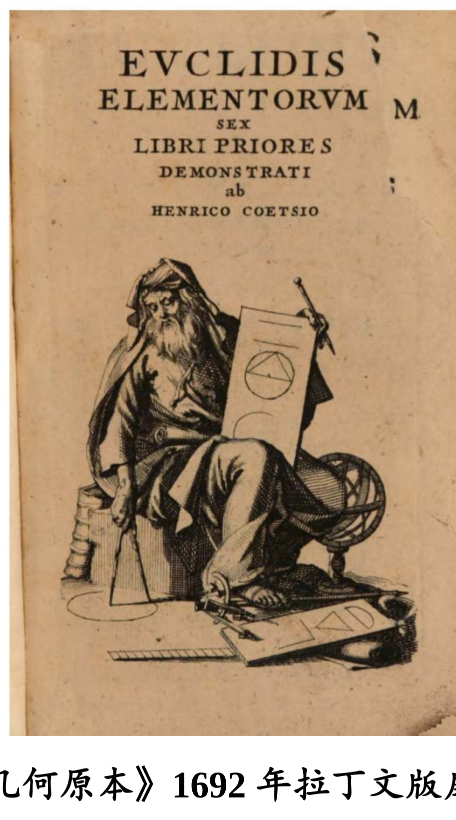
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 6 期



《几何原本》1692 年拉丁文版扉页

《上海 HPM 通讯》编委会

刊首新语

数学话剧的教育价值

数学常常被公众以及相当一部分学生视为枯燥乏味的学科。一个多世纪以前，英国学者 Heppel 曾在一次学术会议的报告中，引用了一首打油诗，说明人们对枯燥乏味的数学课本的嘲讽：

如果又一场洪水爆发，

请飞到这里来避一下，

即使整个世界被淹没，

这本书依然会干巴巴。

《圣经》中所讲的那场洪水，能够淹没整个世界，却未能浸湿我们的数学书，这是作者对于数学的辛辣讽刺。今天，世人对数学的印象却似乎并未改善。

人们对数学的刻板印象与他们所经历的学校数学教育息息相关。在很多教师的信念中，数学就是由众多概念、公式、定理和问题等冷冰冰的知识组成的一门学科，学生学习这些知识，一切都是为了解题。卷子上分数的高低，就是数学学得好坏的唯一标准。于是，在升学的巨大压力之下，出现了数学教学中的“重分数轻情感、重结果轻过程、重技术轻文化、重教书轻育人”的现状。在以“立德树人”为教育根本任务、提倡课程思政、卓越育人的今天，这种现状亟待改变。

作为长期在高校从事数学教学和研究工作的教师，我们常常思考一个问题：我们需要培养怎样的数学教师和数学研究人才？是拥有不错的数学成绩却持有消极数学情感的数学教师吗？是具备不错的研究能力却拥有低级情商的数学教师吗？是每天只会解题，却从不思考数学与人生幸福之间关系的数学教师吗？是只会与数字、符号打交道却不会与人打交道、终身保持自我为中心思维习惯的另类吗？倘若我们培养的是这样的数学教师，那么我们的数学教育就是“瘸腿的”教育。

正是基于这样的思考，我们深深感到在数学与人文之间架设一座桥梁的重要意义，数学话剧就是这样一座美丽的桥梁。

歌德曾经说过："一门学科的历史就是这门学科本身。"（《颜色理论》序）同样我们可以说：数学的历史就是数学学科本身。一名数学研究者未必认同这一观点，但对于数学教育工作者而言，这一观点却是无法否定的。数学教科书在呈现一个概念、一个公式、一个定理时，所用的文字不过寥寥数行，最多也不过几页，也就是说，相关数学知识是经过逻辑包装、经过裁剪加工的"压缩品"。在这种"压缩品"中，我们往往已经看不到知识的发生和发展过程，更不能看到知识与人的创造活动之间有何关联。因此，数学教师的教学工作就是"解压"、"解密"和"解惑"，也就是在课堂上"再现历史"，是引导学生完成"再创造"的过程。从这个意义上手，数学的教学，就是数学历史的教学，当然，这里所说的历史，并非原原本本的历史，而是经过重构的历史。

