上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2017 年第 6 卷第 4 期

乔治·波利亚

（George Polga，1887~1985)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物是乔治·波利亚（G. Pólga, 1887～1985）。

他出生于匈牙利的布达佩斯，父亲雅可布（Jakob）是一名律师，兄长尤金（Eugene）比他大 11 岁，是著名的外科医生，现在的一种胃外科手术就是以他命名。年轻的波利亚在布达佩斯的一所预科学校（即大学预备中学）读书时，有浓厚的学习兴趣，经常名列前茅，但数学老师给他印象不好，所以他对数学并不感兴趣。当时，许多人参加一项颇有影响的埃特沃斯数学竞赛，波利亚在别人的劝说下参加了这项竞赛，但未交卷。他的拉丁语、匈牙利语教师都是些一流的教师，这使他对文学特别感兴趣，他尤其喜欢德国大诗人海涅（H. Heine，1797～1856）的作品，曾将海涅的诗作译成匈牙利文而获奖。他因为与海涅有相同的生日——12 月 13 日而感到自豪，后来甚至组织了一个“13 日生日俱乐部”，将出生在 13 日的朋友与同事组织在一起。

因为学业成绩优秀，波利亚于 1905 年进入布达佩斯大学学习，母亲安娜•波利亚（Anna Polya）力劝他从事父亲的法律职业，他便遵从母亲的意愿到布达佩斯大学的法学院学习，但是只坚持了一个学期，便对学习法律感到厌倦。一度想改学生物学，在他兄长劝阻下，放弃了这个念头，而改学语言与文学。两年后他通过了教师资格证书考试，可以在预科学校低年级——学生年龄在 10 岁到 14 岁之间——教拉丁语和匈牙利语，但他从未使用过这个证书。后来，波利亚又将兴趣转向哲学，他的哲学课老师认为学习物理与数学有助于对哲学的理解，因而劝他将这两门课程作为他学习哲学的一部分，从此波利亚开始认真学习物理与数学．1977 年他 90 岁时回忆这一段学习经历时说：“事实上，我不是直接选中数学这一行的．我对物理和哲学更有兴趣，……我认为我并不擅长搞物理，但很适合于搞哲学，数学则介于两者之间。”在布达佩斯大学读书期间，物理学家埃特沃斯教授（L. Eötvös, 1848～1919)）是他的物理课教师，对波利亚的影响很大，但影响最大的是匈牙利数学家费耶尔（L. Fejér, 1880～1959）。

1910～1911 年整整一学年，波利亚在维也纳大学度过。1912 年回布达佩斯大学接受哲学博士学位，学位论文的题目是“概率论计算中的一些问题及其有关的定积分”。获得博士学位后，波利亚先后在格丁根大学（1912～1913 年）以及巴黎大学(1914 年)从事博士后研究工作，并结识了一大批著名数学家，如克莱因（F. Klein, 1849～1925）、希尔伯特（D. Hilbert,

1862～1943 ）、龙格（C. Runge, 1856～1927))、兰道（E. Landau, 1877～1938)、阿达玛（J. Hadamard, 1865～1963）等。这些数学家对波利亚后来的研究工作都产生了很大影响。

1914 年秋，他接受了德国数学家胡尔维茨（A. Hurwitz, 1859～1919）的邀请，去苏黎世的瑞士联邦工学院任教，从此开始了他的教学生涯。第一次世界大战期间，他曾想入伍服兵役，但因年幼时，踢足球腿部受伤而留下后遗症，兵役检查后，被拒绝参军。后来局势严峻起来，兵源大量缺乏，匈牙利军方要求他从瑞士回来入伍，但他已经深受英国数学家和哲学家、公开的反战论者罗素（B. Russell, 1872～1970）的影响，拒绝服兵役，这使他长期不能再回匈牙利。

1918 年波利亚与斯特拉·韦伯（Stella Vera Weber）结婚，斯特拉是瑞士人，纳沙泰尔大学的一位物理教授的女儿，从此，波利亚建立了一个美满的家庭，夫妇共同生活长达 67 年。波利亚没有子女，斯特拉生长于讲法语的瑞士西部，因此她讲法语，婚后波利亚夫妇居住在讲德语的瑞士北部地区，于是波利亚生活在三种语言环境中，正投合他对语言的爱好。波利亚能够用匈牙利语、法语、德语、意大利语、英语和丹麦语 6 种语言写作论文，此外，他还在学校里正规地学习过拉丁语和希腊语。

1920 年波利亚升为副教授，1928 年任教授，在此期间，他与柏林大学的舍贵（G. A. Szegö, 1895～1985）合作，完成两卷《数学分析中的定理和问题》，1925 年由 Springer-Verlag 出版社出版。1924 年在英国数学家哈代（G. H. Hardy, 1877～1947）的推荐下，波利亚作为国际洛克菲勒学会成员去英国度过了一年，曾先后访问牛津大学、剑桥大学等著名高等学府。在此期间参加了由哈代与李特尔伍德（J. E. Littlewood, 1885～1977）主持的经典著作《不等式》的写作，此书在 1934 年由剑桥大学出版社出版。1933 年他再次获得洛克菲勒学会的资助去美国普林斯顿大学访问。同一年夏天，又接受了丹麦出生的美国数学家布利克弗尔特（H. F. Blichfeldt, 1873～1945）的邀请，访问了美国加利福尼亚的斯坦福大学。

1940 年，欧洲正深陷第二次世界大战泥潭，波利亚决定离开瑞士，经葡萄牙首都里斯本转道去了美国。当时欧洲各国学术界人士为躲避纳粹德国的迫害，纷纷逃离欧洲蜂拥入美国，使得在美国找到合适的工作很困难。波利亚先在布朗大学任客座教授两年，然后接受了斯坦福大学的聘任。1942 年 1 月，他的夫人去美国西海岸加利福尼亚的帕洛阿尔托购买了寓所，开始了他们在美国的定居生活.

1953 年，波利亚从斯坦福大学退休，但他继续从事教学与写作，对教师的培训工作越来越感兴趣，并在一些师范院校任教。他热爱教学工作，直至 1978 年 93 岁高龄时，仍亲自讲课。在漫长的岁月中，他的精湛的教学艺术与杰出的数学研究相结合，产生了他特有的

丰富的数学教育思想。波利亚数学教育思想有两个基点：其一是关于对数学科学的认识，他认为数学有二重性，它既是欧几里得式的演绎科学，但在创造与认识过程中，它又是一门实验性的归纳科学。其二是关于对数学学习的认识，他认为生物发生律（也称重演律）可以运用于数学教学与智力开发，为此他在 1962 年发表了题为“数学教学与生物发生律”的论文，1965 年又在《数学的发现》一书中进一步强调人类的后代学习数学应重走人类认识数学的重大步骤。基于这种思想，他对数学史、对许多著名数学家如欧几里得（Euclid,330 B.C.～275 B.C.)、阿基米德（Archimedes,287 B.C.～212 B.C.)、笛卡儿（R. Descartes,1596～1650)、高斯（C. F. Gauss, 1777～1855），尤其是欧拉（L. Euler, 1707～1783）的论文进行了深入研究，认真剖析他本人及当代人发现数学定理及其证明的认识过程，体察人类认识数学的思想、方法与途径，从而提出了一些重大的数学教育思想与方法论原理。

1963 年，他在《美国数学月刊》撰文提出了著名的数学教学与学习心理三原则，即主动学习原则、最佳动机原则以及阶段循序原则。波利亚认为教师在学生的课堂学习中，仅仅是“助产士”，他的主导作用在于引导学生自己去发现尽可能多的东西；引导学生积极地参与提出问题、解决问题。他认为科学地提出问题需要更多的洞察力和创造性，很可能成为一项发现的重要组成部分，而学生一旦提出了问题，那么他们解决问题的注意力将更集中，主动性会更强烈。教师的教学应立足于学生的主动学习，这就是主动性原则。但他又认为如果学习者缺少活动的动机，那么也不会有所行动。波利亚认为对所学材料产生兴趣是最好的学习刺激，而紧张的思维活动后所感受到的快乐是对这种活动的最好奖赏，这就是最佳动机原则。

波利亚根据生物发生律的思想，将数学学习过程由低级到高级分成三个不同阶段：(1)探索阶段，是人类的活动与感受阶段，处于直观水平；(2)形式化阶段，引入术语、定义、证明，上升到概念水平；(3)同化阶段，将所学的知识消化、吸收、融汇于学习者的整体智力结构中。每一个人的思维必须有序地通过这三个阶段，这就是阶段循序原则。他认为在课程设计及其教学时，“生物发生律”不仅可以决定应教什么内容与理论，而且还可以预见到用什么样的先后顺序和适当方法来讲授这些内容与理论。据此，1965 年正当“新数运动”方兴未艾时，他提出了尖锐的反对意见。他说先讲集合、群论等现代数学的东西，再学传统数学内容，无异于让婴儿先学开汽车，再让他学会走路。直到 1977 年在回答“你希望今后若干年内数学教育应朝什么方向发展”的问题时，仍强烈地坚持“离开新数学轨道，离得越远越好”。

波利亚主张数学教育主要目的之一是发展学生的解决问题的能力，教会学生思考。1914

年他在苏黎世时，就准备研究数学解题的规律，用德文写了一个大纲，后来在英国数学家哈代的启发下，对其进行重整并于 1944 年以《怎样解题》的名字在美国出版，其中“怎样解题”表总结了人类解决数学问题的一般规律和程序，对数学解题研究有着深远影响。迄今此书已销售一百万册，被译成至少 17 种语言广为传播，可说是一部现代数学名著。他随后又写了两部这类书，其一是 1954 年出版的两卷本《数学与合情推理》，再次阐述了在《怎样解题》以及其他论文中所提到的启发式原理，被译成 6 种语言，其二是出版了两卷本的《数学的发现》，1962 年出版第一卷，1965 年出版第二卷，1981 年又合成一卷再版，被译成 8 种语言。这些书籍一经出版，立刻在美国引起轰动，很快风靡全球，使波利亚成为当代的数学方法论、解题研究与启发式教学的先躯。“按波利亚的风格”、“波利亚的方法”成了世界各地数学教师的口头禅或专门用语。能集中表现他的数学解题思想与方法的另一部名著是他与赛格合著的《数学分析中的问题和定理》。它并不是一部普通的习题集而是一部极负盛名的著作，其新颖之处在于不是按内容而是按解题方法编排，用意在于激励读者(特别是大学数学系高年级的学生)在数学分析的几个重要领域中进行独立的思考与工作，并养成有用的思维习惯。1935 年，苏联出版了此书的俄文版；1972 年，第一卷英文版出版；1976 年，第二卷英文版出版。中文版的第一、二卷分别在 1981 年、1985 年由上海出版。半个多世纪以来，此书一直是许多研究课题的重要来源，是各类试题的几乎取之不尽的源泉，在数学教育界堪称一绝。1959 年，波利亚以“数学作为学习合情推理的学科”为题，在美国《数学教师》杂志上发表论文，提出“合情推理”概念，认为在数学研究与数学教学中合情推理占有很重要的地位。随后在《数学与合情推理》第二卷中，进一步阐述了合情推理及其模式。波利亚的合情推理是指借助于归纳、类比、限定、推广、猜测、检验等思维活动来认识事物、发现真理的推理形式。其英文词是“plausible reasoning”，直译为“似乎可靠的推理”。

波利亚漫长一生的最后几年里视力极度下降，只能借助于有放大作用的阅读机继续坚持阅读并回答别人的问题，甚至还想学习计算机。他不断地向别人述说：“我的数学兴趣还没有完！”由于科学上所取得的众多成就，他先后成为法国科学院、美国艺术与科学研究院、匈牙利科学院、美国科学院的院士以及布鲁塞尔的国际哲学与科学协会的会员。他还是伦敦数学协会、瑞士数学学会、纽约科学院等的名誉成员。由于他在数学教育上的杰出工作，1980 年被邀请担任第四届国际数学教育大会的名誉主席，并发表了题为“数学增进智力”的书面致词。

1985 年 9 月 7 日，波利亚在美国加利福尼亚去世，享年 97 岁。

目 录

CONTENT

文献研究

美国早期教科书中的无理数概念

栗小妮

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

古希腊毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，把数归结为整数或整数比，在几何上这相当于说：对于任意给定的两条线段，总能找到某第三条线段，作为公共度量单位。但后来发现，存在不可公度的线段（如正方形的对角线与其一边），它们的长度之比就是后人所称的无理数，由此引发了史上第一次数学危机。但不少数学家一开始并不接受无理数，无理数理论经历了缓慢而艰辛的发展过程，直到 2300 多年后的 19 世纪末才出现了无理数的严格的定义和完善的理论。

现行教科书将有理数定义为“整数和分数”，而采用“无限不循环小数”来定义无理数，与之前的有理数定义并无关联，且完全脱离了它最原始的来源。学生常常会问，这里的“有”、“无”和“整数和分数”、“无限不循环小数”之间有什么关系？“无理数真的没有道理吗？为什么称为无理数？”初中学生接触的无理数通常有三类：不尽根、π 和构造的无限不循环小数。通过一定课时的学习和周而复始的练习，大多数学生能够从形式上判断什么样的数是无理数，但学生并不理解到底什么是无限不循环小数？为什么无理数是无限不循环小数？已有研究表明，学生对无理数既“不能用整数和分数表示”同时也是“无限不循环小数”的理解存在障碍，对于无限不循环小数是无理数存在疑惑，常常忽视无限不循环小数的结构特征[1]。60%的初中生对无理数的无限不循环性缺乏坚定的信念，反映出学生对无理数概念的理解存在问题[2]。在一项对职前数学教师的调查中发现，虽然职前数学教师在高中和大学已经接触过许多其他形式的无理数，但他们对无理数的印象依然停留在“小数型”和“根号型”，且对这两种形式的掌握也不尽理想，没有对无理数的概念形成整体性的理解[3]。

由此可见，用“无限不循环小数”定义无理数，脱离了学生先前所学的有理数知识，无理数定义与有理数定义相分离，不利于学生对实数体系的整体理解和掌握。美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）认为，“学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期

思索和探讨后所克服的实际困难”[4]；另一位美国数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）认为：“困扰世界的东西也会困扰儿童，世界克服其困难的方式提示我们，儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难。”[5]因此，了解前人对无理数的理解，对于认识今日学生的认知困难具有重要借鉴意义。

本文通过对 1820~1969 一百五十年间出版的 100 种美国代数教科书中有关无理数内容的考察，试图回答以下问题：早期代数教科书如何定义无理数？定义如何演变？对今日教科书编写和课堂教学有何启示？

