上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2016 年第 5 卷第 4 期

约瑟夫·热尔冈

（Joseph Gergonne, 1771～1859）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物是 19 世纪法国数学家约瑟夫·热尔冈（Joseph Gergonne, 1771～1859）。

第 13 届国际数学教育大会 HPM 卫星会议（HPM-2016）于 2016 年 7 月在法国南部城市蒙彼利埃举行。这届会议的主题之一是纪念热尔冈。

热尔冈的父亲是一名建筑师，也是一名画家。热尔冈十二岁时，父亲去世。热尔冈在教会学校南希学院（Collège de Nancy）接受教育。毕业后做了一段时间的私人教师，但不久，与同时期的其他法国人一样，卷入了法国大革命的风潮。

1791 年，热尔冈成了国民自卫军中的一名上尉。1792 年 4 月，法国向普、奥发动战争，但法国军队的进攻很快受阻，普、奥联军旋即入侵法兰西。议会召集了 10 万志愿兵，热尔冈加入了驻守巴黎的法国军队。1792 年 9 月 20 日，热尔冈在克勒曼（F. C. Kellermann, 1735～1820）麾下，参加了著名的瓦尔米战役。最终，法国军队击败了普奥联军。

法国大捷之后，热尔冈来到巴黎，担任其叔父的秘书。奥、普不甘于失败，于 1793 年与西班牙、英国结盟。法国军队节节败退。热尔冈回到军队，并担任总参谋部的秘书。

1794 年，热尔冈在沙隆炮兵学校学习一月后，被任命为中尉。1793 年，西班牙向法国宣战。1794 年，法国军队攻打西班牙，攻陷菲格拉斯镇。热尔冈在军中。

1795 年，普鲁士与法国签署巴塞尔协定，退出反法联盟。热尔冈所在团被派往法国南部的尼姆。在那里，恰逢中央理工学院刚刚创建，热尔冈被任命为学院的数学教授。自此，热尔冈结束了戎马生涯，在尼姆定居下来。他成了家，并开始专注于数学研究。

1810 年，热尔冈创办数学期刊《纯粹与应用数学年刊》（*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*），人们通常称之为《热尔冈年刊》。该年刊共出了 21 卷，前后持续 21 年。热尔冈本人在年刊上发表了约 200 篇论文。很多著名数学家，如庞斯列（J. -V. Poncelet, 1788～1867）、塞尔瓦（F. J. Servois, 1768～1847）、波比里埃（É. Bobillier, 1798～1840）、斯坦纳（J. Steiner, 1796～1863）、普吕克（J. Plücker, 1801～1868）、沙勒（M. Chasles, 1793～1880）、布利安双（C. J. Brianchon, 1783～1864）、杜宾（C. Dupin, 1784～1873）、拉梅（G. Lamé, 1795～1870）、伽罗瓦（É. Galois, 1811～1832）等，都在该刊上发表过论文。

1813 年，热尔冈撰写了“数学上的综合法与分析法”一文，获得波尔多科学院的论文奖。尽管热尔冈是一位几何学家，他发表的论文主要也是几何方面的，但他却提出，代数比几何更重要。他预言，有朝一日，数学家将会用“半机械方法”（quasi-mechanical methods）

来发现新结果。

1816 年，热尔冈被任命为蒙彼利埃大学的天文学教授。1830 年，七月革命的浪潮席卷法国，蒙彼利埃大学的课堂也受到了冲击。一天，叛乱学生在热尔冈的课堂上吹哨捣乱，他随机应变，竟开始讲授口哨的声学原理，征服了学生，使课堂恢复了平静。

1830 年，热尔冈被任命为蒙彼利埃大学的校长。1844 年，以 73 岁高龄退休。

1816 年，热尔冈给出了阿波罗尼斯“切三圆问题”的十分漂亮的解法。他引入“极”的概念以及对偶原理。从 1810 年开始，热尔冈在他的一系列论文中提出并运用了“对偶原理”。在 1824-1827 年间发表在《年刊》上的 3 篇论文中，热尔冈提出如下一般原理：在不涉及度量关系的情况下，关于平面上点和线的每一个定理，如果不涉及度量关系，对应于另一个定理，其中点和线互换。在初等几何上，热尔冈发现了一个十分漂亮的定理：“三角形顶点与内切圆和对边的切点的连线交于一点。”

热尔冈一生热爱数学，追求数学之美。他指出：“某个理论，如果不能用短短几句话向街上遇到的任何一位路人解释清楚，那么，该理论是不可能令人满意的！”将该论断用于数学，未免十分苛刻；但将它用于数学教育，却似乎更有意义。

目 录

Content

历史研究

美国早期代数教科书中的“因式分解”内容*

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海, 200062）

欧拉（L. Euler, 1707～1783）在其《无穷分析引论》中指出，将整函数分解成因式，其性质就变得很明显，一眼就可以看出变量取何值时函数值为零。事实上，用因式分解法来解方程，可以上溯到 17 世纪英国数学家哈利奥特（T. Harriot, 1560～1621）的数学著作中。

因式分解是初中代数的重要内容，现行初中数学教科书所涉及的因式分解方法包括提取公因式法、公式法、十字相乘法和分组分解法四类。出于“十字相乘法”、“一元二次方程的解法”的 HPM 教学设计的需要，我们对 1848-1918 七十年间出版的 30 种美国早期代数教科书[1-31]中的有关内容进行考察。

统计结果表明，所有 30 种教科书都介绍了两种以上因式分解的方法。所有教科书都介绍了公式法（涉及的公式多少不等），其中的 28 种教科书介绍了提取公因式法，20 种教科书介绍了分组分解法。所有教科书都讨论了形如 x^2+bx+c 的二次三项式的因式分解，其中的 23 种教科书还讨论了更一般的 ax^2+bx+c （$a \neq 1$）的情形。需要指出的是，这 23 种教科书中，除[10]以外，其他均未将 x^2+bx+c 和 ax^2+bx+c 统一起来处理。

本文旨在回答以下问题：早期美国代数教科书在二次三项式因式分解上采用了那些方法？与今日教科书有何异同？我们从中能获得哪些教学素材？

1 形如 x^2+bx+c 的二次三项式

1.1 配方法

教科书[2]统一采用配方法来分解 x^2+bx+c $\left(b^2>4c\right)$：

* 上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 系列论文之一。

$$
\begin{aligned}
& x^2+bx+c \\
&=\left(x^2+bx+\frac{1}{4}b^2\right)+c-\frac{1}{4}b^2 \\
&=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c}\right)^2 \\
&=\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c}\right)\left(x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c}\right)
\end{aligned}
$$

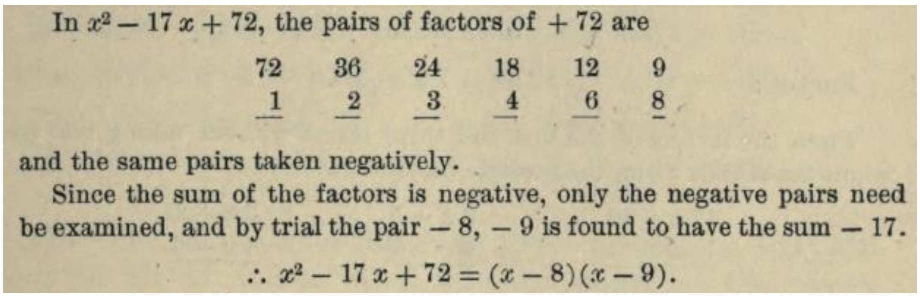
这种做法比较程序化，无需试算，有其自身的优点，属于通法。事实上，英国数学家查理·斯密（C. Smith, 1844～1916）在其《代数专论》[32]（1896）中、英国数学家鲍尔（W. W. R. Ball, 1850～1925）在其《初等代数》[33]（1897）中都表现出对这种方法的青睐。

1.2 试算法

27 种教科书采用了试算法：将常数项 c 分解成 p 和 q 的乘积，使其和等于 b，则 $x^2+bx+c=x^2+\left(p+q\right)x+pq=\left(x+p\right)\left(x+q\right)$。

值得指出的是，[1]是最早采用该方法的教科书，编者约瑟夫·雷（J. Ray,1807～1855）在书中首次使用“factoring”（因式分解）一词，并指出：因式分解的主要作用是省时省力，简化代数运算结果。书中将因式分解应用于多项式的乘除运算之中。

图 1 是杨（J. W. A. Young, 1865～1948）和杰克逊（L. L.Jackson）在教科书[23]中给出的例子。



In $x^2-17x+72$, the pairs of factors of $+72$ are

72	36	24	18	12	9
1	2	3	4	6	8

and the same pairs taken negatively.

Since the sum of the factors is negative, only the negative pairs need be examined, and by trial the pair -8, -9 is found to have the sum -17.

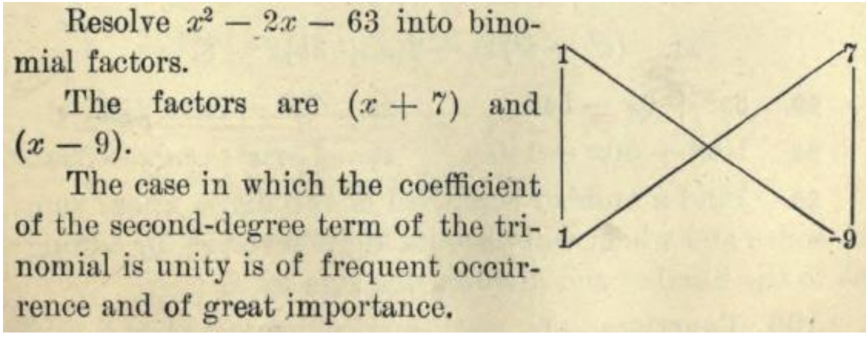
$\therefore\ x^2-17x+72=(x-8)(x-9).$

图 1 教科书[23]中的检验法

1.3 十字相乘法

只有吉雷特（J. A. Gillet, 1837～1908）的教科书[10]将这种情形与二次项系数不为 1 的情形统一起来，采用十字相乘法来分解因式。该教科书给出的一个例子是 $x^2-2x-63$（图 2）。这大概是我们所见到的最早的十字相乘法之例，与今天的形式一样（不写 x）。

书中指出：“将一个代数式因式分解十分重要；在其他方面同等的情况下，最善于因式分解的人乃是最好的代数学家。”[10]



Resolve $x^2 - 2x - 63$ into binomial factors.

The factors are $(x + 7)$ and $(x - 9)$.

The case in which the coefficient of the second-degree term of the trinomial is unity is of frequent occurrence and of great importance.

图 2 教科书[10]中的十字相乘法

2 形如 ax^2+bx+c（$a\neq1$）的二次三项式

对于 ax^2+bx+c（$a\neq1$），早期教科书的做法与今天的教科书迥然不同。尽管一般二次三项式的因式分解最终都离不开“试算”，但我们仍可将不同教科书中的做法进行分类。我们将只进行试算而并未将两个因式（或其中的系数和常数项）上下排列的方法称为“试算法”，与“十字相乘法”区别开来。

2.1 试算法

将 a 分解成 p 和 r 的乘积，将 c 分解成 q 和 s 的乘积，选择不同的 p，q，r 和 s 进行试算，使得 $ps+qr=b$。于是，$ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)$。

美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）等在教科书[26]中采用的就是这一方法，书中给出的一个例子是 $6x^2-x-12$。通过验算得到 $p=3$，$r=2$，$q=4$，$s=-3$，如图 3 所示。

$$+8x$$
$$(3x+4)(2x-3)$$
$$-9x$$

图 3 教科书[26]中的验算法

教科书[17]则列出所有可能的各对因式，但因式第二项符号待定。书中给出的一个例子是 $2x^2+5xy-12y^2$。先将 $2x^2$ 的两个因式 $2x$ 和 x 分别与 $12y^2$ 的六对因式配对如下：

$$\begin{array}{l}(2x\quad 12y)(x\quad\quad y)\\(2x\quad\quad y)(x\quad 12y)\\(2x\quad 6y)(x\quad 2y)\\(2x\quad 2y)(x\quad 6y)\\(2x\quad 4y)(x\quad 3y)\\(2x\quad 3y)(x\quad 4y)\end{array}$$

显然，第 1、3、4、5 都有因子 2，与原式不符；对第 2、6 两种配对进行试算，得到 $2x^2+5xy-12y^2=(2x-3y)(x+4y)$。

2.2 十字相乘法

早期教科书中所出现的十字相乘法并不具有统一的形式。

教科书[10]和[23]采用的形式与今天相同。以$12x^2-7x-10$为例，教科书[23]先列出其可能的因式如下（同列中两数可对调）：

$$\begin{array}{r}12x-10\\ x+\ 1\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}2x-5\\ 6x+2\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}3x+2\\ 4x-5\\ \hline\end{array}\qquad\cdots$$

将系数与常数项交叉相乘如下：

$$\begin{array}{ccc}12 & & -10\\ & \times & \\ 1 & & +1\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}2 & & -5\\ & \times & \\ 6 & & +2\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}3 & & +2\\ & \times & \\ 7 & & -5\end{array}\qquad\cdots$$

故得两个因式为$3x+2$和$4x-5$。

教科书[11]和[30]将所有可能的各对因式上下对齐，直接连以对角线。如，对于$6x^2+19x+10$，教科书[11]中列出所有可能的 8 对因式，如图 4 所示，只有最后一对交叉相乘得 19*x*，故$6x^2+19x+10=(2x+5)(3x+2)$。