数学的历史告诉我们，正是不同时空的人创造了数学，人是数学活动的主角。在数学历史的星空，有无数的先哲，他们在数学创造的过程中执着地追求真善美，在为数学学科增添新知的同时，也为我们留下了宝贵的精神财富：泰勒斯（Thales, 前 6 世纪）因天文观测而掉入阴沟，阿那克萨哥拉（Anaxagoras, 前 499-前 428）身陷图圄而探索不止，阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）因沉迷数学而被罗马士兵杀害，希帕蒂亚（Hypatia, 370?-415）因追求真理而死于基督徒之手，祖暅（5-6 世纪）思考数学问题时"雷霆不入"，拉缪斯（P. Ramus, 1515-1572）身为一介书童却逆境成才，韦达（F. Viète, 1540-1603）研究数学是常常三天三夜不出房门，纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）二十年如一日，为简化天文大数计算而发明对数，牛顿（I. Newton, 1643-1727）在避疫期间在光学、微积分和力学领域取得划时代意义的成就，索菲·热尔曼（S. Germain, 1776-1831）在墨水结冰的冬夜仍勤奋学习，华里司（W. Wallace, 1768-1843）书写从学徒工到大学教授的人生传奇，斯坦纳（J. Steiner, 1796-1863）家境贫寒而自强不息……这些优秀历史人物的事迹，有着丰富的教育价值。

数学话剧就是要将这些历史人物在数学创造过程中的故事搬上舞台，其教育价值有：

- 促进数学学习

在编剧过程中，学生需要深入了解相关主题的历史背景与所涉及的思想方法，因而拓展了学习空间。

- 走进先哲心灵

学生在数学话剧的编剧和上演过程中，需要克服自我为中心的思维习惯，穿越时空，与古

人对话，走进古人的心灵之中，从而养成倾听、尊重的个性品质。

- 改变数学信念

数学是人的文化活动，人非圣贤，不断会犯错误。所以，数学历史充满谬误，充满争论，充满挫折和失败。所以，我们今天在学习过程中所遇到的困难乃是稀松平常之事，不必因为暂时的挫折而灰心丧气。

- 传递人文精神

历史上那些为数学和人类文明作出重要贡献的数学家，都是求真务实、勤奋执着、不惧艰难的人，正如明代科学家徐光启（1562-1633）所云：“吾避难，难自长大，吾迎难，难自消微，必成之！”数学背后蕴含着十分丰富的人文精神。数学家为什么研究数学？对于这个问题的深入思考，能够帮助学生思考生命的终极意义。

- 跨越学科鸿沟

数学并非“孤岛”，数学历史揭示了数学与物理、天文、航海、建筑、艺术、文学、历史、哲学等人类其他知识领域的密切关系，有助于学生更深刻地理解数学的价值。

本书收录的三部数学话剧《大哉言数》、《曲线传奇》和《物镜天哲》，分别再现了 17 世纪三大数学成就——对数、解析几何和微积分所涉及的人物故事，从中我们可以品味纳皮尔和布里格斯的旷世之约，欣赏费马和帕斯卡的数学交流，痛惜笛卡儿的北欧之旅，叹惋牛顿和莱布尼茨的微积分发明权之争；我们也有机会回望 17-18 世纪欧洲数学舞台上的璀璨群星：约翰·伯努利、雅各·伯努利、惠更斯、泰勒、阿布斯诺特、棣莫佛、瓦里尼翁等等；同时，我们还有机会走进历史深处，追溯对数、解析几何和微积分的思想渊源，直面当时数学家所解决的热门难题，并徜徉于奇妙的曲线世界，感受数学的巨大魅力。

本书编者刘攀老师是一位热爱数学文化、极富教育情怀的数学家，多年来，不计名利、心无旁骛地创作了一部又一部的数学话剧，在国内产生了很大影响，同时，也培养了一批又一批热爱数学文化的本科生甚至研究生。如今，数学话剧业已成为华东师大校园文化的品牌之一。

