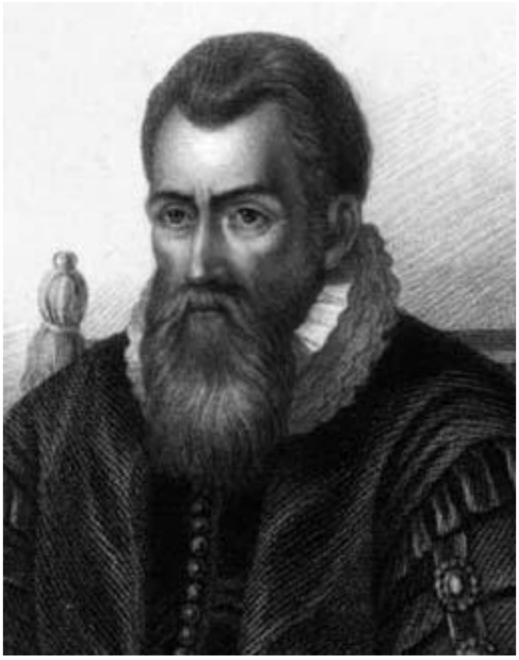
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2014 年第 3 卷第 1 期



(Napier John , 1550-1617)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

目 录

刊首语

本期的封面人物是英国著名数学家，对数的发明者约翰 纳皮尔。

约翰 纳皮尔（John Napier）生于1550年在苏格兰爱丁堡附近的小镇梅奇斯顿（Merchiston Castle），家境殷实。13 岁入圣安德卢斯（St. Salvator）圣萨尔瓦特（St. Andrews）学院读书，成绩平平。热衷出国旅行。1566 年游历欧洲大陆，聆听各种形式的讲学，逐渐养成勤于观察和独立思考的习惯。1571 年返回故里。1608 年继承父亲产业后，定居梅奇斯顿，直至去世。

纳皮尔一生研究数学，是对数理论的发明者，这一成就使他成为数学史上的重要人物。那时候哥白尼的“太阳中心说”刚刚开始流行，这导致天文学成为当时的热门学科。可是由于当时常量数学的局限性，天文学家们不得不花费很大的精力去计算那些繁杂的“天文数字”，因此浪费了若干年甚至毕生的宝贵时间。纳皮尔也是当时的一位天文爱好者，为了简化计算，他多年潜心研究大数字的计算技术。1594 年，他为了寻求一种球面三角计算的简便方法，依靠运动学的帮助揭示了对数思想，然而完成此对数却整整花了他 20 年的工夫。1614 年 6 月在爱丁堡出版的第一本对数专著《奇妙的对数表的描述》（"Mirifici logarithmorum canonis descriptio"）中阐明了对数原理，后人称为纳皮尔对数：Nap logX。1616 年 Briggs（亨利·布里格斯，1561 - 1630）去拜访纳皮尔，建议将对数改良一下以十为基底的对数表最为方便，这也就是后来常用的对数了。可惜纳皮尔隔年于 1617 年春天去世，后来就由 Briggs 以毕生精力继承纳皮尔的未竟事业，以 10 为底列出一个很详细的对数表。并且于 1619 年发表了《奇妙对数规则的结构》，向世人公布了他的这项发明，在书中详细阐述了对数计算和造对表的方法，遗憾的是出书时纳皮尔已去世。伦敦数学教授布里格斯（Briggs,H.）继承、完善并进一步发展了纳皮尔的对数理论，发明了常用对数。

纳皮尔的对数是数学史上的一项伟大发明。伟大的导师恩格斯在他的著作《自然辩证法》中曾经把笛卡尔的坐标、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为十七世纪的三大数学发明。法国著名的数学家、天文学家拉普拉斯（Pierre Simon Laplace，1749-1827）曾说：对数，可以缩短计算时间，“在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍”。

此外，纳皮尔对数字计算特别有研究，他的兴趣在于球面三角学的运算，而球面三角学乃因应天文学的活动而兴起的。他重新建立了用于解球面直角三角形的 10 个公式的巧妙记法——圆的部分法则（"纳皮尔圆部法则"）和解球面非直角三角形的两个公式——"纳皮尔

比拟式"，以及做乘除法用的"纳皮尔算筹"。他发明了纳皮尔尺，这种尺子可以机械地进行数的乘除运算和求数的平方根。此外，他还发明了一些武器，并对治国安邦提出过许多具体策略。

让我们缅怀大师的足迹，谨记业精于勤，向大师学习！

思想交流

数学史与数学教育*

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

今日之数学教学，普遍存在着重结果轻过程、重分数轻情感、重教书轻育人、重技术轻文化的现象。“四重四轻”所产生的负面影响是，分数可观但情感消极，解题快速但理解缺失，学业辛苦但素养低下，负担沉重但自信不足。数学教学的这种消极现状对一线教师提出了严峻的挑战：如何改变这种现状？如何在让学生获得理想的考试分数的同时，又可以培养积极的情感、正确的信念、良好的素养、优越的品质和健全的人格？实践证明，将数学史融入数学教学之中，是解决上述问题的理想途径之一。

在国际上，早在 1972 年的第二届国际数学教育大会上，就已经成立了数学史与数学教学之关系国际研究小组（HPM），1976 年开始隶属于国际数学教育委员会。今天，HPM 这个词很少用来指上述学术组织，而指“数学史与数学教育之间关系”的研究领域，或数学教学中“融入数学历史”的一种视角。

本文试图从数学教学的三维目标出发，通过具体的案例来说明数学史对数学教学的帮助，最后通过若干 HPM 教学案例的分析，来说明数学史融入数学教学的具体方法。

1 知识之源

歌德说过：“一门科学的历史就是这门科学本身”[1]。如果抛开数学史，数学知识往往成了一堆干巴巴的概念、符号、公式、定理和问题。数学史揭示了数学概念、数学思想、数学符号、数学术语、数学定理、数学公式、数学问题的起源和演变过程，概念的起源、公式的来历、定理的发现和问题的历史本身也是数学知识的一部分。所以，丹麦学者 Jankvist 提出“目标说”，认为数学史不仅仅是一种教学工具，同时也是一种学习目标[2]。这里，我们通过术语之辩来说明历史之用。

在数学教学中，我们常常会遇到各种各样的“为什么”，其中一些“为什么”涉及数学的术

* 本文根据全国首届数学文化素质教育论坛暨数学文化节（江苏泰州，2013 年 11 月）的学术报告“数学史与数学教育”整理而成，限于篇幅，删去了一些案例，将发表于《教育研究与评论》。

语，例如：

● “小数”是很小的数吗？

● “无理数”是没有道理的数吗？

● “虚数”是虚无飘渺的数吗？

● 为什么称未知数为“元”？

●“函数”一词是怎么来的？

这些问题对于教师来说往往比较棘手，因为它们都属于“历史的为什么”，而不是“逻辑的为什么”，教师只有通过了解历史才能给出回答。

“小数”源于三国时代数学家刘徽所说的“微数”。他在注《九章算术》时引入十进小数概念，对于开不尽的根，将无法命名的“忽”以下的部分称为“微数”：“微数无名者以为分子，其一退以十为分母，再退以百为母，退之弥下，其分弥细。”因此，以“忽”为单位，刘徽所说的“微数”就是我们今天所说的带小数的小数部分，即纯小数，确实是较小的数。今天，我们所说的“小数”不再只限于纯小数，因此，名称的字面意义与概念的内涵也就分道扬镳了。

传说中，希帕索斯（Hippasus, 公元前 5 世纪）发现正方形对角线与边长为不可公度量，即两者的长度之比不能表达为整数之比，从而否定了毕达哥拉斯学派的“万物皆数”说，动摇了毕氏学派的哲学根基，因而被抛进大海处死。有些教师这样告诉学生：希帕索斯因为发现无理数而失去生命，此事太没有道理，所以他所发现的那类数就叫无理数。这自然是牵强附会之说。“无理数”源于晚清数学家华蘅芳（1833～1902）的误译。在翻译英国数学家华里司的《代数术》时，华蘅芳将根式译为“无理式”；《代数术》东传日本后，日本数学家根据这一译名，将无限不循环小数译为“无理数”。事实上，英文“irrational”一词的原意为“无比的”，即“不能表示成两个整数之比”的意思。

“虚数”译自英文“imaginary number”一词，最早由 17 世纪法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）创用，原意为“想象中的数”。这个词反映了一个事实，就是当时人们并不接受这种数。但在今天看来，除正整数以外，哪一种数不属于“人造数”？说“虚数”虚无缥缈，望文生义而已。

将未知数称为“元”，源于我国金元时期的天元术。当时的数学家将未知数设为“天元”（后又扩充至地元、人元和物元），在书写多项式的时候，在一次项系数的旁边写一“元”字[3]。

“函数”一词译自英文“function”一词。英国数学家德摩根（A. de Morgan, 1806～1871）在出版于 1837 年的《代数学基础》将“function”定义为：“以任一方式包含 x 的表达式叫 x

的函数。”[4]美国数学家罗密士（E. Loomis, 1811～1889）在出版于 1851 年的《解析几何与微积分基础》中也给出类似的定义：“若一个变量等于含有另一个变量的代数式时，第一个变量就被称为第二个变量的函数。”[5]晚晴数学家李善兰（1811～1882）在翻译这两本书时，根据德摩根和罗密士给出的定义，将“function”译为“函数”，“函”与“含”同义。在我们今天看来，这个定义并不准确，一个函数可以没有表达式，即“不含变数”。

从以上数例可见，一个数学名词，其称谓与内涵往往是分离的，这也就是我们所说的“旧瓶装新酒”现象。了解这种现象，对于正确理解一个概念是不可或缺的。因此，这些术语的来源本身也就成了学生应该学习的知识。

2 方法之拓

数学史是一座宝藏，积淀了无数先哲的思想和方法。由于多种显然的原因，很多思想和方法只能被排除在教材之外，学习者往往只知其一，不知其二，只见树木，不见森林。课堂上使用不同的思想方法，可以让学生感受到数学思维的丰富多彩，并为他们提供了探究的机会。俗话说：“不怕不识货，只怕货比货”，对于不同思想方法的对比可以拓宽学生的思维，加深学生对数学的理解。

这里，试举数例。

案例 1 圆的面积

教材中给出的方法是，将圆分割成若干等份，将分得的各部分（小扇形）另拼成近似的平行四边形，从而推导出圆面积公式，如图 1 所示。这种做法的优点是，拼得的图形的面积等于圆面积，但这个图形只是近似的平行四边形。

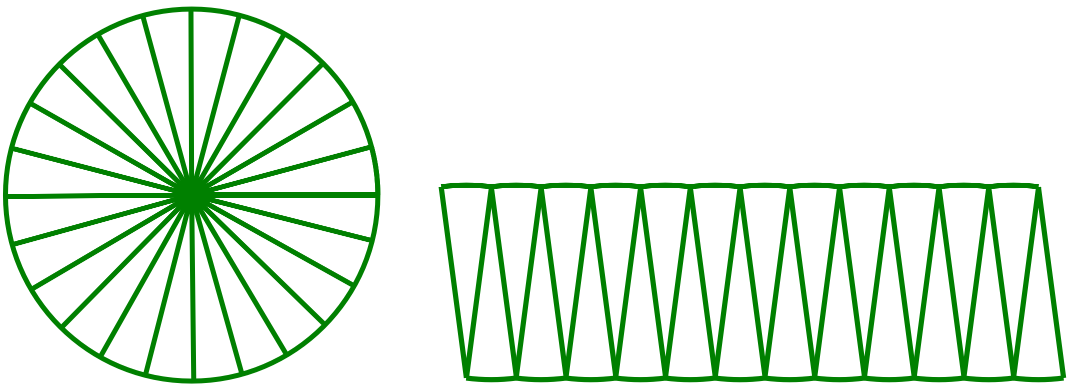


图 1 课本上呈现的圆面积推导方法

古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 公元前 287～公元前 212）和中国数学家刘徽都

给出过圆面积的求法，而最精彩的莫过于 17 世纪德国天文学家和数学家开普勒的方法。如图 2，将圆分割成无数个顶点在圆心、高为半径的小“三角形”（其实是小扇形，但圆分得越细，小扇形越接近三角形。）将这些小“三角形”都转变成等底等高的三角形，最后，它们构成了一个直角三角形，这个直角三角形的长直角边为圆周长，短直角边即为圆的半径。

通过技术，我们可以将开普勒的方法进行改造，使之适合于课堂教学。将圆内接 n 边形中的每一个小三角形进行等积变换，拼成一个直角三角形，圆分割得越细，直角三角形越来越接近圆的面积。这种方法的优点是，拼得的直角三角形并不是近似的，从而更易于让学生理解，圆分割得越细，直角三角形面积越接近圆面积。