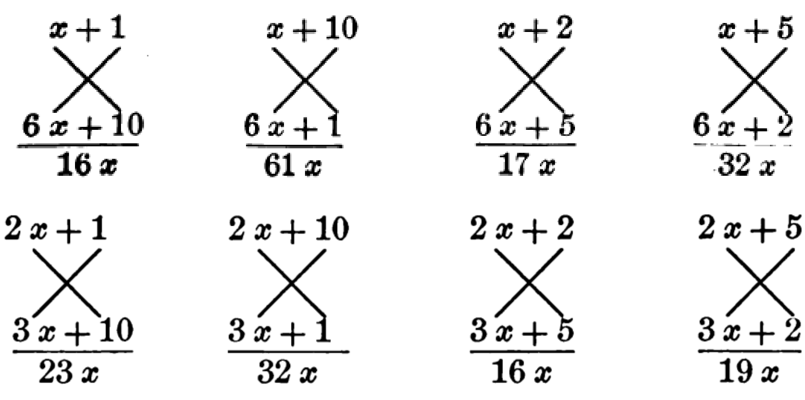
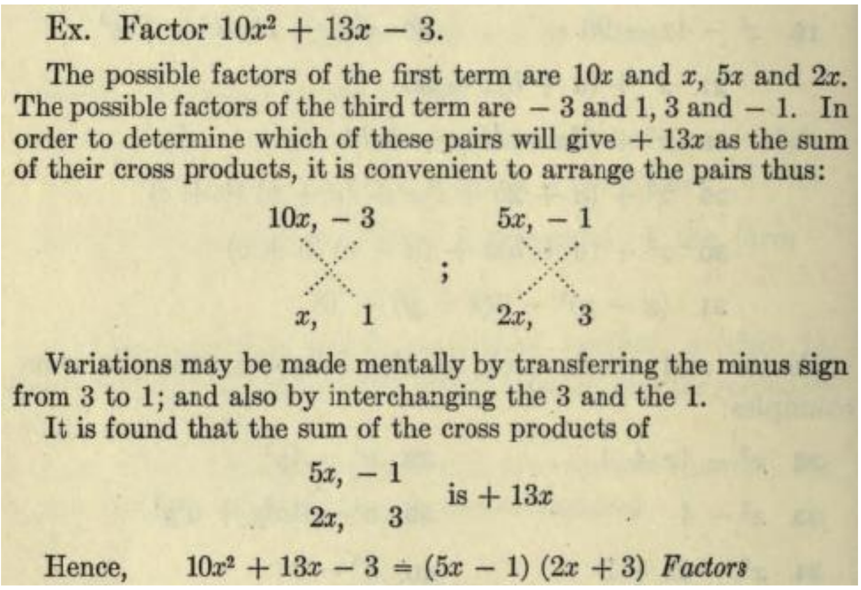


图 4 教科书[11]中的十字相乘法

杜雷尔（F. Durell, 1859～1946）在教科书[21]中则将各对可能因式中的两项上下对齐写出来，连以对角线（虚线），图 5 为书中给出的$10x^2+13x-3$的因式分解过程。



Ex. Factor $10x^2 + 13x - 3$.

The possible factors of the first term are $10x$ and x, $5x$ and $2x$. The possible factors of the third term are -3 and 1, 3 and -1. In order to determine which of these pairs will give $+13x$ as the sum of their cross products, it is convenient to arrange the pairs thus:

$$\begin{array}{cc} 10x, & -3 \\ x, & 1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{cc} 5x, & -1 \\ 2x, & 3 \end{array}$$

Variations may be made mentally by transferring the minus sign from 3 to 1; and also by interchanging the 3 and the 1.

It is found that the sum of the cross products of

$$\begin{array}{cc} 5x, & -1 \\ 2x, & 3 \end{array} \quad \text{is } +13x$$

Hence, $10x^2 + 13x - 3 = (5x - 1)(2x + 3)$ *Factors*

图 5 教科书[21]中的十字相乘法

教科书[15]、[24]和[25]则未使用连线。如教科书[25]在分解$5x^2+16x+3$时，列出所有可能的各对因式（上下对齐，如乘法算式）如下：

$$\begin{array}{cccc} 5x+3 & 5x-3 & 5x+1 & 5x-1 \\ x+1 & x-1 & x+3 & x-3 \end{array}$$

根据交叉乘积之和，确定所求因式为$5x+1$和$x+3$。

2.3 拆分-分组分解法

由等式

$$(px+q)(rx+s)=prx^2+(ps+qr)x+qs$$

可知，一次项系数为ps与qr之和，而ps与qr之积即为二次项系数pr与常数项qs的乘积。因此，要分解一般二次三项式ax^2+bx+c，只需将ac分解成两个因数的乘积，使这两个因数的和为b，于是，将一次项拆成相应的两项，进而分组分解即可。

以下是教科书[28]中的二例。

$$\begin{aligned} &6x^2+19x+10=6x^2+(15+4)x+10=(6x^2+15x)+(4x+10) \\ &=3x(2x+5)+2(2x+5)=(2x+5)(3x+2) \end{aligned}$$

$$10x^2-7x-12=10x^2+(-15+8)x-12=(10x^2-15x)+(8x-12)$$
$$=5x(2x-3)+4(2x-3)=(2x-3)(5x+4)$$

教科书[27]总结这类方法：若首末两项的乘积可以拆成两个一次因式，使得这两个因式之和等于中间项，则二次三项式可以分解成两个二项因式。

2.4 加减法

教材[3]采用加一项、减一项来实现分组分解。如

$$5x^2-2x-3=5x^2-2x-3x+3x-3=5x(x-1)+3(x-1)=(5x+3)(x-1)$$

一般地，

$$ax^2+bx+c=ax^2+bx+dx-dx+c=(ax+(b+d))x-(dx-c)$$

若 $\frac{a}{d}=-\frac{b+d}{c}$ 或 $ac=-d(b+d)$，则 $ax+(b+d)$ 和 $dx-c$ 就有公因式。可见，这种加减法与拆分-分组分解法是等价的，但在实际运用过程中主要靠“凑”，可操作性不强。

2.5 换元法

换元法是指将一般二次三项式转化为二次项系数为 1 的情形：

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}\left[(ax)^2+b(ax)+ac\right]=\frac{1}{a}\left(y^2+by+ac\right)$$

然后用验算法对 $y^2+by+ac$ 实施因式分解。以下是贝曼（W. W. Beman, 1850～1922）和史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）在教科书[13]中给出的两个例子：

$$3x^2-16x+5=\frac{1}{3}\left[(3x)^2-16(3x)+15\right]=\frac{1}{3}(3x-15)(3x-1)=(x-5)(3x-1)\text{；}$$
$$5x^2+32x-21=\frac{1}{5}\left[(5x)^2+32(5x)-105\right]=\frac{1}{5}(5x+35)(5x-3)=(x+7)(5x-3)\text{。}$$

2.6 配方法

没有一种教科书采用配方法，但斯密和鲍尔在其各自的教科书中却都统一将 ax^2+bx+c 化为 $a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$，再对 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ 进行配方，进而利用平方差公式来分解。

需要指出的是，尽管对于一般的二次三项式，美国早期教科书没有使用配方法，但在其他情形中，配方法的使用却是十分普遍的。典型的例子是四次三项式 $a^4+ha^2b^2+b^4$ $(h<2)$ 的因式分解。至少有 14 种教科书讨论了这类特殊的三项式，分解的方法是将其化为平方差：

$$
\begin{aligned}
&a^4+ha^2b^2+b^4\\
&=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(ab\sqrt{2-h}\right)^2\\
&=\left(a^2+b^2+ab\sqrt{2-h}\right)\left(a^2+b^2-ab\sqrt{2-h}\right)
\end{aligned}
$$

具体例子有 $x^4+x^2y^2+y^4$、x^4+x^2+1、x^4-13x^2+4、x^4+9x^2+81、$9x^4+8x^2+4$、$16x^4-x^2+1$、$9x^4+2x^2y^2+y^4$、$x^4-7x^2y^2+y^4$ 等等。、

3 各种方法的分布

图 7 给出了一般二次三项式因式分解的各种方法在 23 种教科书中的分布情况。

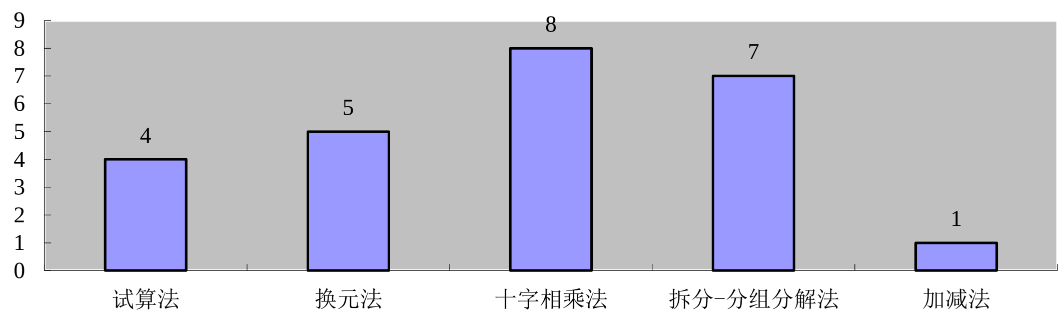
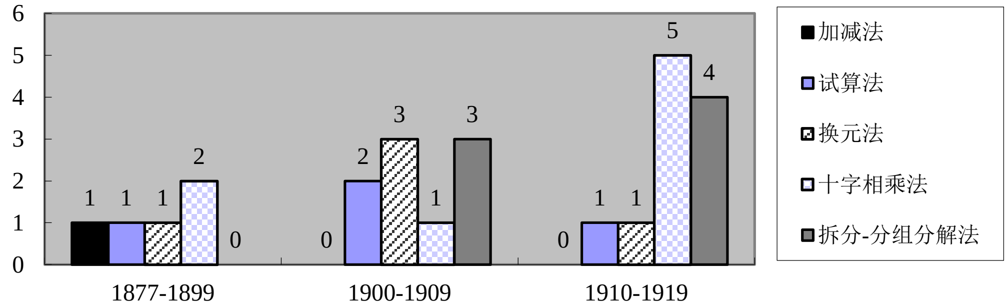


图 7 不同方法的分布情况

从图 7 可见，与今日教科书中的情形不同，早期美国代数教科书并不局限于“十字相乘法”，不同教科书采用了不同的方法。尽管十字相乘法出现的频数最高，但拆分-分组分解法、换元法也受到许多教科书的青睐。

换元法的目的是将二次项系数化为 1，再对新的二次三项式进行因式分解。对于二次项系数为 1 的二次三项式，早期教科书的处理方法迥异于今日教科书，几乎不用十字相乘法，而多用试算法。事实上，对于这种特殊的二次三项式，十字相乘法显得多此一举。

图 8 给出了各种方法的年时间分布。从中可见，到了 20 世纪，拆分法和十字相乘法逐渐得到普遍应用。



4 结语

因式分解一直是 19 世纪下半叶之后美国代数教科书中的重要内容，在诸教科书中都占有相当大的篇幅，所涉及的多项式类型以及有关公式相当丰富。关于二次三项式的因式分解，早期教科书主要采用了试算法、换元法、十字相乘法、拆分-分组分解法四种方法，有时还利用了余式定理。

早期教科书告诉我们，因式分解方法丰富多彩，需要我们根据具体的多项式加以灵活运用，没有必要拘泥于某一种方法；对于二次三项式的因式分解，从早期的多元方法并存，到今日的十字相乘法一统天下，经历了一个半世纪的演变过程；对于二次项系数为 1 的二次三项式，并不需要十字相乘法。

就 HPM 视角下的教学设计而言，我们可以多种方式来运用数学史材料：

（1）附加式：追本溯源，展示哈里奥特《实用分析术》中的因式分解实例、因式分解的辞源；融入人文元素，介绍欧拉、约瑟夫·雷等人对因式分解的评价。

（2）重构式：30 种教科书并未统一采用十字相乘法，一些编写者习惯于横着验算，或用换元法、拆分法。怎么想到十字相乘？引导学生从整数乘法出发，将两个一次因式上下对齐来写，十字相乘法就应运而生了。

（3）复制式：早期教科书上的拆分-分组分解法有时比十字相乘法会高效，值得讲授；此外，早期教科书上的因式分解问题如汗牛充栋，当然可以直接采用。

总之，即使是像因式分解这样平凡的主题，HPM 依然可以为课堂教学注入新鲜的血液！

参考文献

[1] Ray, J.. *Elementary Algebra*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co., 1848. 68-73.

[2] Hill, D.H.. *Elements of Algebra*[M]. Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1857. 35-37.

[3] Benedict, J. T.. *Elements of Algebra*[M]. New York: Hard & Houghton, 1877. 51-56.

[4] Shoup, F. A.. *The Elements of Algebra*[M]. New York: E. J. Hale & Son, 1880. 58-60.

[5] Wentworth, G. A.. *Elements of Algebra*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1881. 68-87.

[6] Davies, C.. *New Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1891. 73-77.

[7] Milne, W. J.. *High School Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1892. 72-87.

[8] Lilley, G.. *The Elements of Algebra*[M]. Boston: Silver, Burdett & Co., 1894. 119-140.

[9] Milne, W. J.. *Elements of Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1894. 73-84.

[10] Gillet, J. A.. *Elementary Algebra*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1896. 120-131.

[11] Fisher, G. E., Schwatt, I. J.. *Elements of Algebra*[M]. Philadelphia: Fisher & Schwatt, 1899. 116- 136.

[12] Dupuis, N. F.. *The Principles of Elementary Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1900. 45-51.

[13] Beman, W.W., Smith, D. E.. *Elements of Algebra*[M]. Boston: Ginn & Co., 1900. 78-91.

[14] Taylor, J. M.. *Elements of Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1900. 125-149.

[15] Tanner, J. H.. *Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1904. 94-111.

[16] Tanner, J. H.. *High School Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1907. 77-97.

[17] Marsh, W. R.. *Elementary Algebra*[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1907. 75-99.

[18] Somerville, F. H.. *Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1908. 99-118.

[19] Slaught, H. E., Lennes, N. J.. *High School Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1908. 52-60.

[20] Young, J. W. A., Jackson, L. L.. *Elementary Algebra*[M]. New York: D. Appleton & Co., 1909. 175-195.

[21] Durell, F.. *Introductory Algebra*[M]. New York: Charles E. Merrill Co., 1912. 134-159.