我相信，数学话剧这一独特的艺术形式在不久的将来必将走出象牙塔，走进更多的中学校园，为传播数学文化、改善数学教育、提升数学素养、实现立德树人目标做出更大的贡献。

目 录

刊首新语

历史研究

教学实践

活动讯息

CONTENT

历史研究

美英早期代数教科书中的有理数指数幂

纪妍琳

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

指数函数作为六类基本初等函数之一，是高中阶段进行函数性质研究的重要对象。为了研究指数函数，学生需要在初中学习的基础上，通过对有理数指数幂 $a^{\frac{n}{m}}$（$a>0$，且 $a\neq 1$；m，n 为整数，$m>0$）、实数指数幂 a^x $(a>0,$ 且 $a\neq 1$；$x\in R)$ 含义的认知，了解指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质[1]。在教学中，让学生接受由整数指数幂拓展到全体有理数指数幂的合理性是教学的重点和难点。

人教版必修第一册基于“根式的被开方数的指数能被根指数整除”的情形，归纳了将根式表示为分数指数幂的方式，再将性质推广到根式的被开方数的指数不能被根指数整除的情形，从而将整数指数幂拓展至有理数指数幂。人教版必修第一册通过旁白的形式补充道：“数学中，引进一个新的概念或法则时，总希望它与已有的概念或法则相容”，但却对负分数指数幂的引入“略去了规定合理性的说明”，并且直接说明了“规定了分数指数幂的意义以后，整数指数幂的运算性质对于有理数幂也同样适用”。

如果教师不能对指数幂的拓展过程进行适当的补充说明，而仅仅陈明“规定”，那么学生在指数幂的拓展以及分数指数幂定义合理性的理解上可能存在一定的困难。若要对拓展的合理性进行说明，除了教材给出的引入方式之外，是否存在其他的自然的、恰当的方式呢？为了回答这一问题，本文对 19 世纪英美代数教科书进行考察，梳理不同教科书中对于分数指数幂的引入、定义及其合理性的说明，从中获取教学启示，以期为分数指数幂的教学提供参考。

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库中选取 94 种 19 世纪美、英代数教科书作为研究对象，以 10 年为一个时间段，这些教科书的时间分布情况如图 1 所示。

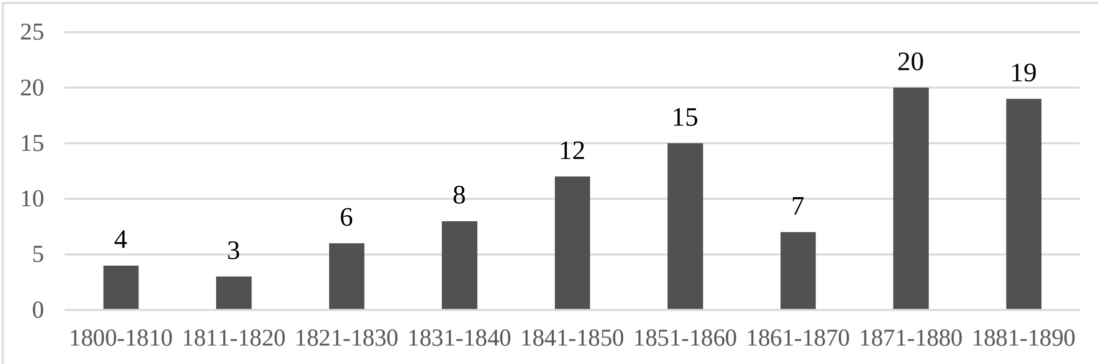


图 1 94 种教科书的时间分布

本文将有理数指数幂的拓展过程分成负指数幂、零指数幂和分数指数幂三个阶段，对早期教科书的拓展顺序和拓展方式进行总结，并对所延伸出来的相关问题进行讨论，从中分析早期代数教科书对有理数指数幂相关内容的处理方式。

