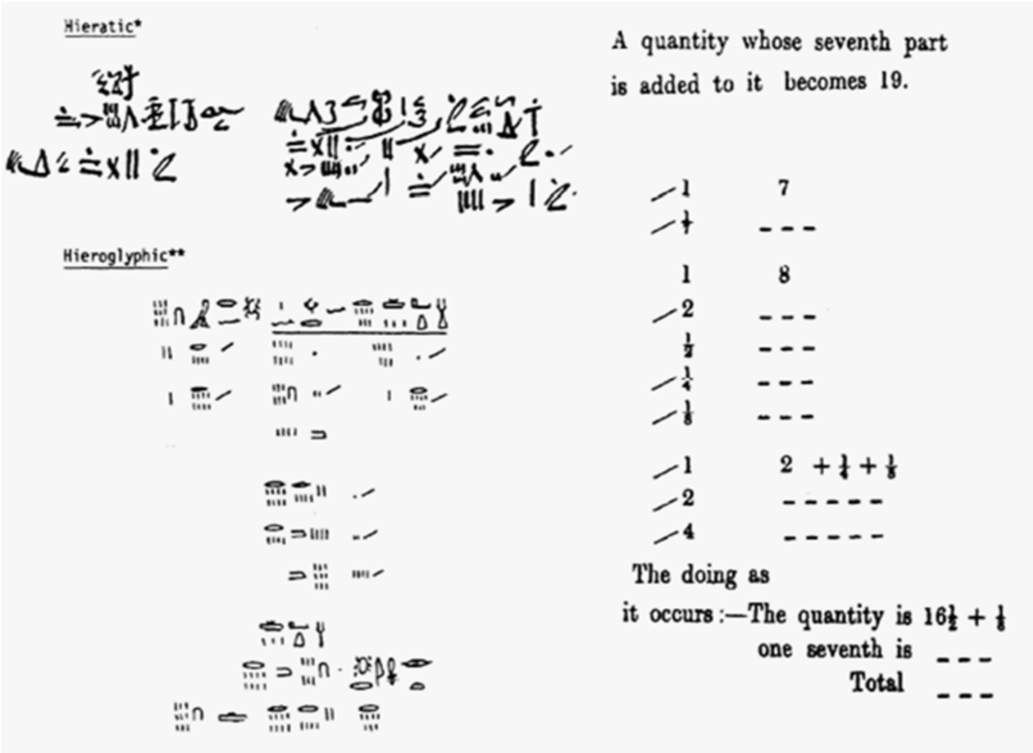


图 3 问题 24 的解

（3）观察第一步：

/ 1   7
/ $^1/_7$ – – –

很明显，埃及人解决此问题是通过试一个数字，然后观察得出什么结果。

（a）他们尝试哪一个数字？

（b）填写空白处。

（c）得出什么结果？

（d）他们为什么试这个数字？

（4）观察第二步：

1	8
/2	— — —
$^1/_2$	— — —
/$^1/_4$	— — —
/$^1/_8$	— — —

（a）　填写空白处。

（b）进行了什么运算，结果是什么？

（5）观察第三步：

/1	2 + 1/4 + 1/8
/2	— — —
/4	— — —

（a）填写空白处。

（b）进行了什么运算，结果是什么？

（6）观察最后一步：

The doing as
it occurs :—The quantity is $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
one seventh is — — —
Total — — —

图 4　最后一步

填写空白处并解释这一步得出什么。

（7）重新观察、总结此方法，然后解释此方法。

（8）考虑如果开始试的数字是 14 而不是 7，用现代符号写下纸草书上的解法。

（9）纸草书上另一个问题是："一个数字的一半加上其本身是 16."运用古代埃及的方法，用现代符号解决此问题。

评注：

此种方法解决线性方程问题与我们今天所使用和教授的方法截然不同。第一个问题我们要求参与者用现代方法解决此问题，目的是将今天简单的解法与古代埃及冗长、复杂的方法进行对比，从而使参与者放弃将现代的解法作为解释埃及的解法的基础。以上每一步都描述做了什么，问题 7 最后将所有的细节整合并产生完整的解释。开始我们用数字 7 来试，结果产生了 8，那么就要考虑结果 8 和 19 之间的比例，即 8 的多少倍是 19？那么 7 的相同倍数就是所求数字。埃及数学的根本思想就是比例问题。之后我们要求读者用此方法试另一个数