2 研究对象

我们共选取 20 世纪 70 年代之前出版的 100 种美国代数教科书，若以十年为一段，则各教科书的时间分布情况如图 1 所示。

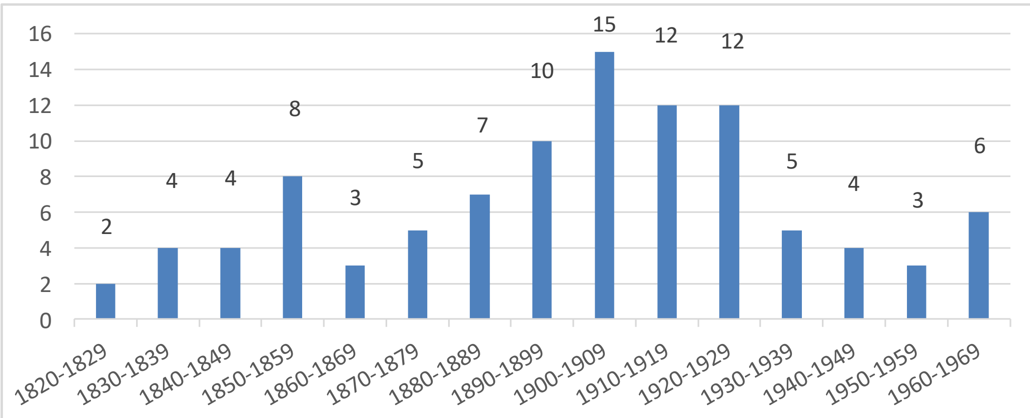


图 1　100 种教科书的时间分布

其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无变化，则选择最早的版本，若内容有变化，则将其视为不同教科书。

100 种代数教科书中，61 种是中学教科书，39 种是大学教科书。无理数的定义所在章节大致可以分为“根式”、“定义与公理”、“数”、“因式分解”、“数的运算”五类，如表 1 所示。其中无理数定义最多出现在“根式”章节，占 64%；其次是“数”，占 20%。

表 1 无理数概念在 100 种代数教科书中的章节分布

所在章节	根式	定义与公理	数	因式分解	数的运算
教科书数量	64	12	20	2	2

以 30 年为一个时间段，图 2 给出的是“根式”和“数”章节在每个时间段的分布，反

映出早期人们对无理数类型的认识主要局限于“根号型”，在 20 世纪 50 年代后的教科书中，无理数定义均出现在“数”这一章节中，且实数均单独列为一章。

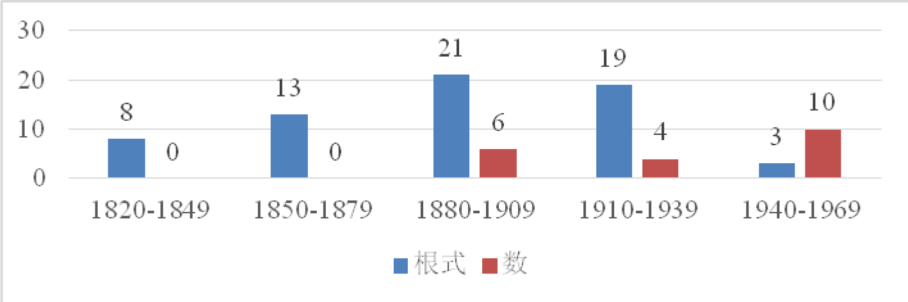


图 2 “根式”和“数”章节时间分布

3 无理数定义的分类

由于完整的实数理论体系直到 19 世纪末才建立，在 100 种教科书中，绝大多数并没有把无理数或者实数单独列为一章，而是将其与“式”的研究放在一起。所以，本文涉及三种有关无理数的术语。

（1）无理数（irrational numbers）。为实数中的一类，与现代教科书中所指相同。如：Young & Jackson（1910）给出的定义是：“任何不是有理数的数称为无理数。”

（2）无理量（irrational quantities）。一些教科书中所说的“无理量”指的就是无理数，如：Lacroix（1831）给出的定义是：“一个非完全平方数的平方根，与单位 1 没有公因数，因为它不能用分数表示这个根式，无论如何划分单位 1，都没有足够小的分数可以同时度量这个方根和单位 1。非完全平方数的方根因此称为不可公度量或无理量。有时也称为不尽根。”而在另一些教科书中，“无理量”指的是无理式。如 Bourdon（1831）给出的定义是：“带有 $\sqrt{\ }$ 的量，如 $\sqrt{98ab^4}$，这样表达的量称为根式（radical）或无理量，或者简单地说，是二次根式。”

（3）无理式（irrational expression），在 20 世纪初，实数理论体系形成后，部分代数教科书开始将无理式与无理数分开定义，数与式分别独立成章。如 Milne（1902）给出的定义是：“若一个式子必须使用根号来表达，则称之为无理式；若一个数不能用分数或整数来表达，则称之为无理数。”

综上，我们将 100 种教科书中的无理数定义分为两大类：“区分数与式的定义”、“不区分数与式的定义”。若定义之后没有具体例子说明是无理数还是无理式，则统一将其归为“不

区分数与式的定义”一类。以 30 年为分布单位，图 3 是两类定义的具体时间分布。从图中可见，随着 19 世纪末实数理论体系的建立，“不区分数与式的定义”逐渐退出历史舞台，数与式逐渐分离，成为初等代数的两个不同对象。

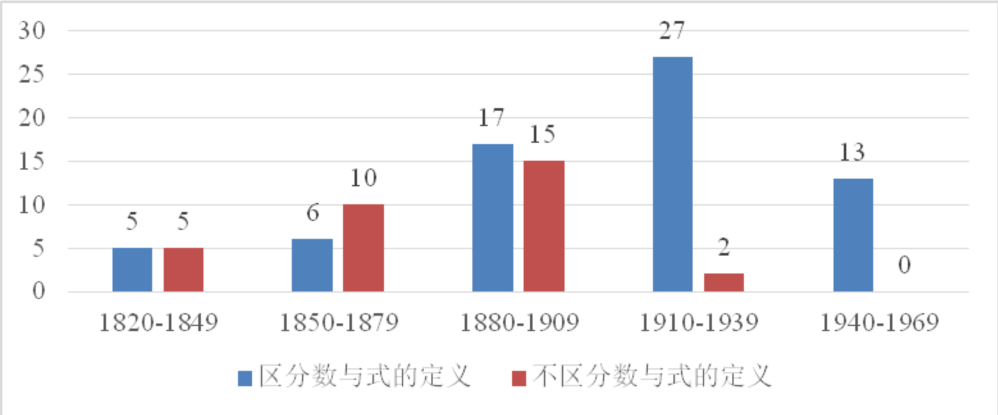


图 3 两类定义的时间分布

3.1 区分数与式的定义

100 种教科书共计给出了 100 种定义，区分无理数和无理式的共 68 种，占 68%。根据详尽的统计和分析，这些定义又可以分为“表示定义”、“数值定义”、“形式定义”、“反向定义”、“分割定义”、“几何定义”、“混合定义”、“小数定义”共八类。这八类在 68 种定义中的分布如图 4 所示。其中，“表示定义”和“形式定义”所占比例相对较高。

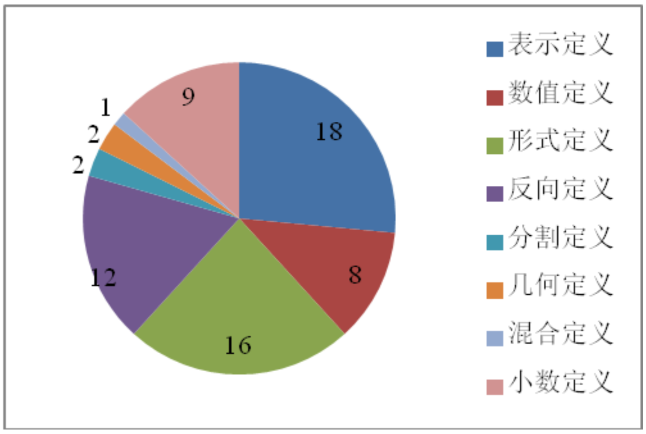


图 4 数与式分开定义的八种类型分布

3.1.1 表示定义

表示定义是用“不能用整数或分数表示”来定义无理数，占数式分离定义的 26%，不同教科书中略有不同。如 Lacroix（1831）给出的定义。Davies（1835）也给出了类似的定义，并第一次给出了非完全平方数的正平方根不能用分数表示的证明，其证法与现行教科书

中的证法略有不同，证法如下：

若 c 是一个非完全平方数，如果 $\sqrt{c}$ 能表示为一个分数，不妨设 $\sqrt{c}=\dfrac{a}{b}$ ，则 $c=\dfrac{a^2}{b^2}$，但是由于 c 是非完全平方数，所以 $\sqrt{c}$ 不是整数，因此 $\dfrac{a}{b}$ 是既约分数，或称 a 和 b 是互素的。若 a 不能被 b 整除，则 a^2 也不能被 b 整除，a^2 也不能被 b^2 整除，因为除 b^2 就是用 b 除以 a^2 两次。因此，$\dfrac{a^2}{b^2}$ 是既约分数，不能等于整数 c，故假设 $\sqrt{c}=\dfrac{a}{b}$ 不成立，或者说一个非完全平方数的根不能用分数表示。

这里用到了数论中的一个定理：“如果一个整数 P 整除两个整数的乘积，且 P 与其中一个互素，则 P 整除另外一个整数”。这些定义都只涉及无理数的一种类型——二次根号型，直到 Sherwin（1841）才提到“除了平方根外，其他次数的方根，与单位 1 没有公因数的也称为无理数”。Gillet（1896）则首次提及“根号型”以外的无理数，将无理数定义为“不能用整数或分数表示的数，也称为不可公度数”，并指出了“不尽根”与“不可公度数”的区别——不尽根是不可公度数，但有许多不可公度数并非不尽根或不尽根的组合，如 π、e。

3.1.2 数值定义

这一类定义对无理数的认识基本都局限于“根号型”，认为无理数的值不能精确获得，只能得到其近似值，故以“值不能精确获得”来定义无理数，并将“无理数”等同于“不尽根”，约占 12%。如 Robinson（1866）将“无理数”定义为“一个非完全平方数的方根，其根值不能精确获得或表示”。这种定义方式在各个时间段均有出现，但较多出现在 19 世纪早中期。1900 年后逐渐消失，仅出现两次，在 Hawkers（1918）中提到“一个用根号表示的数，其根值不能精确获得，这种用根号表征的数就是无理数”。

3.1.3 形式定义

部分教科书对无理数的定义停留在对其根式形式的描述，如 Thomson（1880）给出的定义是：“非完全平方数的根称为不尽根，也常叫做无理量”；Taylor（1900）给出的定义是：“一个非 n 次幂的数的 n 次方根，称为不可公度方根或无理数”；Wells（1906）给出的定义是：“无理数是一个包含不尽根的数”；类似这样的定义，我们均把它归为“形式定义”，约

占 24%。

值得一提的是，Taylor（1900）对无理数和不可公度数进行了错误的区分，书中写道："一个无理数或其他数，不是整数或分数的称为不可公度数。"即无理数是不可公度数的一部分，显然这是错误的，虽然之前的 Gillet（1896）已对"不尽根"和"不可公度"进行了区分。可见，一个数学定义从形成到被广泛接受，会经历一个反复曲折的过程。

3.1.4 反向定义

一些教科书先定义有理数，然后将无理数定义为"除有理数以外的数"，我们将这一类定义归为"反向定义"，约占 18%。我们将它与"表示定义"区分开来，是由于他们对"有理数"的定义不同，导致对"无理数"的定义也不同，从中可以看出早期人们对数的认识的局限性。例如，Dickson（1902）给出的定义是"有理数是正的和负的整数和分数，其他数都称为无理数。"根据这一定义，"0"应归为无理数，所以该定义的问题在于忽略了"0"的定义。类似的定义还出现在 Cajori & Odell（1916）、Hawkers（1918）中。

在今天看来，Marsh（1907）的定义相对完善："所有的整数和分数称为有理量，所有其他的数称为无理量。"按照这个定义，我们很容易判断应该将"0"归为有理数一类。但这也仅是我们用今天的知识做出的判断。我们有理由相信，在 20 世纪初期，人们对"0"的认识并不充分，常常忽略"0"的存在。如 Lyman（1917）先定义虚数为"负数的偶次方根"，再定义实数"包括所有的正整数和负整数，正分数和负分数，除负数的偶次方根以外的所有方根数"，再定义有理数和无理数"实数分为有理数和无理数，能用整数或者两个整数的商表示的数称为有理数，其他实数称为无理数。"从其"实数"定义中，我们无法确定"0"属于哪一类，而从其有理数和无理数定义中，用现在的数学观可以判断"0"应归为有理数类。前后的矛盾表明，作者在定义有理数时并没有考虑"0"，更确切地说，早期教科书中存在"0 是否是整数"的问题。

3.1.5 分割定义

Fine（1904）利用有理数分类即戴德金分割来定义无理数。首先，证明 $\sqrt{2}$ 不能用分数表示：

假设 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，则 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=2$ 或者 $\dfrac{p^2}{q^2}=\dfrac{2}{1}$，但是 $\dfrac{p^2}{q^2}$ 是最简分数，利用已有结论，如

果两个最简分数相等，则他们的分母和分子分别相等，所以 $p^2=2$，这是不可能的，因为 p 是整数。所以 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

其次，给出有理数的两种不同分割。

第一种分割：例如 $\frac{1}{3}$ 把有理数分为两类，一类由所有小于或等于 $\frac{1}{3}$ 的有理数组成，一类由所有大于 $\frac{1}{3}$ 的有理数组成；

第二种分割：将整个有理数系分为 A_1 和 A_2 两部分，A_1 没有最后一个数，A_2 没有第一个数，例如不存在有理数的平方为 2，每一个有理数或平方小于 2，或平方大于 2，让 A_2 是由那些平方大于 2 的正有理数组成，而 A_1 是由剩下的有理数组成；

最后，给出无理数的定义：

a 是无理数，由第二种分割定义，将有理数分为 A_1 和 A_2 两类，然后可以定义 a，它是在 A_1 所有元素和 A_2 所有元素之间的数。这里 A_1 和 A_2 中一定包含数，且同时 A_1 和 A_2 包含了整个有理数系。

该教科书后续还指出，有理数和无理数统称为实数，第一次建立实数理论体系，并证明了实数是有序的、稠密的、连续的数集。

3.1.6 几何定义

Wilczynski & Slaught（1916）用几何表征的方法来定义正无理数。首先指出，O 到 OX 上每一点的距离能用有理数表征，这种说法是错误的，并给出了 $\sqrt{2}$ 在数轴上的表示，如图 5 所示，证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数，与现在证法也不同，证法如下：

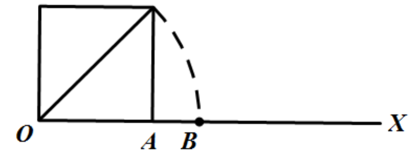


图 5　Wilczynski & Slaught（1916）中 $\sqrt{2}$ 的几何表示

假设 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，p 和 q 是正整数且没有公因数，即 $\frac{p}{q}$ 是最简分数，q 不等于 1，否则 $\sqrt{2}$ 是整数，显然不存在整数的平方是 2。则 p 的质因数与 q 的质因数都不相同，由于 p^2 的质因数和 p 相同，且每个出现的次数是 p 的两倍，同理 q^2 的质因数和 q 相同，且每个出现的次数是 q 的两倍，所以 p^2 的质因数和 q^2 的质因数不同，但是如果假设成立，则 $2q^2 = p^2$，p^2 能被 q^2 整数，也就是说 q^2 的所有质因数都是 p^2 的质因数，矛盾，所以假设不成立。