[22] Hopkins, J. W., Underwood, P. H.. *Elementary Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1912.

[23] Young, J. W. A., Jackson, L. L.. *A High School Algebra*[M]. New York: D. Appleton & Co., 1913. 109-127.

[24] Stone, J. C., Millis, J. F.. *Elementary Algebra*[M]. Chicago: B. H. Sanborn & Co., 1915. 136-163.

[25] Slaught, H. E., Lennes, N. J.. *Elementary Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1915.

122-146.

[26] Cajori, F., Odell, L. R.. *Elementary Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1916. 89 -103.

[27] Myers, G. W., Atwood, G. E.. *Elementary Algebra*[M]. Chicago: Scott, Foresman and Co., 1916. 134-157.

[28] Hallett, G. H., Anderson, R. F.. *Elementary Algebra*[M]. Boston: Silver, Burdett & Co., 1917. 118-147.

[29] Lyman, E. A., Darnell, A.. *Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Co., 1917. 132-160.

[30] Schultze, A.. *Elements of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1918. 76-88.

[31] Hall, H. S., Knight, S. R.. *Elements of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1922. 72-76.

[32] Smith, C.. *A Treatise of Algebra*[M]. London: Macmillan & Co., 1896. 53-75.

[33] Ball, W. W. R.. *Elementary Algebra*[M]. Cambridge: The University Press, 1897. 85-100.

平面概念与公理的历史发展*

沈中宇

（华东师范大学数学系，上海，200241）

平面概念与公理是高中立体几何的起始内容，是联结平面几何与立体几何的纽带，也是学生学习后续立体几何知识的基础。现行人教版和沪教版高中数学教科书都是从现实情境出发，抽象出平面概念，然后基于生活经验给出三个公理，其中人教版给出的三个公理如下：

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内；

公理 2 过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面；

公理 3 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

为何将平面作为不加定义的原始概念？平面的三个公理从何而来？公理与公理之间有何联系？对于这些问题，教科书没有作出任何交待。从历史上看，自希尔伯特（D. Hilbert, 1862-1943）将点、线、面视为几何公理体系中不加定义的原始概念之后，人们在接受希尔伯特公理体系的同时，也往往误将点、线、面视为易于理解的简单概念。然而，教学实践表明，平面概念以及相关公理因为其抽象性而成了学生的学习难点。

有关研究表明，学生对平面的理解具有历史相似性[1]。那么，如何在教学中让学生更好地理解平面概念的本质以及相关公理，从而顺利跨越他们的认知障碍？我们希望从 HPM 视角来实施教学，以实现上述目的。为此，我们需要从前人的教科书中汲取思想的养料。另一方面，由于在高中数学教科书开始修订之际，我们也需要对西方早期教科书进行研究，以便获取有用的素材。

本文就平面概念这一主题，对 20 世纪中叶之前的 77 种西方立体几何教科书进行考察，试图勾勒出平面概念与公理的历史发展脉络，为教学和教科书编写提供参考。

1 古希腊时期的平面定义

早在公元前 5 世纪，古希腊哲学家巴门尼德（Parmenides）对平面概念已作过刻画。根据普罗克拉斯（Proclus, 412-485）的记载[1]，巴门尼德将几何对象（一维、二维和三维）分

* 上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 系列论文之一。

成“直的”、“曲的”和“混合的”三类。如果一个二维对象是直的表面，那么它就是一个平面，直线可在任意方向与之相合。这里，巴门尼德将“直”作为平面的本质特征。

欧几里得（Euclid, 前 3 世纪）并未沿用巴门尼德的定义，他将平面定义为“与其上直线一样平放着的面”[2]，该定义中出现了若干模糊的词语，如“一样”、“平放”。关于平面，《几何原本》卷 11 给出了三个命题。

命题 1 一条直线不可能一部分在平面内，而另一部分在平面外。

如图 1，设直线 *ABC* 的一部分 *AB* 在一个平面上，而另一部分 *BC* 在该平面外，则在该平面上就有一条直线 *BD* 与 *AB* 在同一直线上。于是，*AB* 是两条直线 *ABC*，*ABD* 的公共部分，这是不可能的，假设不成立，命题得证。

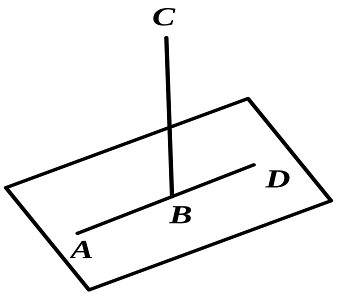


图 1

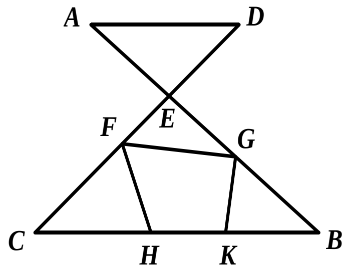


图 2

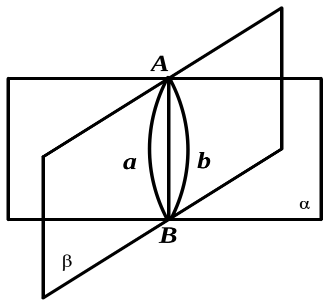


图 3

命题 2 若两条直线彼此相交，则它们在同一平面内；并且每个三角形也都位于同一平面内。

如图 2，设直线 *AB* 和 *CD* 交于点 *E*，在 *EC* 和 *EB* 上分别取点 *F*，*G*。联结 *CB*，*FG*；引 *FH*，*GK*。首先证明Δ*ECB* 在同一平面上，假设它的一部分 *FHC* 或 *GBK* 在一个平面内，而余下部分在另一平面内，则直线 *EC* 或 *EB* 的一部分在一个平面内，余下部分在另一平面内。这是不可能的。同样可证其余部分也都在一个平面内，故Δ*ECB* 在一个平面内。但Δ*ECB* 所在平面也是 *EC* 和 *EB* 所在平面，又 *EC* 和 *EB* 所在平面也是 *AB* 和 *CD* 所在平面，命题得证。

命题 3 若两平面相交，则它们的交线是一条直线。

如图 3，设平面α和β相交，*AB* 是其交线。若 *AB* 不是直线，设 *A* 和 *B* 在平面α上的连线为 *a*，在平面β上的连线为 *b*。因直线 *a* 和 *b* 有相同端点，它们围成一个面片，这是不可能的，故假设不成立，命题得证。

可见，今日人教版教科书中的平面三公理最初是在《几何原本》中是以命题形式出现的，其中命题 1 的形式与人教版中的公理 1 有较大的不同，不是取直线上两点，而是直线的一部分。欧几里得在证明上述三个命题时，并未用到平面的定义。针对欧几里得平面定义的问题，

古希腊数学教学海伦（Heron, 约公元 1 世纪）给出了平面的新定义：“平面是具有以下性质的面，它向四周无限延伸，平面上的直线都与之相合，且若一条直线上有两点与之相合，则整条直线在任意位置与之相合。”，这实际上就是人教版中的公理 1。

2 构造性定义阶段

18 世纪，英国数学家辛松（R. Simson,1687～1768）给出了平面的新定义：“平面是具有下列性质的面，通过其上任意两点的直线完全包含在该面上。” 辛松的定义实际上与海伦的定义等价，被称为“辛松定义”。德国数学家高斯（C. F. Gauss, 1777～1855）认为，其中包含了平面的非必要特征。德国数学家克雷尔（A. L. Crelle, 1780～1855）给出平面的另一个定义：“平面是包含所有通过空间中一个定点并与另一条直线垂直的直线的面”。但他自己也承认从这一定义推不出一些必要的性质[2]。

克雷尔认为，一个好的定义必须简洁且可用于推理，因此，一个合适的定义是很难找的。在以上这些定义中，不管是简单的还是复杂的，都包含了一些多余的假定。以辛松的定义为例，如图 4，假设一个平面上有三角形 *ABC*，*D* 和 *E* 是 *BC* 和 *AC* 上任意两点，连接 *AD* 和 *BE*，根据辛松的定义，*AD* 和 *BE* 都在平面上，则 *AD* 和 *BE* 必定相交于点 *F*，不然在问题中就存在两个平面，而不是一个，但实际上，没有任何证据说明 *AD* 和 *BE* 一定相交。克雷尔的定义也有类似问题。

法国数学家傅里叶（B. J. Fourier, 1768～1830）给出了平面的下列构造性定义：“平面由经过直线上一点且与直线垂直的所有直线构成” [2]，傅里叶定义的优势在于通过这一定义，利用全等三角形可以推出辛松定义中的平面的性质。但傅里叶的定义采用了“垂直”这一概念，“垂直”先于平面给出，受到人们的质疑。为了避免使用“垂直”，德国数学家迪纳（F. Deahna, 1815～1844）给出平面的另一种构造方法：“将一个球绕着它的直径旋转，球面上所有的点旋转成一条封闭的曲线，即圆，其中一条将球面分成全等的两半，连接球心与圆的直线形成平面” [2]，Becker 在此基础上提出直角的一条边绕着另一条边旋转也可形成平面。

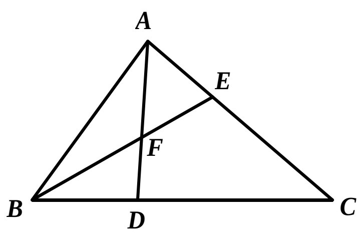


图 4

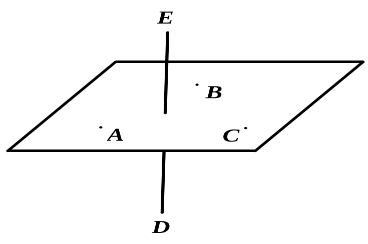


图 5

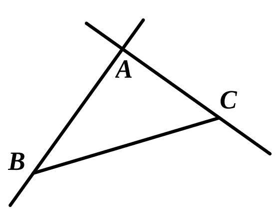


图 6

19 世纪，著名数学家如高斯、W 波尔约（W. Bolyai, 1775～1856）及其子 J 波尔约（J. Bolyai, 1802～1860）也相继给出了平面的构造性定义。W 波尔约将平面定义为“一条直线绕着另一条与之垂直的直线旋转而成的面”；高斯将平面定义为“过一个定点，且垂直于一条直线的所有直线构成的面”[2]，与 W 波尔约的定义相似。J 波尔约也利用运动来构造平面。如图 5，已知不共线三点 A，B 和 C，点 D 分别绕 AB、AC 和 BC 旋转，所形成的三个圆相交于点 E，该点是点 D 关于点 A，B 和 C 所确定平面的对称点，J 波尔约将平面定义为点 D 和点 E 重合的那些点。这些定义都与傅里叶的思路相同。

德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646～1710）也曾试图弥补欧几里得平面定义中的逻辑缺陷。他给出了平面的一个构造性定义：“平面是与两点等距离的点的集合”。W 波尔约和罗巴切夫斯基沿袭莱布尼兹的思路构造平面如下：“以空间中两点为球心，半径相同且不断增长，则两个球的交线（即圆）形成平面。” [1]利用此定义以及全等三角形即可得出辛松定义中平面的性质。

因此，在此阶段，针对辛松和克雷尔定义的不足，数学家给出了很多构造性定义，这些定义大致可以将其分成两类：一类是傅里叶的传统，利用相互垂直的直线平移或旋转来构造平面，一类是莱布尼兹的传统，利用两点的对称来构造平面。

3 包含式定义阶段

虽然出现了一些构造性定义，辛松的定义还是为 18-19 世纪的绝大多数几何教科书所采用，由于其中突出了直线包含在平面内的特征，我们称之为“包含式定义”。在此阶段，人教版的公理 1 被用作平面的定义，其余两个公理皆以定理的形式由此定义推出，因此，平面的定义开始真正用于平面有关性质的证明。接下来，我们对此阶段几何教科书中的平面定义与有关命题进行考察。

3.1 1800-1850：平面定义开始应用于相关定理

从这一时期开始，平面的定义被真正用于相关命题的证明。18 世纪法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752～1833）在其《几何与三角学基础》（1800）[3]中将平面定义为：“一个面，如果其上两点的连线全部在面上，则称其为平面”，与辛松的定义相同。利用该定义，勒让德证明了欧几里得的三个定理。

定理 1 *一条直线不能部分在平面上，而部分不在上面。*

根据平面的定义，当一条直线有两个点在平面上时，它全部在平面上，因此命题成立。同时

说明了，想要检验一个面是否为平面，可以将一条直线用不同方式与面相合，观察其是否完全与面相合。

定理 2 两条相交直线位于同一平面上，且确定它的位置。

如图 6 所示，两直线 *AB* 和 *AC* 交于点 *A*，与 *AB* 相合的平面绕 *AB* 旋转，直到通过点 *C*，根据定义，*AC* 全部在平面上。因此，平面位置由直线 *AB* 和 *AC* 所确定。勒让德给出定理 2 的两个推论：

推论 1 不共线的三点确定一个平面。

推论 2 两条平行直线确定一个平面。

定理 3 如果两个平面相交，则它们的交线是直线。

假设有除直线之外的点同时在两个平面上，则有三个点不在同一直线上，根据定理 2 推论 1，三点确定一个平面，所以假设不成立。

在定理 3 的证明中，勒让德没有说明，为什么两个平面的交线为直线，因此存在缺陷，苏格兰数学家普雷菲尔（J. Playfair, 1748-1819）在《几何学基础》（1829）[4]中说明，设有两点为它们的公共点，根据平面定义，这两点的连线也是公共的，从而让证明变得更加完整，后世的很多教科书中都采用了此种方法。