字，以此理解巩固古代埃及的解法过程。下面一个阶段，这里没有具体描述，包括理解从法国数学家佩勒蒂埃（J.Peletier）的《算术》（1549）中摘录的内容，就“试位法”进行了讨论和应用。

第一段时间结束。

- 第二段时间开始

提醒古代埃及解决线性方程问题的主要步骤。

- 第四阶段

操作佩勒蒂埃的材料。

- 问卷调查 1

要求参与者写出此次研讨班的哪些方面的经验对于他们成为教师是有帮助的。

教学方面：

- 第五阶段

借用 Even and Wallach(2004)呈现一个教学案例。Ahuva，是一个五年级的教师，想要评价学生是否学会如何求解“已知部分求整体”的问题，她给学生们一道练习题目：“一个数字的 $\frac{3}{5}$ 是 12，这个数字是多少？并解释你的解法。”其中一个学生 Ron 写道：

“$12 * 2 = 24, 24 : 6 = 4, 24 - 4 = 20.$”

（a）Ron 的解法正确吗？

（b）如果你是 Ron 的老师，你如何评价 Ron 的知识？

此任务的目的是让他们进行解释练习，将学生的答案作为背景材料。

- 第六阶段

提供一个日本五年级数学课堂片段的录像。课堂中学生在进行与 $5.4 : 3 = 1.8$ 相关的除法的练习。某些答案是在预料之中的，某些是预料之外并复杂的，还有一些反应了一些有趣的错误（如 $15.12 : 9$ ）。此任务使他们发现在每个答案背后的思维过程。

- 讨论

分享对研讨班的印象，以及历史和教学方面之间的联系。

- 问卷调查 2

再次请参与者写出参加此次研讨班的哪些方面的经验对于他们成为教师是有帮助的。

- 总结和闭幕

研讨班的主持人明确地分享了此次与学会倾听相关的研讨班的意图和目的。

6 研讨班的收获

研讨班既是参与者的一次学习的经历，也是我们作者本身的一次学习经历。以下的发现是基于来自两次问卷调查的数据，记录的对话、讨论和解法，以及我们客观的观察。

（1）此方法可行吗？

研讨班上的参与者很活跃，充满热情地参与完成任务。文章的第一位作者，并不懂日语，通过观察发现，有一些时刻，教室中留露出一种充满悬疑和焦虑的氛围，尤其是在解决古代埃及线性方程的解法和理解 Ron 给出的答案的时候。参与者共同解决问题，开始时大家轮流到黑板前说说自己对这个问题的解释，但都是比较片面而不完整的答案，直到一个人将所有的片段整合到一起，产生一个完整的让在场所有参与者都满意的答案。因此，我们强调这些参与者合作工作的本质，他们对于片面解释的不满意，他们对完整答案的不懈追求，以及后来意识到并得出满意的答案。此活动展示出其意义和可参与性。

（2）什么是“教学实践”？

按照之前提出的问题：从利用数学史进行数学教学中，我们能学到什么？有人可能会认为，回答此问题，要求具有历史和教学两方面的知识和经验。然而，事实并非如此。因为在缺乏经验的情况下，答案可能反映出信念和期望，这可以成为研究中可能出现的态度改变的背景、依据。从答案中看，教学实践的隐含意义多数是指学科知识，是为了回答学生的提问，或丰富课堂教学所具备的工具，这是教师必备的知识。

在第一次问卷中，多数回答都是与之前的任务相关，第二次问卷的回答则反映出参与者将解释历史材料和理解学生观点联系起来。此次研讨班也扩充了参与者的数学史知识，使这些内容知识为教学实践所用，从而最终达到理解他人思维的目的。

（3）学会提问

理解他人观点方面，提出探索性的问题是很有必要的。（如研讨班前三个阶段的引导性问题）。提问类型的进化—从为解释而设的纯引导性的问题到理解根本思想指导的工具，可能成为发展“仔细倾听”的特征。

（4）评估的立场

评估并不总是具有负面作用的，我们认为只是时间的问题。仔细倾听的教育并不需要完全丢弃评估，而需要我们将其推迟到后面阶段，即在我们完全理解学生的想法、立场之后的阶段。在此次研讨班上，许多参与者都表达了对数学的丰富性的惊讶和欣赏，这本身也是评估的立场，这是发生在他们完全理解所看所听的材料之后。因此，面临的挑战是，如何在二