正无理数被定义为 *OX* 上线段的长度不是有理数的数。又指出，*OX* 上线段对应的是正数（正有理数或正无理数），反过来每一个正数都对应 *OX* 上的线段。无理数可以看成对应不可公度线段的存在，并介绍了数的发展历史。在另一章“线性函数和级数”中提到如果无理数表示成小数，则他的小数位不能循环也不是有限的。虽然早在 17 世纪，笛卡尔创立了坐标系，负数得到了几何解释和实际意义，但在约 200 年后的这本教科书中，依然忽视负无理数的存在和负无理数的几何表示，仅定义了正无理数。

类似的定义方式还出现在 Schultze（1925）中，但与上述定义有所不同，给出了负数的几何表示。

3.1.7 混合定义

在 Long & Brenke（1913）中，最初给出的定义是“像 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$ 等，值可以近似表达，但不能用分数或者有限小数表示的数称为无理数”，而在这一章的最后，其又一次解释无理数为“除有理数以外的其他数”，融合了“形式定义”、“表示定义”和“反向定义”，但由于其对有理数的定义为“正的或负的整数，或者两个这样的整数的商称为有理数”，导致前后定义矛盾，再次说明早期人们对“0”的不完善的认识。

3.1.8 小数定义

“小数定义”是指应用小数表征的定义，代表了人们认识无理数的又一个新阶段，约占 13%。Merrill & Smith（1923）最早给出构造的无限不循环小数之例，将无理数定义为“形如 0.313113111311113……，0.487488748887⋯⋯，这样的数称为无理数”，并指出这样的数不是不合理的，而是不能用比来表征的数。易见，上述定义是不完善的。Miller & Thrall（1950）第一次正式用“无限不循环小数”来定义无理数。表 2 列举了 100 种教科书中出现的各种形

式的小数定义。

表 2 不同形式的小数定义

教科书	定　义
Merrill & Smith（1923）	形如 0.313113111311113……0.487488748887……，这样的数称为无理数。
Weiss（1949）	实数由有限小数和无限小数组成，有限小数和无限循环小数是有理数，将 $\sqrt{2}$ 用小数表示，类似这样的无限小数称为无理数。
Miller & Thrall（1950）	实数可以表示为无限小数，无限循环小数是有理数，无限不循环小数是无理数。
Feinstein & Murphy（1957）	能用小数表示的数称为实数。不是有限小数且没有循环节的小数称为无理数。
Brumfiel & Eicholz & Shanks（1961）	无限不循环小数称为无理数。
Miller & Green（1962）	不是有限的或者循环的小数称为无理数。
Koo, Blyth & Burchenal (1963)	不能用两个整数的商表示的数叫做无理数，若写成小数则是无限的但没有循环节的小数。

从中可见，用“无限不循环小数”来定义无理数并非一蹴而就，从 1923 年第一次出现构造的无限不循环小数到“无限不循环小数”定义的出现，经历了 27 年；而 50 年代末开始，“无限不循环小数”定义才被教科书广泛采用，且凡是采用小数定义的教科书中都会另外加以说明无理数不能用分数和整数表示。

3.2 不区分数与式的定义

由于 19 世纪早中期对无理数认识的不完善，人们认为式也是数的一种表达形式，并未对数与式作出严格的区分。在我们所考察的 100 种教科书中，有 32 种将数与式混在一起编排，占 32%。例如：Hackler, C. W.（1847）先将“不尽根”定义为：“一个单项式不是另一个单项式的平方，除非它的系数是一个完全平方数，不同字母的指数都是偶数。因此，$98ab^4$ 不是完全平方数，因为 98 不是一个平方数，a 的指数不是偶数，因此用符号‘$\sqrt{\ }$’表示，写成 $\sqrt{98ab^4}$，这种表达形式称为不尽根或二次根”。然后，在“不尽根”的备注中提到“不尽根也称为不可公度数，与单位 1 没有公因数，也称为无理数，因为它们和单位 1 的比不能

用数表示”。Wentworth, G. A.（1892）给出的定义是：“一个数的根值不能精确获得，则称之为不尽根或无理数（irrational number）”，而后续给出的例子中出现了无理式 $b\sqrt{a}$ 。

不区分数与式的定义主要分为两类：“数值定义”和“形式定义”。与区分数与式的定义分类原则类似，不再赘述。其中，“数值定义”约占 56%，而“形式定义”约占 44%，两者基本持平。

4 分布及讨论

4.1 分布

我们发现，除分割定义仅出现在大学教科书中外，其余定义在中学和大学教科书中均有出现。小数定义最早出现在中学教科书中，后陆续出现在大学教科书中，而在 1960 年后均出现在中学教科书中。反向定义均出现在 1900 年后，且若排除“0”的影响，反向定义基本等同于将无理数定义为“不能用整数或分数表示的数”，因此将“反向定义”归为“表示定义”，而“几何定义”、“分割定义”、“混合定义”这三类都出现在 1900 年后，且各自仅出现一次或两次，故暂且不予考虑。若将“区分数与式的定义”和“不区分数与式的定义”两种情形合在一起，以 30 年为单位，则其中的“表示定义”、“数值定义”、“形式定义”和“小数定义”的分布情况如图 6 所示。

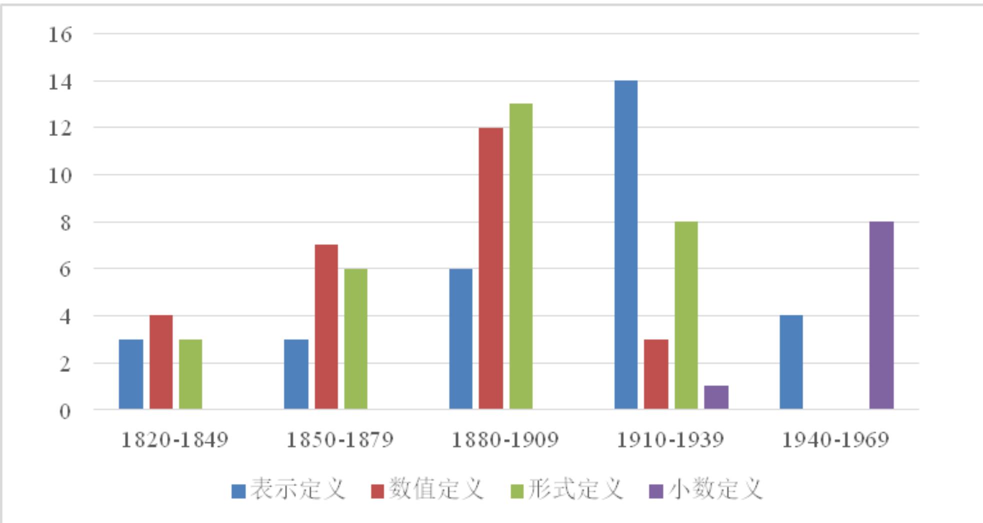


图 6 三类定义的时间分布

图 7 给出教科书所呈现的无理数类型的演进过程。

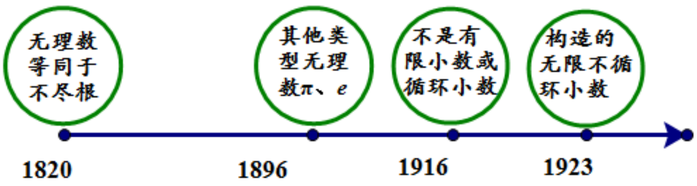


图 7 教科书中无理数类型的演变

4.2 无理数理论的历史

公元前 470 年左右，毕达哥拉斯学派发现无理数的存在，在此后的很长时间内，虽然数学家们对无理数的使用越来越广泛，但对无理数究竟是不是真正的数一直存在分歧，直到 18 世纪，数学家们仍然没有弄清楚无理数的概念。

18 世纪是无理数理论体系建立的萌芽时期。1734 年，由贝克莱（G. Berkeley, 1685～1753）挑起的数学分析大论战引发第二次数学危机，促使以无理数理论为核心的实数理论的建立。在这一个世纪中，欧拉基本证明了 e、e^2 是无理数，兰伯特（J. H. Lambert, 1728～1777）证明了 π 是无理数。

19 世纪是无理数理论体系从模糊到逐渐清晰的时期。1821 年，柯西（A. L. Cauchy 1789～1897）用有理数序列的极限定义无理数，但根据他的定义，该无理数应是预先给定的数。1872 年，康托尔（G. Cantor, 1845～1918）引入实数的概念，用有理数的“基本序列”来定义无理数，他证明了每一基本序列都存在极限，该极限若不是有理数，则定义了无理数。戴德金则吸取了柯西的教训，避免采用极限方法，在直线划分的启发下采用分割有理数来定义无理数。魏尔斯特拉斯（F. Weierstrass, 1815～1897）同样避免使用极限概念，用递增有界数列定义无理数。斯托尔兹（O. Stolz, 1842～1905）证明了“每一个无理数均可表示成不循环小数”，并认为可用这一事实来定义无理数。

4.3 讨论

综上，数值定义和形式定义对无理数的认识均停留在表层，体现了早期人们对无理数认识的局限性，而表示定义是无理数发现和定义的起源，小数定义是实数理论体系完备后新出现的定义，从表示定义到小数定义也体现了数学发展从潜无穷到实无穷的转变。在漫长的一个半世纪里，无理数始于数值定义而终于小数定义，反映了人们对无理数的认识，经历了从模糊到逐渐清晰的过程。“形式定义”由于其表征直观而出现于每一个时期，“数值定义”曾一度占据上风，但随着无理数理论体系的建立而逐渐销声匿迹。19 世纪早期，虽然无理数的“表示定义”相对比重最高，但人们对无理数的认识依然停留在“不尽根”，基本上将无理数与不尽根混为一谈。在后续的一百年间，该定义所占比重有下降趋势。直到 19 世纪末，实数理论体系建立，重新占据主要地位，并与小数定义并驾齐驱。教科书对无理数的定义及

表征的发展，虽有一定的滞后性，但与无理数理论的发展基本一致。无理数表征的演进历史表明，今日学生对无理数的认识具有较为显著的历史相似性。

5 结论与启示

无理数并非“没有道理”，只是“不能用整数或分数表示”，历史上人们对无理数的认识，最早是从“根号型”开始，后续陆续发现其他类型的无理数的存在，如：π、e 等。而学生对无理数的认识与无理数的发展具有历史相似性，已有研究表明，虽然高中阶段和大学阶段会学习很多除“根号型”和 π 以外的无理数，但学生最为熟悉的还是最初的这两种类型。现代教科书中均采用“无限不循环小数”来定义无理数，这已完全脱离了无理数最初的起源，是“深加工”的结果，学生对无理数的理解往往停留在表面，仅会从形式上判断是不是无理数，而不能从知识的本质上理解无理数的定义。而早期教科书无理数定义从不完善到完善的过程，为我们今日的教科书编写和课堂教学均带来启示。

5.1 对教科书编写的启示

首先，教科书是我们向前延续传输知识的有力工具，教科书中无理数定义的演变过程基本反映了数学研究领域无理数定义的演进过程。但一些教科书中也出现了错误和倒退现象，如前述所提对“0”的忽略和几何定义中对负无理数的忽略。所以这就要求教科书编写者对当下的数学学科领域的发展有一定的了解，才能把握教材知识内容的正确性和适切性。

其次，用“无限不循环小数”表征定义无理数，虽从形式上能够让学生迅速掌握如何判断一个数是不是无理数，但知识并非“速食品”，缺乏整体性理解的知识迟早会随着时间的流逝而消失，并不能让学生理解为什么需要无理数？在数域扩充的过程中无理数如何产生？有何用途？与有理数有什么本质区别？虽然有现行教科书中采用“用两个边长为 1 的正方形拼成一个新的正方形”来引入无理数，说明无理数 $\sqrt{2}$ 的存在，但并没有说明，这个数与已存在的有理数有何区别，为什么属于新的数系？因此，教科书编写应体现无理数定义的多样化，指出类似 $\sqrt{2}$ 的数与有理数的区别在于不能用整数或者分数表示，体现知识的本源，发生和发展过程，让学生了解一个术语的产生不是凭空而来，而是从旧知中衍生而来。

5.2 对教学设计的启示

我们可以借鉴无理数定义的发展过程，运用重构历史的方式来设计无理数概念的教学，让学生从现实问题中体会无理数存在的必要性和无理数与有理数的区别，在此基础上给无理数下定义——不能用分数或整数表示，再根据有理数的小数表征，揭示无理数的小数表征，

加深学生对无理数概念和表征的理解。同时可以附加式运用历史知识，介绍无理数发展的历史，让学生了解数学并非无中生有，而是从现实生活中产生。历史上无理数概念的曲折发展，也可以渗透数学学科的德育功能，让学生体会人们对任何新事物的认识都是伴随着曲折往复而螺旋上升，同样学习也是螺旋上升的过程。虽高中及后续不再专门学习无理数，但在认识新类型的无理数时，需要教师帮助学生进一步理解无理数的类型。同时，鉴于初中知识的深度，不可能详细讲述无理数其他更多的定义，教师可以设下伏笔，以备学生在后续学习中完善对无理数以及实数的认识。

参考文献

[1] Zazkis R, Sirotic N. Making sense of irrational numbers: Focusing on representation [A]. In: M J Hoines, A B Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. Norway: Bergen, 2004. 497-504

[2] Zazkis R. Representing Members: Prime and Irrational [J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2005, 36 (2-3): 207-218.

[3] Sirotic, N., Zazkis, R. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2004, 65(1): 49-76.

[4] Cajori, F. The pedagogic value of the history of physics [J]. *The School Review*, 1899, 7(5): 278-285

[5] Smith, D. E. *Teaching of Elementary Mathematics* [M]. New York: The Macmillan Company, 1900. 42-43

[6] 庞雅丽,李士锜. 初三学生关于无理数的信念的调查研究 [J]. 数学教育学报, 2009, 18(4): 38-41.

[7] 冯璟,陈月兰. 无理数的认识——对 64 名职前数学教师的调查研究 [J]. 中学数学月刊, 2010, (2): 6-8

[8] 陈月兰，杨秀娟. 初中生对无理数概念的理解 [J]. 上海中学教学, 2008, (6): 11-13

[9] M·克莱因.古今数学思想(第三册) (邓东皋等译) [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[10] Lacroix,S.F. *Elements of Algebra* [M]. LBoston: Hilliard, Gray, Little and Wilkins, 1831. 116.

[11] Bourdon,M. *Elements of Algebra*[M]. Boston: Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, 1831.106.

[12] Davies, C. *Elements of Algebra* [M]. New York: Wiley & Long, 1835. 127

[13] Sherwin, T. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Boston: Hall and Whiting, 1841. 140

[14] Hackler, C. W. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. New York: Harper & Brothers, 1847. 52.

[15] Robinson, H. N. *New Elementary Algebra* [M]. New York: Ivison Phinney, Blakeman, & Co., 1866. 24.

[16] Thomson, J. B. *New Practical Algebra*[M]. New York: Clark & Maynard, 1880.149.

[17] Wentworth, G. A. *A College Algebra* [M]. Boston: Ginn & Company, 1892. 89.

[18] Gillet, J. A. *Elementary Algebra*[M]. New York: H. Holt & Company, 1896.176.

[19] Taylor, J. M. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1900. 250.

[20] Milne, W. J. *Advanced Algebra for College and Schools*[M]. New York: American Book Company, 1902.19.