以上可见，定理 1 可以直接用定义来证明，定理 2 先用旋转的方式，然后又用到了平面的定义，定理 3 先用了定理 2 再用了平面的定义。Hayward 在《几何学基础》（1829）[5]中先证明定理 3，再证明定理 2，此种顺序导致定理 3 的证明只能说明交线有一条直线，但未能说明为什么直线之外没有其他公共部分。但也有教材虽然沿用勒让德的顺序，但也缺少了交线之外没有其他公共部分的证明，如 Davies 的《几何学基础》（1841）[6]。有些教科书对这一模式进行一定的微调，Peirce 在其《平面与立体几何基础》（1837）[7]中直接证明“不共线三点确定一个平面”，而不是将其作为定理 2 的推论。很多教材并未将定理 1 作为单独的定理列出，如 Walker 的《几何学基础》（1829）[8]，这也成为后世教科书的普遍做法。

3.2 1850-1880：定理 2 的证明的不断改进

勒让德利用旋转来确保定理 2 中的平面的唯一性，显得不够严谨。因此，这一时期的一些教科书开始采用不同的方式来解决该问题。

Tappan 在其《平面与立体几何》（1864）[9]中用传统几何的方式来证明平面的唯一性。如图 7，假设不共线三点 *A*，*B*，*C* 在两个平面 α 和 β 上，根据平面的定义，*AB*，*AC* 和

BC 都在平面 α 和 β 上。在平面 α 上任取一点 *D*，过 *D* 作直线交 *AC* 于 *E*，因 *D* 和 *E* 都在平面 α 上，故直线 *ED* 在平面 α 上，从而必与 *AB* 或 *BC* 相交。不妨设 *ED* 与 *AB* 交于点 *F*，因 *F* 和 *E* 都在平面 β 上，故直线 *FD* 也在平面 β 上，从而点 *D* 也在平面 β 上。因此，三点 *A*，*B*，*C* 确定唯一的平面。

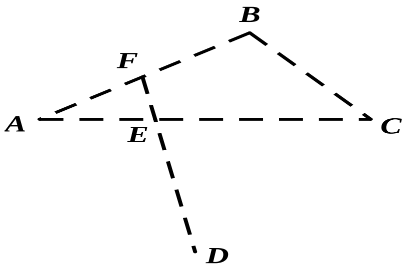


图 7

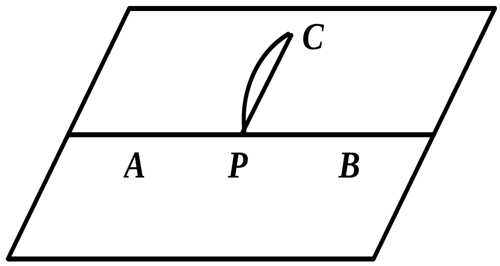


图 8

Schuyler 在其《几何基础》（1876）[10]中采用了另一方式。他首先证明：经过一条直线有无数个平面。事实上，在一个平面上作一条直线，以它为轴，平面可以旋转到任何位置。

Wilson 在其《立体几何与圆锥曲线》（1880）[11]中利用旋转确定平面的存在性，然后用反证法证明平面的唯一性。如图 8，若有两个平面经过点 *A*，*B*，*C*，则对于 *AB* 上的任一点 *P*，从 *C* 点可以作两条直线 *CP*，每个面上各一条，这是不可能的，从而证明了唯一性。

但上述方法似乎也不能完全让人满意，数学家还需要寻找更好的方法来处理这一问题。

4 从定理到公理转变的阶段

19 世纪末，希尔伯特在其《几何基础》中建立了完全公理化的欧氏几何。在这之前，意大利数学家皮亚诺（G. Peano, 1858～1932）创立数学学派，对算术和几何的公理化做出了巨大的贡献，其中的一名重要成员、意大利数学家皮埃里（M. Pieri, 1860～1913）利用点、线段和运动对几何进行公理化。他将平面定义为：“给定不共线三点 *A*，*B* 和 *C*，则面 *ABC* 可以由 *A* 与 *BC* 上各点，*B* 与 *CA* 上各点，*C* 与 *AB* 上各点所连接的直线全部填满。”另一方面，希尔伯特可能受数学抽象化和公理化趋势的影响，并没有定义平面，而将其作为一个基本的概念，像点和直线一样，公理决定了基本概念之间的联系，概念的意义只有在公理中得到体现，因此，公理就起到了定义的作用。希尔伯特的公理被大部分数学家所接受，同时也被数学教育界所接受，从而影响了大多数教科书。在这一阶段，开始出现将平面概念作为原始概念，将平面的有关命题作为公理的趋势，平面包含式定义和勒让德的定理 2 变成了公理，今日人教版教科书中的公理 1 和公理 2 开始出现。

Newcomb 在《几何学基础》（1884）[12]中不再定义平面，转而直接给出以下公理：

公理 1 如果直线上有两点在平面上，则整条直线在平面上。

公理 2 经过一条直线有无数个平面，且平面可以直线为轴旋转。

公理 3 只有一个平面可以经过一条直线和直线外一点。

接下来，Newcomb 利用上述公理证明：“两条相交直线确定一个平面”。如图 9，*AB* 和 *CD* 交于点 *O*。让任意平面经过直线 *AB*，将平面绕 *AB* 旋转直到经过点 *C*（Newcomb 的公理 2），因点 *C* 和 *O* 在直线 *CD* 上，故 *CD* 也在同一平面上（Newcomb 的公理 1）。由 Newcomb 的公理 3 可知，这个平面是唯一的。Newcomb 又证明：“两平面的交线为直线。”证法与普雷菲尔等的方法相同。

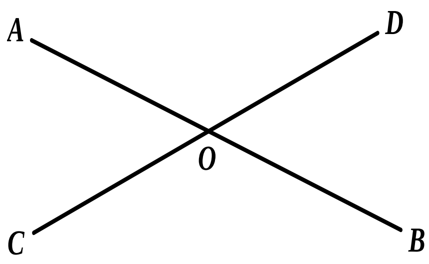


图 9

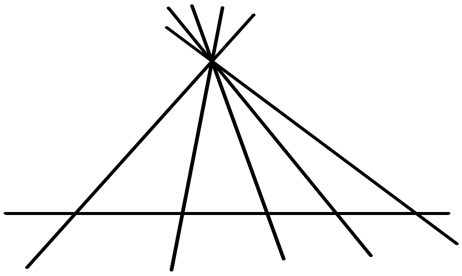


图 10

Halsted 在《几何基础》（1885）[13]中给出了与克雷尔类似的定义：如图 10，一个平面是由经过定点与定直线上的点的直线运动而形成的。

需要指出的是，人教版中的公理 1 和公理 2 在这一时期的大部分教科书仍未以公理形式出现。Bartol 在其《立体几何基础》（1893）[14]中仍采用平面的包含式定义。先证明定理：“过一条直线有无数个平面”，由此推出勒让德的定理 2 和定理 3。Thompson 在其《立体几何和测量几何基础》（1896）[15]中仍采用与 Tappan 类似的方法证明平面的唯一性。

不同教材采用的公理也互有不同。Keigwin 在《几何基础》（1897）[16]中将“不共线三点确定一个平面”作为公理。Hart 和 Feldman 在《平面与立体几何》（1912）[17]中将“直线与平面最多交于一点”作为公理。Richardson 在《立体几何》（1914）[18]中将“若两平面有一个公共点，则它们有第二个公共点”作为公理。此外，Durell 在《立体几何》（1904）[19]中将公理称为平面在空间中的基本性质或立体几何的公设，而不称为公理。

5 三大公理的最终形成阶段

从 1920 到 1960，到了这一时期，平面作为不加定义的概念，平面公理已经普遍出现于几何教科书中。值得注意的是，这一时期，在勒让德定理 3 的证明中，“为什么两个平面相交有两个交点”这一问题开始出现，因此，该定理逐渐被当作公理。Hawkes，Lucy 和 Touton

在《立体几何》（1922）[20]中，首先将“若两平面有一个公共点，则它们有第二个公共点”作为公设，然后再证明定理 3，Cowley 的《立体几何》（1934）[21]中将“两平面相交，交线为直线”作为公理，从而《几何原本》中的三个命题终于都成了公理。

可以看出，希尔伯特的公理化方法对这一时期平面概念的呈现方式产生了深刻的影响，且人教版教科书中平面的三公理在这一时期的教材中有了基本的雏形。

6 结语

从以上考察中我们可以发现，平面的概念与公理有着漫长的历史发展过程，初步发展时期巴门尼德和欧几里得等对平面的认识接近于我们的直观感受，定义中有很多模糊的词语，因此不能将定义用于命题的推理中，到了平面的构造性阶段，辛松、克雷尔、傅里叶等人基于定义的简洁性与可推理的特征给出一些平面的构造性定义，最后辛松的定义被之后的大部分教科书认可，平面有关的命题开始采用这一定义进行了初步的证明，但其中仍然具有一些逻辑上的问题，因此，不少数学家在辛松定义的基础上尝试各种办法加以改善，但总是不能完全解决疑问，最后在历史的趋势下，希尔伯特的公理化方法出现，定义与逻辑的问题最终得到解决，平面的定义与公理也终于出现了现代定义的雏形。

今日教科书中的平面三公理也经历了漫长的发展过程，其雏形首先在《几何原本》中以命题形式出现。之后，人教版中的公理 1 以定义形式出现，其余两个公理由该定义推出。之后，包含式定义和勒让德的定理 2 率先以公理形式出现，即人教版的公理 1 和公理 2。最后，勒让德的定理 3 成了今天的公理 3。

平面概念的历史有着重要的教育价值。今日教材将平面视为原始概念，并不是由于这是一个易于理解的简单概念，而是漫长历史演进的结果。在教学中，让学生经历这一过程有利于他们对平面概念本质的理解。历史表明，平面三公理与平面概念是互相促进、共同发展的，可以说，正是由于平面这三个公理的各种问题促进了平面概念的不断完善，在教学中可以有效利用这一点促进学生对平面概念的深刻理解。同时，在历史上，这三个公理作为定理时，它们之间存在一定的逻辑关系。作为公理之后，逻辑关系似乎消失了，让学生了解这一点，可以让学生更深刻地解三个公理之间的联系。

参考文献

[1] Zormbala, K., Tzanakis, C.. The concept of the plane in geometry: elements of the historical evolution inherent in modern views [J]. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics*

Education, 2004, 3(1-2): 37-61.

[2] Heath, T. L.. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* [M]. Cambridge: The University Press, 1968. 171-176.

[3] Legendre, A. M.. *Éléments de Géometrie* [M]. Paris: Firmin Didot, 1800. 1, 111.

[4] Playfair, J.. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. Walker, 1829. 16, 148-149.

[5] Hayward, J.. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829. 72-73.

[6] Davies, C.. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Co., 1841. 117-119.

[7] Peirce, B.. *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: James Munroe & Co., 1837. 100.

[8] Walker, T.. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson & Lord, 1829. 74-75.

[9] Tappan, E. T.. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864. 25, 178-179.

[10] Schuyler, A. *Elements of Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co., 1876. 225-227.

[11] Wilson, J. M.. *Solid Geometry and Conic Sections* [M]. London: Macmillan & Co., 1880. 1-3.

[12] Newcomb, S.. *Elements of Geometry* [M]. New York: Henry Holt & Co., 1884. 277-278.

[13] Halsted, G. B.. *The Elements of Geometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1885. 9, 16, 213-214.

[14] Bartol, W. C.. *The Elements of Solid Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1893. 2.

[15] Thompson, H. D.. *Elementary Solid Geometry and Mensuration Geometry* [M]. New York: The Macmillan Co., 1896. 9-11.

[16] Keigwin, H. W.. *The Elements of Geometry* [M]. New York: Henry Holt & Co., 1897. 163-164.

[17] Hart, C. A., Feldman, D. D.. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Co., 1912. 299-301.

[18] Richardson, S. F.. *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Co., 1914. 9-12.

[19] Durell, F.. *Solid geometry* [M]. New York: C. E. Merrill Co., 1904. 319-321.

[20] Hawkes, H. E., Luby W. A. & Touton, F. C.. *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Co., 1922. 305-310.

[21] Cowley, E. B.. *Solid Geometry* [M]. New York: Silver, Burdett & Co., 1934. 4-8.

教学实践

HPM 视角下“角”的教学

刘轩如[1] 岳增成[2]

（1.上海理工大学附属小学，上海, 200093; 2.华东师范大学数学系，上海 200241）

1 引 言

“角”是沪教版数学教材二年级第二学期“几何小实践”中的内容。从教材的角度看，教材从构成滑梯的角中引出间接法（通过与直角的比较来确定角的大小）及锐角、钝角的定义，在练习中让学生得出“角的大小与边长无关”这一性质，但这样的处理存在两个缺陷：一是同一个角有多种表示，却没有定义角的相等；二是没有涉及“角由线段绕一个端点旋转生成”，难以过渡到周角以及角的度量。[1]从教学的角度看，教师往往参照教参要求，让学生抽象出实例中的角；以抽象出的角为对象，引导学生运用三角尺中的直角间接比出角的大小，从而给出锐角、钝角的定义，并试图通过课堂练习让学生注意到角的大小与两条边的关系。从学生的角度看，学生在认识角时是存在困难的，比如 Mitchelmore 的研究发现，很多学生不能从“关系”（两边之间的关系）的角度来认识角[2]，在没有学习直接法（将两个角的顶点重合，一条边对齐，来看另一条边的叉开程度）比较两个角大小前，让学生理解角的大小与两条边的关系也是困难的。

显然，上面提到的常规教学并不能帮助学生突破这些认识上的障碍。但普罗克拉斯认为，必须同时从“量”（大小）、“质”（形状和特征）和“关系”三个方面来定义角，[3]因为单独采用某一个方面，都未能完善地刻画该概念。那么，该如何帮助学生从“质”、“量”、“关系”三个方面认识角？历史为我们提供了教学的指南：一方面历史相似性的存在，即学生对角的理解，包括认识上存在的一些问题与古希腊数学家的理解具有相似性，古希腊数学家从质、量、关系三个方面来认识角的，学生对角的认识也具有这三种模式，[4][5]有助于解释今天学生的学习困难，比如角的大小与两边的关系，动态角的定义；另一方面，历史发展有助于安排课程内容顺序，向学生展示概念的发展过程有助于他们对概念的理解。[6]