者（丢弃对学生想法的即刻评价和从评估学生中受益）之间找到平衡。

（5）从解释材料到倾听学生

此次研讨班的经历告诉我们，在理解材料和理解学生之间建立桥梁是有希望的。但同时面临一些挑战。首先是找到合适的历史素材（包括呈现概念疑惑，各种想法之间可能的矛盾等），从而加强这种桥梁。其次是发现适合解释和讨论的学生的答案和反馈。最后，根本的挑战在于，仔细倾听的活动不应该停留在理论和实验层面，而是应该发生在生动的课堂中。

（6）在职教师情况如何？

研讨班的经历是否能够使在职教师受益更多呢？为了探索这个问题，我们开展了第二次相同流程的研讨班，参与者是日本上越教育大学的在职教师。研讨班上，历史方面的活动的参与气氛与第一次研讨班相似，但教学方面有一些差异，问题的分析和讨论更加迅速而有效。通过他们自己的陈述，发现历史部分是更加有意义和有指导性的，他们可以很自然地建立两个部分之间的联系。

（7）倾听的工具

在理解 Ron 的解法时，职前和在职教师都使用类似的图式模型（如图 5）。

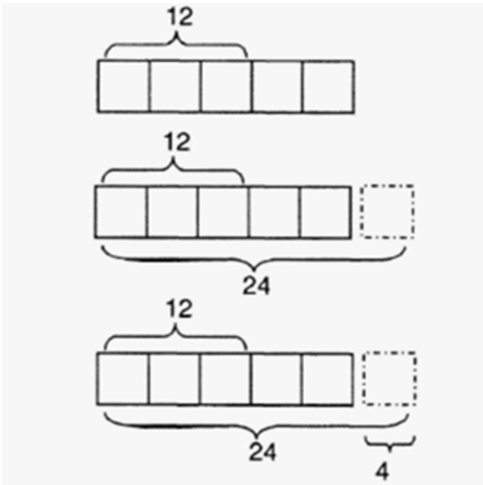


图 5　在职教师所使用的积木

参与者只是参与理解 Ron 的推理过程，而不是基于预期标准的解法来评价他的答案。虽然此图形可以反映出学生的思维过程，但参与者并不知道是否 Ron 是这样想的，然而参与者使用这种表征是为了使 Ron 的解法有意义。

一个审查过第二次研讨班的数学家称，为了使埃及人的方法有意义，想出形式为 $y = ax$ 的一次方程，虽然线性方程确实帮助他理解了古代埃及的方法，但很明显，这是对原始材料强加了现代观点，而不是真正理解材料所说的意义。

以上是两种不同类型的工具，并不是因为前者是图式形式，后者是概念形式，图式代表思维过程，可能是 Ron 的答案的一部分，然而线性方程并没有在埃及数学中出现。由此，赋予他人的观点有意义可能依赖于我们所使用的工具，工具的类型可能是各种各样的，从可归为学生可以想到的到学生想不到的，无论哪一种对解释者而言都是有益的，然而也有一些工具可能被错误归为学生的答案。

（8）总结

用数学史材料设计的目的是使学会理解他人想法的活动具有可参与性，有现实意义。通过开展一个提高仔细倾听的活动，介绍了它的原理、实施、结果，我们相信已经回答了之前的研究问题。然而，我们强调为了学会倾听，我们需要更多更好地利用合适的课程材料。倾听是一个复杂的程序，它与有关知识、学生、学习和教师的作用这些复杂因素的汇总紧密相连。因此，我们提倡这种课程应该嵌入到教师发展活动中，推动维持仔细倾听的信念的交互发展。本文的工作可能是对这样一种努力方向的一点贡献。

参考文献

[1] Aharoni, R. (2003). What I learnt in primary school. In *Invited talk at the 55th British Mathematics Colloquium* (BCM). University of Birmingham, Great Britain, available at *http://www.mam.technion.ac. il/~ra/education. html*

[2] Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher*, 55(4): 13-16.

[3] Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in Education*, 7(1): 44-64.

[4] Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 8(1):40-48.

[5] Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93(4): 373-397.

[6] Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners - Toward a practice-based theory of professional education. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession. Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

[7] Confrey, J. (1991). Learning to listen: A student's understanding of powers of ten. In E. von

Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 111-138). Dordrecht: Kluwer.