[21] Dickson, L. E. *College Algebra* [M]. New York: J. Wiley & Sons, 1902. 2.

[22] Fine, H. B. *A College Algebra* [M]. Boston: Ginn & Company, 1904. 41

[23] Wells, W. *Algebra for Secondary Schools* [M]. Boston: D. C. Health & Company, 1906. 222.

[24] Tanner, J. H. *High School Algebra* [M]. New York: American Book Company, 1907.235.

[25] Marsh, W. R. *Elementary Algebra*[M]. New York: C. Scribner's Sons, 1907. 228.

[26] Young, J. W. A., Jackson, L. L. *Elementary Algebra* [M]. New York: D. Appleton & Company, 1910. 42

[27] Long, E., Brenke, W. C. *Algebra, First Course* [M]. New York: The Century Co., 1913. 176.

[28] Cajori, F., Odell, L. R. *Elementary Algebra* [M]. New York: Macmillan, 1916. 91.

[29] Wilczynski, E.J., Slaught, H. E. *College Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1916. 19.

[30] Lyman, D. *Elementary Algebra* [M]. New York: American Book Company, 1917. 33.

[31] Hawkers, H. E. *Second Course in Algebra* [M]. Boston: Ginn & Company, 1918. 109.

[32] Merrill, H. A., Smith, C. E. *A First Course in Higher Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1923. 132.

[33] Schultze, A. *Elementary and Intermediate Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1925. 355.

[34] Weiss, M. J. *Higher Algebra for the Undergraduate* [M]. New York: J. Wiley, 1949. 29.

[35] Miller, E. B., Thrall, R. M. *College Algebra* [M]. New York: Ronald Press Company, 1950. 15.

[36] Feinstein, I. K., Murphy, K. H. *College Algebra* [M]. Ames: Iowa, Littlefield, Adams, 1957.3.

[37] Brumfiel, C. F., Eicholz, R. E., Shanks, M. E. *Algebra I* [M]. Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1961. 277.

[38] Fine, H. B. *College Algebra* [M]. New York: Dover Publications, 1961. 43.

[39] Miller, I., Green, S. *Algebra and Trigonometry* [M]. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1962.19.

[40] Koo, D., Blyth, M. I., Burchenal, J. M. *First Course in Modern Algebra* [M]. New York: F. Ungar Publishing Company, 1963.173,

基于数学史的高考试题分析

陈莎莎，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，200062）

教育部《关于 2017 年普通高考考试大纲修订内容的通知》要求“充分发挥高考命题的育人功能和积极导向作用”，并提出“在数学试题中增加数学文化的内容”。数学文化在高考数学试题中的渗透主要体现在数学史、数学精神、数学应用三个方面[1]。作为数学文化的一部分，数学史融入高考数学试题无疑能够发挥育人的功能，并且可以促进数学教育工作者对数学史的学习和研究，丰富他们的数学史素材，提高他们的数学史素养，改变数学教育对数学史“高评价、低应用”的现象。

数学史在高考试题中的渗透尽管并不常见，但也并非毫无踪迹可寻。考察 2007～2016 十年间全国各地的高考数学试卷，可以发现几乎每年都会出现基于数学史的试题，其中尤以湖北省试题最为突出。另外，对于基于数学史的试题，已有文献的研究大多数以内容和解法的赏析为主。那么，这些试题应用了哪些数学史材料？采用了哪些提出问题的策略？有什么特点？本文试图对此作出分析。

1 试题基本情况统计

2007～2016 十年间全国各地高考数学试卷中基于数学史的试题的基本情况统计如表 1 所示。从中可见，历年高考数学试卷中均有基于数学史的试题，十年共有 53 道——其中代数问题 26 道，解析几何问题 16 道，立体几何问题 6 道，平面几何问题 4 道，概率问题 1 道。

2 试题涉及史料分析

数学文化融入高考试题的途径有取材数学时事、数学游戏、数学名人、数学名著、数学名题、数学猜想、数学图形、数学符号、数学应用、数学思想方法十种[2]。本文在此基础上，对基于数学史的高考试题的所选取的史料类型进行归类分析，将上述 53 道试题所涉及的数学史料分为作图工具、几何图形、数学命题、数学问题和思想方法五类。其中有 1 道涉及了作图工具史料，4 道涉及了几何图形史料，38 道涉及了数学命题史料，4 道涉及了数学

表 1　53 道基于数学史的高考试题

年份	省份	文/理科/题次	数学史内容	所属领域
2007	湖南	理 15	杨辉三角	代数
	江苏	理 19	蝴蝶定理	解析几何
	北京	理 13	赵爽弦图	代数
2008	湖北	理 21	贝努利不等式	代数
	江苏	理 13	阿波罗尼斯圆	解析几何
	四川	理 12	阿波罗尼斯圆	解析几何
	山东	理 22	蝴蝶定理	解析几何
	江苏	理 17	费马点	代数
	山东	理 22	阿基米德三角形	解析几何
	江西	文 22	蝴蝶定理	解析几何
2009	湖北	理 10、文 10	毕达哥拉斯形数	代数
	湖北	理 15	角谷猜想	代数
	陕西	理 22	斐波那契数列	代数
	福建	理 15	斐波那契数列	代数
	福建	文 14	贝特朗悖论	概率
2010	江苏	理 17	米勒问题	代数
	浙江	理 19	杨辉三角	代数
	江苏	理 18	蝴蝶定理	解析几何
	天津	理 10	四色定理	代数
	湖北	理 15	帕普斯模型	代数
2011	湖北	理 13、文 9	“竹九节”问题	代数
	湖北	理 15	四色定理	代数
	北京	理 14	卡西尼卵形线	解析几何
	北京	理 8	皮克定理	平面几何
	江西	文 10	勒洛三角形	平面几何
2012	湖北	文 17	毕达哥拉斯形数	代数
	湖北	理 10	开立圆术	立体几何

	上海	文 14	斐波那契数列	代数
	江西	理 6	卢卡斯数列	代数
	湖北	文 17	皮克定理	平面几何
	湖北	文 16	“天池盆测雨”题	立体几何
	湖北	理 12	角谷猜想	代数
2013	上海	理 13	祖暅原理	立体几何
	广东	理 20	阿基米德三角形	解析几何
	广东	理 20	蝴蝶定理	解析几何
	全国 I	理 17	布洛卡点	平面几何
	江苏	理 17	阿波罗尼斯圆	解析几何
	湖北	理 14	毕达哥拉斯形数	代数
	湖北	理 9、文 10	求“盖”术	立体几何
	湖北	文 17	阿波罗尼斯圆	解析几何
2014	陕西	理 14	欧拉定理	立体几何
	广东	文理 20	蒙日圆	解析几何
	安徽	理 3	斐波那契数列	代数
	安徽	理 21	贝努利不等式	代数
	湖北	理 21	舒腾的椭圆规	解析几何
	湖北	理 19、文 20	阳马和鳖臑	立体几何
2015	湖北	理 2、文 2	“米谷粒分”问题	代数
	全国 I	理 6、文 6	“为米几何”问题	代数
	全国 II	理 8、文 8	更相减损术	代数
	全国 II	理 8、文 9	秦九韶算法	代数
	四川	理 6	秦九韶算法	代数
2016	四川	文 20	蝴蝶定理	解析几何
	山东	文 21	蝴蝶定理	解析几何

问题史料，6 道涉及了思想方法史料。

（一）作图工具

依据数学史上的作图工具而编制试题只有 2015 年湖北理科卷第 21 题。

试题 1　(2015 年湖北理科卷第 21 题)一种作图工具如图 2 所示。O 是滑槽 AB 的中点，短杆 ON 可绕 O 转动，长杆 MN 通过 N 处的铰链与 ON 连接，MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动，且 $DN=ON=1$，$MN=3$。当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时，带动 N 绕 O 转动一周（D 不动时，N 也不动），M 处的笔尖画出的曲线记为 C。以 O 为原点、AB 所在直线为 x 轴建立如图 3 所示的平面直角坐标系。

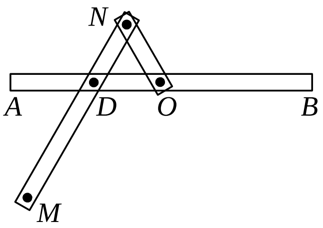


图 2

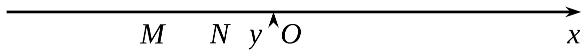


图 3

（I）求曲线 C 的方程；

（II）设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P, Q 两点。若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点，试探究：ΔOPQ 的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由。

题源：17世纪荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615～1660）在《数学练习》（1657）中介绍了多种椭圆作图工具（椭圆规）[3]，如图4。在前两种椭圆规中，短杆AB可绕A转动，$AB=a$；长杆BE通过B处铰链与AB连接，$BE=b$；BE上的钉子D可沿横轴KL移动，$AB=BD$。不难发现，当D在KL上移动时，E处的笔尖即画出了椭圆。

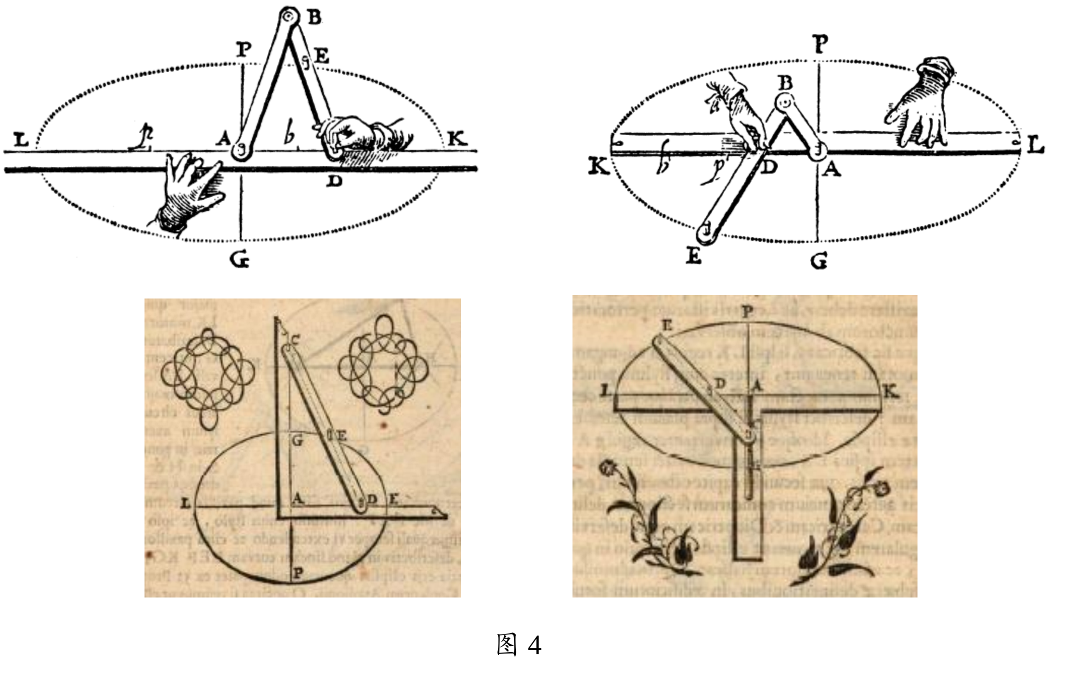


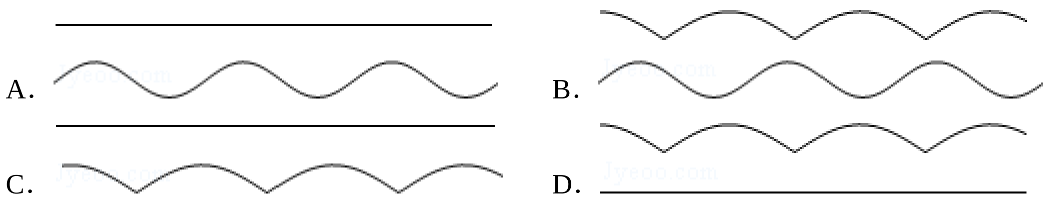
图 4

（二）几何图形

几何图形的对称、运动、突变等体现着数学的美，依据数学史上的几何图形而编制的试题有4道。比如，2007年北京理科卷第13题源自《周髀算经》中的“弦图”，采用出入相补原理使勾股定理不证自明，凝聚了古代数学家的智慧；2015年湖北理科卷第19题（文科卷第20题）则源自《九章算术》“商功”章中的“阳马”和“鳖臑”图形，充满趣味，当然题目对这两个词语的含义进行了现代文解释；2011年湖北省理科卷第15题则以《数学汇编》中的帕普斯模型揭示了基本不等式的几何意义。

试题 2　(2011 年江西文科卷第 10 题)如图 5，一个“凸轮”放置于直角坐标系 X 轴上方，其“底端”落在原点 O 处，一顶点及中心 M 在 Y 轴的正半轴上，它的外围由以正三角形的顶点为圆心、以正三角形的边长为半径的三段等弧组成。今使“凸轮”沿 X 轴正向滚动。在滚动过程中，“凸轮”每时每刻都有一个“最高点”，其中心也在不断移动位置，则在滚动一周的过程中，将“凸轮”“最高点”和“中心点”所形成的图形按上、下放置，应大致为（　　）。

图 5



题源：此题涉及的图形（即外围由以正三角形的顶点为圆心、以正三角形的边长为半径的三段等弧组成）称为勒洛三角形。据说，19世纪德国机械工程师勒洛（F.Reuleaux，1829～1905）为了寻找一个在任意方向上均可通过按钮孔但又不是圆形的按钮，从而发现该三角形。它是定宽曲线所能构成的最小图形，因其定宽性被称为“和圆一样的三角形”。它还有一个有趣的性质：宽度相等的定宽曲线有相同的周长。德国工程师万克尔（F.H.Wankel，1902～1988）利用勒洛三角形的性质，制造出第一台转子发动机样机[4]。值得一提的是，此题中的曲线是通过勒洛三角形的滚动得到的，实际上是一种摆线。历史上，继圆锥曲线之后，数学家关注得最多的曲线便是摆线。摆线源自滚动，形状各异、性质美妙、应用广泛，解决摆线问题需要平面几何、三角函数、解析几何等相关知识的支撑。除了此题之外，2010年北京理

科卷第14题、2011年江西理科卷第10题、2012年山东理科卷第16题均是与摆线有关的问题。

（三）数学命题

数学中的定义、公理、公式、性质、法则、定理都是数学命题。依据数学史上的数学命题而编制的试题最多，有 38 道。当中涉及许多定理（如蝴蝶定理）、公式（如开圆立方）以及猜想（如角谷猜想）。

试题 3 (2013 年上海理科卷第 13 题)在 xOy 平面上，将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(x\geq 1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1(x\geq 3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D，如图 6 中阴影部分。记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω，过 $(0,y)(|y|\leq 1)$ 作 Ω 的水平截面，所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体，得出 Ω 的体积值为__________。

在 xOy 平面上，将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(x\geq 1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1(x\geq 3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D，如图 6 中阴影部分。记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω，过 $(0,y)(|y|\leq 1)$ 作 Ω 的水平截面，所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体，得出 Ω 的体积值为__________。