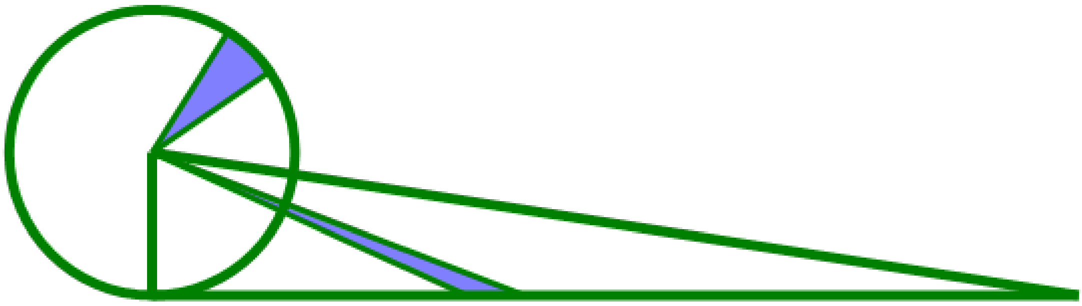


图 2 开普勒求圆面积的方法

案例 2 等比数列求和

约制作于公元前 1650 年的莱因得纸草书中已记载了一个等比数列7，7^2，7^3，7^4，7^5的求和问题。祭司的解法是：

$$\begin{aligned}S_5&=7+49+343+2301+16807\\&=7(1+7+49+343+2301)\\&=7\times 2801\\&=19607\end{aligned}$$

由此可知，古代埃及人已经总结出了等比数列7 ，7^2，7^3，…，7^n，…的前 n 项和S_n和前$n-1$ 项和S_{n-1}之间的递推关系$S_n=(1+S_{n-1})\times 7$。利用用这种方法，我们同样可以导出一般等比数列$a, aq, aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$之前 n 项和S_n和前$n-1$ 项和S_{n-1}之间的递推关系：

$$\begin{aligned}S_n&=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}\\&=a+q\left(a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-2}\right)\\&=a+qS_{n-1}\\&=a+q\left(S_n-aq^{n-1}\right)\end{aligned}$$

故当$q \neq 1$时，即有

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \tag{1}$$

欧几里得在他的《几何原本》第 9 卷中给出了等比数列的另一种求和方法。设有等比数列a_1，a_2，…，a_{n+1}，公比为$q \neq 1$。则由

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

得

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \cdots = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}。$$

由等比定律，又有

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{S_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = q - 1$$

因而得公式(1)。

直到 19 世纪，英国数学家华里司（W. Wallace, 1768 ~ 1843）在为《大英百科全书》所写的两则长篇辞条“代数学”[6]和“级数”[7]之中，才给出了我们今天教材中使用的方法——错位相减法。

案例 3 椭圆的标准方程[8]

在今天的课本上，椭圆标准方程是根据椭圆定义，通过“平方、再平方”得到的。而在历史上，为了避开这个繁琐的过程，数学家们曾运用多种其他的方法。18 世纪初，法国数学家洛必达（M. de L’Hospital, 1661～1704）在其《圆锥曲线分析》中利用便捷的“和差术”轻而易举地推导出椭圆方程。如图 3，设长轴$|AB| = 2a$，短轴$|CD| = 2b$，焦距

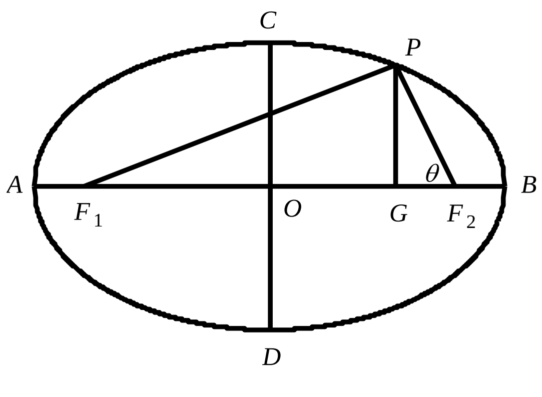


图 3 椭圆方程的推导

$\left|F_1F_2\right|=2c$，点 $P\left(x,y\right)$ 为椭圆上任意一点。因 $\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，故设 $\left|PF_1\right|=a+z$，$\left|PF_2\right|=a-z$，其中 z 为待定参数。利用两点之间距离公式，有

$$\left|PF_1\right|^2=\left(a+z\right)^2=\left(x+c\right)^2+y^2 \quad (2)$$

$$\left|PF_2\right|^2=\left(a-z\right)^2=\left(x-c\right)^2+y^2 \quad (3)$$

(2)-(3)得 $4az=4cx$，即 $z=\dfrac{cx}{a}$，代入（2）或（3），整理得椭圆方程。

18 世纪英国数学家斯蒂尔（R. Steell）在《圆锥曲线论》中给出了另一种推导方法。仍如图 3，设 $\left|PF_2\right|=z$，因 $\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，故 $\left|PF_1\right|=2a-z$。由余弦定理得

$$\left(2a-z\right)^2=z^2+4c^2-4cz\cos\theta=z^2+4c^2-4c\left(c-x\right)$$

解得 $z=\dfrac{a^2-cx}{a}$。再由勾股定理得

$$z^2=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}=y^2+\left(c-x\right)^2$$

整理后即得椭圆方程。

19 世纪英国数学家赖特（J. M. F. Wright）在《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》中对上述方法进行改进，更自然地推导出椭圆的方程。仍如图 3，设 $\left|PF_1\right|=r_1$，$\left|PF_2\right|=r_2$，则由椭圆定义，$r_1+r_2=2a$，且 $r_1^2=\left(x+c\right)^2+y^2$，$r_2^2=\left(x-c\right)^2+y^2$，故得 $r_1^2-r_2^2=4cx$，或即 $\left(r_1+r_2\right)\left(r_1-r_2\right)=4cx$，由此得 $r_1-r_2=\dfrac{2cx}{a}$。于是得焦半径公式 $r_1=a+\dfrac{cx}{a}$，$r_2=a-\dfrac{cx}{a}$，从而得到椭圆方程。

3 情感之润

学生往往觉得数学是枯燥乏味的，数学学习中的错误、挫折和障碍往往让一部分学生失去信心；数学家天生会证明定理，与错误无关；除了考试，数学与现实世界没有关系。但数学史告诉我们，数学是人类的一种文化活动，是人创造了数学。惟有恢复数学中的“人性”，才能让数学变得有趣、亲和、激动人心、充满吸引力；也只有展现数学中的“人性”，才能让学生明白，在数学活动中，错误、怀疑和争议都是不可避免的，因此，面对挫折、失败和错

误，不必灰心丧气。数学史还告诉我们，数学不是孤立的知识体，每一个时代的数学都是这个时代更广阔文化运动的一部分，数学与人类其他知识领域有着密切的联系。因此，数学史可以激发学生的兴趣、让他们理解数学和数学活动的本质，从而树立正确的数学观。以下我们给出若干例子。

3.1 历史上的数学故事

故事一：勾股传奇[9]

在伦敦东部地区，有一座教堂，教堂边有一块墓地，墓地上有一块墓碑，墓碑上刻着勾股定理的一种证明。长眠于此的是一位名叫伯里加尔（H. Perigal, 1801～1898）的牧师。临终时，他嘱咐儿子把他发现的勾股定理的证明刻在他的墓碑上。他的证明方法如图 4 所示。

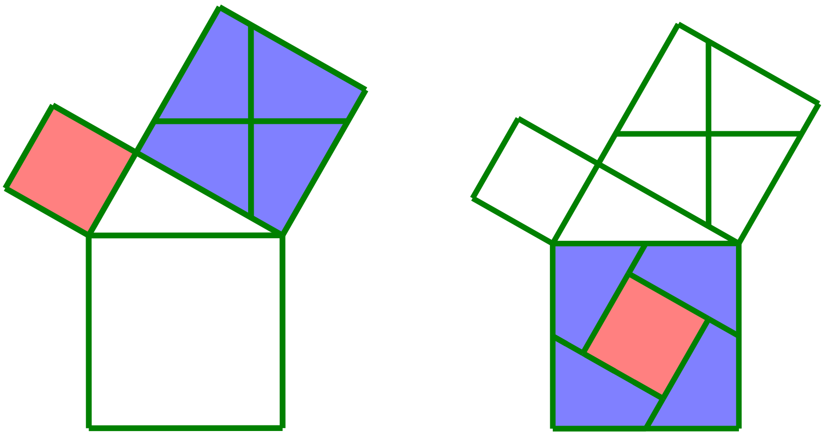


图 4 伯里加尔证明勾股定理的“水车翼轮法”

一位年近百岁的牧师，弥留之际，最为挂念的不是教义、不是终身的事业，而是他年轻时钻研过的勾股定理。我们不难想象，牧师在证明勾股定理的过程中，定然获得到了巨大的愉悦感和成就感。勾股之美、数学之魅由此可窥一斑！

故事二：围城与众数[10]

在公元前 5 世纪，希腊世界爆发了一场战争，史称伯罗奔尼撒战争。公元前 428 年冬，雅典的军事同盟普拉提亚被伯罗奔尼撒人包围。伯罗奔尼撒人在城外筑起高高的围墙，欲将普拉提亚人困死在城中。不久，城中粮食短缺，他们处于绝望之中。

由于无望从雅典人那里获得援助，也没有其他安全突围的方法，普拉提亚人计划弃城而去。他们打算做梯子翻过敌人的围墙，希望能杀出一条血路。梯子的高度要与敌人围墙的高度一样，为此，可以数敌人城墙上砖块的层数来计算城墙的高度。很多人同时数砖块的层数，

数的结果不尽相同。究竟如何确定砖块层数呢？众数成了惟一的答案！

讲述数学故事是使数学人性化的方式之一。

3.2 课堂上的另类素材[11]

美国数学家和数学史家 M·克莱因曾指出，叙述数学家的困难、挫折和失败，能使学生获得真知灼见和探究问题的勇气，并且不因失败而气馁。美国数学家米勒断言，清晰地揭示历史上著名数学家的挫折与失败，比介绍他们的成功更能让数学教师获益。这里，试举一例。人教版高中数学教材上给出的棱柱定义是："有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都相互平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱"；苏教版高中数学教材给出的定义则是："由一个平面多边形沿某一方向平移形成的空间几何体叫做棱柱"。但古希腊数学家欧几里得在《几何原本》卷 11 中却给出如下定义[12]：

> 一个棱柱是一个立体图形，它是由一些平面构成的，其中有两个面是相对的、相等的，相似且平行的，其它各面都是平行四边形。

这个定义是有缺陷的，谬种流传两千余年。实际上，当我们翻开数学历史之画卷，谬误比比皆是。是人都会犯错误，数学家也不例外。既然如此，我们在数学学习中遇到挫折、失败和错误，难道不是稀松平常之事吗？我们根本没必要为之失去信心。重要的是从错误中学习，让错误成为进步的跳板！

在课堂上示数学家之"弱"，是使数学人性化的另一种方式。

3.3 文化中的数学主题

数学与现实生活、人文艺术、科学技术都密切相关，不同知识领域都为数学教学提供了丰富的素材。以绘画为例，文艺复兴时期的艺术家往往都精通数学，并将数学运用于绘画。15 世纪意大利艺术家和数学家弗朗西斯卡（Piero della Francesca, 1415～1492）的作品"基督受鞭图"采用了透视学原理；整幅图是一个长宽之比为$\sqrt{2}:1$的矩形，与今天国际上统一的纸张规格（如我们常用的 A4 纸）完全一样；耶稣的头位于左边正方形的中心；主没影点为对角线与四分之一圆弧的交点，如图 5 所示。

类似地，意大利著名艺术家拉斐尔（Raphael, 1483～1520）也用透视学原理来创作其"雅典学派"。整幅图的上半部分是一个半圆及其内接正方形的架构，最中间的柏拉图和亚里士

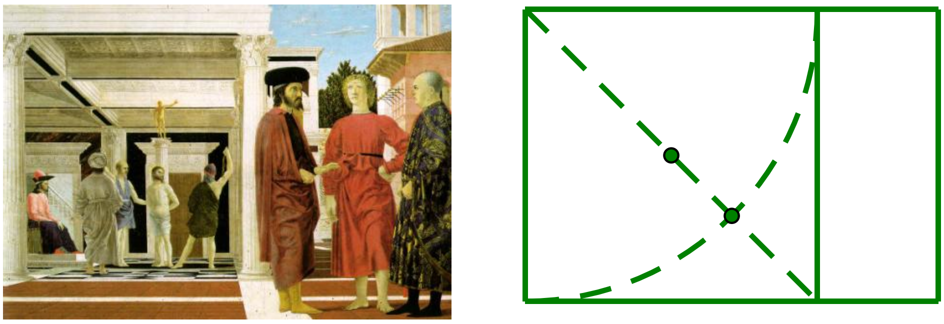


图 5 弗朗西斯卡作品“基督受鞭图”的构图

多德站立点恰好位于半圆的直径上，且位于圆心和主没影点的两侧。如图 6 所示。半圆的半径与内接正方形边长之比为 $\sqrt{5}:2$。

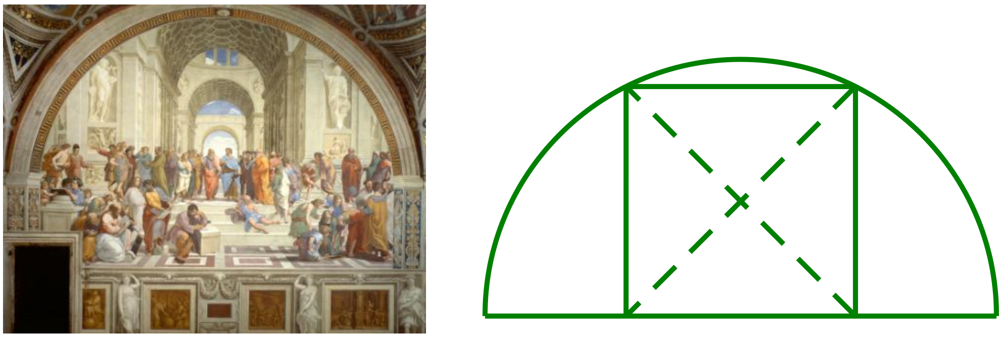


图 6 拉斐尔作品“雅典学派”的构图

数学文化融入数学教学，是改变学生消极数学观的重要途径。

4 实践之效

今天，如何将数学史融入数学教学，已成了 HPM 的中心课题之一。近年来，许多学者对数学史的运用方式作了理论探讨[13][14]，我们在前人工作的基础上，提出附加式、复制式、顺应式和重构式四类，见表 1。