[8] Cooney, T., & Krainer, K. (1996). Inservice mathematics teacher education: The importance of listening. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1155-1185). Dordrecht: Kluwer.

[9] Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(2): 155-181.

[10] Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3): 355-376.

[11] Even, R., & Wallach, T. (2004). Between student observation and student assessment: A critical reflection. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 4(4): 483-495.

[12] Freudenthal, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

[13] Ginsburg, H., & Opper, S. (1979). *Piagets theory of intellectual development* (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

[14] Henderson, D. W. (1996). I learn mathematics from my students - Multiculturalism in action. *For the Learning of Mathematics*, 16(2): 46-52.

[15] Isoda, M. (2002). Hermeneutics for humanizing mathematics education (in Japanese). *Tsukuba Journal of Educational Studies in Mathematics*, 21: 1-10.

[16] Isoda, M, & Kishimoto, T. (2005). A problem solving lesson approach for understanding mathematics in elementary school (in Japanese). Tokyo: Meijitosyo.

[17] Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics*. Singapore: World Scientific.

[18] Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding - Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education*, vol. 1 (pp. 139-156). Lisbon, Portugal.

[19] Jahnke, H. N. (1996). Set and measure as an example of complementarity. In H. N. Jahnke, N.

Knoche & M. Otte (Eds.), *History of mathematics and education: Ideas and experiences* (pp. 173-193). Gottingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

[20] Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

[21] Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools: Philadelphia. Springer

[22] Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3): 49-80.

[23] Nathan, M. J., & Petrosino, A. (2003). Expert blind spot among preservice teachers. *American Educational Research Journal*, 40(4): 905-928.

[24] Peet, T. E. (1970). *The Rhind mathematical papyrus*. University of Liverpool Press.

[25] Sfard, A. (1994). What history of mathematics has to offer to psychology of mathematical thinking. In J. P. da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education*, vol. 1 (pp. 129-132). Lisbon, Portugal.

[26] Smith, D. E. (1958). *History of mathematics*, vol. II. New York: Dover.

[27] Smith, T. J. (2003). Pedagogy as conversation: A metaphor for learning together. In *Invited keynote address. Mathematics Association of Victoria Annual Conference*, Monash University: Melbourne, available at *http://www.mav.vic.edu.au/pd/confs/2003/Papers/Smith_paper.pdf*

[28] Wallach, T., & Even, R. (2002). Teacher hearing students. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th international conference for the psychology of mathematics education*, vol. 4 (pp. 337-344). Norwich, England.

缅怀数学大师 品味数学文化

——纪念传奇数学家埃尔德什诞辰100周年

彭 刚

（华东师范大学数学系 200241）

1 前言

保罗•埃尔德什(Paul Erdös，1913-1996)是20世纪最具传奇色彩的数学家之一(图1[1])。他在60多年的数学研究生涯中，不停地奔波于各大洲的大学数学系和研究中心之间，与大量合作者共同发表了1500多篇学术论文[2]；他的思维能力热情无与伦比，直到古稀之年，他每天还工作19小时；他抛弃一切物质享受，甚至居无定所，追求数学真理就是他生命的一切。

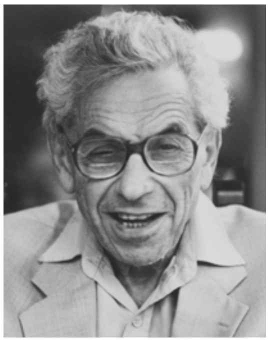


图1 保罗•埃尔德什

埃尔德什堪称数学界的莫扎特[3]，他也是历史上最多产的数学家之一。今年是埃尔德什诞辰100周年，让我们深切缅怀这位传奇数学家；同时，也让我们细细去品味他所蕴含其中的、以及因他而创造的数学文化。

2 数学天才：从神童到伯乐

数学像音乐一样，存在于一个形、关系和美的独立的世界中，因而历史上数学神童和音乐神童层出不穷；年幼的儿童，即使还不能穿越马路，也可以探索无穷的数学空间[4]，埃尔德什就是这样的数学神童。

埃尔德什于1913年出生于匈牙利布达佩斯，三岁时就可以心算三位数的乘法，四岁时便独立“发现了负数”——当时他告诉母亲：如果你用100减去250，得到的结果就是比0还小150。此外，为了好玩，他还计算“乘火车去太阳需要多长时间”之类的问题，或者问母亲的朋友们多大岁数，然后立即心算出他们已经活了多少秒[4]。