3 有理数指数幂的拓展顺序

3.1 从正整数指数幂到有理数指数幂

不同教科书采用了不同的顺序来呈现幂的推广过程，主要分成两种：

- 先整数后分数：正整数指数幂–负整数指数幂与零指数幂–正分数指数幂–负分数指数幂；
- 先正数后负数：正整数指数幂–正分数指数幂–负指数幂与零指数幂。

图 2 给出了两种拓展顺序的时间分布情况。

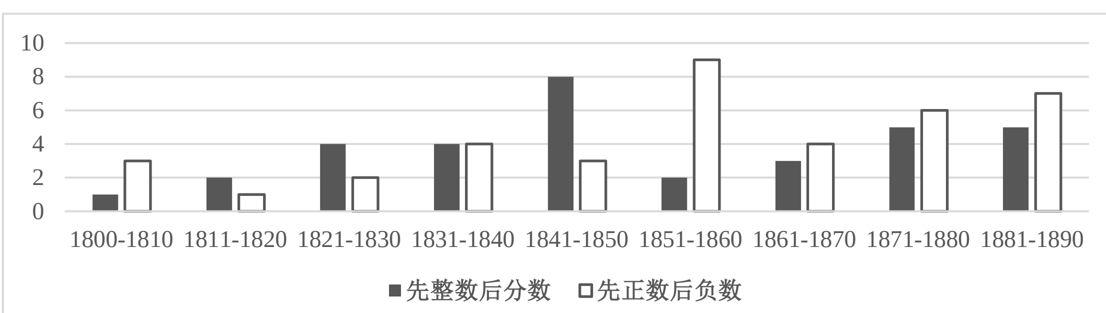


图 2 指数幂拓展顺序类型分布

由图 2 可见，“先整数后分数”和“先正数后负数”两种扩充方式在 19 世纪代数教科书中的占比不相上下，基于两种不同的顺序都可以合理地将指数幂扩充到有理数指数幂。“先整数后分数”的扩充顺序与目前我国中学数学教学的逻辑顺序一致，学生在初中阶段学习了负整数指数幂和零指数幂的扩充，在高中阶段再将指数幂扩充为正分数指数幂和负分数指数幂，这样的扩充方式符合学生的认知水平；采用“先正数后负数”这一顺序的教科书大多在前一章节中设置了根式的相关内容，故先扩充到分数指数幂较为连贯。同时，“先正数后负数”的扩充顺序与有理数系扩充的历史顺序一致。

3.2 分数指数幂与根式的出现顺序

历史上，根式的出现早于分数指数幂，现今的教学顺序与历史顺序保持一致，学生先学习根式，再基于根式定义分数指数幂。但 19 世纪代数教科书中，分数指数幂与根式的出现先后顺序并不统一，部分教科书先定义根式再定义分数指数幂；部分教科书先定义分子为 1 的分数指数幂再定义根式；少数教科书同时定义分数指数幂和根式。对于这三种不同的先后顺序，我们简称为“先根后幂”、“先幂后根”和“根幂同步”，对所考察的教科书进行先后顺序类型的统计，结果如图 3 所示。

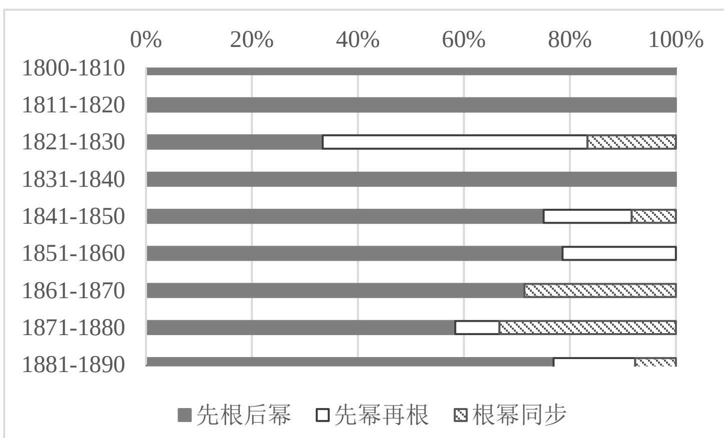


图 3 早期代数教科书中根式与分数指数幂的出现顺序

分数指数幂和根式在教科书中的出现顺序差异反映了教科书逻辑顺序的不同，导致了对分数指数幂定义描述和合理性解释的不同。

“先根后幂”的逻辑顺序与历史顺序、当前的教学顺序一致，是 19 世纪美英代数教科书中最为常见的定义顺序。“先幂后根”顺序在 19 世纪 20 年代的代数教科书中也并不少见，采取