基于上述分析，将数学史融入教学，欲实现如下教学目标：（1）能够辨认直角、锐角和钝角；（2）知道角的大小只与它两边张开的程度有关，而与所画出的（部分）边的长短无关；

（3）根据学生对角的理解中存在的历史相似性原理，从角的“质”、“量”、“关系”等视角理解角及其大小；（4）经历角的生成及大小比较的重构过程，形成积极的情感体验。

2 历史材料及其运用

在数学史上，“角”是一个具有多重属性、争议很多、很难刻画清楚的几何概念。不同的古希腊数学家对其有不同的看法，但概括起来有上文提到的“质”、“量”、“关系”三种模式：

（1）“质”的方面

“质”即形状和特征，是人们对角直觉认识的体现。古希腊早期数学家就是从这一角度来认识角的，比如泰勒斯将“相等的角”称为“相似的角”，亚里士多德认为弯曲的线构成角，并且也将两个相等的角称为“相似的角”，他的学生欧得姆斯也认为，角源于线的“折断”（breaking）或“偏斜”（deflection）。[3]明代数学家徐光启与意大利传教士利玛窦合译《几何原》本时创用的直角、锐角、钝角等术语也是赋予了角“质”的属性，比如锐角的锐就取尖尖的，比较锐利之意。

（2）“量”的方面

“量”即大小，《几何原本》中对直角、锐角、钝角的定义：[3]

定义 10：若一直线与另一直线构成的两个相邻的角相等，则称这两个角为直角。

定义 11：钝角是大于直角的角。

定义 12：锐角是小于直角的角。

就是从量的角度来认识角的，当然教材中取自《几何原本》中的锐角、钝角定义也是从量的角度来刻画角的。此外，阿波罗尼斯的“折线或折面所含的面或体收缩到某点处”，普鲁塔克的“折线或折面在某点处的初距”，卡普斯的“包含它的两线或两面之间的距离”[3]也都赋予了角“量”的属性，只是“量”的理解不仅仅局限于角度或角度的大小比较，还有距离等。

（3）“关系”的方面

“关系”即两线之间的关系，目前教材中角的动态定义“由一条射线绕着它的端点旋转而成的图形”就是一种典型的“关系”说。欧几里得有关角的“平面上相遇、且不在同一直线上的两条线彼此之间的倾斜度”的定义也说明了一种关系，只是相遇的两条线可以是直线也可以是曲线。

基于相关史料的梳理，及其学生对角的理解与古希腊数学家对角理解的历史相似性，试图运用重构的方式，即借鉴或重构知识的发生、发展历史[7]设计教学活动，其教学设计流程图如图 1，其中“ ”表示事件的先后顺序，“➡”表示数学史融入的教学环节，具体活动内容见教学设计与实施部分：从“量”的角度设计探究活动，让学生设计出解决角的大小比较的方案；从“质”的角度给予学生阐发直觉观念的机会，加深学生对锐角、钝角的理解；从“质”与“量”的角度设计探究活动，让学生经历解决“角的大小与两边边长无关”的问题解决过程；从“关系”的角度设计活动，让学生初步体验角的动态定义、平角也是角等。

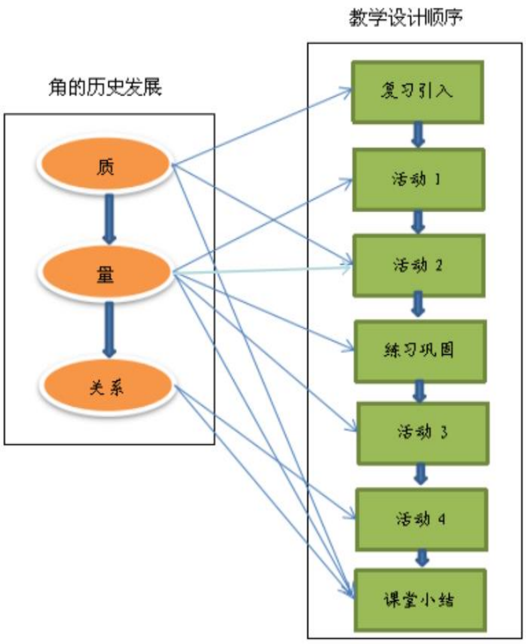


图 1 数学史融入教学设计流程图

3 教学设计与实施

3.1 复习引入

教师通过提问，让学生回想起已学过的角的定义“由一个顶点和两条直边组成的图形是角”，并举出了生活中的角例子：桌子的角，黑板上的角，五星红旗上五角星上的角，打开的门，翻盖手机等。

师：生活中有许许多多的角，现在请你画一个角，画好以后请用自己的话形容一下这个角。

学生自己画，画好后小组分享，教师挑选了三位同学的三个角，分别是直角、锐角、钝角，让其中一名学生回答画法，并让每位同学用一句话形容自己所画的角。

生：先画一条直线，再在直线的端点上画另一条直线；我觉得直角是亭亭玉立的，立起来的感觉。

生：（锐角）很小，很尖的戳上去有点疼的。

生：（钝角）大大的，宽宽的感觉，有点像回形标。

师：刚才小朋友们都用一句话形容了你们画的角，今天这节课，我们就继续来研究角。

3.2 新知探究

（活动 1）教师通过一个具体情境来引出角的大小比较。

师：鸟妈妈，给小鸟喂食，谁的嘴巴张的大，谁先吃到小虫子，小朋友们你们看看哪只小鸟能吃到小虫子啊？（如图 2）

图 2

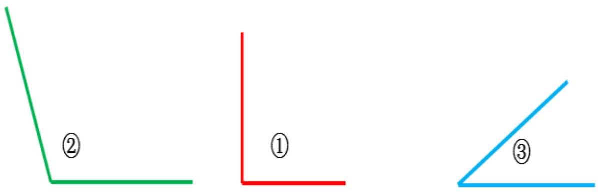


图 3

学生通过观察得出了②号角最大，③号角最小，①号角在中间的结论。（如图 3，其中角①②③是小鸟张开的嘴巴形成的角）

师：通过观察你猜测出了这些角的大小，并且猜出鸟妈妈要把小虫给②号小鸟。但只通过观察和猜测可不行，你们要想办法验证给我看。

学生小组合作，利用预先准备好的学具动手操作比较三个角的大小。然后，教师请几个同学用教具展示自己的方法

生：我是用三角尺量的。

师：来，请你到讲台上来给我们量一量。

生：老师的角那么大，我的角那么小怎么量？

师：那请你用老师的大三角板进行比较。

生：用三角尺上的直角量 1 号角，它们重合了，所以 1 号角和直角一样大；用直角量 2 号角，2 号角比直角大，因为 2 号角的另一条边是往外斜的，也就是 2 号角开口比较大，比直角大；3 号角比直角小，因为 3 号角的另一条边往里缩，也就是 3 号角的开口比较小。

师：也就是说，在比较角的大小的时候，是比较角的开口的大小，开口大，角就大，开口小，角就小。

师：还有不一样的验证方法吗?

生：先拿 1 号角，顶点和 2 号角的顶点对齐，一条边也和 2 号角的一条边对齐。然后 3 号角和 1 号角的顶点对齐，一条边和一条边对齐。这三条线是一样的（重叠的），（看另外一条线）2 号的线比 1 号的线（直边）开口大，所以 2 号角大，1 号的线（直边）比 3 号的线（直边）开口大，所以 1 号比 3 号角大。（如图 4）

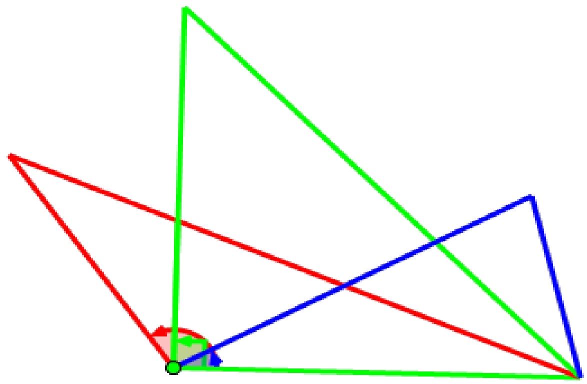


图 4

教师让一个学生重新阐述了如何比较上面提到的角的大小的方法。

师：他说得好不好啊?

生：好。

师：真了不起，你们知道吗？有很多的数学家在比较角的大小的时候也是用了刚才小朋友们想到的方法，不仅想到了和直角比大小来区分角的大小，也发现在比角的时候，要将两个角的顶点和一条边分别重合，看另一边，哪个角叉开得大，哪个角就大。

（活动 2）教师引导学生给出直角、锐角、钝角的名称及其定义。

师：为什么比直角小的角叫锐角，比直角大的角叫钝角呐?

生：锐角就是比较尖，所以是锐角；钝角，就是不尖，比较大，所以是钝角。

生：直角就是比喻一个人坐正的人，钝角就是比喻一个人躺下去一点，锐角就是比喻一个人坐着往前倾。

生：锐角又像一个要关闭的笔记本电脑。

生：锐角就是尖锐，很尖的；钝角就是有点像平的，不尖锐的，就是钝角。

师：你们的想法和古代的数学家的想法不谋而合，他们也是因为根据角的外形：小于直角的角，尖尖的，很锐利所以称它们为锐角，因为大于直角的角不锋利，所以称它们为钝角。

看来大家都有成为数学家的潜力啊。那么接下来请你画一个锐角或钝角，并用一句话说说这个角。

学生从质的角度描述了自己绘制的锐角、钝角。

3.3 练习巩固

（1）分一分

师：你能想办法将这些角找到他们的家吗？（如图 5）小组合作，并说说你是怎么想的。

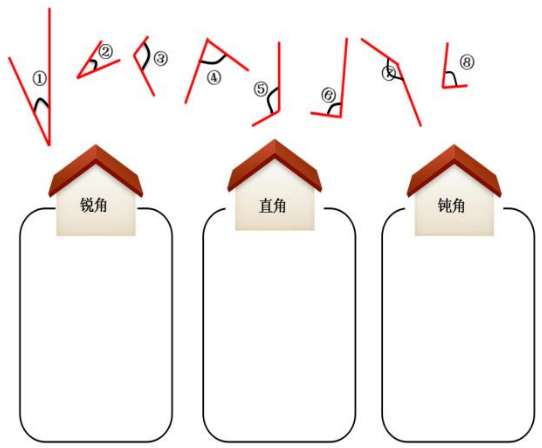


图 5

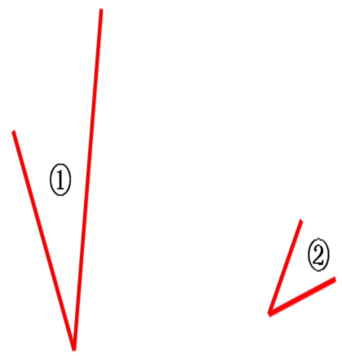


图 6

生：先用眼睛看，判断开口很小的肯定是锐角，开口很大的肯定是钝角，那种很像直角的，就要用三角尺量一下了，开口比直角小的是锐角，开口比直角大的是钝角。

（2）比一比（活动 3）

师：仔细看，锐角家族中的①号角和②号角谁大？（如图 6）

学生给出了“1 号大”、“应该是一样大”两种答案后，教师鼓励学生利用预先准备好的教具比较，学生的答案仍有分歧。

生：我把两个角重合在一起，顶点对顶点，边对边，然后发现他们重合了，所以一样大。

生：虽然重合了，还是 1 号大。

师：看来同学们的答案有分歧，我们来看一段动画。（将两个角顶点对顶点，边对边放在一起，同时延长两边）

师：你发现了什么？

生：它们一样大了。

师：角的大小只与它两边张开的程度有关，而与所画的边的长短无关。那你的直角三角尺上的直角能否测量黑板上大的直角呢？

生：能，因为角的大小只与它两边张开的程度有关，与边的长度无关。

（3）找一找（活动 4）

哪些角里？（展示角从锐角到钝角的动态生成过程）

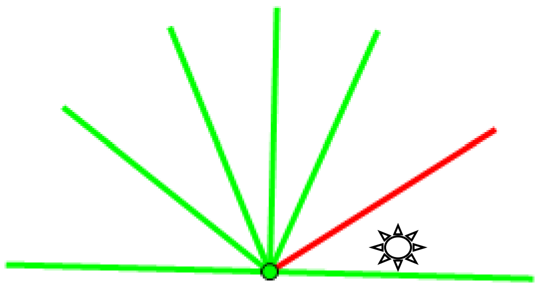


图 7

教师让学生描述角由锐角经由直角、钝角最终变为平角的过程，并让学生找出图 7 中五角星在哪些角中。

3.4 课堂小结

师：这节课你学到了什么？

生：直角、锐角、钝角。

生：如何比较角的大小。

生：为什么叫锐角、直角。

生：角的大小与角的两边的长度没有关系，与角的两边叉开的大小有关。

师：大家说的都非常好，学会了比较角的大小，还知道了角的大小与角的两边的长度无关。小朋友们你们知道吗？在这节课里小朋友们和古代一些伟大的数学家一样，能从多个角度认识了角，并用自己的语言描述一个角，甚至研究了锐角钝角名称的由来，真的是太了不起了。

4 师生反馈

由于二年级学生的年龄比较小，对书面信息的理解存在一定的困难，所以课后对 6 名有代表性的学生了访谈，同时还对授课教师进行了访谈。

从学生的访谈结果来看，他们对角的直角、锐角、钝角的分类理解深刻，且知道三类角的大小关系；他们都形成了锐角、钝角的概念意象，比如用尖尖的、扎到比较疼形容锐角，

用比较迟钝，扎人不疼形容钝角，塔尖、老鼠的鼻子是锐角，船头、屋顶是钝角；5 名学生能利用间接法、直接法（即重叠法）演示并说明如何比较角的大小，且能说明一个角比另外一个角大的原理；1 名学生起初认为边长长的角比边长短的角大，但是通过实物比较后，与其他 5 名学生一样，认识到了角的大小与边长无关，因为角的两边可以无限延长，此外其中 4 名学生得出了角的大小与角的张开（叉开）的程度或角度有关；5 名学生初步认识到了角的动态定义，其中 1 名学生利用课上教师展示的动态角进行了说明，他认为在旋转的过程中，旋转的一边一旦停止就形成一个角，2 名学生在将两个角叠在一起后，认为如果一个角往外转一下就大于另外一个角，往里缩一下就小于另外一个角，2 名学生用两条腿形成的角来演示动态角。