表 1 数学教学中运用数学史的方式

类 别	描 述
附加式	展示有关的数学家图片，讲述数学家的故事；或介绍数学概念、数学术语、数学符号等的来源
复制式	直接采用历史上的数学问题、问题解决方法或定理证明方法等
顺应式	对历史上的数学问题进行改编或根据历史材料编制数学问题
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史，采用发生法进行教学

四种方式并无水平高低之分，具体选择哪一种，取决于要达成的教学目标。图 7 给出了

四种方式与数学教学三维目标之间的关联。其中，实线表示紧密的关联，虚线表示相对较弱的关联。

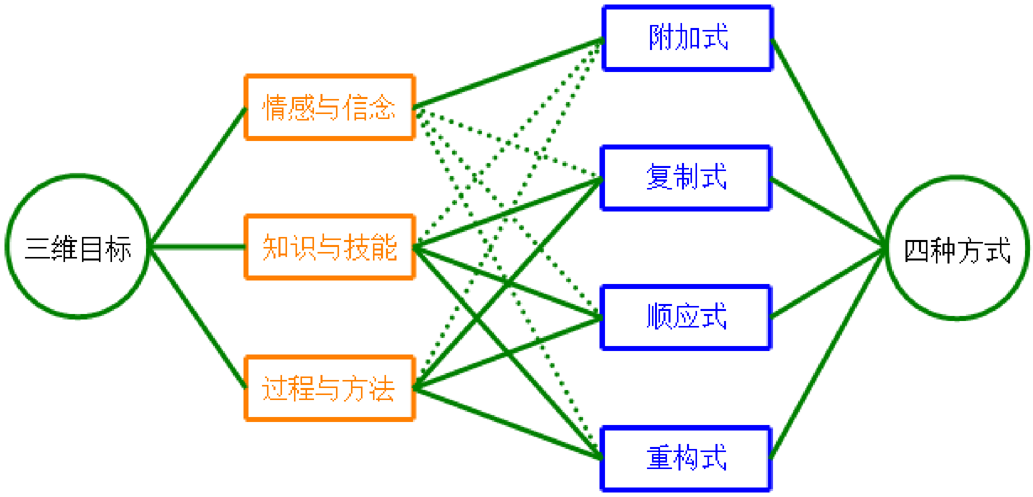


图 7 四种运用方式与三维目标之间的关联

以下我们通过几个具体的案例来说明数学史的各种运用方式。

案例 1 相似三角形的应用（上海，2009）[15][16]

我国汉代数学名著《九章算术》勾股章中有很多测量问题，如：

- 今有邑方二百步，各开中门。出东门一十五步有木。问：出南门几何步而见木？
- 今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九十五尺。人立木东三里，望木末适与山峰斜平。人目高七尺，问：山高几何？
- 今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问：井深几何？

直接将这些问题作为例题或练习题引入教学，即属于复制式。

建于公元前 6 世纪的古希腊著名水利工程——萨莫斯隧道，全长 1036 米，横截面的高和宽各约 1.8 米，施工过程中，并未使用当时通用的挖通风孔的方法；考古学家发现，南北两个工程队会合之处，误差小得惊人。课堂上介绍萨莫斯隧道的，并让学生探讨其背后的数学原理（相似三角形性质），即为顺应式运用数学史。

数学史的运用让学生体会到数学与现实生活之间的密切联系，对古人的智慧、数学的价值惊叹不已。

案例 2 椭圆的定义与方程（浙江，2011）[17]

历史上，椭圆显然并不是像书本上所呈现的那样，通过两根钉子、一根细线和一支铅笔发现。在公元前 4 世纪，古希腊数学家梅内克缪斯（Menaechmus）用垂直于圆锥母线方向

的平面去截顶角为直角的圆锥，得到椭圆；后来，阿波罗尼斯（Apollonius）改用任意圆锥来获得椭圆，并以获得椭圆的方式来定义椭圆。椭圆焦半径之和等于一个定值，乃是阿波罗尼斯所证明的椭圆的一条性质。借鉴椭圆概念的历史，通过球体在阳光斜照下的阴影来引入椭圆概念；然后借助丹德林双球，引导学生发现椭圆焦半径性质，在椭圆原始定义和课本上的轨迹定义之间架起一座桥梁，即为重构式运用数学史。

让学生经历椭圆概念的自然发生过程，知道课本上椭圆定义的来源，激发了学生的学习动机，加深了学生对椭圆概念的理解，并让学生获得了数学探究的美好体验。

案例 3 数系的扩充与复数的引入（浙江，2011）[18]

历史上，虚数概念并不像课本中所呈现的那样，是从方程 $x^2+1=0$ 那里诞生出来的。文艺复兴时期的数学家因为解决三次方程（任何三次方程都至少有一个实根），遇到了实根的虚数表达式，才产生了研究虚数的动机。意大利数学家邦贝利（R. Bombelli）就是其中之一。他在解一元三次分方程 $x^3=15x+4$ 时，获得了三个实根 4，$-2\pm\sqrt{3}$，另一方面，用三次方程求根公式，却得到形如 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 的根。正是这样的“矛盾”，促使他对“负数的平方根”进行深入研究。

在课堂上，让学生检验邦贝利方程的三个实根，然后用三次方程求根公式来表达其中一个实根 4，从而创造学生的认知冲突，突出数系扩充与复数引入的必要性。这属于复制式和重构式运用数学史。

这里，数学史让学生体验到了虚数概念的形成过程，激发了他们的学习动机，加深了他们对复数概念的理解，

案例 4 不等关系与不等式（浙江，2012）[19]

历史上，数学家创造出了各种各样的不等号，今天只留下了“>”和“<”。让学生创造表示“大于”和“小于”的符号，并将学生的作品与历史上数学家的各种不等号进行比较，是数学史的附加式运用。

不等号创造活动拉近了学生与数学之间的“距离”，让他们认识到数学和数学活动的本质，不知不觉中成了学习的主人。

5 结语

综上，将数学史融入课堂数学，学生对于数学知识既能“知其然”，又能“知其所以然”，

既能知其“今生”，又能知其“前世”，既能“近观树木”，又能“远眺森林”，因此，我们既能实现知识与技能目标，也能实现过程与方法目标。数学史融入课堂教学，恢复了数学中的人的元素，建立了数学与人类其他知识领域之间的联系，从而激发学生积极的数学情感，让学生树立正确的数学信念，因而，我们能够很好地实现情感、态度、价值观目标。

在数学文化的教育价值受到普遍关注的今天，HPM 我们提供了一片广阔而迷人的天地。在这里，我们必将大有作为。

参考文献

[1] von Goethe, J. W. *Theory of Colours*. London: John Murray, 1840. xiv

[2] Jankvist, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, **71**: 235-261.

[3] 汪晓勤. 为什么未知数叫元？数学教学, 2012, (8): 26-29

[4] De Morgan, A. *Elements of Algebra*. London: Taylor & Walton, 1837. 168

[5] Loomis, E.. *Elements of Analytic Geometry and of Differential and Integral Calculus*. New York: Harper & Brothers, 1851. 113.

[6] Wallace, W. Algebra. In: *Encyclopaedia Britannica* (The 6th Ed) (Vol. 1). Edinburgh: Archibald Constable & Company, 1823. 617-619.

[7] Wallace, W.. Series. In: *Encyclopaedia Britannica* (The 6th Ed) (Vol. 19). Edinburgh: Archibald Constable & Company, 1823. 172-185.

[8] 汪晓勤. 椭圆方程之旅. 上海HPM通讯, 2012, 1(1): 34-41; 数学通报, 2013, 52(4):54-58

[9] 田方琳, 汪晓勤. 初中数学课堂中的数学故事. 上海 HPM 通讯, 2013, 2 (3): 37-48; 中学数学月刊, 2013, (9): 50-53

[10] 吴骏. 基于数学史的统计概念教学——以平均数、中位数和众数为例. 华东师范大学博士学位论文, 2013

[11] 林佳乐, 汪晓勤. 美丽的错误. 上海 HPM 通讯, 2013, 2 (3): 48-57; 中学数学月刊, 2013, (10): 53-56

[12] 欧几里得. 几何原本(兰纪正等译). 西安: 陕西科学技术出版社, 2003. 506

[13] Fauvel, J., van Maanen J. 2000. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 262-264; 272-273

[14] Jankvist, U. T. 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[15] 汪晓勤. HPM 与初中数学教师专业发展: 一个上海的案例. 上海 HPM 通讯, 2012, 1(1): 13-24; 数学教育学报, 2013, 22(1): 22-26

[16] 王进敬, 汪晓勤. 运用数学史的相似三角形应用教学. 数学教学, 2011(8): 22-25; 32

[17] 陈锋, 王芳. 基于单德林双球模型的椭圆教学. 上海HPM通讯, 2012, 1(1): 50-57; 数学教学, 2012, (4): 5-8

[18] 方国青, 王芳. HPM 视角下"数系的扩充与复数的引入"课例研究. 上海HPM通讯, 2012, 1(3): 64-73; 数学教学, 2013, (4): 29-32

[19] 王芳, 刘智敏. 不等号: 从历史到课堂. 上海HPM通讯, 2013, 2(5): 8-14; 中学数学月刊, 2013. 待发表

理论探讨

HPM 领域的设计研究：流程、特点与意义

王 科

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘要：针对 HPM 研究领域面临着理论基础与研究方法缺乏的现状，本文首先提出设计研究作为 HPM 研究领域的主要研究方法，并定义具有 HPM 研究领域特色的设计研究，梳理设计研究五个操作步骤即调研与准备、开发与设计、执行与操作、分析与评估以及推广与应用，归纳总结设计研究的主要特点，最终建立了 HPM 的设计研究模型图。其次，阐述了设计研究对于 HPM 研究领域的重大实践意义与理论意义，其中建立了 HPM 研究的实践模型。

关键词：HPM；设计研究；实践模型

自从 1972 年在第二届国际数学教育大会上成立了数学史与数学教学关系国际研究小组(International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM)以来，数学史与数学教育关系就成了数学教育的重要研究领域之一[1]。然而，由于数学史本身难以理解，再加上缺乏缺乏相关的 HPM 研究理论，缺乏科学、规范和系统的研究方法 [2,3]，致使 HPM 发展滞后于 PME 的发展，且学术研究与课堂之间的鸿沟使得数学史在中学“高评价、低应用”的境遇，迄今仍未得到实质性的改善。因此，HPM 研究领域急需一种科学规范的研究方法来推动 HPM 研究的发展，而本文将把设计研究引入 HPM 领域，定义具有 HPM 特色的设计研究，建立设计研究模型图，分析设计研究对 HPM 研究的理论与实践意义，并创造性地整合了 HPM 研究和设计研究为一体即 HPM 研究的实践模型，期望本文在 HPM 研究的理论方面作出些许贡献。

1 何谓 HPM 研究领域的设计研究

最早提出设计研究的是安.布朗(Ann Brown)和阿兰.科林斯(Alan Collins)。由于教育研究是一个跨学科的领域，许多教育研究成果是一套课程、一种教学方案或一套教学环境设计，

布朗 (1992) 认为应该将教育研究视为一种设计，目的在于发展出可以用在实际中的理论，并依此理论设计教学方案，进而改进教学[4]。之后，科林斯(1992)，霍金斯(Hawkins)和科林斯(1992)[5,6]等人提出采用这种方法进行教育研究。科林斯 (1992)认为，设计教育产品时要考量许多复杂的因素，这个考量似在一个包含许多因素的设计空间里思考不同变量对设计效果的影响。研究者可通过设计研究能够以较少的实验来系统地探讨设计空间，并将研究结果应用复杂的教学环境中[5]。