这种顺序的教科书一般直接提出：a 的 n 次方根可以用分数指数幂 $a^{\frac{1}{n}}$ 表示，再在后文中指出根式 $\sqrt[n]{a}$ 是 a 的 n 次方根的另一种表示[2]。“根幂同步”方式与“先幂后根”较为类似，采取此顺序的教科书一般直接指出：a 的 n 次方根可用 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{n}}$ 来表示[3]。这两种定义方式反映了这类教科书的以下三个观点：

- a 的 n 次方根是唯一的，不存在算术平方根与平方根的区别；
- 分数指数幂与根式是完全等价的，两者是同一数学内涵的不同表示方式；
- 负数是存在分数指数幂的，如 $\sqrt[3]{-27}=(-27)^{\frac{1}{3}}$。

而在现今的高中数学教科书中，人教版、苏教版等高中数学教材必修第一册中均规定分数指数幂的底数大于 0，特别地，北师大版教材明确指出 $\sqrt[3]{-27}$ 不能表示为 $(-27)^{\frac{1}{3}}$，而沪教版教材则通过旁白指出当 n 为正奇数时，对于 $a<0$ 的情形，$a^{\frac{1}{n}}$ 能被定义。由此可见，19 世纪美英代数教科书中关于分数指数幂和根式的定义有其局限性，人们对于分数指数幂和根式的认识并非一蹴而就的，分数指数幂出现时，人们对于根的理解仍有待完善，同时，要厘清根式与分数指数幂的区别与联系，底数为负数的情形是重要的讨论对象。

出现顺序的不同体现了不同教科书对于根式和指数幂关系认识的差异，有的教科书提出，根式完全可以被分数指数幂代替，对于这一问题将在后文相应小节展开讨论。

4 负指数幂的定义

4.1 定义方式

早期教科书大多根据得到负指数幂的运算过程给出其描述性定义，见表 1。根据运算特点，教科书对于负指数幂的定义可以分为“连除”定义和“取倒数”定义。

表 1 19 世纪代数教科书对于负指数幂的描述性定义

运算特点	定义	举例	教科书

连除	负指数幂是指 1 连续除以一个或若干个由底数分解得到的相同因数 *所得到的商。	$4^{-2}=1\div4\div4=\frac{1}{16}$ $4^{-\frac{3}{2}}=1\div2\div2\div2=\frac{1}{8}$	Oliver[4]
取倒数	负指数幂指的是，当将其指数取为相反的正指数所得到的指数幂的倒数。	$4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4^3}}=\frac{1}{8}$	Olney[5]

“连除”定义与乘方的“连乘”相对应，从除法的角度赋予了负指数幂操作性的含义。但大多数教科书在定义中并未指明如何将“底数分解得到的相同因数”和连除的次数。早期教科书通过举例的方式让读者默会其中的规律。“取倒数”定义将负指数幂的意义建立在正指数幂的基础上，也赋予了负指数幂操作化的定义。

由上述两种描述性定义，均可以得到 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\left(n\in R_+\right)$。在早期代数教科书中，较少涉及对于负指数幂中底数 a 的范围的讨论，但由于 0 不可以作为除数，而上述推广过程中存在着除法运算或取倒数的实施，故上述推广中实际上排除了底数 a 为 0 的情形。

4.2 定义的合理性

早期代数教科书主要采用两种方式解释负指数幂引入或定义的合理性：一是对正整数指数幂运算律的直接推广；二是基于对等比数列的观察进行的类比。

4.2.1 对运算律的直接推广

幂指数的范围从正整数扩充到有理数，实际上是幂的运算律的适用范围扩大的结果。美国数学家柯朗（R. Courant, 1888-1972）和罗宾（H. Robbins, 1915-2001）在《什么是数学》中指出：“对于引进新的符号，扩充一个范围，使得在原来范围内成立的规律，在这更大的范围内继续成立，这是数学推广过程的一个特征。[6]”有理数指数幂的引入是数学中有关指数的数学理论发展的需要，它的定义需要与已有的以下三条指数幂运算律相容，其中 $r,s\in Z^+$：