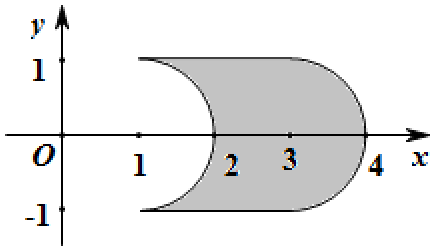


图 6

题源：此题源自《九章算术》"少广"章李淳风注中的"祖暅之开立圆术"。在李淳风注中，祖暅提出："夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。"意思是：诸立体凡等高处截面积相等，则其体积必相等[5]。此题将不好计算的水平截面分为一个平放的圆柱和一个长方体，巧妙地绕开了难以直接计算的体积，体现了数学史教育价值的"方法之美"。

（四）数学问题

一些试题依据数学史上的数学问题而编制，如历史上的数学名题和优秀数学著作中的数学问题。此类试题共 4 道，具体信息见表 2。

表 2 基于“数学问题”史料编制的高考试题

高考试题	数学史内容	来源	作者	国家/地区	时间
2010 年江苏理科 17 题	米勒问题	书 信	雷吉奥蒙塔努斯	德国	15 世纪
2011 年湖北省理科 13 题、文科 9 题	“竹九节”问题	《九章算术》注	刘徽	中国	263 年
2013 年湖北省文科 16 题	“天池盆测雨”题	《九章算术》注	刘徽	中国	263 年
2015 湖北省文理科 2 题	“米谷粒分”问题	《九章算术》注	刘徽	中国	263 年

试题 4 （2010 年江苏理科卷第 17 题）某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H(单位：m)，如示意图 7，垂直放置的标杆 BC 的高度 h=4m，仰角 $\angle ABE=\alpha$，$\angle ADE=\beta$。

（1）该小组已经测得一组 α、β 的值，$\tan\alpha=1.24$，$\tan\beta=1.20$，请据此算出 H 的值；

（2）该小组分析若干测得的数据后，认为适当调整标杆到电视塔的距离 d（单位：m），使 α 与 β 之差较大，可以提高测量精确度。若电视塔的实际高度为 125m，试问 d 为多少时，$\alpha-\beta$ 最大？

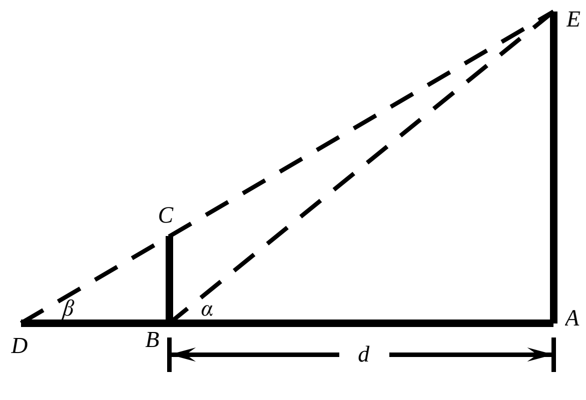


图7

题源：此题由米勒问题改编而成。米勒（J. Muller，1436～1476）又名雷吉奥蒙塔努斯（Regiomontanus），是15世纪德国数学家[6]。1471年，雷吉奥蒙塔努斯在给爱尔福特大学教授罗德的信中提出了下面的问题：“一根垂直悬挂的杯子，从地面上哪点看上去最长（也就是视角最大）？”这个问题已经被宣称是数学史上第一个极值问题[7]。更一般的如下：已

知点A、B是角MON的边ON上的两个定点，点C是边OM上的动点，则当C在何处时，$\angle ACB$最大？对于该问题，运用切割线定理，可得当且仅当三角形ABC的外接圆与边OM相切于点C时，$\angle ACB$最大，即米勒定理。上述试题可以通过米勒定理巧妙地求解，体现了“方法之美”。

（五）思想方法

这里所说的“思想方法”，指的是证明命题或解决问题所用的数学思想以及算法。依据数学史上的思想方法而编制试题共 6 道，如表 3 所示。

表 3 基于“思想方法”史料编制的高考试题

高考试题	数学史内容	来源	作者	国家/地区	时间
2009 年湖北省文理 10 题	毕达哥拉斯形数	不详	毕达哥拉斯学派	古希腊	公元前 500 年
2009 年湖北省文科 17 题	毕达哥拉斯形数	不详	毕达哥拉斯学派	古希腊	公元前 500 年
2014 年湖北省理科 14 题	毕达哥拉斯形数	不详	毕达哥拉斯学派	古希腊	公元前 500 年
2015 全国II卷文理科 8 题	更相减损术	《九章算术》注	刘徽	中国	公元前 500 年
2016 年四川省理科 6 题	秦九韶算法	《数书九章》	秦九韶	中国	南宋
2016 全国II卷理科 8 题、文科 9 题）	秦九韶算法	《数书九章》	秦九韶	中国	南宋

试题 5 （2012 年湖北文科卷第 17 题）传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上画点或用小石子表示数。他们研究过如图 8 所示的三角形数。将三角形数 1, 3, 6, 10, … 记为数列$\{a_n\}$，将可被 5 整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$。可以推测：

(1)$b_{2\,012}$是数列$\{a_n\}$中的第______项；

(2)b_{2k-1}＝______。(用 k 表示)

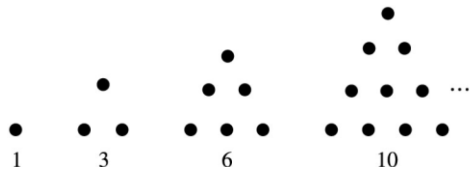


图 8

题源：此题源自古希腊毕达哥拉斯学派（公元前 6 世纪）的形数思想[7]。毕达哥拉斯学派关于形数的研究，强烈地反映了他们将数作为几何思维元素的精神。此题将可被 5 整除的三角形数形成新数列，将形数思想与数列的通项公式的考察恰如其分地结合起来。

3 试题提出策略分析

根据已知情境或已知问题提出新问题的具体策略有四种：条件操作（改变已知条件）、目标操作（改变要求目标）、对称互换（将已知条件和要求目标互换）、新旧链接（对现有问题进行扩充，新问题的解决依赖于现有问题的解决）。在此基础上，我们将数学史问题提出的策略分成七种：再现式、自由式、情境式、条件式、结论式、对称式、链接式。例如，以《九章算术》“勾股容方”问题为例，表 4 给出了利用各类策略所提出的代表性问题。

表 4 基于数学史的问题提出举例

类 别	问 题
再现式	今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何。
情境式	有一块直角三角形空地，直角边长分别为 8 米和 12 米。现要在该空地上建一个正方形花坛，要求面积最大，求花坛的边长。
条件式	（1）已知直角三角形的两条直角边长分别为 7 米和 25 米，求与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长； （2）已知直角三角形的直角边为 a 和 b，求其内接正方形的边长。
结论式	（1）已知直角三角形的直角边为 5 和 12，求其内接正方形的面积。 （2）已知直角三角形的直角边为 5 和 12，求其内接正方形的对角线。
对称式	已知直角三角形的内接正方形边长为 60/17，斜边为 13，求直角边。
链接式	已知直角三角形的直角边为 a 和 b，根据内接正方形边长与 a 和 b 之间的关系，证明 $2ab / (a + b) < (a + b) /2$.
自由式	（1）利用尺规，作一个已知直角三角形的内接正方形。 （2）若直角三角形两条直角边分别为 a 和 b，则内接正方形边长为 $ab / (a + b)$。你觉得古人是如何得到这个结果的？

通过分析发现，上述 53 道试题所用到的提出策略仅仅包括再现式、自由式两种。其中有 4 道采用了再现式策略，49 道采用了自由式策略。

3.1 再现式策略

再现式策略就是直接采用数学史上“原汁原味”的问题、解法等，加以直译后再现，其对应的数学史运用方式是复制式。比如，2013 年湖北文科卷第 16 题以《数书九章》中的“天池盆测雨”题为背景；2015 年湖北理科（文科）卷第 2 题以《九章算术》中的“米谷粒分”问题为背景；2015 年全国新课标 I 理科（文科）卷第 6 题以《九章算术》中的“为米几何”问题为背景。

试题 6 （2011 年湖北理科卷第 13 题）《九章算术》“竹九节”问题：现有一根 9 节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，则第 5 节的容积为________升。

题源：此题即为《九章算术》“均输”章中的“竹九节”问题。原文为：“今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问：中间二节欲均容，各多少？”[5]通过直译的方式将原题再现，同时为了便于填空题的考查，将求解各节竹子容积的问题改为求解第5节竹子容积的问题。

3.2 自由式策略

自由式策略就是根据一则数学史料（如历史上的数学故事、数学命题、数学问题、数学方法等）来提出数学问题，将条件和目标都重新设定。有些试题明确指出了数学史料的来源；有些试题素材源自某个数学名题、数学猜想、数学结论、数学事件等，但未明确指出来，只有在解题过程中才可感受到。

试题 7 （2012 年湖北理科卷第 10 题）我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即立圆径。“开立圆术”相当于给出了已知球的体积V，求其直径d的一个近似公式$d \approx \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$。人们还用过一些类似的近似公式。根据$\pi$=3.14159⋯判断，下列近似公式中最精确的一个是

（　　）

A．$d \approx \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$　　B．$d \approx \sqrt[3]{2V}$　　C．$d \approx \sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$　　D．$d \approx \sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

题源：此题源自《九章算术》“少广”章中的“开立圆术”。原文是对“今有积四千五百尺。问：为立圆径几何”问题的解答[5]。此题给出《九章算术》原文并加以解释，再结合历史上曾经使用过的相关近似公式，将我国古代几个圆周率的近似值融入其中。此题对问题进

行自由式地改编，对球体积公式进行了考察。对照球体积的正确公式，选项A、B、C、D所对应的圆周率近似值分别为$\frac{27}{8}$、古率$\frac{3}{1}$、徽率$\frac{157}{50}$和祖冲之约率$\frac{22}{7}$，可见越来越精确。

4 试题特点归纳

纵观十年间全国各地高考基于数学史的试题，不难看到其有以下特点：

第一，53 道试题中，有 14 道（约占 26%）涉及中国古代数学，主要来源于《九章算术》《数书九章》《算数书》等中国传统数学文献。将中国古代名著中的数学史料融入高考题中，可以起到弘扬传统文化、培养爱国情怀的作用。

第二，53 道试题中，有不少与现行高中数学教材中的数学文化内容进行了“链接”，即以教材正文或“思考”、“探究与发现”、“阅读与思考”等拓展栏目中的有关内容为命题素材。如 2015 年湖北理科卷第 21 题（椭圆的作图工具）与苏教版高中数学教材选修 2-1 中的阅读材料“猫的运动轨迹与达·芬奇椭圆仪”互相对应；2009 年湖北高考文理科 10 题（毕达哥拉斯学派的“形数”思想）与人教版必修 5 第 32 页的正文部分（三角形数与正方形数）相链接；2016 年新课标 II 卷理科 8 题（秦九韶算法）和 2015 年全国新课标 II 卷文理科 8 题（更相减损术）分别与人教版必修 3 第一章算法初步的第三小节中的两个算法案例相链接，促进课本数学史内容和应试之间的平衡。

第三，53 道试题中，史料类型涉及较为丰富，有作图工具、几何图形、思想方法、数学命题、数学问题五类。其中有 38 道（约占 72%）依据数学命题这一类型史料编制，占较大比例，而以作图工具和几何图形此类史料编制的试题较少。

第四，53 道试题都是采用再现式或自由式策略提出的，其中自由式占比例高达 92%；情境式、对称式、条件式、结论式等策略付之阙如。以再现式策略提出的高考试题大多直接提及数学史背景，复制史料中的数学问题，并直译以便于考生的理解，且均以选择题形式考察。而以自由式策略提出的高考试题，大多不直接给出试题背后的数学史背景，需要教师和学生挖掘背后的数学史内涵。

5 试题命制改进建议

根据以上分析，我们得到以下启示。

第一，命题者在命题中需要加大对史料挖掘的广度和深度。虽然高考题中所运用的数学

史料的形式较为多样，但面对古今中外上下数千年的数学史，这些史料只不过沧海一粟而已。例如，所涉及的中世纪欧洲数学只有斐波那契数列，而斐波那契的《计算之书》乃是 13 世纪初百科全书式的数学著作，书中的数学问题十分丰富，诸如棋盘问题："第一个格放 1 粒麦子，以后各格所放麦粒数是前面所有各方格之和的两倍"，就是典型的高中数学问题。

第二，命题者在命题中需要运用不同的问题提出策略。由于提出问题的策略单一，基于数学史的问题不够丰富多彩。命题者完全可以从史料出发，创设现实生活情境，更贴近考生生活并凸显数学的应用性；结合课本所学内容，对其数学条件和结论进行适当地改编，扩展至多个考点的考察；对史料中的问题进行扩充，链接式地提出问题，此策略可通过解答题形式进行考察，连环提问。如，2017 届江西省百校联盟高三 2 月联考的考题中有一题，先介绍《数书九章》的"三斜求积"公式，然后给出三角形的周长和三个内角的正弦之比，求△ABC 的面积，该问题即采用了条件式策略，将《数书九章》原题中的条件"三边长"改为"周长和三内角正弦值之比"，目标不变，仍为求三角形面积。丰富的史料加上灵活多样的问题提出策略，必然产生无穷无尽的精彩的数学问题。

第三，此类数学试题需要发挥更多的数学史教育价值。高考题中的数学史材料可以引导学生运用有关数学概念、思想和方法来解决问题，从而让学生感受"方法之美"；可以提升学生的数学阅读和理解能力，体现"能力之助"；可以呈现数学问题之源、数学的社会功能、数学的多元文化、数学与现实世界的联系等等，从而揭示"文化之魅"；还可以呈现数学史上数学家的错误，实现"德育之效"。例如，以下是历史上数学家曾经给出过的棱柱的各种定义：

（1）有两个面为全等的多边形，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；

（2）有两个面为平行且全等的多边形，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；

（3）有两个面全等且对应边平行的多边形，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；

（4）有两个面的对应边平行且相等，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；

（5）有两个面为平行、全等且对应边平行的多边形，其余各面均为以全等多边形对应边为底的平行四边形，这样的多面体称为棱柱。

上述定义中正确定义的个数为

（A）1 个；（B）2 个；（C）3 个；（D）4 个

这样的问题呈现了数学家的错误，揭示了数学活动的本质，促进了棱柱概念的理解，具有多方面的教育价值。

基于数学史料的高考题的编制是一个十分有意义的课题，我们相信，随着人们对于该课题研究的深入，试题的水平必将逐年提升，所用的史料必将逐年丰富，所发挥的教育价值必将趋于多元化。

参考文献

[1] 陈昂，任子朝. 突出理性思维，弘扬数学文化——数学文化在高考试题中的渗透[J].中国考试, 2015(3).

[2] 梅磊，史嘉. 例读数学文化融入高考试题的意义和途径[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2015(1).

[3] Schooten, F.van.*Exercitationum Mathematicarum* [M]. Lvgd Batav: Johannis Elsevirii, 1657.

[4] Posamentier A S, Lehmann I. *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*[J]. Prometheus Books Amherst Ny, 2004.

[5] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社, 2004.