由于设计研究本身仍在发展，且对于设计研究的定义，目前学术界也没有达成一致，不同的研究者对设计研究有着不同的理解。因此，笔者在巴拉布和斯夸尔(Barab & Squire)[7]以及王和汉纳芬(Wang & Hannafin)[8] 的基础上，定义了HPM研究领域的设计研究：是一种探究学习的方法论，旨在设计一些HPM视角下的教学案例，在真实的教学环境去实践，通过不断地对其进行修正与改善，从而最终达到对教学产生积极影响，并对其作出阐释。整个过程通过五个步骤即调研与准备、开发与设计、执行与操作、分析与评估、推广与应用的迭代循环过程修正或产生可靠的理论，并以此来促进HPM研究的理论与实践的发展。

这个定义突显设计的探究特性，设计与革新紧密相连，本质是一种推陈革新的活动。设计研究者需要在理解教与学的情况下，不断通过改善教学设计以适应学习情境，并期望能形成有效的知识和原理，发展理论并促进教学。

1.1 HPM 研究领域设计研究的一般步骤流程

有关 HPM 研究领域的设计研究的流程，在参考诸多学者的观点之后，笔者将其归纳为具有 HPM 特色的五个阶段，即分调研与分析、开发与设计、执行与操作、分析与评估，应用与推广，其中，从调研与准备阶段到分析与评估阶段可以反复循环如图 1：

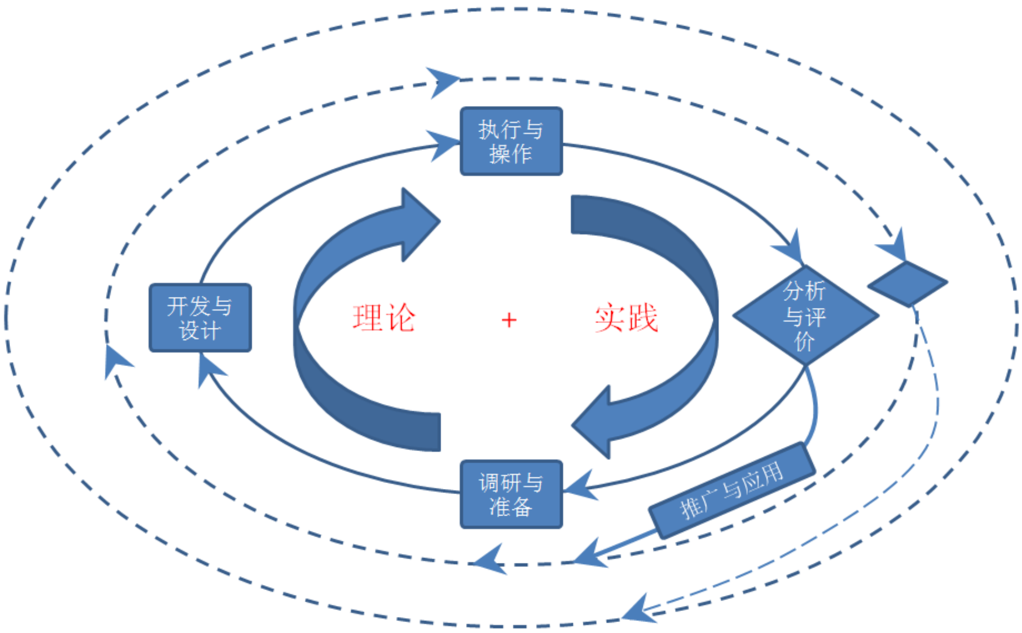


图 1 设计研究的五个阶段模型图

1.1.1 调研与准备

调研与准备阶段是指从确定问题，调查分析教学需求，查阅相关文献，确定 HPM 视角下初步可行的创新性想法。即研究者要针对某个教学实践中的问题，寻找 HPM 研究有关的理论基础来进行设计；而建立理论基础的方式有三种：直接引用理论、修改现有理论，或是进行文献探讨自行建立理论；之后，根据之前的调查教学需求，整理文献，理清理论、设计、教学三者之间的关系，由此产生 HPM 视角下的初步设计框架，为开发与设计阶段做好准备。

1.1.2 开发与设计

开发与设计阶段是指根据有关 HPM 理论基础，完成 HPM 视角下的设计原型的过程；即结合初步设计框架，再根据相关理论、问题、研究对象和学科内容之间的关系，形成可能的猜想并产生 HPM 视角下的设计原型。在此阶段，研究者需要确定研究的具体教学情境以及资料的收集方式，而确定研究教学情境时，要考虑推广研究成果的生态效度。思考设计的角度可以从教学问题、理论有关的因素和设计产品的潜在使用者等不同层面着手。

1.1.3 执行与操作

执行与操作阶段是指在真实的教学环境中实施 HPM 视角下的教学设计，并收集数据，此阶段需要不同参与者之间的积极配合，如教育研究者，执教者以及学习者等相关人员。收集资料时需兼顾质性数据与量化数据，质性数据将提供丰富的文字描述使人了解教学设计实施的详细过程，这有助于研究者形成有关教学效果的轮廓，例如视频、访谈等。而量化资料

让研究者建立有关 HPM 视角下的教学案例和学习之间的统计模式，这使得研究者能以更简洁的方式来了解各不同因素的关系，如测试卷分数、问卷编码分类等。

1.1.4 分析与评估

分析与评估阶段是指在收集所有的资料后，对测试结果、收集的资料进行分析，回溯分析，回顾整个研究过程，再根据分析结果修正教学设计，其中实施教学是在真实的教学情境中进行，实际检验前阶段所获得的 HPM 视角下的教学设计，以检测根据 HPM 理论所设计的教学案例的有效性。如果分析的结果与预期差距过大，就必须再回到第一阶段，重新修改理论以及建立新的假说与修正或设计新的案例，循环、精致化教学设计，如图 1。然后回到执行与操作阶段进行测试，再回到分析与评价阶段进行分析如此反复进行，直到测试结果更加符合理论预期及情境需求。随着越来越肯定 HPM 教学设计的成效，研究者要：逐渐扩大测试的规模，以确认在不同的情境中能够将理论假说与研究结果予以复制和推广。

1.1.5 推广与应用

推广与应用阶段是将 HPM 视角下的教学设计推广到教育界，让教师在实际教学时，采用 HPM 视角下教学设计，并评估推广的效果[25]。设计研究的最终成果有两部分组成，即理论成果和实践成果，理论成果即修正与完善相关理论，或建立新的 HPM 理论；实践成果即开发出新的成功的 HPM 视角下的教学设计。同时，以文章来展示 HPM 视角下教学设计的原理、方法、理论与结果等内容，可以作为其他 HPM 研究设计者的参考，也可为适应新的教学环境再次修改，因此推广仍会再次回到设计研究的开始阶段，再次执行设计研究循环。但是这个循环跟之前的循环是有差别的，在整个设计研究循环中，这个过程相当于总结性评价，并且这个循环更容易得到较完善的推广结果。图 1 所示模型，有三个椭圆圈，第一个是实线圈，另外二个是虚线圈。在此用离心运动原理来解释：图中的实虚圈是开始阶段，各方面的努力程度较大，需要花费的时间精力也是最强的。设计的产品类似于地球上要发射的卫星，理论与实践组成了地球的内核。众所周知，引力是随着离地球距离变大而变小。即在第一个圈（实线圈）中，教学设计需要经过几轮循环（得到加速），使得到的设计产品一次比一次完善，并能够进入推广与应用阶段（速度足够大），即进入第二个圈（虚线圈）用离心原理来说，即产品的速度越来越快，达到脱离实线圈（第一轨道圈）的引力的程度，进入第二轨道，我们知道第二个轨道的引力比第一个轨道要小，所以，产品经过推广更容易进入第三个圈（虚线圈）即循环的次数越来越少。

总的来说，在 HPM 研究领域中，运用设计研究是一个周期较长的过程，不同研究阶段

可能由不同人员负责，而参与这项设计研究的团队成员也可能是跨领域的，具有不同背景，而研究过程需要研究人员共同讨论，一起分析结果，所以，研究者需要严格规定操作程序并观察教案的使用情况，以确保整个研究过程中测量的信度和效度。只有详尽描述收集资料的过程并明确定义分析的准则，才能够在推广与应用阶段，根据具体教学情境进一步复制与普遍化研究成果，并确保整个研究仍具有内在的一致性。

1.2 HPM 研究领域设计研究的特点

结合诸多学者的观点，笔者总结了 HPM 研究领域的设计研究的几个特点如下：

1.2.1 研究目标的多元性

研究目标的多元性指的是设计 HPM 视角下的教学案例、提升教与学、建立或修正理论。设计 HPM 视角下的教学案例，即根据现有的理论或拓展现有的理论或建立自己的理论来设计 HPM 视角下的案例，而设计的案例是为了解决教与学中的实际问题，用来改进数学教学工作，提高质量和效益，解决教学中的实际问题，同时也是促进理论发展的策略，在循环的教学过程中对教学案例所对应的理论基础不断地进行系统化的检验与修正，使得理论能够超越一定的限制，最终产生一组特定的理论架构。所发展的理论必须能描述、说明、或解释实际教育情境下的学习本质，从而理论又用来指导改进 HPM 视角下教学案例的设计，并最终形成螺旋式上升趋势。这就是研究目标的多元性。

三者之间的关系是理论的建立与 HPM 视角下教学设计都是为了改善教与学，帮助教师教学与提升学生的学习成效。教师对于教学的问题与学生所面临的学习困难有切身的体会，而研究者能够从理论基础探讨如何解决这些实务问题，设计研究联结了教育研究者与教师，促成两者的合作，进而改善教育效果，使得三个研究目标形成一个有机整体。

1.2.2 研究环境的情境性

情境性是指 HPM 研究领域的设计研究是在实际教学环境中进行的，目的是为了让研究结果能有效解决实际教学问题、提升学习成效。然而，实际的教学系统非常复杂，具有开放、复杂等特点。教室是一个开放的环境，不同因素会互相影响，这使得要在教室进行研究的变项控制并不容易。所以，在研究过程中，研究者必须作详尽的记录或摄像，如学生的对设计

的反应结果，创新部分如何起作用，本身如何改进，变化等等。同时，HPM 研究领域的设计研究提倡在研究有关教师教学与学生学习的问题时，并非完全在自然的情境下进行，研究者可以根据具体情况先在控制环境中进行小规模的实施测试，并依据初步的测试结果来修正理论，再依此为基础，在相对复杂的场景中扩大测试范围，再次修正理论，最后要在实际的教学情境中检验所建立理论的效度与设计案例的成效。

1.2.3 研究过程的系统性和循环性

系统性表现为 HPM 研究领域的设计研究的开展有一般的操作程序，是一个由调研与准备、开发与设计、执行与操作、分析与评估和推广与应用五个环节构成循环往复的运作系统。而其中的前四个环节又是一个螺旋式的发展过程，即不断地修正理论，改善产品设计，在教学情境中实施测试产品，并详细地分析评估设计的产品，经过若干次循环之后，形成较完善的产品，并进入到推广阶段，再次循环。而整个设计研究的计划应有充分的灵活性和开放性，因为 HPM 研究领域的设计研究不同于自然科学研究，不能简单地集中表现出理论与实践结果之间的必然线性关系，所以要不断地观察与反思，特别要重视研究中出现的新情况、新问题、新想法，并跟据研究中的实际情况，研究者可以部分地修改设计，修正理论。

1.2.4 研究方法的兼容性

HPM 研究领域的设计研究并不排斥其他教育研究方法（调查研究法观察法、比较研究法、测验法、实验研究法、经验总结法、理论研究法等）之外的某种特殊的研究方法，而是在研究中，根据研究问题的性质，研究过程的不同目的（如现状调查、收集实施行动后的有关资料，对教学实验结果的评价等）及研究的实际情境，从已有的各种研究方法中灵活选择有关方法。如可以运用调查研究法、测验法收集资料、参照实验研究法进行教育实验，运用理论研究法对实验结果加以科学分析和理论概况等。

由上述可知，设计研究的研究目的包括开发 HPM 视角下的教学设计、改进教与学、修正或建立理论三个层面，研究环境强调在真实的教学情境进行研究的重要性，研究过程具有系统性和循环性，以及研究方法的兼容性。

2 设计研究对 HPM 研究领域的理论意义

HPM 研究领域缺乏扎实的理论基础，缺乏行之有效的研究方法。HPM 研究者面临的是如何架设 HPM 理论与实践连接之桥梁，使得教师知识领域、数学教育者知识领域和数学史专家知识领域(TRH)三个领域之间真正的互动起来。笔者将 HPM 研究和设计研究有机整合在一起，并建立 HPM 三棱锥模型（图 2），即通过设计研究把三棱锥模型真正的运转起来，解决了操作方面问题。