（1）$a^r a^s=a^{r+s}$；

* 19 世纪英美代数教科书中的因数泛指因式，且因式的概念与现今的概念有所不同，只要一个式子能表示成其他式子的乘积，那么其他式子就均为原式的因式，后文出现的“因数”也皆为此意。

（2）$\left(a^r\right)^s=a^{rs}$；

（3）$(ab)^r=a^rb^r$。

在 19 世纪美、英代数教科书中，部分教科书从推广运算律的角度讨论负指数幂的意义，绝大多数基于运算律（1）引入负指数幂。例如，Venable 在其《初等代数》中直接提出如下问题[7]：

对于正整数指数幂，有运算性质 $a^m\times a^n=a^{m+n}\left(m,n\in N_+\right)$成立，如果将适用范围推广到负指数幂，允许出现 a^{-p} 这样的记号，其中 p 为正数，那么此时 a^{-p} 代表什么呢？

由 $a^m\times a^n=a^{m+n}$，当将指数的范围推广至负整数时，可得 $a^{m+p}\times a^{-p}=a^{m+p-p}=a^m$，又由 $a^{m+p}\div a^p=\dfrac{a^{m+p}}{a^p}=a^m$，因此，一个数乘上 a^{-p} 相当于这个数除以 a^p，所以 $1\times a^{-p}=1\div a^p$，即 $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$。

在借由运算律（1）拓展得到负指数幂的内涵之后，部分教科书证明此定义也满足其余两条运算律[7]，部分教科书则将证明作为课后练习[8]。

4.2.2 对等比数列的观察和类比

16 世纪，德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）在《整数算术》中，建立了如表 2 所示的指数和幂之间的对应关系，观察表 2 可以发现，当以 2 为底数时，指数减小 1 时，幂就变为原来的 $\dfrac{1}{2}$。类比正整数指数幂的情形，斯蒂菲尔将幂指数从非负整数推广到负整数，用我们今天的记号来表达，就是 $2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}$。但是，斯蒂菲尔没有将幂指数推广到分数的情形[9]。

表 2　正整数指数和幂的对应

指数	…	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	…
幂	…	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	…

19 世纪的部分代数教科书引入负指数时，采取与斯蒂菲尔极为相似的引入方式。例如，在 Robinson 的《初等代数专著》[10]和 Venable 的《初等代数入门》[11]等教科书中，作者都指出，若将 a^4 连续地除以 a，可以得到以下的数列：

$$a^3, a^2, a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \cdots$$

基于观察，不难发现，a 的 n 次幂除以 a，得到的结果为 a 的 $n-1$ 次幂，即“除以底数，指数减 1”。则：

$$\frac{a}{a}=1=a^{1-1}=a^0,$$

$$\frac{1}{a}=a^{0-1}=a^{-1},$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{\frac{1}{a}}{a}=a^{-1-1}=a^{-2},$$

$$\frac{1}{a^3}=\frac{\frac{1}{a^2}}{a}=a^{-2-1}=a^{-3},$$

$$\cdots\cdots$$

以此类推，可以得到$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。

早期代数教科书基于对以 a 为底的等比数列的观察引入零指数幂，在此基础上引入负整数指数幂，进而推广得到负指数幂的定义，本质上是对运算律（1）的特殊情形 $a^m \times a = a^{m+1}$ 的推广，以观察、类比的形式来加以呈现，对读者而言更为直观，抽象程度更低。可以看到，早期代数教科书往往根据“负指数幂的定义能够遵循原有的指数幂运算律”来说明其定义的合理性，但这一理由在零指数幂的特殊情形中却变得不够充分了。

5 零指数幂的定义与合理性

许多教科书将正整数指数幂定义为“1 连续乘以一个数若干次”，Shoup 在《代数基础》一书中将此定义拓展到零指数幂的情形，将零次幂定义为“1 连续乘以底数零次”，则结果为 1 本身，从而得到任意非零数的零次幂都是 1 的结论[12]，该定义能够较好地解释零次幂的含义，但该书将零的零次幂排除在外，且并未说明零的零次幂不作定义的原因。