[6] Maor, E. 三角之美[M]. 曹雪林，边晓娜译. 北京：人民邮电出版社, 2010.

[7] Dörrie, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics:Their History and Solution*[M]. New York: Dover Publications, 1965.

[8] 李文林. 数学史概论[M]. 北京：高等教育出版社, 2011.

教学实践

HPM 视角下的“实数的概念”教学

宋万言[1] 栗小妮[2]

（1.上海市武宁中学, 上海, 200331；2.华东师范大学教师教育学院, 上海, 200062）

1 引言

在上海教育出版社九年义务教育课本中，“实数的概念”是七年级第二学期第十二章第一节课的内容。“实数的概念”教学内容是在学生学习了有理数相关知识的基础上学习无理数的概念，进而学习实数的概念和分类。无理数的引入，数系的扩展充满着对立和统一的辩证关系及分类思想，实数和数轴上的点一一对应蕴含着数形结合的思想。所以这节课不仅仅是完善学生的知识结构，而且还是培养学生想象能力，渗透数学思想，感受数学美的有效载体，也是发展学生逻辑思维能力的重要内容。无理数的发现，是人类对数的认识的一次飞跃，是理性思维的成果；同时，无理数的产生也是生产和生活的实际需要。

用“无限不循环小数”表征定义无理数，虽从形式上能够让学生迅速掌握如何判断一个数是不是无理数，但知识并非“速食品”， 无限不循环小数是无理数这事实性的定义，并不能让学生理解为什么需要无理数？ 在数域扩充的的过程中无理数如何产生？有何用途？与有理数有什么本质区别？现行教材中采用“用两个边长为 1 的正方形拼成一个新的正方形”来引入无理数，说明无理数 $\sqrt{2}$ 的存在，但并没有说明，这个数与已存在的有理数有何区别，为什么属于新的数系？[1]因此，为了学生能深刻理解无理数产生的必要性和无理数的概念，我们尝试在 HPM 视角下，进行教学设计，突破无理数认识上的障碍，让学生体会到无理数存在的必要性和无理数概念的由来。基于以上教学思考及设计思路，制定本节课的教学目标如下：

（1）通过动手操作体验发现无理数的过程，知道无理数是客观存在的数。

（2）通过对比分析，理解无理数与有理数的区别，是不能用两个整数之比表示的数，是无限不循环小数，会辨别无理数。

（3）了解数的范围从整数到有理数、再到实数的扩展过程，知道实数的分类，体会分类的数学思想。

（4）了解无理数的发展史，以及在数学史上，对无理数的各种定义。

2 无理数的发展历史

早在公元前 470 的古希腊时期，毕达哥拉斯学派发现边长为 1 的正方形，它的对角线长并不是整数或者整数之比，即 $\sqrt{2}$ 的出现，后来陆续又有很数学家发现了类似 $\sqrt{2}$ 这样的数，如 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$ 等等。柏拉图最早将这样的数称为“无法言传的数”，后来才将这一类数称为“无理数（irrational number）”

在此后的 2300 年时间里，数学家们对无理数的使用越来越广泛，但对无理数是不是真正的数一直存在分歧，直到 18 世纪，数学家们仍然没有弄清楚无理数的概念。但 18 世纪是无理数理论体系建立的萌芽时期，陆续有数学家证明了一些特殊的形式的数是无理数。 19 世纪是无理数理论体系从模糊到逐渐清晰的时期。有很多数学家加入到研究无理数的队伍中来，他们先后给出了几种不同的无理数的定义，到 19 世纪末实数理论体系逐渐完备，有了我们今天所学的实数的分类。

我们国家将“irrational number”称为“无理数”，最早源于晚清数学家华衡芳在翻译英国数学家华里司的《代数术》时的误译，他将根式译为“无理式”，《代数术》东传日本后，日本数学家根据这一译名，将无限不循环小数译为“无理数”，后这一称呼被广泛采用。通过了解历史我们知道“irrational”一词的原意为“不可比的”，即“不能表示成两个整数之比”的意思。无理数定义的曲折发展，也说明了人们对任何新事物的认识都是伴随着曲折往复而螺旋上升。

3 教学设计与实施

3.1 结合生活实际，创设情境引出问题

从无理数的发展史来看，无理数是从我们的现实生活中产生而来。而现实中的无理数在哪里？通过对已学有理数知识的复习，学生明确了有理数都可以写成两个整数之比的形式，是否存在不能用两个整数之比的形式来表示的数呢？根据学生现有的知识水平，通过对平时常见的 A4 纸的长和宽的比值的探讨，引出本节课。

问 1：在现实生活中，是否存在不能用两个整数之比来表示的数呢？

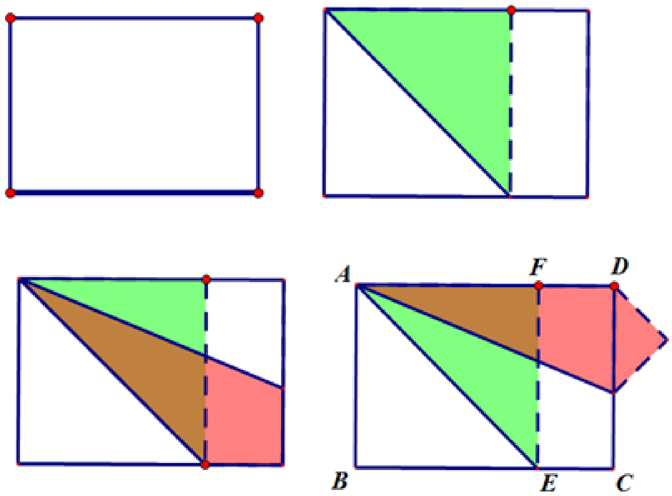
让我们带着这个问题，进行探讨：你能用什么办法来求一张 A4 纸的长与宽的比？

生：通过测量长和宽来求比。

师：这样测出来的是否准确呢？

生：不准确，因为我们测量读数时有误差。

师：我来教你们一种折纸的方法，通过这种方法，我们可以找到一条线段，使它的长与 A4 纸的长相等。请同学们利用手中的 A4 纸，按照如下操作，和我一起折。（如下图所示）



问：通过折纸可以发现，折痕 AE（即正方形 *ABEF* 的对角线）和长 *AD* 的长度相等，若将 *AB* 看做 1，*AE* 的长度又是多少呢？

师：这个问题，是已知正方形的边长，求正方形的对角线长，我们没有学过。那么，已知正方形 *ABEF* 的边 $AB=1$，我们会求什么？

生：正方形的面积。

师：等于几？

生：1。

师：面积为 1 的正方形的边长是多少？

生：1。

师：面积为 4 呢？

生：2。

师：当我们知道了正方形的面积，我就会知道正方形的边长了。那么我们是否能以 AE 为边长，构造一个正方形，通过这个正方形的面积，来求 AE 的长呢？

在一问一答之间，从学生现有的认知基础出发，通过对问题的探索，引出了解决问题的方法。同时，为学生掌握类似 $\sqrt{2}$ 的无理数的几何意义做好了铺垫。这一设计，也使得教材中的“用两个边长为 1 的正方形拼成一个新的正方形”的引入，变得顺理成章，显得不是那

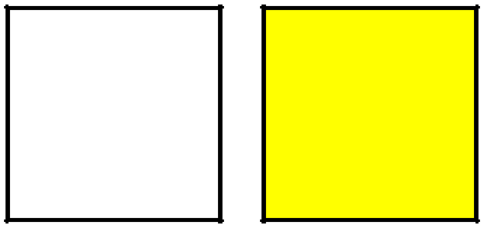
么突兀。

3.2 拼图探究活动，发现无理数的现实存在

拼图，是古代中西方数学家研究和证明几何问题的主要方法。新课程倡导数学知识要与生活实际相联系，符合学生生活体验的数学情景能使数学更加生动，从而便于理解。把拼图合作探究的方式，融入教学，使学生真正的成为课堂的主体，更好的领悟知识的发生发展的过程，有利于学生对知识的理解。具体操作如下：

师：当我们知道了正方形的面积，我就会知道正方形的边长了。那么我们是否能以AE为边长，构造一个正方形，通过这个正方形的面积，来求AE的长呢？

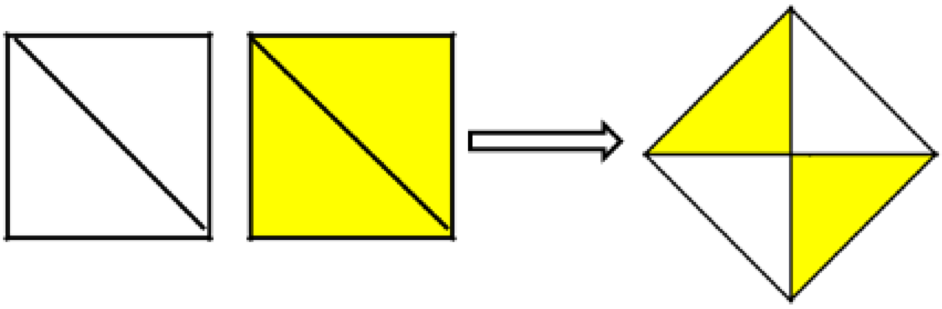
探究活动：利用两个边长为1的正方形，拼成一个以它的对角线为边长的大正方形，怎样拼？（学生四人为一小组，展开讨论尝试拼图，然后每组派一名代表汇报拼图结果）



拼图结果展示：

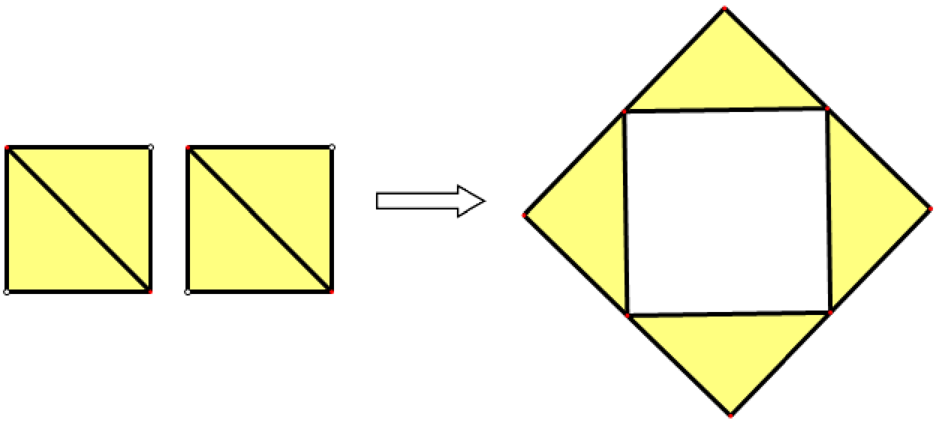
拼法一：

将两个小正方形沿对角线剪开，并将得到的4个直角三角形的直角顶点重合，拼成下图。



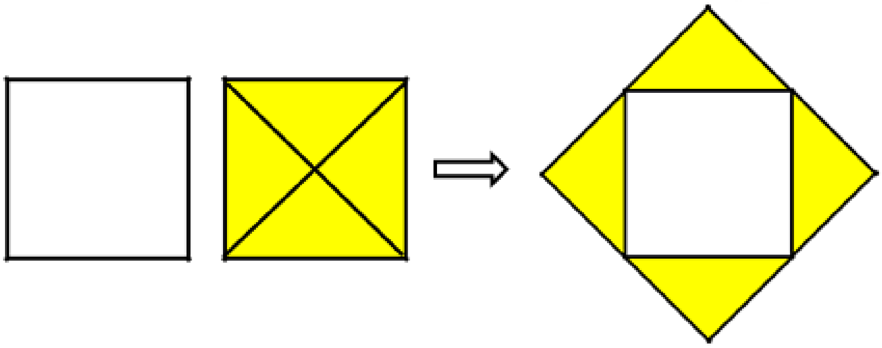
拼法二：

将裁剪后的4个直角三角形的直角顶点作为大正方形的4个直角顶点，拼成如下图所示的样子，中间空白的正方形即为我们所要拼的正方形；或者可以理解为，将拼法一所得的正方形中的4个直角三角形，分别沿斜边翻折，亦可得到下图。



拼法三：

将一个小正方形沿对角线裁成4个小的直角三角形，并将这4个小的直角三角形的斜边与另一个小正方形的4边分别重合，并拼成如下右图所示的样子，其中最大正方形就是我们所要拼的。



在教学中，让学生通过动手实践，小组交流与展示，增强探索和创新意识，体验发现的过程，养成积极、生动、活泼的自主合作探究的学习氛围，符合新课程理念。通过这一拼图环节，让学生在后续教学活动中体会到无理数是一个确实存在的数。

3.3 估算 $\sqrt{2}$ 的大小，深刻理解几何意义

通过以上的拼图活动，我们都得到了符合要求的新的正方形，如果设该正方形的边长为 x，那么 $x^2=2$。这个 x 究竟是多少呢？

师：若边长为 1（即 x=1），那么 x 的平方等于多少？与 2 比较，大还是小？

生：x 的平方等于 1，比 2 小。

师：若边长为 2（即 x=2）呢？

生：x 的平方等于 4，比 2 大。

师：那说明这个 x 介于那两个整数之间？

生：1 和 2 之间。

师：1 和 2 之间有很多数，x 是一点几呢？如何确定？

生：可以一个一个试算一下。

师：那我们就算一下 1.5 的平方等于多少？

生：等于 2.25。

师问：2.25>2，说明什么？

生：x 小于 1.5。

师：那 1.4 的平方呢？

生：1.96

师：1.96<2，说明什么？

生答：x 大于 1.4。

师：我们可以采用“二分法”来估算 x 的大小。取 1 和 2 得平均数----1.5，1.5 的平方等于 2.25>2, 所以 x 应该小于 1.5；然后再取 1 和 1.5 的平均数，如此反复，可越来越比较 x 的准确值。考虑到这一方法比较繁琐，我帮同学们准备了一些数据（如下），帮助我们来理解这个 x 的大小。

$1.4^2 = 1.96$

$1.41^2 = 1.9881$

$1.414^2 = 1.999396$

$1.4142^2 = 1.99996164$

$1.41421^2 = 1.9999899421$

通过这组数据，我们看到了：平方后的结果无限的接近 2，有兴趣的同学，课后还可以利用“二分法”继续计算下去，这个 x 是一个无限不循环小数。

师：有理数都可以用两个整数之比的形式表示，也就是分数的形式。一般的分数可以化成有限小数或无限循环小数，而这个 x 明显不属于这两类，也就是说，它不是一个有理数。这个 x 我们把它用 $\sqrt{2}$ 来表示。

师：在我们所探讨的这个问题中，x 表示什么？

生：正方形的边长。

师：那么 $\sqrt{2}$ 表示什么意义呢？

生：面积为 2 的正方形的边长。

师：回答的非常好，这就是 $\sqrt{2}$ 的几何意义。那你们知道现在根号是怎么演变过来的吗？

师：“根”的拉丁语是 *radix*，它是阿拉伯语的译名。路多尔夫、斯蒂文根据拉丁语 *radix* 或者英语的 *root*（根）的首字母的变形，创用了“√”作为根号；17 世纪，法国哲学家、数学家笛卡尔，巧妙的在原来的符号上面脱了一个尾巴，就形成了现在我们所熟悉的“$\sqrt{\ }$”。