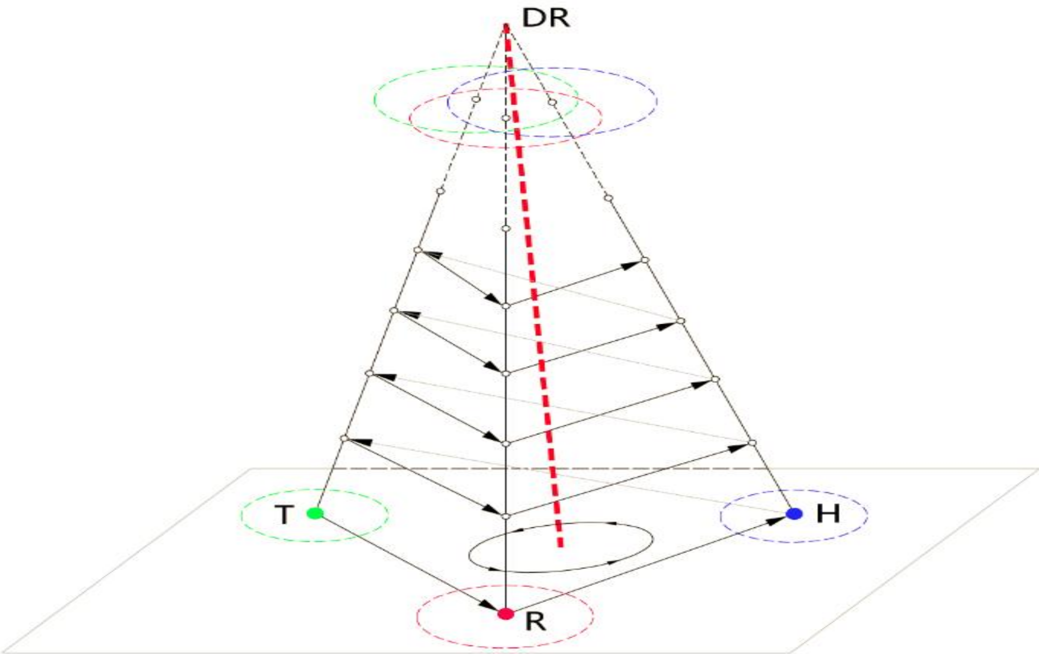


图 2 HPM 研究的实践模型

图 2 中平面上的黑色圆环表示设计研究的循环圈，在设计研究过程中，三个知识领域相互融合，工作合作设计 HPM 教学产品，红色的三棱锥高表示设计研究是整个 HPM 研究的动力轴，带动着三个知识领域不断地螺旋式上升。具体地说，在整个过程中，三棱锥模型把三个领域的参与者紧密地联系在一起，形成一个有机整体，而设计研究（DR）如同发动机，带动着三个知识领域螺旋式上升。通过设计研究中的循环迭代即不断地按照调研与准备、开发与设计、执行与操作、分析与评估去检测三个领域合作设计的 HPM 教育产品的效果，直到达到期望状态，再进行推广与应用，并最终形成一个比较完善的 HPM 教育产品。在此过程中，这三个领域的参与者都不同程度地扩大了自己的知识领域，相互的交集部分随着不断的循环迭代在逐渐增大。同时，设计研究推动着三个不同领域相互融合，不断地通过螺旋式上升而提高各自水平层次及知识领域。如图 2 中，椎体上部的三个虚圈的状态。当然，最理

想的状态是图中三棱锥的顶点即，三个领域融合成一个综合区域。

综上所述，设计研究为 HPM 研究提供了新的科学的研究方法，它不仅统筹各方研究人员于一体，而且在真实的教学情境中，有计划、有步骤、有系统地通过不断的循环迭代改进教学设计，在提高教学质量的同时，不断发展和完善理论，甚至建立新的理论，并使得 HPM 研究成果丰富可靠。同时，设计研究具有超强的兼容性，设计研究方法与各种传统研究方法在功能上是互补的。教育研究者研究过程中应当采取开放态度，不断地促进设计研究在 HPM 研究领域的发展适当地运用多种研究方法来支撑 HPM 的研究领域的理论发展与创新。

3 设计研究对 HPM 研究领域的实践意义

设计研究作为一种系统化而又具有灵活性的方法或者方法论，它强调在真实教育情境中，基于研究者与实践者的合作，通过循环调研与准备、开发与设计、执行与操作、分析与评估以及推广与应用五个步骤来改进教育实践， 并修正或建立教学设计的原则与理论。它是对教育项目、过程和产品的设计、开发和评价的一种系统化研究[12]。系统性特点可以有效组织 HPM 研究者与实践者，进行一系列操作程序，并不断地改善 HPM 教学设计，修正 HPM 理论，具有促进实践创新与理论创新的双重功能。循环型特点体现在使得三棱锥模型真正可以运转，即在教学情境中实施测试 HPM 教学设计，并详细地分析评价教学设计，正是经过若干次循环之后，不断完善教学设计，完善理论，使得最终的 HPM 教学设计达到可以推广的程度。因此设计研究可以很好地实现 HPM 研究的目标，可以为 HPM 研究实践提供路径。设计研究非常贴切 HPM 研究领域的需要，用其来指导 HPM 研究具有极高的实用性与操作性。

值得一提的是，采取设计研究方法，需要HPM研究者与教学实践者密切协作。在真实的教学情境中发现急需解决的教学问题和根据问题确定开发教学设计的目标，基于历史相似性原理，发生教学法或借鉴其他相关理论，设计HPM视角下的教学方案，并在真实教学境况中实施教学方案，同时根据学生的反馈来检测教学设计的效用，发现设计的缺陷，从而提出设计改进方案和新的理论假设，通过数次循环迭代过程优化相关理论和提升教学实践的效果，并最终形成可以用来推广与应用的成功案例，建立HPM领域的相关理论。因此，这种研究范式对于提升HPM研究的理论水平和实用价值的作用无疑是巨大。同时，为了促进HPM领域研究的不断发展与创新，广大的HPM研究者应学习和践行设计研究方法，探索真正适合HPM研究领域发展的设计研究。

4 结语

设计研究为HPM研究领域带来了新的研究方法，使得该研究领域的研究方法上缺陷得以弥补。同时，为HPM研究的理论发展带来了新的机遇，即通过设计研究的实践HPM教学，循环论证HPM视角下教学案例，并在次过程中不断修正与完善HPM理论或建立的HPM理论。对于HPM研究者来说，当前地巨大的挑战是如何更好地运用设计研究来提升HPM研究理论，并逐步修正并完善具有HPM特色的设计研究。

设计研究是一个复杂的系统，有着广泛的使用范围，为诸多学科提供了一个合适的研究途径，当然包含了HPM研究领域。然而设计研究对于大多数HPM研究者来说，还知之甚少，为此，需要HPM研究者在HPM的教学研究实践中不断地推广运用设计研究方法，并探索真正适合HPM研究领域的设计研究，使得设计研究成为真正连接真实教学情境与HPM研究领域之间的桥梁，逐步推动着HPM研究理论发展与完善。对于如何在HPM研究领域中推广的问题，则需要广大数学教育研究者从书斋中走出，走进教学，深入到广大教育工作者中，了解教学现状，发现教学问题，应用设计研究方法，不断将HPM理论的研究成果应用到教学中，并促进三个知识领域的进一步融和，加速数学史教学价值的溢出，发展与完善HPM理论。

参考文献

[1] 汪晓勤,张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006,15(1): 16-18.

[2] 黄友初, 朱雁. HPM 研究现状与趋势分析[J]. 全球教育展望, 2013, 42(2): 116-123.

[3] 康世刚, 胡桂花. 对我国“数学史与中小学数学教育”研究的现状分析与思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18(5):65-68.

[4] Brown A. L. Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Setting[J]. Journal of the Learning Science. 1992, (2):141-178.

[5] Collins A. Toward a Design Science of Education [A]. In E. Scanlon & T.O' Shea (Eds),New Direction in Educational Technology (pp.15-22)[C]. 1992, Berlin: Springer Verlag.

[6] Hawkins,J. & Collins,A. Design-Experiments for Infusing Technology into Learning[J]. Educational Technology, 1992, 32(9): 63-67.

[7] Barab S. & Squire K. Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground [J]. Journal of the Learning Science, 2004, (13/1): 01-14.

[8] Wang, F. & Hannafin, M. J. Design-Based Research and Technology-Enhanced Learning Environments[J]. Educational Technology Research and Development, 2005, 53(4): 5-23.

[9] Bannan-Ritland,B. The Role of Design in Research: The Integrative Learning Design Framework[J]. Educational Researcher, 2003, 32(1): 21-24.

[10] 王佑镁. 教育设计研究：是什么与不是什么[J]. 中国电化教育, 2010,(284): 7-14.

国外关于数学史教育价值的研究综述

彭刚，汪晓勤
（华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引言

1972 年，在英国 Exeter 召开的第二届国际数学教育大会上，数学史与数学教学之间关系的国际研究小组（International Study Group on the Relationship between History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM）正式成立，并于 1976 年开始隶属于国际数学教育委员会（International Commission of Mathematical Instruction，简称 ICMI）。

如今，对于大多数数学教育工作者、包括一线教师而言，HPM 已不再是一个十分陌生的名词，同时，HPM 的内涵常常被理解为“数学史在数学教学中的渗透”或者“数学史融入数学教学”。

HPM 领域的研究主要包括以下几个方面：关于“为何”和“如何”的探讨；教育取向的数学史研究；历史相似性研究；融入数学史的教学设计与教学实践。其中，“为何”的问题是数学史融入数学教育的核心问题，HPM 成立前后，西方学术界对此都做了大量的探讨，其主旨在于阐明数学史的教育价值，以更好地发挥数学史的教育功能。

本文追溯了早期国外（主要是西方）对数学史教育价值的有关论述，并对 HPM 成立之后近几十年的相关研究进行了梳理，试图较为清晰地揭示出数学史对数学教学的意义所在。

2 早期西方关于数学史教育价值的论述

1742 年德国数学家海尔布罗纳（J.C.Heilbronner，1706-1747）的著作《世界数学史》以及 1758 年法国数学家蒙蒂克拉（J.E.Montucla，1725-1799）的著作《数学史》相继问世，标志着数学史作为一门独立研究领域的出现。随着该领域研究的深入和普及，数学史的教育意义逐渐被一些西方数学史家所倡导。

英国著名数学家德摩根（A.De Morgan，1806-1871）不仅强调数学史对数学研究的重要性，而且也强调数学教学中应遵循的历史次序，比如他认为教师在教代数时，不要一下子把新符号都解释给学生，而应该让学生像最初发明这些符号的人那样从完全的书写方法到简写

的顺序学习符号[1]。德摩根的这种观点与我们今天所说的发生教学法十分类似。

丹麦著名数学家和数学史家邹腾（H.G. Zeuthen,1839-1920）在 1876 年的一篇数学史论文中就强调过数学专业学生学习数学史的必要性，认为“学生不仅获得了一种历史感，而且通过从新的角度看数学学科，他们将对数学产生更敏锐的理解力和鉴赏力”[2]。

在美国，自19世纪90年代就有数学史家提倡将数学史作为教学工具引入数学教学之中。著名数学史家卡约黎（F.Cajori, 1859-1930）指出，一门学科的历史知识乃是“使面包和黄油更加可口的蜂蜜”，“有助于使该学科更具吸引力”[3]，在 1893 年出版的《数学史》（A History of Mathematics）前言中他还特别强调数学史对数学教师的重要价值，认为数学课堂中的数学史不但可以增加学生的学习兴趣，并且在历史的解说中，学生还会明白数学并不是一门枯燥呆板的学科，而是一门不断进步的生动有趣的学科[4]。HPM 先驱者、美国著名数学史家和数学教育家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）深信，数学史揭示了人类文明中最珍贵、最有意义的东西，先辈们的成就应该成为获取更大目标的手段[5]，并且由于数学的历史发展过程展现了不同方法的成败得失，因而教师可从中汲取思想养料，少走弯路，获取最佳的教学方法 [6]。

到了 20 世纪，数学史的教育价值继续受到欧美数学家、数学史家的倡导。法国著名数学家庞加莱（H.Poincaré, 1854-1912）在出版于 1908 年的《科学与方法》中的名言“预见数学之未来的正确方法是研究它的历史和现状”常常为后人所引用，庞加莱甚至认为数学课程的内容应完全按照数学史上同样内容的发展顺序展现给读者[7]。在荷兰，著名数学史家迪克斯特休（E.Jan Dijksterhuis, 1892-1965）提出了数学史在师范教育中的重要性，并认为数学史知识对于师范生而言“是一种宝贵的、不可或缺的财富，它将使他们能够令人满意地完成自己的职责”[8]，同样持有这种观点的还有享誉世界的 20 世纪著名数学家和数学教育家弗赖登塔尔（H.Freudenthal, 1905-1990）[9]。

1969 年，美国数学教师协会出版了第 31 期年鉴《数学课堂中的历史话题》（Historical Topics for the Mathematics Classroom），这是一本直接为教学服务的数学史与数学教育文献。同一时期，美国著名数学家、数学史家克莱因（M.Kline, 1908-1992）提出了“每一位中学和大学数学教师都应该知道数学史”的观点，并强调“数学史是教学的指南”[10]；在其名著《古今数学思想》（Mathematical Thought form Ancient to Modern Times）的序言中，克莱因进一步指出数学史还有助于给学生呈现一个较为完整的、相互联系的数学面貌，有助于改变学生一些错误的数学观念（比如数学家们几乎理所当然地从定理到定理，也能克服任何困难），使学生认识到数学家在研究数学过程中也经历了艰苦漫长的道路，并因此可以从中获取心理