在早期教科书中，零指数幂和负指数幂往往是同时引入的，如上节所述，若对等比数列进行观察，则首先引入零指数幂，再在此基础上引入负指数幂。更加直观地，部分教科书通过指数幂的除法运算引入零次幂[13]：

$$a^5 \div a = a^4,\ a^4 \div a = a^3,\ a^3 \div a = a^2,\ a^2 \div a = a.$$

若将此规律拓展，则 $a \div a = a^0$，故 $a^0 = 1$。虽然大部分教科书没有对 a 的范围进行说明，但由于除数不能为 0，上述的推广实际上隐含了 $a \neq 0$ 的限制。部分教科书通过验证指出，这样的定义是满足三条运算律的，因而是合理的[14]。

部分教科书则直接从运算律出发进行推广[7]，通过推广运算律（1）的特殊情形，得到

$$a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m, \qquad (*)$$

当且仅当 $a^0 = 1$，无论取 a 为何值时，均有（*）式成立。如前文所叙，这两种不同的拓展方式均是对运算律（1）适用范围的拓展，对于底数不为 0 的情况能够得到一致的结论。但是第二种拓展方式下，似乎默认了 $0^0 = 1$。

大部分教科书并未对于零指数幂的底数范围进行讨论。但有部分教科书提出，$0^0 = 1$，原因在于，无论 a 多小，均有 $a^0 = 1$，那么对于 $a = 0$，也应该有 $a^0 = 1$[15]，这一观点用极限语言来描述即为 $0^0 = \lim\limits_{a \to 0} a^0 = 1$，这与目前高中数学学习的结论显然是矛盾的。那么，既然存在“具有说服力”的 0^0 的定义方式，为何如今我们认为 0^0 是无意义的呢？

如果延续负指数幂的拓展思路，利用运算律推广来寻找 0 的 0 次幂的含义。根据运算律（1），$0^0 \times 0^1 = 0^1$，无论 0^0 取任何数值，均满足此式；根据运算律（2），$\left(0^0\right)^m = 0^{0 \times m} = 0^0$（$m \in N^+$），则 $0^0 = 0$ 或 $0^0 = 1$；根据运算律（3），$(0 \times 1)^0 = 0^0 \times 1^0$，即 $0^0 = 0^0 \times 1^0$，无论 0^0 取任何数值，均满足此式。综上，定义 $0^0 = 0$ 或 $0^0 = 1$，均满足与原有运算律相容的原则，但由于所定义的值不唯一，因而与“0 除以 0”的情形类似，0^0 是无意义的，或者说是“未定值”。

从 0 的 0 次幂这一情形可以发现，某个定义满足某一条或若干条已有法则并不足以说明一个定义的合理性，定义还需具有唯一性。另一方面，定义的出现是出于数学内部或现实生活的需要，$0^0 = 0$ 或 $0^0 = 1$ 均满足三条运算律，之所以我们不作约定式的定义，是因为在多数的数学研究情境下人们并不需要关注 0^0，没有必要进行约定，但在组合数学、数论等领域，人们会根据研究的需要对 0^0 的取值作出约定。在实际教学中，教师不能“简单粗暴”地说明 0^0 无意义，这样的处理方式可能会令学生产生疑问。教学中可以从不唯一确定的角度进行解释，并说明在数学的其他领域会根据研究的需要进行定义，但在高中阶段不作考虑。