从教师的访谈结果来看，教师切实感受到了数学史融入教学为学生提供了有深度的探究机会，“如果没有数学史，我会引导学生直接与直角进行比较”，“当然会了，但是我还是喜欢探究为主的课，因为我特别喜欢与小朋友的思维产生碰撞，因为他们的想法真的是千奇百怪，特别好玩”（对“有机会，你还会继续上这样的课”的回答），为自己设计探究活动提供了依据，“嗯，但给我印象最为深刻的是有了探究的依据”（对“数学史能否促进学生的学习兴趣”的回答）。

5 结 语

本节课，体现了数学史的如下价值：

（1）知识之谐

数学教学的知识与技能目标，不仅仅体现在学生掌握知识，并利用已掌握知识解决相关问题的结果上，更体现经历知识的产生、发展、完善的过程，这与本节课的设计理念不谋而合。本节课在梳理已有文献的基础上，从“质”、“量”、“关系”三个方面重构了角的历史：在复习引入环节，通过概念定义与概念意象，引导学生从“质”的角度认识并初步感受角；在新知探究环节，通过“鸟妈妈喂食小鸟”的故事，自然地引出了角的大小比较的必要性，并引领学生从“量”、“质”的角度认识、感受角；在练习巩固环节，通过分一分、比一比、找一找，引导学生从“量”、“关系”的角度理解角。通过这节课的学习，学生从“质”、“量”、“关系”三个角度经历了角知识不断完善的过程，而且在概念形成与概念同化交织的过程中，达到了真正掌握角的目的。

（2）探究之乐

过程与方法目标的掌握，特别是前者的达成与好的探究活动的提供有着密切的关联。本节课，学生通过对融入数学史的角的大小、角的大小性质等活动的探究，不仅很好地掌握了知识，更感受到了探究带来的乐趣，他们一方面沉浸在解决问题的过程中，另一方面体验到了问题解决带来的喜悦，这也就不难理解访谈对象在回答“这节课你印象最深刻的是什么”时，不约而同地提及了如何比较角的大小，原因是他们认为通过自己的努力找到了比较角大小的方法。

（3）德育之效

情感态度价值观目标的达成，与学生自身的感受、感悟有很大的关联。当学生探究如何比较角的大小时，他们认识到了靠直觉判断，并不能说服别人，必须要有科学的方法；当他们探究出角大小的比较方法时，当他们从“质”的角度认识锐角、钝角时，通过教师的提示，他们意识到了自己的方法、认识与古代伟大数学家的方法、认识相似，他们很惊奇，这拉近了数学与学生的距离，提高了学生学习数学的信心。

（4）教师转变

在 HPM 案例开发过程中，教师受益匪浅：①数学史不再是可有可无的点缀，它是数学教学不可或缺的重要组成部分，特别是通过将数学史融入探究活动，不仅增加课堂的深度，更促进了学生对内容的理解；②数学史能够促进教师对学生、教学的理解，比如通过梳理数学史料，教师意识到了角的认识中历史相似性的存在，因此在设计教学活动的过程中，教师一方面将“质”、“量”、“关系”融入各个教学环节，另一方面，就各个环节的开展，教师充分考虑到了学生已有认知基础，增加了学生探究、自我表达的机会。

但在访谈中发现，学生敬畏古人，认为数学家难以超越，这些状况的出现，很可能与小结的开展比较仓促有关，另一方面“超越古人”并不是一蹴而就的，这需要数学史融入数学教学的常态化，但是目前这方面做得还远远不够，学生的访谈中也印证了这一观点：他们很喜欢数学家的故事，很希望教学、教科书中出现数学史，但是授课教师从未做过尝试。此外，教师数学史素养较低，特别是教师 SCK（specialized content knowledge，专门内容知识）匮乏，比如不知道锐角与钝角名称的由来、斐波那契是谁、小数为什么不小，从没有规律来认识无理数等，这也许是造成数学史不能常态化进入课堂的主要原因。这些问题为我们下一步的工作指明了方向。

参考文献

[1] 张奠宙. 教材处理宜朴素自然、平易近人——关于小学数学教材中“角的认识” [J]. 小学数学(数学版), 2015. (7-8): 108-110.

[2] Mitchelmore, M. C.. Young children’ concepts of turning and angle[J]. *Cognition and Instruction*, 1998. 16(3): 265-284.

[3] Heath, T. L.. *The Thirteen Books of Euclid Elements*[M]. Cambridge: John Clay, 1968. 176-181.

[4] 皇甫华. 4-7 年级学生对角的理解[D]. 上海: 华东师范大学. 2009.

[5] Keiser, E. M.. Struggles with developing the concepts of angle: comparing six-grade students’ discourse to the history of the angle concept[J]. *Mathematical Thinking and Learning*, 2004. 6(3): 285-306.

[6] Fauvel, J.. Using History in Mathematics Education[J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991. 11(2): 3-6.

[7] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012. (2): 1-5.

HPM 视角下的二元一次方程组概念的教学*

陈龙[1] 洪燕君[2]

（1. 上海市宝山区馨家园学校，上海，201907；2.华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引 言

“二元一次方程组的概念”是沪教版数学 6 年级下册、继一元一次方程、二元一次方程学习之后的教学内容，从历史上看它有着丰富的文化内涵，但现行课本中涉及到的历史文化内容不多，实际教学中人们通常只关注列出方程组的方法和步骤，忽视数学文化的渗透，不能很好的激发学生的学习兴趣。另一方面既然列一元一次方程能解决问题，为什么还要学习二元一次方程组的方法？如何体现二元一次方程组解决问题的优越性，让本知识点发挥更多的育人价值？教学实践中，教师需要回答上述问题以激发学生的学习动机。

众所周知，数学史对数学教育具有重要意义，著名数学家和数学史家克莱因（M.Kline, 1908~1992）认为“数学史是教学的指南”[1]，那么，将数学史融入“二元一次方程组的概念”的教学能否对学生的学习产生积极的影响？上述问题的答案需要在实践中寻找。为此，我们从HPM的视角对“二元一次方程组概念”的教学做了设计和实施，拟定了如下教学目标：

（1）掌握二元一次方程组的概念；

（2）通过古代问题的探索，体会二元一次方程组解决问题的优越性和必要性；

（3）了解原汁原味的数学史料，让学生感悟悠久的数学历史、丰富的数学文化，拓宽学生的知识视野。

2 历史素材

历史上的线性方程组不仅源于生活实际问题，而且内容精彩纷呈。其中，二元一次方程组问题可以分成如下四类[2]。

类别	表述形式	举例
（1）	已知二量之和为 c，第一个量的 a 倍与第二个量的	如《孙子算经》里的“鸡兔同笼”问题。

	b 倍之和（或差）为 d，求二量，即：$\begin{cases}x+y=c\\ax+by=d\end{cases}$。	
（2）	若干人共同出钱购物，若每人出 a，则多（或少）c 了；若每人出 b，则少（或多）了 d，求人数与物价。即：$\begin{cases}ax-b=y\\cx+d=y\end{cases}$。	如《九章算术》中的“盈不足”问题：若干人共同出钱买猪，每人出 100，多出 100；每人出 90，刚好够猪价。问：有多少人？猪价为多少？
（3）	两种商品各有 a 和 b 件时总价为 m，各有 c 和 d 件时总价为 n，求这两种商品的单价。即：$\begin{cases}ax+by=m\\cx+dy=n\end{cases}$。	如《九章算术》中：5头牛、2只羊共值10两(古代钱币单位)，2头牛、5只羊共值8两。问：牛和羊的单价各为多少?
（4）	甲、乙二人各有钱若干，甲从乙处得 m，则甲的钱数为乙的 k 倍；乙从甲处得 n，则乙的钱数为甲的 j 倍，求二人各有多少钱。即：$\begin{cases}x+m=k(y-m)\\y+n=j(x-n)\end{cases}$。	如数学史上著名的“骡子和驴问题”。

在本节课的教学中，我们以古代数学题为教学线索，计划选取学生耳熟能详的“鸡兔同笼”问题引入二元一次方程组的概念，这是古代二元方程组中的第一类问题；然后以“为何要学习二元方程组”的问题导向引领学生感受第二类问题，通过制造一元一次方程和二元一次方程组解决问题的认知冲突，让学生体会二元一次方程组的优越性和学习二元一次方程组的必要性；最后给出第三和第四类的二元方程组古代问题，帮助学生巩固二元一次方程组解决问题的方法，继续感受历史的多元文化。

需要说明的是，本节课我们对上述四类问题只进行“列方程组”的学习，后续“解方程组”的教学中将继续运用这四类问题进行求解。

3 教学设计与实施

3.1 开门见山，引出课题

首先教师让学生回忆一元一次方程、二元一次方程的定义，然后给出了中国古代《孙子算经》中著名的“鸡兔同笼”问题：今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？并提出如下问题：

（1）你能根据问题列出一元一次方程吗？

（2）你能列出二元一次方程吗？能列出几个？

生：能列出一元一次方程，设鸡有 x 只脚，。

师：这是根据什么等量关系列出来的？

生：根据鸡的脚（数）加兔子的脚（数）等于 94。

生：那还可以根据鸡的头（数）加兔子的头（数）等于 35 也可以列出（一个一元一次方程），就是麻烦了一点。

师：很好，你们俩说的都对，现在我们看看能不能用二元方程来列呢？

生：当然可以，有两个等量关系。

师：对的，请动手把具体的方程列出来，然后和刚才（列）的一元一次方程比较一下，看看有什么发现？

当学生列出两个二元一次方程之后，老师借机给出二元一次方程组的概念：由几个方程组成的一组方程叫做方程组，如果方程组中含有两个未知数，且含未知数的项的次数都是一次，那么这样的方程组叫做二元一次方程组。然后，让学生辨析如下方程组，进一步厘清概念。

$$(1)\begin{cases}x+y=5\\ y-z=1\end{cases};\qquad (2)\begin{cases}x^2-y=3\\ x+y=0\end{cases};\qquad (3)\begin{cases}x+2=1\\ y-1=0\end{cases}$$

3.2 顺势而问，引发思考

师：既然我们用一元一次方程能解决应用问题，那为什么还要学习二元一次方程组呢？

生 A：也许……

生 B：……不知道啊。

……

设计意图：学生用一元一次方程和二元一次方程组都可以解决“鸡兔同笼”问题，所以对于老师因地制宜提出的这个问题非常感兴趣，会积极思考，并迫切想得到答案。这就是孔子说的“不愤不启、不悱不发”，有利于优化教学效果。

3.3 以史为镜，答疑解惑

接下来，老师给出一道第二类二元一次方程组[3]：5 头牛、2 只羊，共值 10 两（古代钱

币单位)；2 头牛、5 头羊，共值 8 两。问：牛和羊的单价各为多少？（《九章算术》）

学生 C：老师，我可以设牛和羊的单价各为 x 元、y 元，列出方程组 $\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$

老师：恩，回答得很好，那我想问一个问题，这道题目能不能用一元一次方程来解决呢？

（同学们纷纷议论，有的说好像不能，也有的说不会做，有个别同学举起了手。）

学生 D ：老师，我可以设牛单价为 x 元，则羊的单价就为 $\frac{10-5x}{2}$ 元，再利用下面一句来建立等量关系。

老师：你的回答太棒了，确实我们可以用一元一次方程来解决这个问题，但是同学们观察一下两个解法，你们觉得哪个解法更好理解呢？

学生（齐答）：第一种，二元一次方程组。

老师：那有没有同学可以回答我刚才提出的问题呢？学习二元一次方程组的必要性。

学生 E：我觉得有些问题用一元一次方程去解决的话会很困难，很复杂，而用二元一次方程组会比较容易和方便理解。

老师：是的，刚才我们从这个问题中能够得到这个结论，其实还有第二个理由，就是为今后学习三元一次方程组及多元一次方程组打下基础。

接下来教师给出了第三类二元问题：若干人共同出钱购物，若每人出 8 元，则多了 3 元；若每人出 7 元，则又少了 4 元。问：共有几个人？物价是多少？（《九章算术》），并通过画线段图帮助学生理解题意。

第四类二元问题：若甲得乙之 7 第纳尔（古罗马金币），则甲的钱是乙的 5 倍多 1；若乙得甲之 5 第纳尔，则乙的钱是甲的 7 倍多 2。问：甲、乙各有多少钱？（《计算之书》），学生们很快列出了正确的二元方程组。

3.4 总结收获，巩固新知

在总结环节，老师让学生们自由畅谈本节课的收获，有学生说“知道了今天学习二元一次方程组的概念和必要性”、“知道了二元一次方程组的相关历史”、“知道了《九章算术》、《几何原本》等古代数学著作”，也有学生说“列方程组要先找到等量关系”、“我们是站在巨人的肩膀上学习数学知识，我们一定要把数学学得更好”等。