安慰和继续前进的勇气[11]。

到 20 世纪 70 年代，数学史对数学教育的意义已成为许多西方学者的共识，HPM 组织也应运而生。

3 HPM 成立以来西方关于数学史教育价值的研究

HPM 成立之后，西方学者对数学史的教育价值进行了更为深入的研究，其方式主要可分为两种：列举式和分类式。

(一)列举式

1991 年英国学者、HPM 前任主席福弗尔（John Fauvel）总共列举了数学教学中运用数学史的 15 条理由[12]：

(1)激发学生的学习动机；

(2)给予数学以人文的一面；

(3)有助于课程内容顺序的合理安排；

(4)展现数学概念的发展过程，有助于增进学生对概念的理解；

(5)有助于学生数学观的改变；

(6)在古今方法的对比中有助于现代方法价值的确立；

(7)有助于发展多元文化进路；

(8)提供探究的机会；

(9)历史上的数学发展障碍有助于解释今天学生的学习困难；

(10)学生由于知道并非只有自己学习数学会有困难，从而得到心理安慰；

(11)培养优秀生的远见卓识；

(12)有助于解释数学在社会中的作用；

(13)使数学不那么可怕；

(14)有助于学习者保持对数学的兴趣；

(15)为教师提供跨学科合作的机会。

福弗尔的总结包含了很多的关注点，既有学生的、教师的、课程的，也有心理的、文化的，因而其观点得到了广泛的认同。

(二)分类式

福弗尔的上述理由虽然十分全面，但并未对之进行梳理以及给出一个较为清晰的分类。

2000 年，ICMI 研究系列中的《数学教育中的数学史》(History in Mathematics Education:

the ICMI Study）编辑出版，如今已成为 HPM 领域中的经典著作之一。在该书第 7 章，塔纳克斯和阿克维（Tzanakis & Arcavi）等学者[13]从数学学习、对数学本质和数学活动的认识、教师的教学知识、数学情感、数学作为文化活动的鉴赏等五个方面详尽地说明了数学史对支持、丰富和改进数学教学的作用。

在塔纳克斯和阿克维的基础上，古利科斯和布洛姆（Gulikers & Blom）[14]则建立了一个三维分类框架，并在每个维度上分别论述了数学史对于教师和学生的价值，见表 1。

表 1　数学教学中运用数学史的理由：Gulikers 和 Blom 的分类

类别	教　师	学　生
概念视角	（1）个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展过程（历史发生原理），因而数学历史是数学教学的指南； （2）学生的错误和认知障碍与数学史上的错误和认知障碍是有关联的，了解历史上的重要时刻可以为教师提供预测学生认知障碍的工具； （3）丰富教师的知识储备和教学资源； （4）有助于更好地理解数学的本质。	（1）帮助学生理解数学； （2）使学生获得心理安慰； （3）通过古今数学方法的对比，拓宽学生的思维； （4）帮助学生以非线性方式（即非演绎方式）学习； （5）提供另类方法，促进学生思考。
文化视角	（1）发展多元文化进路； （2）加强数学与其他学科之间的联系。	（1）有助于解释数学在社会中的角色以及数学发展的内外因； （2）展现数学是人类的文化活动； （3）消除数学学习上的性别差异，鼓励女生学习数学。
动机视角	（1）创造活跃的课堂氛围； （2）获取有用的史料，激发教师对所教主题的热情。	（1）增加学生的学习兴趣； （2）创造学生的学习动机； （3）使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心； （4）培养优秀生的远见卓识。

上述研究均从数学史作为教学的“工具”来论述数学史的教育价值。丹麦学者詹克维斯特（Jankvist）首次提出“目标说”[15]，将数学史对于数学教学的作用归为“作为工具的数学史”

和“作为目标的数学史”两类（见表 2）。

表 2　数学教学中运用数学史的理由：詹克维斯特的分类

类别	数学史的价值	
作为工具的数学史	数学史是数学学习的激励因素	（1）有助于保持对数学的兴趣； （2）给予数学更人文的一面； （3）使数学不那么可怕； （4）心理安慰。
	数学史是数学学习的认知工具	（1）历史提供不同观点和不同表征方式，从而可以改善教学； （2）历史现象学为假想的学习发展轨迹做好准备； （3）学生的认识论障碍也出现于概念的历史中，故历史不仅有助于确定这些障碍，还有助于克服这些障碍。 （4）历史相似性/重演论：个体数学理解的过程与数学历史发展过程具有相似性。
作为目标的数学史	数学史是数学的一部分，数学在不同时空的演进是学习的一个目标	数学史可以让学生了解到： （1）数学是经历演进过程的学科，而不是天上掉下来的东西； （2）是人类参与了数学的演进； （3）历史上数学通过许多不同文化演进； （4）不同文化都对数学的形成产生过影响； （5）内部因素和外部力量都推动了数学的演进。

由于詹克维斯特所论述的“作为目标的数学史”实质上是强调数学史的文化功能，本身也可以从“工具”的角度去解释，因此虽然其分类方法比较新颖，但不如塔纳克斯和阿克维的分类以及古利科斯和布洛姆的分类清晰。

4 结语

数学史教育价值的研究是 HPM 的灵魂，也是将数学史融入数学教学的意义所在。国外关于数学史教育价值的研究已经比较成熟，相对而言，国内的研究还停留在罗列的阶段，重复性的论述也很多，因而需要我们更深入的理论研究与实证研究，建立和完善一些较为成熟

的分析框架，从而更深刻地揭示出数学史的教育价值。

参考文献

[1] Howson G. A History of Mathematical Education in England [M].Cambridge: Cambridge University Press, 1982.87–92.

[2] Kleiman S L. Hieronymus Georg Zeuthen [J]. Contemporary Mathematics, 1991, (123): 1–13.

[3] Cajori F. The pedagogic value of the history of physics [J]. The School Review, 1899,7(5): 278-285.

[4] Cajori F. A History of Mathematics [M]. New York: Macmillan, 1893. 1–4.

[5] F. E. Brasch. Obituary: David Eugene Smith [J]. Science, 1944, 100 (2595) : 257- 259.

[6] Smith D E. Teaching of Elementary Mathematics [M]. New York：The Macmillan Company, 1900. 42-43.

[7] Harper E. Ghosts of Diophantus [J]. Educational Studies in Mathematics, 1987, (18): 75–90.

[8] Gert Schubring, Éliane Cousquer, Chun-Ip Fung, et al. History of mathematics for trainee teachers [A]. In: Fauvel J, van Maanen J. (Eds.) History in Mathematics Education: the ICMI Study [C]. Boston: Kluwer, 2000. 91-142.

[9] Freudenthal H. Should a mathematics teacher know something about the history of Mathematics [J]. For the Learning of Mathematics, 1981, 2(1): 30–33.

[10] Albers D J, Alexanderson G L. Mathematical People: Profiles and Interview (Second Edition)[M]. Boston: Birkhauser, 2008. 175.

[11] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Volume 1) [M]. New York: Oxford University, 1972. xi.

[12] Fauvel J. Using history in mathematics education [J]. For the Learning of Mathematics (Special Issue on History in Mathematics Education), 1991, 11(2)：3-6.

[13] Tzanakis,C., Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom：an analytic survey [A].In：Fauvel J, van Maanen J. (Eds.) History in Mathematics Education: the ICMI Study [C]. Boston: Kluwer, 2000.201-240.

[14] Gulikers, I., Blom, K. ‘A historical angle’: A survey of recent literature on the use and

value of history in geometrical education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2001,47(2): 223-258.

[15] Jankvist,U T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2009, 71: 235-261.

数学史融入课堂对学生数学思想的启迪

—谈数学史料融入数学教学的三年实践尝试

沈金兴
（浙江省桐乡市凤鸣高级中学）

1 引言

众多研究表明，数学史对数学教育的作用已得到广大数学教育工作者的认同，但在具体实践过程中却是“高评价，低应用”。原因是多方面的，比如许多教师缺乏必要的数学史知识，尤其是缺少把数学史与教材中的数学知识相结合的直接可用史料。尽管现在的新课程教材中，安排了一些相应的数学史料作为阅读材料，但仍是冷冰冰的，还需要教师作进一步的深入研究，才能融入到教学中去。当然更多的是，一线教师还不知道用什么具体的方法，或者把哪些数学史内容融入到课堂中去，大多数教师仍停留在说说故事，讲讲趣闻等较低水平的应用上。

不过上述原因，都是从数学教师的角度去看待，如果换个位置，从学生的角度又如何看待把数学史料应用到数学课堂上的呢？下面笔者把三年来的实践作一梳理和回顾。

2 数学史料融入课堂的实践

笔者现在正任教高三，而这届学生从三年前一进入高中就开始授课，差不多已有三年时间。所以在这段过程中，从高一的第一学期一直到高三，在数学课堂上融入数学史料的实践过程中，按学生对此的认识来进行划分，共经历了四个阶段。

2.1 第一阶段：愿意听，没用处

在学生刚进入高一的第一学期，主要学习人教版的《必修 1》，内容是以函数为主。在数学课堂上，只要有与数学史有关的教材内容笔者都会花几分钟时间提一下。比如一开始讲集合，就提一下康托；在讲函数概念时，面对学生普遍认为的“只有能写出表达式的才是函

数"的误解，告诉他们相应的历史渊源（包括数学家们起初的认识）；在学习对数函数时，顺便提了一下对数的发明过程等等。总之，在课堂上尽量穿插一些与教材内容相关的数学史知识，包括数学家刚开始的发现和认识。笔者发现学生很愿意听这些，似乎对此很感兴趣。

临近期末时，访谈了一些学生，结果很意外。许多学生普遍认为：这些数学史知识听听是好的，可以在抽象枯燥的数学课堂上放松一下心情，但并没有想深入了解，觉得这些知识对解题没帮助，更不会对考试带来好处，即学了也没用，只要了解一下就可以了。

幸好事先已有所准备，再说学生并没有反感，至少还能在数学课堂上让他们心情愉快，这也是不小的收获。于是笔者在课堂征求学生意见：如果在讲解教材上的公式、定理或例子时，补充一些数学家们当时的解法和证法，是否有兴趣？学生立马就问：对考试有用吗？我只好如实回答：如果数学家们这些奇妙的想法对你有所启发的话，肯定对解题有好处的，当然你无法领悟的话，讲了也可能没多大帮助。这时一些数学成绩好的同学立刻接话：要讲的，让我们知道一下数学家是怎么想的也是好的嘛！于是全班同学异口同声：那就讲吧，也许有好处。就这样，在第二学期我开始有意识地介绍数学家们的想法了。而学生对此也有了新的认识。

2.2 第二阶段：喜欢听，有兴趣

高一的第二学期，学习的内容是人教版《必修 4》与《必修 5》，主要是以《三角函数》为主，其余就是《数列》与《不等式》。而所有这些内容都是以公式推导、证明为主，然后就是应用。因此在这个学期的数学课堂上，除了一如继往结合教材内容介绍数学史趣闻外，还针对某些概念或规定，讲解一下数学家们当时的想法，让学生理解或明白，为什么要这样规定。否则学生会对数学知识产生疑问：数学中怎么会有这么多的规定？而且还是人为的规定?不这样规定可以吗？数学究竟是科学还是一些规定组成的知识呢？等等，只有让学生明白了数学家这样规定的合理性与科学性，才会让学生理解，才会认可它。除此之外，还对教材中的公式、定理介绍一些数学家们的做法，以期对学生的思维有所启迪。

案例 1 两角差余弦公式的推导

在上《必修 4》3.1.1 节的内容：《两角差的余弦公式》时，教材上介绍了两种方法。而当 $\cos(\alpha-\beta)$ 公式得出后，只要把 $-\beta$ 代入 β 就得 $\cos(\alpha+\beta)$ 公式。教材上的两种方法，一种是利用单位圆中的三角函数线证明，另一种是用向量的知识证明。由于向量法易理解，故现在的一线教师大多数采用向量法。如此一来，教师就不再作几何证明的尝试，学生也就根本不知道和角公式还有几何推导法。对高中生而言，如果只需涉及初中的平面几何知识或

两点距离公式就可解决，似乎更适合高中的数学课堂教学。而在三角公式的教学中引入几何证法，不仅能加深学生对公式的理解和记忆，同时也将丰富我们的教学方法，起到启迪和培养学生思维的发散性。所以我在课堂上除了教材上两种方法外，还介绍了利用直角三角形的边角关系的“图说一体”方法与利用距离公式的“柯西方法”。

不久，一名姓陶的学生，在做教材上的习题 3.1B 组第 4 题时，发现可借鉴我在课堂上讲的这些方法，于是告诉了我。笔者不禁暗喜，看来学生已能接受并理解数学家们的方法了。当我告诉他说这道习题就是 2010 年四川省的一道高考题时，学生非常兴奋。于是我让他整理一下这道习题的证法，并与高考题相联系写成一篇小论文《多角度证明教材习题》，后发表在《中小学数学》2012 年第 7 期上。

2.3 第三阶段：认真听，会思考

当学生看到班中同学能根据数学家们的想法，解决习题甚至高考题，并能撰写成小论文发表时，开始改变态度了。他们觉得掌握一些数学家们的方法还是有用的，因此对我在课堂上补充的一些数学家们用的方法开始认真听讲，并力求理解。