埃尔德什于 1930 年进入布达佩斯大学，不久之后，年仅 18 岁的埃尔德什就作出了自己的第一个重要的数学贡献：给出了切比雪夫定理一个简单的证明[5]。

切比雪夫定理源于贝特朗假设（Bertrand's postulate）①。1845 年法国数学家约瑟夫•贝特朗（Joseph Bertrand，1822-1900）提出了一个富有启发性的猜想：对于 $n>1$，至少存在一个素数 p 满足 $n<p<2n$。1850 年俄国数学家切比雪夫（Pafnuty Chebyshev，1821-1894）证明了这个猜想，但其证明冗长难懂。后来，印度数学国宝拉马努金（Srinivasa Ramanujan，1887-1920）给出了切比雪夫定理一个简化的证明；埃尔德什给出的证明虽然与拉玛努扬相似，但包含了一些新的思想，因此他很快就以一种全新的方式推广了切比雪夫定理[6]。拉马努金和埃尔德什的这种工作也是数学的一种进步，因为某些繁难的证明恰恰反映了我们对问题的本质可能还缺乏深入的了解，而证明的简化往往能引出新的见解，有助于建立更精致和更全面的数学理论[4]。

1934 年，年仅 21 岁的埃尔德什获得了博士学位，从而开启了他传奇的数学研究之旅。

作为一位数学天才和杰出的数学家，埃尔德什除了以追求数学真理为自己的奋斗目标外，还以在全世界发掘和培养数学天才为自己的使命。正如英国数学家理查德•盖伊（Richard K. Guy，1916-）所言："埃尔德什在数学研究上做出了巨大贡献，但我认为他更大的贡献在于他造就了大量的数学天才。"埃尔德什是数学天才的最佳伯乐，据不完全统计，由埃尔德什发掘和培养的数学天才就超过百位[7]，其中著名华裔数学家陶哲轩（Terence Tao，1975-）小时候还向埃尔德什请教过。

图 2 埃尔德什正在审阅陶哲轩的论文（1985）

1985 年，埃尔德什到澳大利亚讲学，在学校的安排下，8 岁的陶哲轩去拜见埃尔德什。埃尔德什认真审阅陶哲轩写的论文（图 2），并鼓励说，"你是很棒的孩子。继续努力!"[7]。当陶哲轩 16 岁获得澳大利亚福林德斯大学硕士学位时，埃尔德什就推荐他到美国普林斯顿大学攻读博士学位。后来，陶哲轩 21 岁获得博士学位，24 岁被洛杉矶加州大学聘为正教授，31 岁获得菲尔兹奖。2010 年，英国《卫报》（The Guardian）评选出"十大数学天才"，认为他们的革命性发现改变了我们的世界；颇为有趣的

① 在数学史上，与这个猜想同样著名的则是贝特朗于 1899 年提出的贝特朗悖论（Bertrand's paradox）：在一个给定的圆内随机选择弦，计算弦长超过圆内接正三角形边长的概率；根据"随机选择"的不同意义，可以得到 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 三种不同的答案.贝特朗悖论的提出，促使数学家们对概率论的逻辑基础作出更加严格的考察。

是，埃尔德什和陶哲轩都榜上有名[8]。

3 数学发现：神奇的“数学天书”

对于很多数学家而言，数学代表着最完全的秩序和最淳朴的美。英国数论专家哈代（G. H. Hardy，1877-1947）认为，“数学家的模式，就像画家或诗人一样，一定是充满美感的；……美感是首要的试金石，丑陋的数学在世界上是很难持久的”[9]。同样，在不断追求数学真理的过程中，埃尔德什也总是欣赏那些简洁、优美的证明。

埃尔德什经常会假设上帝手中有一本无限的“数学天书”（THE BOOK），上面记载着所有的定理和它们的最佳的证明（当然他并不真的相信有这样的书存在），而埃尔德什对数学证明最高的赞誉就是“这就是天书上的”，比如我们熟知的欧几里得《几何原本》中关于“素数有无穷多个”的证明。在埃尔德什十岁时，父亲就把这个优美的证明教给了他，从此埃尔德什便对素数情有独钟，终身为之着迷[4]。