“$\sqrt{2}$ 为什么不是有理数”这一问题，在数学史上有过多种证明。但根据初一的孩子所掌握的知识，不能完全理纯理论性的证明，这也就需要寻求一个突破点，使学生认识到 $\sqrt{2}$ 的确与我们所学过的有理数存在不同。而 $\sqrt{2}$ 的各种近似值，在很多国家都出现的较早。大约公元前 3000 年左右，巴比伦人就有了平方根表和立方根表，他们给出的 $\sqrt{2}$ 的近似值是 1.414213。笔者利用“二分法”，引导学生对 $\sqrt{2}$ 的大小进行探讨，其目的，就是要让学生感悟 $\sqrt{2}$ 既不是有限小数也不是无限循环小数，这也就体现出了 $\sqrt{2}$ 与有理数的不同，它属于一个新的数系。在接下来的教学中，笔者重点讲解了类似 $\sqrt{2}$ 这一类数（即算术平方根）的几何意义，即为一个固定面积的正方形的边长（$\sqrt{2}$ 表示面积为 2 的正方形的边长）。边长与面积，即一维与二维。通过对其几何意义的解释，不仅将一维的数放在了二维的形中进行研究和探讨，体现了数形结合的思想；又使学生认识到 $\sqrt{2}$ 不是无理数，即不是所有带根号的数都是无理数，为学生对无理数的深刻认识奠定了基础。在这一过程的讲解中，又穿插了根号的由来，这一数学史料，能更好的体现数学源于生活，很多数学符号，都不是天上掉下来的，是人们在生活和实践中所创造出来，可以激发学生学习数学的兴趣。

3.4 无理数概念产生，引入无理数发展史

师：通过上述的探索，我们知道了边长为 1 的正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$。也就是说，A4 纸的长与宽的比是 $\sqrt{2}$。这也说明了在现实生活中，的确存在不能用两个整数之比来表示的数。那么这类数就不是分数（整数可以看做分母为 1 的分数），也就是不可能是有限小数或者无限循环小数。所以，它们一定是无限不循环小数，我们把这一类数称为无理数。

师：无理数是没有道理的数吗？

生：不是，无理数是存在的。

师：在某一个时期，无理数曾被认为是没有道理的数。主要原因是，当时的翻译者，错误的将“无理数”翻译成了“没有道理的数” 了。无理数从被发现开始，经历了几千年的发展，才最终形成了我们现在所学习的这个定义，让我们一起，跟着微视频的讲述，了解一下无理

数的发展。（播放微视频）

在给出无理数的定义时，我们没有照搬教材；而是结合了“有理数可以用两个整数之比的形式来表示”的这一特征，凸显无理数与有理数的区别以及无理数存在的必要性。在此基础上给无理数下定义——不能用两个整数之比表示，再根据有理数的小数表征，揭示无理数的小数表征，加深学生对无理数概念和表征的理解。同时，也体现了知识的本源和知识的发生、发展的过程，让学生了解了一个术语的产生不是凭空而来，而是由旧知中衍生而来的。

本节课采利用微视频让学生深切体会到无理数的从无到有，从发现到发展，从不完善到完善的发展历程。通过这一经历，学生感受到了新知识发展的艰辛，在 2300 多年的历史长河中，无理数经历了各种定义，现在看来，一些定义是不完善不完整的，但在当时，也是一个历史性的突破。在追求真理的道路上，崎岖坎坷，唯有坚持不懈，才能在学术上有所成就，古人也非圣人，也有过错误的定义，但在对知识孜孜不倦的钻研下，一切困难终将解决。学生能够明白这一道理，胜于多做几道习题。

3.5 巧设例题解决难点，利用无理数发展史探究问题

在本节课的例题设计中，考查了目前学生所学过的所有数（如：本节课所涉及的三类无理数、整数、分数、有限小数、循环小数等），进行了列举，以此来巩固学生对实数分类的理解。设计如下：

例 1：将下列各数放入图中适当的位置：

0、-2、$\sqrt{2}$、3.14、$0.\dot{2}\dot{3}$、$\dfrac{22}{7}$、$\sqrt{16}$、$\dfrac{\pi}{3}$、$0.3737737773\cdots$（它们的位数无限且相邻两个“3”之间“7”的个数依次加 1 个）.

无理数有______________________________，正有理数有__________________________，

非正数有__________________________，整数有____________________.

其中，对于 $\sqrt{16}$ 的理解，可根据之前所讲述的几何意义，不难得出 $\sqrt{16}$ 表示的是面积为 16 的正方形的边长，即为 4，通过此种方法，让学生在还没有学习最简根式的概念的基础上，利用几何意义来理解 $\sqrt{16}$ 不是无理数，无疑是一种简洁有效且符合学生认知规律的办法，易于被学生所接受。这也是本节课突出介绍 $\sqrt{2}$ 的几何意义的重要目的。而通过对 $\sqrt{16}$ 是不是无理数的辨析，也使学生认识到了，并不是所有带根号的数都是无理数，一举两得，起到了事半功倍的效果。

对于“$\frac{\pi}{3}$是有理数还是无理数”这一问题，学生能够用“它不是两个整数之比的形式”来理解它为什么是无理数，在此体现通过“不能表示成两个整数之比的形式”定义无理数的必要性。

在概念辨析中，我们又利用早期美国教科书中无理数的定义设计了一些概念辨析题，如：有理数是正的和负的整数和分数， 其他实数都称为无理数。[1] 让学生知道无理数定义历史发展中，也存在一些错误的定义。我们都会犯错，无论过程多曲折，真理终究会出现。从另一个角度来说，这种钻研的精神，更是当代学生所缺乏的，也是值得他们学习的。

4 学生反馈分析

课后对学生进行了问卷调查，有 95.5%的学生喜欢本节课上所讲的数学史，他们认为：在学习数学的同时，了解相关历史，可以更好的帮助他们对知识的理解；能学到书本以外的知识，表示愿意接受，非常有兴趣。学生对这节课自己印象最深是：通过拼图的方法来认识无理数，感受到了无理数的现实存在；无理数的发展史以及根号的演变过程，即了解了历史，又增长了知识，还感受到了数学的奇妙；$\sqrt{2}$ 的几何意义，感觉十分生动，知道了它是面积为 2 的正方形的边长。

从学生的主观意识上来说，对于本节课 100%没有存在疑惑的地方；从客观上来说，81.82%的学生所列举出的自认为的无理数完全正确，并包含了课上所讲的三种类型的无理数，部分学生，所列出的数中有个别是错误的；77.27%的学生在对$\sqrt{5}$、$\sqrt{25}$、$\frac{\pi}{2}$、1.1212212221……（两个 1 之间一次多一个 2）这四个数进行无理数判断的时候完全正确。

5 教学感悟

5.1 知识之谐

无理数的发现，在数学史上引发了“第一次数学危机”，不少数学家刚开始并不承认无理数是数，直到 2300 多年后的 19 世纪末才出现了无理数的严格定义，建立了无理数的理论体系。现在的初中教材中都是采用“小数型”的定义，而上海版教材中却是用“根号型”无理数来引入无理数的“小数型”定义，这也就使部分学生产生困惑，从形式上完全看不出$\sqrt{2}$是无限不循环小数。笔者则利用“二分法”的原理，通过数据组的帮助，引导学生对$\sqrt{2}$的

大小进行了初步探究，这就能够让学生清楚的知道对于“根号型”无理数，总能找到一个和它无限接近的有限小数作为它的近似值，而这个数本身却是无限不循环小数。这一环节的处理，使教材中用“根号型”无理数来引入无理数的“小数型”定义，显得顺理成章。

结合教材中的拼图探索，使学生亲眼目睹了$\sqrt{2}$的现实存在，同时更加清楚的知道有理数的局限，更加凸显了无理数存在的必要性。在给出无理数的定义之前，我们通过$\sqrt{2}$不是两个整数的比，凸显无理数与有理数的区别。由“不是两个整数的比”过渡它不可能是有限小数或无限循环小数，至此，确定了无理数的小数表征，也使无理数的“小数型”定义有理可依、有据可查。这一环节，通过“是否能表示成两个整数之比”，贯穿从有理数到无理数的过渡，使两者无缝衔接，让学生明体会数系扩充的过程，体现了知识之谐。

5.2 文化之魅

新课标中指出：“数学文化是人类文化的一种，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。”作为“文化”的数学，要充分展示数学知识发生、发展及其应用的过程，体现数学与生活的联系，体现数学的人文价值，而其中“数学的观念、意识和思维方式”是“数学文化”的核心。

本节课中“$\sqrt{2}$”的由来这一数学史的引入，让学生简单了解这一数学符号的发生、发展的变化过程，体现了数学与生活的密切联系，也是数学人文价值的一种体现；$\sqrt{2}$的几何意义，更体现了“数学文化”的核心，它不仅充分展示了数学知识发生、发展及其应用的过程，更包含“数形结合”等思想方法，也实现了从“一维”到“二维”的思维方式的跨越，数学文化的魅力也应运而出。

5.3 探究之乐

《数学课程标准》指出：“有效的数学学习活动，不能单纯的依赖模仿和记忆，动手实践、自主探索与合作交流是学生学习数学的重要方式”。教师“应帮助学生在自主探索和合作交流过程中，真正理解和掌握基本的数学知识和技能，数学思想和方法，获得广泛的数学活动的经验”。本节课通过通过一连串的探究活动，凸显无理数在现实生活中的真实存在，学生既认识到了数学源于生活，又知道了课本以外的知识，更显得对未知的事物充满了好奇。且通过探究活动还掌握了$\sqrt{2}$这一类无理数的几何意义；在这一过程中，学生不仅收获了数学知识，掌握了解决问题的方法，还体会到了探究之乐。

5.4 德育之效

《数学课程标准》指出："数学教学，应从学生已有的知识经验出发，让学生亲身经历参与特定的教学活动，获得一些体验，并且通过自主探索，合作交流，将实际问题抽象成数学模型，并对此进行解释和应用。"本节课中开始的引入问题：A4 纸的长与宽的比是多少？从学生的认知出发，让学生感悟到数学来源于生活，生活中处处都有数学，它来源于生活又应用于生活。符合新课标中"人人学有价值的数学"这一理念。

利用课堂中所呈现的无理数发展史的微视频。学生可以清晰的认识到：数学知识是发展变化的，它的发展、完善的历程也不是一帆风顺的，期间也经历了发现----探索----验证----纠错等诸多环节，虽然经历了几上千年，才将知识的完善推进了一小步，这也说明了错误是经不起时间的考验的。换一个角度来看，如果同学都能具备这种持之以恒的学习态度，一切困难终将被我们所征服。也是将数学学科的德育价值融合与课堂教学中，将立德树人这一教育目标落到实处。

参考文献

[1] 栗小妮. 美国早期教科书中无理数的概念[J]. 数学教育学报, 待发表.

[2] 汪晓勤. HPM 的若干研究和展望[J]. 中学数学月刊, 2012(1), 1-5.

[3] M·克莱因. 古今数学思想(第三册) (邓东皋等译) [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[4] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准[M]. 上海: 上海教育出版社, 2004.

历史与探究活动的结合 学生与古人思维的碰撞

——HPM 视角下“角”的教学

冯晶[1] 岳增成[2]

（1.上海市杨浦区内江路第二小学,上海, 200093; 2.华东师范大学数学系,上海,200241）

1 引言

“几何小实践”是沪教版数学教材的特色版块，以四年级第一学期“角”的内容为例，教材利用三个例题将角的定义、角的构成、角的表示方法串联了起来，这样简洁的处理，给教师的教学带来了很大的发挥空间，但也极易给教师带来“这部分内容不重要”“这部分内容教起来很简单的”的错觉，而且教材在处理的过程中对角的动态形成定义这一难点关注不够，如果教师不加以处理，将会对学生后续特殊角，特别是平角、周角的学习带来困扰。目前的一些教学研究，能利用钟面上两种指针的转动关系等来帮助学生较好地理解角的动态形成定义，但也存在着缺少探究活动，学生思维深度不够等问题。

“数学史是教学的指南”，[1]“数学史是一种资源，提供大量问题和方法”，[2]“数学史提供了探究的机会”，[3]因此，将数学史融入“角”的教学，通过探究活动的设计，试图实现如下的教学目标：（1）了解角“由一点和从这点出发的两条射线所组成的图形”“射线绕着端点旋转”的两种定义；（2）熟练掌握角的表示方法；（3）通过观看课件和参与活动，进一步感知角的表象，认识角的“质、量、关系”，进一步掌握角的概念；（4）在创造角的符号等活动中，了解“∠”符号的由来，增强数学学习的兴趣与自信心，提高语言交流、表达能力。

2 历史材料及其运用

普罗克拉斯认为，必须同时从“量”（大小）、“质”（形状和特征）和“关系”（两线之间的关系）三个方面来定义角，[4]因此，历史上角的概念可以从质、量、关系三个方面予以考察。刘轩如等已从这三个方面对历史上角的概念进行了研究，并将角的历史重构于二年级“角的初步认识”的教学当中。[5]

数学符号具有唯一性、简洁性等特点，因此任何一个符号从产生到最终确立都经历了较长的时间，符号“∠”的确立也不例外，通过表 1 的呈现可以发现，17 世纪以来，数学家们根据角的形状创造了多种表示角的符号，甚至不同的符号被同一时代的数学家所使用，但通过不同时代数学家的选择，“∠”被最终确定下来。

表 1 角的表示符号演变的历史[6]

符号	表示的涵义	主要使用人及使用年代
<	小于号	Harriot 于 1631 年开始使用，随后被广泛使用
<	角	Hérigone 于 1634 年开始使用，16、17 世纪仍有很多人使用
∠	角	Oughtred 于 1657 年开始使用，后被广泛使用；∠∠、Z∠∠、X∠∠被用来表示两个角、两角和、两个不同的角表明“∠”表示角
7	角	Reyer（1698）、Bolyai(1832)、Ottoni(1874)使用过
∧	角，比如 $\widehat{ABC}$ 表示角 **ABC**	John Ward 等从 1752 年开始使用这一符号
∢；⊲	角	约 1862-1885 间有很多德国数学家使用过
L；∨；∀	角	一些比较少用的表示方法
$\overrightarrow{ab}$；（ab）；$\overset{\frown}{ab}$	角	两条射线 a、b 组成的角
∠；∟	钝角；直角	1903、1698 年 Bush、Euclides 等人使用过

那么，如何将上述的史料融入到“角”的教学当中？考虑到二年级教授“角的初步认识”时，没有从质、量、关系三个方面进行教学设计，因此在复习引入环节，从质、量两个方面进知识进行复习。考虑到本节课的教学重点，从量、关系两个方面设计角的定义的学习。考虑到以往教学中探究不够深入等问题，创造了角符号创造的探究活动，试图引导学生将自己创造的符号与数学教创造的符号作比对。