在课外作业中，老师设计了如下对应于古代四类二元一次方程组的问题，让学生从原汁

原味的数学古题中继续感受多元历史文化的同时，巩固和检测学生们本节课的学习效果。

编号	题目	备注
1	已知长方形的长和宽的$\frac{1}{4}$倍之和等于 7，长、宽之和等于 10。求长和宽。	古巴比伦泥版（第一类）
2	已知两数之和为 100，差为 40，求这两个数。	丢番图《算术》（第一类）
3	有一位行人傍晚经过一个树林，忽听得林间有人在说话，细听方知是一群窃贼在讨论分赃之事。只听得窃贼说："每人 6 匹，则多出 5 匹；每人 7 匹，则又少了 8 匹。"问：共有几个窃贼，几匹赃物?	高彦休《唐阙史》（第二类）
4	9 个李子、7 个苹果共值 107；7 个李子 9 个苹果共值 110。问：一个李子和一个苹果各值多少?	摩诃毗罗《文集》（第三类）
5	骡子和驴驮着酒囊行走在路上。为酒囊重量所压迫，驴痛苦地抱怨着。听到驴的怨言，骡子给她出了这样一道题："妈妈，你为何眼泪汪汪，满腹牢骚，抱怨的应该是我才对呀！因为，如果你给我一袋酒，我负的重量就是你的 2 倍；若你从我这儿拿去一袋，则你我所负重量刚好相等。"好心的先生，数学大师，请告诉我，他们所负酒囊各有几袋?	欧几里得，前3世纪（第四类）
6	甲对乙说："如果你给我 10 迈纳（古希腊货币单位），那么我的钱将是你的 3 倍。"乙对甲说："如果我从你那儿拿同样多的钱，那么我的钱将是你的 5 倍。"问甲、乙各有多少钱?	《希腊选集》（第四类）

4 教学反馈

课后，我们对随堂听课的 40 名学生做了问卷调查和访谈，57.5%学生表示"非常喜欢"这节课，42.5%的学生表示"比较喜欢"这节课。他们认为，一方面这些古代数学问题能激发好奇心，感受到古代数学的博大精深，如有学生谈到古题"好玩"、"新颖"、"有意思"、"不枯燥"，让课堂氛围轻松，上课思考问题"不累"；另一方面，他们觉得这些古代数学问题让学生开阔视野，了解古人的智慧，能更好的认识数学；最后还有学生说知道了《九章算术》是中国数学史上的一部经典，希望能更多的了解里面的数学题。

授课老师也对本节课的教学做了如下反思：古代数学问题虽然让学生感受到了悠久的历史文化，激发了他们的学习动机，但如果能通过历史这条“线索”去解决一些相关的现代实际问题，将会使学生更加亲近数学、理解数学、热爱数学。这个小小的遗憾使得他对于 HPM 教学的期待变得更多了。

5 结 语

本节数学史融入数学概念的教学中，数学史显示了如下优势：

首先，“鸡兔同笼”的问题既是历史名题，又可用一元一次方程和二元一次方程分别表示，所以用它因地制宜的引出二元一次方程组的概念，自然而流畅；而且，第二类古代数学题难度适中，容易激发学生对学习二元一次方程组优越性和必要性的探究兴趣，从而创造学习动机。

其次，参照历史，本节课上和课后的练习都是沿着从易到难的四类古代数学问题设置的，让学生体会到数学有其发展的历程，不是凭空产生的；且后续“二元一次方程组解法”的教学中教师会继续利用这些问题来讲授，这就使得这些数学史料成为了教学单元的线索，让学生系统地而非零散地认识了二元一次方程组。

再次，不同情境的古代数学问题让学生体会到了多元的数学文化内涵，把冰冷的美丽变成了火热的思考[4]，并拓宽了他们的知识视野。

参考文献

[1] Albers D. J., Alexanderson G. L.. *Mathematical People: Profiles and Interview* [M]. Boston: Birkhauser, 1985. 171.

[2] 汪晓勤. HPM 视角下的二元一次方程组概念的教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2007. (5): 48-51.

[3] 郭书春. 汇校《九章算术》[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2004.

[4] Freudenthal, Hans. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*[M]. Dordrecht: Reidel, 1983. 9.

[5] 汪晓勤. HPM视角下的一元二次方程概念教学设计[J]. 中学数学教学参考(初中), 2006. 12: 50-52.

HPM视角下的导数概念教学

孙 冲

（浙江省桐乡市凤鸣高级中学，桐乡，314500）

导数概念是人教A版《数学2-2》（选修）第一章的内容，教材选择气球的膨胀率和运动员高台跳水来引出平均变化率，然后围绕着这两个例子来说明瞬时变化率，由此得出导数概念。笔者在多年的教学实践中发现这样一个现象：学生在学完导数后，能够用导数来解决函数单调性和最值问题，然而，一旦遇到切线问题，学生往往会回到初中所学的圆的切线定义上来，似乎切线与导数无关。导数知识与切线知识好象“两张皮”，并不在同一个认知结构内。已有的研究也表明，尽管学生学过新的切线定义，但他们所持关于切线的意象与定义是分离的，对于切线有许多错误理解[1]。那么，如何引入切线概念，可以促进学生更好地理解导数的几何意义呢？我们希望运用数学史来解决上述问题。

1 数学史料及其运用

历史上，人们对切线的认识经历了从静态到动态的过程。古希腊数学家对切线的认识停留在静态阶段。古希腊数学家欧几里得在《几何原本》[2]中（前3世纪）将圆的切线定义为“与圆相遇、但延长后不与圆相交的直线”，将圆的切线视为与圆只有一个公共点、且落在圆外的直线。阿波罗尼斯将圆锥曲线的切线看作与圆锥曲线只有一个公共点、且全部落在圆锥曲线之外的直线。阿基米德将螺线的切线看作是与螺线只有一个公共点、且落在螺线之外的直线[3]。17世纪，法国数学家费马（P. de Fermat, 1601～1665）和笛卡儿（R. Descartes, 1596～1690）对切线的研究开启了切线历史的新纪元，切线作为割线之极限位置的思想逐渐成为数学家的共识。对于切线的研究导致了导数概念的诞生。17世纪末，法国数学家洛必达（G. L’Hospital, 1661～1704）在其《无穷小分析》中将曲线的切线定义为曲线的内接“无穷边形”一边的延长线，集中反映了这种共识。[4]

我们希望重构切线的历史来设计导数概念的教学。首先，让学生回顾圆的切线定义，并判断该定义是否适用于圆锥曲线，引导学生对切线定义作出改进；然后在判断改进后的定义是否适用于任意曲线，继而进一步完善切线的定义；最后，得出导数的定义。

2 教学设计与实施

本节课的授课对象是本校实验班学生，共 43 人，数学基础较好，有一定的自学能力，对数学有着浓厚的兴趣。

2.1 追本溯源

师：请同学们先自行阅读“章引言”，并思考：你认为微积分能够帮你解决哪些问题?

生：由“章引言”中可知，可以求速度、加速度和路程；还可以求曲线的切线；求函数的最大值与最小值；求长度、面积、体积和重心等。

师：上述问题都是我们平时需要解决的重要问题，可见微积分的用途之广。微积分分为“微分”和“积分”两部分，“微分”的核心内容是“导数”。其中求速度、切线等都需要“导数”进行解决，而求面积、体积等则需要用“积分”解决。现在我们先学习“导数”。

师：那么“导数”是如何产生的呢？这要从研究切线问题入手。数学史上，在研究如下几个问题时都需要解决切线的定义问题：解决光学问题、处理曲线运动的速度问题、确定曲线的夹角问题。那么曲线的切线是如何定义的呢?

设计目的：带领学生了解导数概念的起源，从历史的角度出发，引起学生学习该内容的兴趣。另外，能够让学生了解，导数可用来解决数学或其他知识领域的问题。通过分析，章引言起到了提纲挈领的作用。

2.2 定义探索

让学生三人一组，根据自己已有的认识，讨论圆和抛物线上一点处的切线的定义，并用自己的语言写下来。课堂上当场按组发放 15 张问卷。统计结果见表 1。

表 1 学生所给出的圆和抛物线的切线定义

曲线	圆的切线	组数
圆	① 与圆只有一个公共点的直线	12
	② 连圆心与圆上一点，过该点作垂直于连线的直线	6
	③ 与圆心的距离等于半径的直线	6
抛物线 $y^2=2px$	① 与抛物线只有一个交点，且斜率不为 0 的直线	9
	② 一条线与抛物线只有一个交点，且其上任何一个点均不在抛物线内的直线	2

教师指出，圆的切线定义①、②、③与历史上数学家所给的定义如出一辙。抛物线的切线定义①也曾在数学史上占有一席之地，②曾是古希腊数学家所给出的切线的定义。此时学生一片哗然，纷纷向给出抛物线定义②的那两组同学投去羡慕的眼光。

师：不要太兴奋，抛物线切线的定义②是否适用于所有的曲线？上述五种定义中，哪一种更适合一般曲线的定义呢？

生：抛物线切线的定义②好像更贴近切线的定义，因为所有的圆锥曲线都能够按照这一定义来作切线。

师：很好，那么现在我们来看下面几幅图（图 1 和图 2）象中的直线，可以明确告诉你们，它们也是这些曲线的切线。

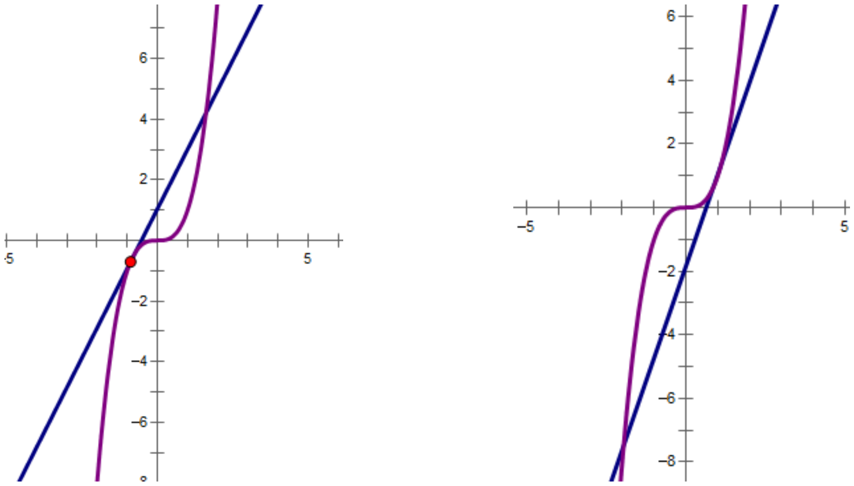


图 1 曲线 $y = x^3$ 上一点处的切线

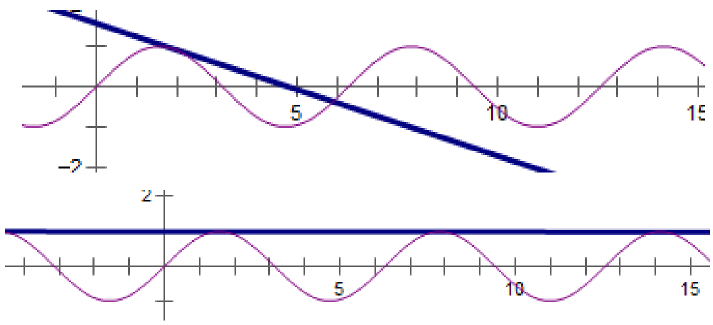


图 2 曲线 $y = \sin x$ 上一点处的切线

学生议论纷纷，一片惊叹声，感觉不可思议。

生：老师，如果这些直线也是切线，那么，它们的公共点不止一个，这怎么解释？

师：不错，历史上数学家和你一样也经历了这样的认知冲突。我们以前认识的切线与曲线只有一个交点，但范围仅仅局限于我们所学习过的圆、椭圆等曲线。通过认识上述几幅图像的切线，我们需要更正之前的认识了，曲线的切线与曲线不一定只有一个公共点。再回顾刚才同学们所给出切线的那些定义，还适用于上图中的切线吗？

生（异口同声）：不符合。

师：那么究竟应该如何定义曲线的切线呢？古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中将圆的切线定义为“与圆相遇、但延长后不与圆相交的直线”，并给出以下命题：“从圆的直径的端点作垂直于直径的直线，该直线落在圆外，且在该线与圆周之间不可能插入第二条直线。”

师：我们来看图 3，PQ 是圆 O 的直径，$PT\perp PQ$，即 PT 是圆的切线。在圆上另取一点 Q_1，则 PQ_1 是圆的一条割线。

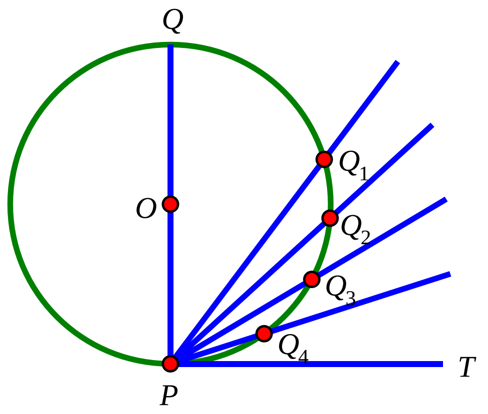


图 3 《几何原本》第 3 卷命题 16

师：在 PQ_1 和 PT 之间依次插入直线 PQ_2，PQ_3，…，PQ_n，这些直线会是切线吗？

生：都不是。

师：这就是说，若在劣弧 PQ_1 上依次取越来越接近点 P 的点 Q_2，Q_3，…，Q_n，则这些点与点 P 的连线都是割线。但随着点 Q_n 越来越接近 P，PQ_n 越来越接近切线 PT。 当 Q_n 与 P 无限接近时，PQ_n 与 PT 的位置关系会是怎样的？

生：重合。（部分学生带着比较怀疑的眼光盯着我，感觉若有所思。）

师：很好。此时，在 P 点处的切线我们已经画出。回顾刚才画切线的过程，我们可以总结如下：先作过点 P 的割线，然后让割线另外一点逐渐向点 P 逼近，进而得到切线。谁能用文字描述一下？

生：点 Q_n 逐渐逼近点 P 时，割线 PQ_n 趋近于确定的位置，这个确定位置上的直线 PT 称为圆在点 P 处的切线，这就是一般曲线切线的定义。现可以按照此定义再次验证函数 $y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 中的直线是否为切线。

此时可以引导学生再次采用“逐渐逼近”的思想进行验证。（由学生自行阐述）

设计目的：通过学生熟知的圆的切线，结合古代数学家巧妙的数学思想，一方面告诉学生数学中“形”的重要性，另一方面也能够引起学生足够的兴趣，激发他们学习的欲望，提高学习效率，最终为通过“数”的角度引出导数概念做铺垫，以达到“形数结合”的目的，给学生以深刻的认识。

2.3 概念生成

师：现在不妨总结一下，要过曲线一定点作该曲线的切线，需要怎样的步骤?