“数学天书”还反映了埃尔德什的数学哲学观——“柏拉图主义”（Platonism），柏拉图主义者认为数学真理是本来就存在的，而我们只是重新发现了它们；历史上持有类似观点的还有奥地利著名逻辑学家哥德尔（Kurt Gödel，1906-1978）、法国著名数学家托姆（René Thom，1923-2002）等。那么数学到底是人类发明的（即人类心智的创造）还只是人类发现的（即独立于我们的存在物）呢？对于这个问题，历史上数学家之间曾争论不休，相信这种争论也会一直持续下去。

1996 年，埃尔德什以 83 岁高龄去世，《纽约时报》头版发表了消息[10]，人们也以各种不同的方式悼念这位传奇数学家，其中就包括编辑了埃尔德什经常谈论到的那本“数学天书”（图 3）。该书英文版于 1998 年出版，并陆续被翻译成包括中文在内的十余种不同的文字，收录了数学多个领域中几十个著名数学问题的极富创造性和独具匠心的证明，包括“素数有无穷多个”的六种证明[①]、圆周率 π 是无理数的证明、欧拉的经典之作

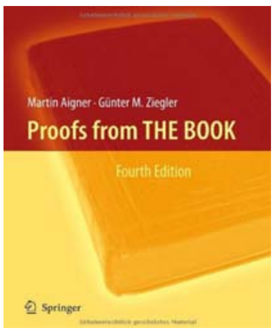


图 3 “数学天书”中的证明

[①] 其中第六种证明由埃尔德什本人给出，不仅证明了素数有无穷多个，还证明了无穷级数 $\sum_{p\text{是素数}} \frac{1}{p}$ 是发散的。

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 的三种积分证明等等，埃尔德什关于贝特朗假设的证明也收录于其中[11]。

4 数学合作：迷人的埃尔德什数

已故数学大师陈省身曾说过，20 世纪最杰出的数学成就有两个，一个是阿蒂亚-辛格指标定理，另一个就是费马大定理[12]。英国著名数学家怀尔斯（Andrew Wiles，1953－）面壁七年、最终解决了困惑世间智者 350 多年的谜的故事，已成为数学史上的一段佳话。

与怀尔斯这种孤军作战的方式不同，埃尔德什则十分重视数学的合作。实际上，数学研究通常是一种合作的行为，世界各地的数学研究所和大学数学系例行的下午茶会就是为了便于交流而开设的[13]。

从 50 年代后期开始，旅行般的生活便陪伴了埃尔德什的一生，他经常坐火车或者飞机到另一个城市，跨进一位数学家的大门，宣布“我的大脑敞开了（My brain is open）”，于是就在同事或同行家中进行合作研究，接着再访问另一个城市的同事，实践着自己的座右铭：“另一个屋檐，另一个证明（Another roof，another proof）”。

为了说明埃尔德什与其合作者之间的关系，数学界流传着一个概念：埃尔德什数（简称“埃数”）。如果与埃尔德什本人合作过，“埃数”就为 1——根据 Jerry Grossman 编制的“埃数”网站[14]，目前总共有 511 位“埃数”为 1 的埃尔德什合作者；如果与和埃尔德什合作写过论文的人合作过，“埃数”就为 2，以此类推；从来没有写过一篇数学论文的人的“埃数”则记为∞。我国著名数论专家柯召院士与埃尔德什有着很深厚的友谊[3]，他们曾多次合作过论文，因此柯召院士的“埃数”为 1；此外，华裔数学大师、著名几何学家陈省身先生的“埃数”为 2，著名科学家爱因斯坦的“埃数”也为 2。

1984 年 5 月，埃尔德什与陈省身从以色列总统手中接过 1983 年至 1984 年度的沃尔夫奖，而埃尔德什的获奖原因除了他在数论和组合数学方面的贡献外，还由于他“对世界范围内其他数学家的激励作用”（for personally stimulating mathematicians the world over）[15]。

5 无尽的素数 无尽的探索

整数是人类最早研究的数学对象，德国著名数学家克罗内克（Kronecker Leopold，1823-1891）的名言“上帝创造了整数，其余一切都是人造的”广为流传，著名数学家闵可夫斯基（Hermann Minkowski，1864-1909）甚至认为“整数是全部数学的源泉”[16]。