比如，在讲解《等比数列前 n 项和》这一节时，教材上只介绍了一种方法：错位相减法来推导等比数列求和公式，而我在课堂上又补充了三种方法，分别是古埃及人的方程思想，欧几里得《几何原本》中介绍的利用合比与分比性质的两种方法，这使学生大开眼界，听得津津有味。

到了高二，学校积极响应浙江省的二轮课改，大量开设校本课程，并实行走班制。我独立开发了一门课程，名为《中学教材中的数学文化》，安排的内容是紧跟人教版数学教材中的知识，并进行适当的补充、拓展，还介绍相关知识的数学史料背景。

选这门课程的共有 50 多人，有来自各个班的学生（包括文科班的学生），但大多数是我任教的班级里的学生，因为他们觉得这门课有利于高考。每周一节课，让我有更多的时间去讲述专题，去展示数学家们的奇思妙想。比如，教材上讲《概率》这章知识时，就在这一周的校本课上介绍了概率论的诞生过程，尤其是让学生讨论费马与帕斯卡互相通信时讨论的“点数问题”，让学生重走其诞生之路。这样既让学生了解了有关概率诞生的数学史知识，又让学生体验了当时数学家们“火热的思考”。诸如此类的涉及教材中内容的相关数学史知识都在校本课上讲了。

案例 2 “形数理论”与二次幂和公式

在高一上人教版的《必修 5》的等比数列前 n 项和应用时，有一道例题要用到二次幂和

公式:$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，当时教材上只注释了一下，直接告诉公式。而到高二上《选修 2－2》的 2.3 节《数学归纳法》时，该公式是作为用数学归纳法进行证明的例子的。课后就有学生问这个公式是如何推导出来的? 因此，我决定在校本课上介绍数学史上的一些推导方法。

先向学生介绍了“毕达哥拉斯学派”的“形数理论”，并用此推导了一次幂和公式（这些已在高一上《数列》这一章时介绍过）。然后又介绍了台湾学者洪万生的“三角形方法”，最后又介绍了用“阿基米德的力学原理”来推导的方法。对历史上这么多精彩纷呈的推导方法，令学生感到匪夷所思。幸运的是，有一个姓姚的学生在课后继续思考下去，并借鉴“形数理论”与“三角形法”，把两者合二为一重新推导出了二次幂和，而且不断思考，竟然把此方法推广到更一般化的 n 次自然数幂和公式的推导。这就非常有价值，我让该生整理成文后投稿，结果发表在《中学生数学》2013 年第 6 期上。

经过校本课程每周一次的专题讲解，再加上数学课堂上随时补充的一些数学史料，不仅使学生充满了兴趣，还启迪了学生的思维，让一些学生养成了爱思考问题的习惯。比如还有一位姓钱的学生，在高二时做一道有关解析几何中椭圆的高考题，做完后并没有罢手，而是继续研究，把该题结论先推广到一般化的椭圆中，随后再把它推广到双曲线、抛物线中，使之成为圆锥曲线的一般结论，并自己编了一些题目。我觉得也很有价值，让他写成小论文后也发表在《中学生数学》2013 年第 8 期上。

显然，通过数学课堂和校本选修课上介绍的数学家们的研究方法和精神的熏陶，越来越多的学生把数学家们的方法、思想用到解题中去，并会继续思考，而且还能有自己的发现，培养了学生的数学素养和理性精神。

2.4 第四阶段：要听懂 ，善挖掘

前面提到的在讲授概念、公式、定理的数学课堂上或校本课上，介绍数学史料和数学家们的方法，那都是在高一、高二时期。可到了高三，全是复习或考试讲题，即都是习题教学，该如何融入数学史知识呢?如果是这样认为，那就是本末倒置了，纯粹是为讲数学史而讲数学史料。其实，在数学教学中融入数学史料的目的是为了启发学生，尤其是希望学生能受数学家们奇思妙想的启迪，拓展思路，发散思维。面对数学问题，不是解决好了就完事，而是能继续思考，多想想为什么？能否进一步探究，是否可推广等等。如果学生能形成这样的思维习惯，无疑就取得了成功。

比如，还有一位姓杨的学生，他在高三第一学期学 IB 内容：人教版《选修 4－4》的《极

坐标与参数方程》时，对教材中用直线参数方程来证明椭圆的一个结论，进行了继续探究。因为他发现这个结论有点类似于圆中相交弦定理，因此他先用直线参数方程证明了圆相交弦定理，然后发现这两者在本质上是一样的，可以合二为一，于是得到了椭圆的相交弦定理，最后又进一步推广，得出了圆锥曲线的相交弦定理。现也已成文《圆相交弦定理的新证法及推广》，已投稿。

这些都是两年来受数学文化熏陶后，学生逐渐形成的思维。有了这样的深刻思维，数学成绩怎么可能不好呢？所以，我任教的班级的统考成绩，从高一到高三始终名列同类平行班的前两名，且有时还会拉开其他班较多分，这在“以考定教”的学校体制中，得到了校领导的认可，也进一步坚定了我的信心，可让我放心大胆地在数学课堂上继续进行融入数学文化的实践。当然，对高三的学生来说，所讲知识能直接为高考服务，尤其是可直接解决高考题，那是学生最喜欢的了，而这就需要教师去进一步挖掘数学史上的一些结论。

案例 3 从《几何原本》中的命题到向量的应用

每年各个省的高考题中都有一道向量题，而此题往往有一定难度，且许多省都把它作为压轴题。解向量题有许多种方法，但最简洁、最高明的做法就是利用题目中蕴含的几何意义来解，但这又是最难的。因此能多挖掘一些公式、结论或几何意义来告诉学生，肯定大受学生欢迎。

欧几里得的《几何原本》第 2 卷命题 5 说：“如果平分一条线段，再将其分成不相等的两段。则由不等两段构成的矩形与两分点之间一段上的正方形的和等于原来线段一半上的正方形。”用现在的数学符号表示，即为：$ab+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，若把此命题变式，并把它写成向量形式也是成立的：$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2})^2-(\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2})^2$。

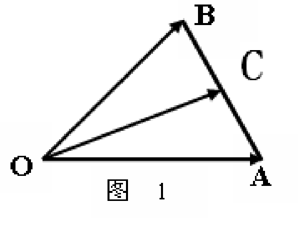


图 1

如果对此式进行几何解释，就可看成是两向量数量积的第二个几何意义：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 就是 ΔOAB 中边 AB 上的中线 OC 长度平方减去 AB 边长一半 CA 的平方（如图 1），即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{CA}\right|^2$。

用这个结论来解决许多省份高考题中的向量，可以带来非常简单的做法。比如 2013 年浙江理科卷的第 7 题，这道向量题被认为是这份浙江卷里选择题中最难的一题。确实如此，如果用其他方法去做都是很繁的，但如果用此结论做，就会很快解决，体现出数量积第二几

何意义的威力。我在高三第一学期就专门花了一节课来讲解此命题在向量方面的应用，而在以后的模拟卷中，学生用此结论来解向量题，都能较方便地解出，让学生尝到了甜头。所以学生不仅听得更认真了，而且还要听懂，能举一反三。

3 数学课堂融入数学史料的教学启示

经过一届学生差不多三年的教学实践，在把数学史料融入数学课堂教学过程中所经历的不同阶段，可得到一些启示，也为以后的实践积累经验。

（1）数学史料的融入要让学生觉得有用，让学生"高认同"

现在的学生很实际，他们学习的目的就是要考好的大学，在考试中得到高分。所以在数学课堂上融入数学史，不仅仅要教师认同，更要让学生认可，否则一切都没用。学生认为对考试有用的才会认真去学，而且要直接能用。学生问老师最多的一句话便是：学这个有用吗？故要改变学生的认知，让他们觉得老师讲这个知识对考试有帮助，这样就会有效果，不然始终会对融入的数学史料作为课堂的调味品。

（2）对数学史料的选择要符合"有利于学生解题"的原则

教师在选择数学史料时，要认真考虑，不能信手拈来，张口就说，而要符合学生的口味，即对学生解题要有帮助，这样学生才会认真听讲，努力去理解。当然，除了数学家们的解题方法、技巧之外，数学家的想法、思考过程也是可以介绍的，因为这些可启发学生的思维。

（3）要让学生尝到融入数学史料讲课的"甜头"

在实践过程中，怎样改变学生的认知，让他们觉得有用的呢？最直接的办法就是让学生尝到"甜头"，感到在课堂上听老师讲这些对解题有用，尤其是对解高考题有帮助，体会到这样的好处，才会相信老师，如案例 1。所以树立一个学生榜样很重要，让学生感到自己身边的同学，就已经能用到老师补充的数学家们的方法了，于是会奋起直追，用心听讲了。

（4）数学成绩的提高才会让学生对"融入数学史料的课堂"感到习惯、自然

教师在数学课堂上进行这样的实践，要有长期坚持的打算，不要妄想一下子就能提高成绩，不能急功近利。因为提高成绩不是一蹴而就的。相反， 也不能一下子看不到成绩的提高就偃旗息鼓。因此，首先要做到前面三条，只有当学生看到了学了"有用"的实例，才会改变认知，才会认真听。而当学生对数学家们的巧妙想法听多了以后，就会有所启迪，久而久之，潜移默化，学生的思维就会变得深刻了、发散了，学生解题的能力自然就提高了，成绩当然就上去了，于是会更相信老师，从而形成良性循环。如案例 3，此时的学生不仅认真听，还力求听懂，遇到不明白的下课就会追着老师问。这样的数学课堂，学生已经感到自然、习

惯了。

4 结语

有了一届三年较完整的实践、尝试，积累了经验，也有一定的教训。经过总结，将会在下一届更加完善。显然，数学课堂上融入数学史料，还有校本课程的补充，对提高学生成绩是大有帮助的，特别是对学生数学思想的启迪。因此，在新的下一届授课中，要做好三年规划。我准备把在高二时才开设的校本课程提前，在高一就开设，早点让学生意识到融入数学史教学的重要性，使数学课堂内外互为补充，从而相得益彰。

作为工作在第一线的数学老师，笔者将对 HPM 的实践进行到底，会一如既往地为自己和同行多探索一些教学实践方面的方法和经验。

基于 HPM 视角的对数概念教学设计

吴晨昊

（上海市进才中学）

1 对数概念的引入

1.1 背景

假设你身在十六世纪的欧洲，是个三十岁不到的年轻人。那时候，天文学发展迅速，哥白尼提出的“日心说”虽然还没有被广泛承认，但已经引起了很多学者的重视。你也对地球外的世界很感兴趣，经常遥望着天空沉思。

有一天，你坐在自家的院子里晒太阳，暖暖的阳光照在身上，特别惬意。你突然很想知道，那带来光明和温暖的太阳究竟离地球有多远。

你回到书桌前，着手建立数学的模型。这个模型并不难，只需要一点点初中的三角学知识就够了。然后，你还需要实地测量一些数据。为了减小误差，你花了不少时间去进行多次测量。几天之后，你终于获得了比较可靠的数据。

你很高兴，有了模型和数据，问题当然就迎刃而解了。你接下来要做的，无非就是一些纯数字的运算。

可是，当你重新回到书桌前着手计算时，才发现事情有多么可怕。每一个数据都是几千万甚至上亿的大数字，如果做加减法还好，如果是乘除，那简直难以想象。

不管怎样，为了你所热爱的天文学，你还是硬着头皮去做运算。显然，那是一个漫长而痛苦的过程……

终于，你获得了你想要的结果，大约是 1.5 亿公里。回首整个研究过程，你发现自己竟然将一大半的时间都花在了纯粹的数字运算上。

后来，你和其他天文学者交流，发现大家都感同身受。

这件事终于传到了数学家们的耳朵里。为了帮助天文学家们减轻工作量，数学家们开始研究如何将大数运算简化。

1.2 对数的发明

(1) 计算多位数的乘积，是非常复杂的运算。为此，我们先来解决一些特殊的多位数之间的乘积运算。例如：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

第一行表示 2 的指数，第二行表示对应的幂。

① 计算 128×256，只要第一行对应的数字相加（7+8=15），再查表，就得结果 32768.

② 计算 65536÷512，只要将对应的第一行数字相减（16-9=7），再查表，就得到结果 128.

③ 计算 16 的 3 次方，只要将对应的 指数 4 乘以 3 倍，得 12，查表得结果 4096.

④ 计算 16384 的平方根，只要将对应的 14 除以 2 得 7.