3 教学过程

3.1 复习引入

通过画角、对已有角的定义、角的分类的复习，特别是从质、量两个方面唤起就知，为新知识的学习做好准备，。

师：我们是怎么对角进行分类的？

生：锐角、直角、钝角。

师：什么是锐角，什么是钝角？

生：比直角大的角钝角，比直角小的叫锐角。

师：为什么要叫锐角？钝角呢？为什么要这样命名呢？

生：锐角比较尖锐，钝角要稍微钝一点。

师：你们回答的很好，古人也正是因为锐角比较尖锐，钝角要稍微钝一点给交了角的锐角、钝角的命名。现在请判断一下，你刚才画的是锐角、直角、还是钝角呢？

3.2 概念探究

（1）定义一及角的表示

师：在本次 G20 峰会的晚会表演上大量的运用了激光技术（图 1)，请你观察一下动画，说一说角是怎样形成的？

图 1

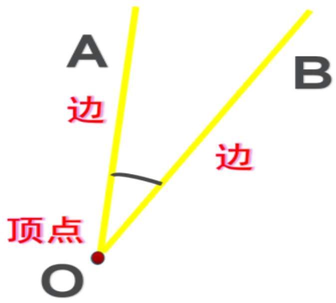


图 2

生：先画一个端点，再从这个端点画出两条射线。

师：你说怎么判断出是两条直边就是两条射线的？

生：因为有一个端点，从这个端点无限的延长出射线。

教师给出角的定义及角的组成部分（如图 2)，并通过追问引导学生对其进行巩固。

师：像这样一点（0）和从这点（O）出发的两条射线（OA 和 OB）所组成的图形，叫做角。公共端点叫做角的顶点，射线 OA、OB 称为角的边。

师：那什么是角？有哪些组成部分？

（2）角符号的创造

师：数学符号的发明及使用比数字要晚，但其数量却超过了数字。现在常用的数学符号已超过了 200 个，其中，每一个符号都有一段有趣的经历。例如，加号曾经有好几种表示方

式，目前通用“+”号。现在快速的浏览一下加减号对的小历史。

数学符号“+”号是由拉丁文“et”（“和”的意思）演变而来的。十六世纪，意大利科学家塔塔里亚用意大利文“plu”（“加”的意思）的第一个字母表示加，草为“μ”最后都变成了“+”号。“-”号是从拉丁文“minus”（“减”的意思）演变来的，一开始简写为 m，再因快速书写而简化为“-”了。

师：假如你是一个数学家，你想用什么符号来表示角呢？小组为单位讨论，并说一说你的理由。

学生通过独立思考与小组讨论在黑板上写出了多种角符号的表示方法，如图 3，并阐述了符号创造的原因。

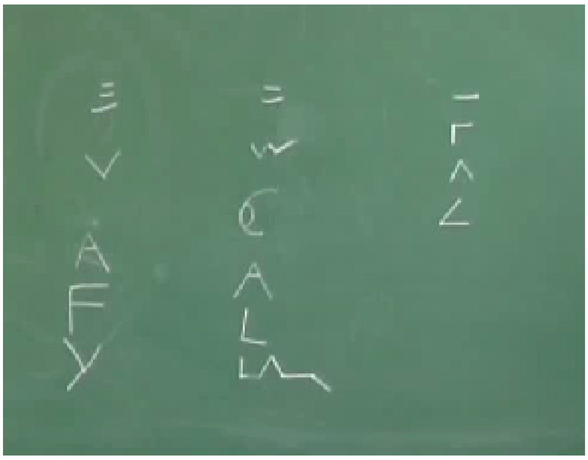
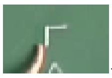
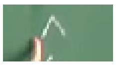
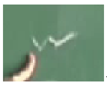


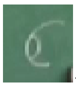
图 3 学生创造的角的表示符号

生 1：我想用这个符号表示直角，因为它本身很像直角。

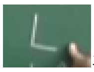
生 2：它像一个锐角，尖尖的，我想用这个符号表示锐角。

生 3：我想用这个符号表示所有角，锐角是最通用的角。

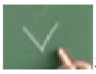
生 4：我想用这个 W 型来表示角，把这个 W 左边的 V 表示锐角，当中的表示直角，右边表示钝角。

生 5：我们一开始想用 A，但是我觉得 C 有点像，因为古代一开始可能没有那么尖的角，可能是延伸而来的。

生 6：A 这个外面的边本来就很像角，里面的像是画角里的一段弧。

生 7：这个字母 L 很像直角，所以用它表示直角。

生 8：我的符号和前面的小朋友有点类似用来表示所有的角，符号的左边是直角，中间是锐角，最右边是钝角。

生 9：这个 V 字型很像一个锐角，所以我想用它来表示锐角。

生 10：我想用这个符号表示直角。

生 11：我想这个符号表示锐角和钝角，上面那个 V 像锐角，下面像一个钝角。

师：并不是我们创造的每一个符号，都最终成为了世界通用的符号。比如，这个符号最终没有选为角的符合，是因为……

生：太复杂了；

师：这个和字母 A 冲突了，不是独一无二的。那么，角的形状更像小于号，为什么不用<呢？

生：因为它不是独一无二的

师：很好！事实上，在角这个数学符号的发展过程中，出现了形形色色不同的表达（呈现表 1 的内容让学生观察），刚才你们的表现就像那些伟大的数学家们，展现出了智慧的火花。

师：通过数学家们的研究，也经历了时间的洗练，最终被我们认可和沿用下来的角符号是“∠”，选择它是因为，它和其他数学符合一样，具备唯一性和简洁性的特点，即无论什么人都看得懂，没有和其它符合混淆，画起来也方便。所以我们可以这样表示角（图 2），记作∠AOB 也可以记作∠BOA，或∠1，读作角 AOB 或角 BOA 或角 1 ，看明白了吗？

（3）定义二及角的表示

展示 G20 峰会“梁祝”的文艺演出（如图 4）

图 4　G20 峰会“梁祝”表演截图

师：（在未画出黄线前）这是一个角吗？为什么？

生：它符合角的要求，有一个顶点和两条边。

师：所以这也是一个角。那请你试着描述一下，这个角是怎么形成的。（小组讨论）

生 1：像一把打开的扇子，由一条射线，像另一边张开，形成角。

生 2：先是两条边重合在一起，一条边开始移动，先形成锐角，再变成直角，最后变成钝角。

师：看来，射线绕着端点旋转，也会生成角，我们把开始旋转那个位置上的边叫做始边，旋转停止下来位置上的边叫做终边。

师：所以，角不仅可以看做由一个顶点和从这个顶点出发的两条射线所组成的图形，角也可以看作射线绕它的端点旋转而成的图形。

巩固角的表示方法，并回顾这节课学习的角的两种定义及两种定义的不同，当学生提到扇子、时钟可以看作动态角时，教师强调了扇子、时钟的哪些部分可以组成角。

3.3 课堂小结

师：请你说一说这节课我们学习了什么啊？有什么收获？

生：角的符号表示

生：角的组成

师：这节课我们学习了角，在古代，人们是在修水利工程或者为了丈量土地、建筑、房屋等时产生了对角的认识，角的符号呢，也是近现代才产生的，经历了一个发展变化过程，希望通过这节课的学习，小朋友们对角有新的认识。

4 教学反馈

课后，对班级 26 名学生的学习情况进行了问卷调查，对授课教师进行了访谈，分析发现：

（1）学生较好地掌握了本节课的内容。对于“请你描述一下这节课学习的角的两种定义”，有 8 人给写出了书本上的正确定义，6 人给出了课堂上使用的实物，激光和扇形，5 人给出了书本和实物的混合表示，且角的动态形成定义主要用扇形展开表示，2 人给出了图形表示，可见对这个知识点掌握较好的占到总数的 75%（见图 5）；对于“请你用尽可能多的方法表示出下图（图 6）的角”，（课堂中出现的角的顶点都用字母 O 表示，图 6 角的顶点作了调整），有接近一半的学生较好地掌握了角的表示方法，给出错误答案的人数占总数的 27%左右（如图 7）。

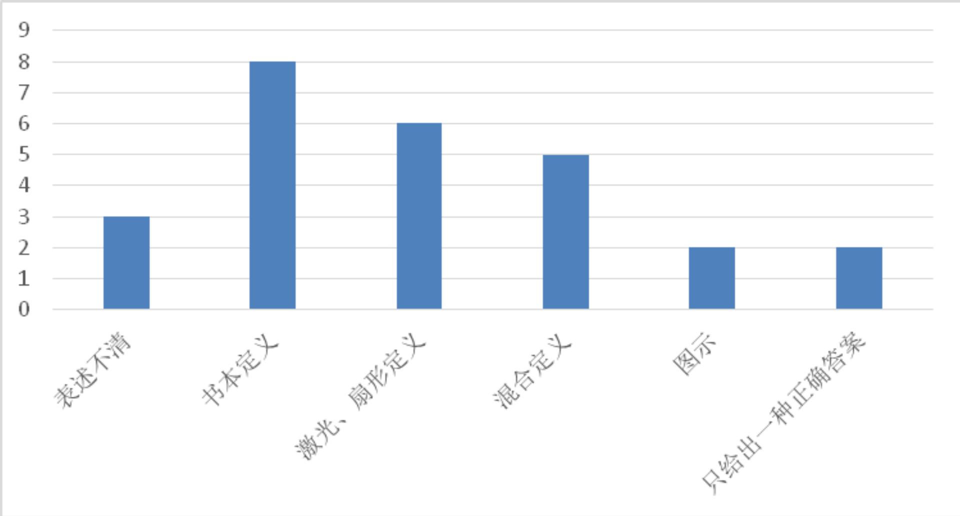
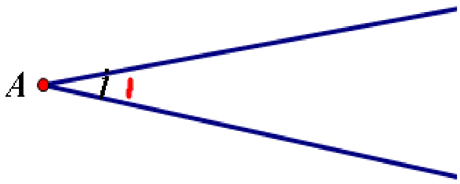


图 5 学生对角的定义的掌握情况



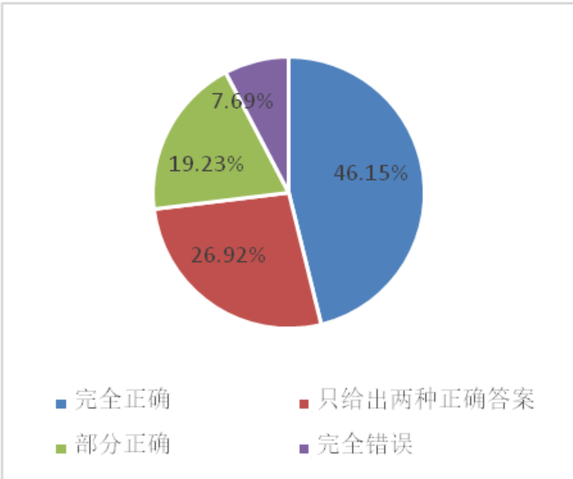


图 6　　　　图 7

（2）角符号创造的探究活动对学生的影响很大。这从有 23 人对“这节课你印象最深的是什么”的回答是与角符号创造的活动中可见一斑。给出的理由包括很有趣（3 人），加深了知识理解（4 人），原来有这么多可以表示角的符号（3 人），和数学家创造的符号一样，（3 人），原来自己也可以创造符号（3 人），在课堂上不仅可以相互交流，还可以像小数学家一样乐在其中。此外，学生通过这一探究活动，了解了数学符号的特点，对于为什么用“∠”而不用其它符号来表示角，除 2 名学生未作答外，9 人从简洁性（方便），5 人从简洁性、唯一性（不重复）、直观性（很像角），4 人从简洁性、唯一性，分别有 2 人从简洁性和形象性、简洁性进行了回答，1 人从形象性进行了回答。另一方面，当学生发现自己创造的符号和很多数学家的符号一样时，学生给出了这样的一些答案，

生 1：我们也可以像数学家一样发明角的符号，我们就是小数学家

生 2：我想说，我十分开心，竟然和德国数学家发明的符号一样

生 3：我们真有想象力

生 4：我觉得角有这么多表示方法，我们的想法也是千奇百怪

生 5：以前科学家都很有思想，我非常佩服

生 6：我觉得我们现在的符号，都是早期数学家想出来的

生 7：我们都可以当数学家

生 8：如果我生于那个时代，一定会是一位伟大的数学家

生 9：如果我们好好学习，认真学习，也有可能成为数学家

（3）授课教师对这节课的教学设计、教学效果有了较深入的反思：

“教学的本身其实还是要让在学生在课堂中真正掌握知识，在落实教学目标的方面，我还要扎实自己的基本功，真正体现出数学史融入数学课堂的价值”

“虽然可能我们现在没有办法看出今天我们为孩子倾注进去的精力和养分是不是一定对他们今后在数学学习帮助，但就目前看来，数学史的融入让他们亲近了数学，相比以往更愿意在我的课堂里展现自己的聪明才智，这就已经让我备受鼓舞。这段时间内，我本人也在不断突破，希望能借助数学史让我的学生们学得更快乐，让数学课堂变得更有‘味道’”。

5 结语

基于教材、已有教学中存在的问题，从数学史的角度设计了探究活动，在学生在与古人思维碰撞的过程中，实现了如下的教育价值：

（1）知识之谐

数学教学中，对于某个符号为什么用这而不用那表示，对于某个术语为什么这样命名，是所忽略的。在这节课中，学生通过将自己创造的符号与数学家创造的符号的比对，见证了角的符号表示从产生到最终确立的全过程，认识到了数学符号的唯一性、简洁性、通用性等特点。

（2）探究之乐

数学课堂要想真正的吸引学生，引发学生的深度思考，探究活动的设置必不可少。本节课通过角符号的创造活动的设置，吸引了学生的注意力，引发了学生的深度思考与合作交流，甚至有一个从未主动发过言的学生在黑板上写出了三种角的符号，并介绍了创造原因。

（3）文化之魅

G20 峰会的激光表演、扇形展开，让学生感受到了现代文明的气息，而国外角符号的发展过程，让学生体验到了不同时代数学家为角的最终确立作出的贡献，在古今文化的对照中，学生感受到了文化的多样性。

（4）德育之效

本节课中，学生为现代气息与近代角符号的创造过程所吸引，具有浓厚的学习兴趣，同时在角符号的创造过程中，有的学生认识到了近代数学家的伟大，有的学生在看到自己创造的符号与数学家的符号一样时，意识到了自己也可以创造符号，增强了学习数学的自信心，意识到了只要自己努力学习也可能会成为一名数学家。

当然，这节课还有一些需要继续提高的地方，一是在角的符号表示方法方面，能够正确应用三种方法表示角的学生比例不是特别高，二是尽管 G20 文艺表演中缓缓打开的扇子给学生留下了很好的概念意象，但这也恰恰给学生带来了迷思概念，学生不能从生活中的角中抽象出数学上角，因此没有学生认为这节课学习的角，与诸如打开的门、叉开的剪刀、时针与分针有什么不同之处。

参考文献

[1] Albers D J, Alexanderson G L. Mathematical People: Profiles and Interview [M]. Boston: Birkhauscr, l985. 171.

[2] Fauvel J., van Maanen J. *History in Mathematics Education* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 262-264; 272-273.

[3] Fauvel J. Using history in mathematics education [J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.

[4] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid Elements* [M]. Cambridge: John Clay, 1968. 176-181.

[5] 刘轩如, 岳增成. HPM 视角下”角”的教学[J]. 小学数学教师, 2016, (11): 43-48.

[6] Cajori, F. A history of mathematical notations[M]. New York: Dover Publication,1993, 403-409.