素数类似于原子，它是构成所有整数的基石。有些与素数有关的命题看起来很简单，但其实涉及到很高深的数学知识，比如哥德巴赫猜想等等。埃尔德什在数论领域中最大的成就是他和同事赛尔伯格（Atle Selberg，1917–2007）于 1949 年对“素数定理”给出的一个初等证明，由于他们的杰出贡献，埃尔德什获得了 1951 年美国的 F.N.Cole 数论奖，赛尔伯格则获得了 1950 年的菲尔兹奖。

人类对素数的探索不断前进。1966 年我国著名数学家陈景润（1933-1996）发表了《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》（简称“1+2”）①，成为哥德巴赫猜想研究上的里程碑。

2004 年，本·格林（Ben Green）和陶哲轩提交了题为 The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions 的论文预印稿，宣称证明了格林-陶定理，即“存在任意长的素数等差数列”，该论文于 2005 年被国际最顶级的杂志《数学年刊》（Annals of mathematics）接受并于 2008 年发表。他们的证明是一项伟大的成就，揭示了看似混乱无序的素数数列中存在着一种惊人的规律。

2013 年，华人数学家张益唐在“孪生素数猜想”上作出重大突破。“孪生素数”是指两个相差为 2 的素数，例如 3 和 5，17 和 19 等；“孪生素数猜想”指的是“存在无穷多对孪生素数”，著名数学家希尔伯特（David Hilbert，1862-1943）在 1900 年国际数学家大会上提出的 23 个数学问题中便涉及到这个猜想。张益唐提交给《数学年刊》题为“素数间的有界距离”（Bounded gaps between primes）的论文不到 2 个月就被接收，并得到了审稿人的高度评价：“这项研究是第一流的，作者成功证明了一个关于素数分布的里程碑式的定理。”[17]

虽然我们对数的认识越来越深刻，但按照埃尔德什的观点，人类对数要真正有所了解，还得等上数百万年的时间，但即使是那时的了解也还不是完美的，因为数本身是无限的，数学领域也是无限的。[6]

无尽的素数，无穷的数学，等待着人类无尽的探索。

参考文献

[1] JOC/EFR. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Erdos.html

[2] Oakland University. http://www.oakland.edu/enp/pubinfo/

[3] 李心灿. 数学界的莫扎特：爱尔特希.科学，1998，50(2):46-49

① 1966 年发表的是证明提要，详细证明于 1973 年发表。

[4] Bruce Schechter. My brain is open: the mathematical journeys of Paul Erdös. Simon & Schuster，2000（中译本：我的大脑敞开了——数学怪才爱多士，王元，李文林等译.上海：上海译文出版社，2002）

[5]Paul Erdös. Child Prodigies. Mathematics Competitions，1995，8(1): 7-16

[6] Paul Hoffman. The man who loved only numbers: the story of Paul Erdös and the search for mathematical truth，Hyperion，1999（中译本：数字情种：埃尔德什传，米绪军等译.上海：上海科技教育出版社，2000）

[7] 孙明. 埃尔德什：数学天才的最佳伯乐. http://tech.gmw.cn/2013-05/19/content_7680517.htm

[8] Alex Bellos.The 10 best mathematicians. http://www.guardian.co.uk/culture/2010/apr/11/the-10-best-mathematicians

[9] G. H. Hardy. A Mathematician's Apology. London: Cambridge university press，1992

[10] Kolata, Gina (1996-09-24). "Paul Erdos, 83, a Wayfarer In Math's Vanguard, Is Dead". New York Times. pp. A1 and B8

[11] Martin Aigner，Günter M.Ziegler(ed.). Proofs from THE BOOK（4editon）. Berlin: Springer，2010（中译本：数学天书中的证明，冯荣权等译.北京：高等教育出版社，2011）

[12] 胡作玄.费马大定理证明了什么.创新科技，2004，(4)：36

[13] Simon Singh. Fermat’s Last Theorem: The Story Of A Riddle That Confounded The World’s Greatest Minds For 358 Years. Fourth Estate，1997（中译本：费马大定理——一个困惑了世间智者 358 年的谜，薛密译.上海：上海译文出版社，1998）

[14] Jerry Grossman. The Erdös Number Project. http://www.oakland.edu/enp/

[15] http://www.wolffund.org.il/index.php?dir=site&page=winners&cs=231

[16] [美]莫里兹编著，朱剑英编译.数学的本性.大连：大连理工大学出版社，2008

[17] Erica Klarreich. “Unknown Mathematician Proves Elusive Property of Prime Numbers”. http://www.wired.com/wiredscience/2013/05/twin-primes/