(2) 如果把上述表格的第一行向左延伸，即指数为负数时，会出现什么情况？上述运算是否仍然可行？

答案是肯定的。这样所有 2 的整数幂的乘除法运算就都解决了。

把底数换成其他任意一个正整数，上述方法都是可行的。

(3) 我们发现，上述运算过程中，将原本大数的乘法，转化成了较小数字的加减法，计算量明显减少。

(4) 那么，根据上述数表，如何计算 128533427×58603274 呢？

要知道，无论数值多大，我们总是可以将之写成 2^x 的形式。对于该式子中的两个大数，对应的 2 的指数幂显然不是整数，但我们完全可以计算出指数的有理近似值。只要数表足够大，类比上述方法同样能够得到计算的结果。

(5) 在这张数表中，我们将第一行数字称为“对数”。

具体地说，比如 $2^5=64$，那么就称，以 2 为底 64 的对数是 5，写作 $\log_2 64=5$. 那么，以 2 为底 3 的对数是多少呢？

显然这个值不是一个整数。根据对数的含义，我们假设 $2^x=3$，那么有 $x=\log_2 3$。我们当然可以求出 x 的近似值，但同时，就像我们用 $\sqrt{2}$ 来表示 2 的算术平方根的精确值一样，这里的 $\log_2 3$ 同样表示 x 的精确值，完全可以作为运算的最终结果。

1.3 对数的概念

回到指数幂的一般形式 $a^b = N\left(a>0, a\neq 1\right)$，我们将 b 叫做“以 a 为底 N 的对数”，记作 $\log_a N = b$. 其中 a 叫做底数，N 叫做真数.

(1) 练习：指对数形式的互化、简单的对数运算

(2) 根据对数的定义，可知：

① 零和负数没有对数，真数大于零；

② 1 的对数为 0，即 $\log_a 1 = 0$；

③ 底的对数为 1，即 $\log_a a = 1$；

④ 对数恒等式：$a^{\log_a N} = N$ 成立.

注意：对数中必须强调 $a>0, a\neq 1$.

2 对数的运算

(1) 根据对数的定义，我们有

如果 $a>0, a\neq 1$，且 $M>0, N>0$，则

$$\log_a\left(MN\right)=\log_a M+\log_a N\text{；}\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N\text{；}\log_a M^n = n\log_a M.$$

(2) 试证明上述性质：

(3) 练习：简单的对数运算

3 常用对数和自然对数

(1) 如何计算 729×256？（底数不同的情况）

既然我们广泛使用的是十进制，不妨取 10 作为底数，这样只需要一张对数表就可以解决所有的计算问题。

为了简便，我们将以 10 为底的对数叫做“常用对数”，将 $\log_{10} N$ 简记作 $\lg N$.

(2) 体会常用对数的好处：

练习：计算 $\lg 0.02351,\quad \lg 0.2351,\quad \lg 2.351,\quad \lg 23.51,\quad \lg 235.1, \ldots$

一个正数的常用对数，总是可以写成一个整数加上一个正的纯小数（或者零）．其中的整数部分叫做常用对数的“首数”，小数（或者零）部分叫做常用对数的“尾数”.

(3) 自然对数 e 的故事：

连续复利，存款是否会无限增长？（参考《数学文化透视》一书，略）

我们将以 e 为底的对数叫做“自然对数”，将 $\log_e N$ 简记作 $\ln N$

4 课堂练习&小结

5 课后反思

本节课的引入是基于 HPM 的角度进行设计的，在课堂上重演了纳皮尔发明对数的那段历史。从一个背景故事开始，使学生了解当时的社会环境对如何简化大数运算的迫切需求，从而能够体会到对数的发明在科学史上的重要地位。

对数概念的引入，从简单的 2 作为底数的情况开始，重演了数学家们发明对数的历史过程。由非负整数幂到整数幂，由 2 为底数到任一整数为底数。在由整数幂到实数幂的推广过程中，自然地引出了 log 这一符号，并由此给出了对数的一般定义。

对数的基本运算，原本是第二课时的内容。但从数学史的角度来看，一个新的数学概念出现时，自然需要研究其相应的运算律，这样才能将其更好地融入到已有的运算体系中。

因此，本节课在引入对数概念后，便由此引导学生探究对数的基本运算法则。根据之前的过程体验，8 班学生能够很顺利地猜测出三大公式，而 5 班的学生有一定困难。有趣的是，两个班的学生在老师写出三个公式之后都主动提出，应该对其作出证明！

由于 8 班学生都很能接受这些结论，因此课堂上给予他们一定的时间尝试证明。结果大多数学生都能想到将对数形式化为指数形式，部分同学能够通过设元的方法顺利给出证明，其他学生在老师给出第一个公式的证明示范后，同样能够类比地证明余下两个公式。

而 5 班的学生对结论的理解有一些困难，不能感到信服，因而要求老师作出证明。学生的质疑精神着实可贵，因此课堂上同样先给出公式 1 的证明，同时引导他们尝试证明公式 2 和公式 3.

由猜想到证明，是研究数学问题的一种重要的思想方法。比起简单的接受式学习，学生更需要在课堂上不断地体验这样的过程。

常用对数和自然对数的概念。

学生比较能够认同常用对数的出现（统一底数的需求，十进制的使用）。

而在介绍自然对数 e 时，8 班的学生对这个常数已经有较多的了解，有部分学生也知道“连续复利”的故事，因此接受起来比较容易。而 5 班学生在老师一开始写出 e 这个常数时，出现较为明显的排斥——“这个有什么用？！”在讲述了“连续复利”的故事之后，学生的排斥感明显减少，当然也有学生仍然质疑 e 在现阶段学习中的用处。此时再次补充道 e 在不同的科学领域具有重要作用，甚至其出现的频率还要高于常用对数。

由此，学生才真正地从情感上接受了 e 的存在。

说实话，教材中这个 e 的出现始终是非常突兀的。作为教材，当然不可能非常详尽地去介绍 e 的历史，但作为教师确实有必要尽可能地让学生了解一些 e 的故事。一方面，可以更自然地引出这个科学史上非常重要的常数；另一方面，也有助于激发学生对数学和数学史的兴趣。

另外，学生的课外阅读也非常重要。显然，8 班学生更喜欢阅读一些教科书以外的科普书籍，因而很早就对 e 有所了解（不仅仅是 e，甚至对其他很多还没有系统学习的概念都有所耳闻）。他们大多是因为喜欢数学而自发地想要了解更多，同时，这样的阅读又激起了他们对数学更浓厚的兴趣，并且在课堂上学到相关知识时也更加地有满足感和成就感。

纵观整节课，从对数发明的必要性来看，HPM 视角的引入与教材原有的方式相比更具有说服力。但是，对数概念出现时，部分学生仍表现出一些困惑，一下子不能接受为什么原来叫做指数的东西现在又要称为对数。由于这节课包含了原来两个课时的知识点，并且还要穿插对应的课堂练习，安排上会比较紧凑，因此对概念的理解并不如传统的教学那样深入、细致。前辈也认为，单从这节课的设计来看，是绝对无法应付考试的，但是通过第二课时的习题强化，完全可以达到同样的应试目的。

原先的安排是小步走，即“概念教学→练习→运算教学→练习”，好处是学生有足够的时间消化，几乎不会感到有困难。但是，一个数学概念的出现，必然是包含着定义和运算两个部分的。只有其运算规律能够很好地融入到现有的运算体系时，这一概念才有可能为大众所接受。传统的教学，将数学概念产生及完善的过程分解开来，并不能真正体现数学家发展数学概念的历史进程。而 HPM 视角的设计，显然更顺应历史的发展，也更符合人的一般认知规律。

也就是说，在总课时不增加的前提下，只需要适当调整每节课的教学内容和设计，完全有可能达到兼顾数学文化和传统考试的双赢局面。

活动信息

第七届欧洲暑期大学之数学史与认识论(ESU-7)

王科 编译

早在 80 年代初，法国数学教育学会发起并举办**暑期大学之数学史与认识论**，之后，在欧洲范围内成立了暑期大学组织，并于 1993 年举办了第一届欧洲暑期大学（ESU）之数学史与认识论大会。自此之后，ESU 大会每各 3 年举办一次，即 1996、1999、2004、2007、2010，大会举办地分别位于法国的蒙彼利埃、葡萄牙的布拉加，比利时的劳万拉奴富和鲁汶、瑞典的乌普萨拉、捷克的布拉格、奥地利的维也纳。目前，她已经成为 HPM 的一个主要的国际性活动，并且从 2010 年起，每四年将组织一次，目的是为了每二年至少有一次主要的关于 HPM 的国际会议，即 ESU 大会和 ICME 的 HPM 卫星会议。

1 ESU 的目标与宗旨

ESU 的主要目标：

- 从数学的历史、认识论和文化的角度，为学校提供教学工作上的帮助，重点关注实际执行。
- 给数学教师，教育工作者和研究人员提供一个机会，让他们分享与历史视角有关的教学思想和课堂教学经验。
- 深入增进世界范围内数学教师和 HPM 研究者之间的合作，并试图揭示数学的以下几个方面：
    - 具有悠久的历史的，作为人类智力结晶的数学之生机盎然的当前和尚未预见的未来。
    - 虽然数学知识中部分被“抛光”的数学产品是可以交流与批判（以便最终被接受或拒绝），并且可以是以基础的形式服务于新的工作，但是从教学观点出发，“做数学”的过程， 并产生数学知识，同样非常重要。
    - 数学知识不但要在一个演绎结构化理论的环境中的形成，而且要通过原始指引或可能使其形成的过程中形成，这对于理解知识

来说，是不可缺少的。因此，学习数学包括对隐性动机、意义

建构活动和反射过程的理解，其目的是有意义的建构。因此，

数学教学应该包括给学生机会去“做数学”。

ESU强调数学史与认识论的问题，组成一种可行在做中展示数学的自然方式，这种方式可能致使数学中某个特别的部分的更多地理解，更深入的意识到数学作为一个整体真正的是什么。这对于数学教育来说非常重要，并且有利于建立这样的意识：

- 数学是众多不同文化共同努力发展的结果；
- 数学已经不断地在跟其他科学、艺术以及工艺技术交流；
- 数学已经成为科学、技术、艺术以及社会发展的恒动力；
- 数学哲理已经经历了很多世纪的演化；
- 数学教学已经经历了很多代人的发展。

2 ESU-7 的主题

ESU不仅仅是研究者的大会，也是一个提供教师和研究人员会面并一起工作的地方，她还是一个初学者、经验丰富研究人员和教师展示自己的教学经验给参与会，并从他们那里得到建设性的反馈的地方。它涉及各个层次的教育 ，从小学教育到高等教育 ，也包括在职教师的培训。本次会议重点偏爱一些基于真实的课堂实验，以及教学和学习材料的文章和结论。ESU-7的计划和活动围绕以下主题：

(1) 历史和认识论的工具，在数学教育中融入数学史的理论以及概念性的框架；

(2) 课堂实验和教学材料，从认知或情感的角度的深思，课程和教材的问卷调查；

(3) 课堂上的原始资料，以及他们的教育效果；

(4) 在数学和科学的教学中，以历史和认识论为工具的跨学科方法；

(5) 文化与数学；

(6) 关于数学教育历史的主题；

(7) 关于北欧国家的数学史。

上述主题主要聚焦于基于真实的课堂实验，以及教学和学习材料的文章和结论，但有见地的理论观点和有显著教学意义的历史分析也是受欢迎的。

3 ESU-7 活动

所有活动应该涉及到 ESU-7 的上述主题，大会将根据这些主题来组织，其中有大会报告和专题讨论。大会主要是以研讨会的形式进行，参会者可以根据自己的研究兴趣选择参加一些口头报告或围绕海报的进行简短交流。

一般每个主题至少有一个大会报告。大会报告将是针对研讨会的介绍性报告。

在专题讨论的参会者可以提前一起合作，以便于在专题讨论过程中，彼此与小组主持之间进行真正的讨论。ESU-7 的两个专题讨论将分别是：

- 数学史与数学哲学，数学教育中的科技与技术；
- 在数学史融入数学课堂中的评估的问题和经验的评估。

研讨会是研究的特殊课题，接下来去讨论课题。研讨会组织者的作用是去准备，提供和分发历史的、认识论的、教学法的以及教学的材料，是为了激发和定位交流的主题，参与者需要阅读和思考这些资料。（如原始的历史文本，教学材料，学生的工作单等等。）大会有很多同时进行的研讨会，但讨论时间有所不同，2 个小时研讨会是关于教育和教学材料，3 个小时研究会是关于历史和认识论的材料。如果可能，研讨会会阐述一些在大会报告上展示过的一些想法。

口头报告一般持续 30 分钟，25 分钟的展示，5 分钟的讨论，这是研究性大会最活跃的一种形式。

大会也有一些特殊的时间段是用来针对海报展进行简短的口头交流。书本或其他教学材料的展示也是有可能的。

3.1 大会的目标群体

大会的主要参与者：中小学教师，大学教师和学生，数学史家，数学家。

期望是一些可能想要获取数学史如何融入数学教学的一些新思想的中学和小学教师，对 HPM 研究感兴趣的大学教师和学生，通过一些大会或研讨会给参会者通报他们领域的一些最新发展的数学史专家，以及对数学、数学史和数学认识论之间的关系，以及他们在过去和现在的角色感兴趣的数学家。

3.2 时间和地点

2014 年 7 月 14-18 日，即周一至周五，奥尔胡斯大学，哥本哈根 Emdrup 校区，丹麦。

3.3 大会投稿的摘要提交截止日期

2013年12月31日：研讨会和口头报告的摘要；2014年4月30日：海报摘要。

其他信息请登录：

http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/

http://conferences.au.dk/ESU-7/