生：第一步，先过定点作曲线的割线；第二步，取割线另一端点，然后逐渐逼近定点，最终确定位置即为切线。

师：很好。刚才我们通过研究切线的定义，从“形”的角度很形象地理解了切线概念，但是对于“逼近”这种做法好像人脑难以企及，刚才部分同学的眼神告诉了我，好像还欠缺了点什么。

生：是的。学生的回答正合我意，于是接着追问。

师：好，我们刚才是通过“形”，即几何的角度很形象地理解了切线的概念，这是定性分析。那么还可通过什么让我们更严密地解释这个过程呢?

生：那应该是从代数的角度来推导。

师：说得没错。接下来我们就用“数”的角度来说明。问：要求切线，需要哪几个要素?

生：已知一个点和斜率。

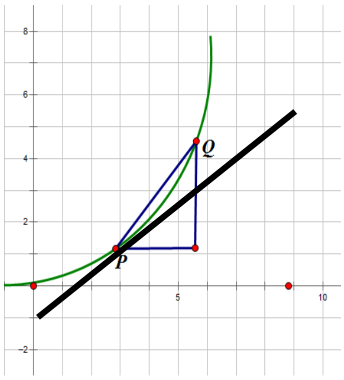


图 4

师：显然已知点就是定点，那斜率如何算呢？割线的斜率与切线的斜率又存在怎样的联系呢？我们仍采用上述“逼近”一法进行分析计算（借助于“形”）。将图 1 中点 P 处的曲线放在直角坐标系中，不妨记这段曲线为函数 $f\left(x\right)$ 的一部分图象，如图 4，欲作点 P 处的切线，先过点 P 作一条割线，记为 PQ，此时记 P 点坐标为 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$，因为点 Q 在点 P 附近，故沿横轴方向点 P 到点 Q 的增量记为 Δx，所以点 Q 的坐标为 $\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$，则割线 PQ 的斜率为 $\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,也记为平均变化率。现在让点 Q 越来越接近 P，,最后当 P，Q 重合时，PQ 就变成了切线。如何表示呢？此

时我们记为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$（lim 在英文中译为极限），这就是切线的斜率，也记为点 P 处的瞬时变化率。即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'\left(x_0\right)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$，即 $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$。

设计目的：在“形”的基础上抽象出导数的概念，旨在用数学中严密的逻辑推理来阐述“数”的重要性，让学生从“形”的直观认识抽象到“数”的理论分析，提高学生严密的数学逻辑推理能力。

3 学生反馈

以数学史为参考，“重构”导数概念教学，更侧重于训练学生的理解能力与形数之间的转化能力，能够对教学产生事半功倍的效果。笔者课后立即对这 43 名同学做了一份问卷调查。共设计了四个问题，分别是：

（1）通过数学史来学习切线的定义，是否让你对切线定义的了解有帮助？

（2）通过借鉴《几何原本》中圆的定义来获得切线，对你理解切线的概念是否有帮助？

（3）本节课中蕴含的“逐渐逼近”的思想，对你的印象是否深刻？

（4）按照数学史的发展规律进行学习，你对此有何感想？

表 2 统计了前三个问题的情况，具体见表 2。

表 2 学生前三问的回答（数据为百分比）

问题	I	II	III
是	97.67	100	100
否	2.33	0	0

第四个问题，根据学生的回答，归纳一下共有 5 种：①循序渐进，有利于对该知识点的充分理解；②能够更形象地了解切线，激发我们学习数学的热情；③数学并非如此神秘，自己的学习模式也可以这样进行；④认识需要反复性，学习也需要反复性，上升性、无限性；⑤很有趣，更有吸引力，不枯燥，理解更透彻。

由学生的反馈可知，绝大部分同学对于引入数学史的教学表示乐于接受，并受到了相当大的启发。但是对于基础较弱的同学在接受和理解方面还是存在一定的问题。这取决于所研究对象的数学功底及数学思维的完备程度。在后续“关于由切线引入导数概念的教学安排”

的问卷中，90%以上的同学认为由切线引入导数的过程很自然，尤其是借助《几何原本》中圆的定义引出切线这一过程中“逐渐逼近”的数学思想能帮助他们对导数的概念理解更透彻。而在一个月后的回访问卷调查结果显示，仍有 60%以上的同学表示这节课印象最深的便是由切线引出导数。由此可见基于数学史视角，将历史材料引入教学环节中，能够给学生留下更为深刻的印象，能激发他们学习数学的兴趣。

4 结语

本案例的实践表明，通过数学本身的例子去循序渐进地推导出导数的概念，有因有果，顺其自然，能够让学生跟随历史的脚步进行探究，追寻其中蕴含的数学思想，有着浓厚的数学探究的氛围，更能够彰显数学思想,体会数学本质，知其然并且能够知其所以然，让学生学的痛快、彻底，而学生的反馈也证实了这一点。

数学概念在数学史的引领下，会让数学的教学显得更加的流畅、自然，同时内容又丰富多彩，蕴含丰富。如果说数学概念是数学机体的骨干，那么数学史则让其变得有血有肉，充满了生机。当学生再次回想相关数学概念或公式时，会因为其中所蕴含的数学文化和数学思想，就不再会感觉数学是空洞洞、干巴巴的了，而这正是数学史融入数学概念教学的妙处所在，也是其教学价值所在。

本文是笔者针对以前上导数概念时发现的导数与切线“两张皮”现象而作出的教学改变，是基于 HPM 视角的一次大胆尝试，深切感受到了数学史对数学教学带来的帮助。当然，本案例也存在着一些不足：比如“逐渐逼近”的思想怎样才能让学生很自然地自己感受到而不是教师给出；另外从几何角度的切线引入虽不失为一种好方法，但导数的物理意义：瞬时速度却不见了，该如何使两者有机结合才让学生更全面也更合理地理解导数，将是笔者继续思考与探索的课题。

参考文献

[1] 何百通, 汪晓勤. 高中生对切线的错误理解[J]. 数学教育学报, 2014. 22(6): 45-47.

[2] 欧几里得. 几何原本(兰纪正、朱恩宽译) [M]. 南京: 译林出版社, 2011.

[3] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[4] 汪晓勤. 数学文化透视[M]. 上海: 科学技术出版社, 2013.

全国中小学“数学文化进课堂”优秀案例

征集评选活动通知

彰显数学的文化价值是实现数学课程育人的切入点；挖掘数学的本质内涵是培养学生数学核心素养的突破口；开发美妙而富于力量的高品质数学文化课程，让数学文化真正走进中小学数学课堂，走进学生的心灵世界，是提高中小学数学教育质量的主渠道。为此，全国数学史学会与中国教育科学研究院课程教学研究所拟开展“全国中小学‘数学文化进课堂’优秀案例征集评选活动”。现面向全国数学史与数学教育研究的广大师生、广大中小学数学教师广泛征集优秀案例，具体事宜如下：

一、案例基本要求

1.案例性质：反映具体的一节数学课；必须充分体现数学史、数学文化与数学课程教学的有机融合。

2.案例题材：既可以是数学教科书中的内容，也可以是作者自主开发的内容。

3.案例类型：既可以是教学设计，也可以是教学实录。

二、案例结构体例

1.题目（另附学段和年级）

2.概述：阐述案例的基本内容、数学知识结构、数学知识与教学过程中所蕴含的数学学科核心素养、数学史与数学文化的嵌入或渗透点，阐释案例的育人价值、教学目标、创新之处等。

3.内容结构：完整体现案例内容在教学过程中的设计。

4.教学策略：根据具体教学过程环节，阐述具体的教学策略方法。

三、优秀案例评选基本原则

1.科学性原则：案例所涉及的数学知识、数学史料等确保科学准确；案例内容充分反映数学的本质，确保与学生的认知规律与发展水平相适应。

2.价值性原则：案例充分体现数学史、数学文化与中小学数学教学的有机融合；充分彰

显数学独特的育人价值。

3.创新性原则：案例数学内涵的挖掘以及内容结构的设计具有创新性。

四、评选组织程序

1.评选组委会将邀请全国著名的数学史与数学教育专家学者、一线数学特级教师组成评选专家组进行科学严格评选。

2.评选出来的优秀案例将以多种方式发布：① 集结成书正式出版；② 设计专题内容推荐在核心期刊发表；③ 在全国数学史与数学教育学术年会上做报告。

五、投稿要求

1.请作者确保案例内容的真实性、客观性和独创性，文责自负；每名作者最多可申报 2 个案例。

2.投稿时间：从即日起至 2017 年 1 月 31 日止。

3.投稿方式：电子文档。

4.联 系 人：李铁安

5.投稿邮箱：ahlxingyuan@163.com

6.联系电话：15810105628

全国数学史学会

中国教育科学研究院课程教学研究所

2016 年 9 月 10 日

第七届数学史与数学教育学术研讨会

暨全国中小学“数学文化进课堂”优质课观摩会

为进一步促进数学史与数学教育学术研究创新，充分挖掘数学的文化与育人价值，深入推进数学文化融入中小学数学课堂，全国数学史学会与中国教育科学研究院课程教学研究所联合举办“第七届数学史与数学教育学术研讨会暨全国中小学‘数学文化进课堂’优质课观摩会”。本次会议，对于拓宽数学史与数学教育研究学术视野与内容主题，促进数学史与数学教育的深度融合，对于深化大中小学数学课程教学改革，培养学生数学核心素养，提升数学教师专业素养，提高数学教育质量具有广泛而重要的现实意义。

一、会议主题

追溯数学发展历史彰，显数学文化价值，促进数学教育发展。

二、具体内容

1. 数学史研究新进展

2. 数学史与数学教育研究新探索

3. 数学史与数学文化在教育实践中的应用

① 开展“全国中小学‘数学文化进课堂’优秀案例评选活动”。

② 开展“全国中小学‘数学文化进课堂’优质课观摩研讨活动”。

三、主办单位

全国数学史学会

中国教育科学研究院课程教学研究所

四、承办单位

大连金普新区社会事业局

五、时间地点

2017 年 5 月 19 -- 23 日　　辽宁 • 大连

六、会议学术委员会

主席：

李文林（中国科学院数学研究院）

宋乃庆（教育部西南基础教育课程研究中心）

成员（按姓氏拼音为序）：

代　钦（内蒙古师范大学）

顾　沛（南开大学）

郭书春（中国科学院自然科学史研究所）

李兆华（天津师范大学）

刘洁民（北京师范大学）

罗见今（内蒙古师范大学）

曲安京（西北大学）

王光明（天津师范大学）

王青建（辽宁师范大学）

汪晓勤（华东师范大学）

张维忠（浙江师范大学）

七、会议组织委员会

主席：

纪志刚（上海交通大学，全国数学史学会理事长）

郝志军（中国教育科学研究院课程教学研究所所长）

高奇志（大连金普新区社会事业局局长）

成员（按姓氏拼音为序）：

曹一鸣（北京师范大学，全国数学史学会常务理事）

邓明立（河北师范大学，全国数学史学会副理事长）

冯立昇（清华大学，全国数学史学会副理事长）

郭世荣（内蒙古师范大学，全国数学史学会副理事长）

韩　琦（中国科学院自然科学史研究所，全国数学史学会副理事长）

李铁安（中国教育科学研究院，全国数学史学会常务理事）

徐泽林（东华大学，全国数学史学会副理事长、秘书长）

邹大海（中国科学院自然科学史研究所，全国数学史学会常务理事）

八、会议主要议程

时间	内容	时间长度	备注
5 月 19 日 星期五	★　会议报到	全天	

<table>
<tr><td rowspan="3">5 月 20 日
星期六</td><td>上　午
★　开幕式
1. 首届青年“优秀数学史论文奖”颁奖
2. 中小学“数学文化”进课堂优秀案例颁奖
3. 主办单位、承办单位领导致辞</td><td>30 分钟</td><td></td></tr>
<tr><td>★　大会主题报告</td><td>120 分钟</td><td>（安排 3 位专家）
特邀 1 位专家
2 位一等奖的报告</td></tr>
<tr><td>下　午
★　学术交流与研讨</td><td>150 分钟</td><td>（平行开三组）
（分三个专题）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5 月 21 日
星期日</td><td>上　午
★　大会专题报告</td><td>120 分钟</td><td>（安排 6 位专家）</td></tr>
<tr><td>下　午
★　学术交流与研讨</td><td>120 分钟</td><td>（平行开三组）
（分三个专题）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5 月 22 日
星期一</td><td>上　午
★　课堂观摩</td><td>50 分钟</td><td>（平行开 10 节课）
（小学 4 节）
（初中 4 节）
（高中 2 节）</td></tr>
<tr><td>下　午
★　大会主题报告
★　闭幕式</td><td>100 分钟</td><td>特邀 2 位专家</td></tr>
</table>

九、注册

注册费标准为：正式代表 800 元，学生、退休及陪同人员 500 元，差旅费及住宿费自理，无会议补贴。

此次会议委托大连春蕾文化传播有限公司代收会议注册费。

收款单位：大连春蕾文化传播有限公司

开户银行：民生银行大连新华支行

银行帐号：150815775

联 系 人：汪先生　13591815298

十、住宿安排

本次会议主会场安排在大连经济技术开发区红星海学校，不同条件与住宿价格的宾馆较多，且都临近海边。会务组将预订一些宾馆，在临近会议之前提供宾馆相关信息，供参会代表选择。

十一、会议秘书处

单　　位：中国教育科学研究院；大连金普新区社会事业局

联 系 人：李铁安

手机号码：15810105628

邮件地址：ahlxingyuan@163.com

全国数学史学会

中国教育科学研究院课程教学研究所

大连金普新区社会事业局

2016 年 9 月 9 日