6 分数指数幂的定义

6.1 定义方式

根据得到分数指数幂的运算过程，早期教科书主要采用“因数的连乘或连除”“幂的根”“根的幂”这三种方式对分数指数幂进行描述性定义，见表 3。

表 3 早期教科书关于分数指数幂的描述性定义

运算过程	定 义	举 例	教科书
相同“因数”的连乘或连除	分数指数幂是指 1 连续乘以（或连续除以）一个或若干个由底数分解得到的相同“因数”的结果。	$64^{\frac{2}{3}}=1\times4\times4=16$ $64^{-\frac{2}{3}}=1\div4\div4=\frac{1}{16}$	Oliver[4]
幂的根	分数指数幂指的是一个方根的整数指数幂。	$64^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{64}\right)^2=4^2=16$ $64^{-\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{64}\right)^{-2}=4^{-2}=\frac{1}{16}$	van Velzer 等[15]
根的幂	分数指数幂指的是一个整数指数幂的开方。	$64^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{64^2}=\sqrt[3]{4096}=16$ $64^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{64^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4096}}=\frac{1}{16}$	Dodd[16]

19 世纪代数教科书中出现的对于分数指数幂的三种主要的描述性定义都不是精确、严谨的定义。在第一种定义方式下，得到正分数指数幂需要 1 连续若干个乘以底数的相同“因数”，得到负分数指数幂需要 1 连续除以若干个底数的相同因数。早期教科书并无在定义中陈明“相同‘因数’”、“若干”的具体含义，而是在后文指出 1 要连乘或连除的相同“因数”由分数指数幂的分母确定，对于正分数指数幂 $a^{\frac{n}{m}}$（m、$n\in N^+$），指数 $\frac{n}{m}$ 的分母 m 代表将底数 a 分解为 m 个相同的数的乘积，即 a 的 m 次方根，n 代表将分解得到的“因数”与 1 连乘的次数。对于负分数指数幂 $a^{-\frac{n}{m}}$（m、$n\in N^+$），则连乘变为连除，其余内涵不变[11][17]。由此可见，这种定义方式是以 $a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$ 为基础的，实质上是从运算角度对分数指数幂 $a^{\frac{n}{m}}$ 的意义进行了补充性的解读。

对于分数指数幂$a^{\frac{n}{m}}$，由“幂的根”这一描述性的定义方式，有$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$；由“根的幂”这一描述性的定义方式，有$a^{\frac{n}{m}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$。根据根指数的内涵可知，在这两种定义下，$m\in N^*$，$n\in Z$。有教科书同时给出了这两种定义[18]，得到$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$，指出分数指数幂的分母代表根指数，分子代表乘方运算对应的次数。虽然大部分早期教科书没有对分数指数幂的底数a的范围进行讨论，但由于$\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$（$m\in Z,n\in Z$）只有在$a>0$时才成立，故大部分教科书都默认在底数为正数的前提下讨论分数指数幂。

大多数教科书借助根式来定义分数指数幂，如前文所述，不同教科书对于根式和指数幂关系认识的存在差异。Olney 在其《代数入门》提出，根式的意义和分数指数幂的作用是相同的，任意一个根式可以用分子为 1、分母为根指数的分数指数幂来表示[13]。“因此，根式的使用是非必要的，它之所以仍被保留仅仅是因为它在数学中已经广泛使用了”[19]。这样的观点实际上忽略了根式的被开方数为负数的情况。对于根式$\sqrt[m]{a^n}(m\in N_+,n\in Z)$，当$a<0$时，除$m$为偶数，$n$为奇数的情形外，$\sqrt[m]{a^n}$均有意义。然而，当$m$为奇数，$n$为奇数时，若用分数指数幂$a^{\frac{n}{m}}$表示$\sqrt[m]{a^n}$，则由$\dfrac{n}{m}=\dfrac{2n}{2m}$（$m\in N_+,n\in Z$），应有$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{2n}{2m}}=\sqrt[2m]{a^{2n}}$，而$\sqrt[2m]{a^{2n}}=\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}=\sqrt[m]{(-a)^n}\neq\sqrt[m]{a^n}$，出现矛盾[20]。为了解决底数$a<0$时分数指数幂定义“不唯一确定”的问题，我们可以通过约定幂指数$\dfrac{n}{m}$为既约分数来解决这样的矛盾。但是，与此同时，形如$\sqrt[2m]{a^{2n}}$的根式便无法用分数指数幂表示了，例如$\sqrt[8]{(-2)^6}$，将其表示为$(-2)^{\frac{6}{8}}$或$(-2)^{\frac{3}{4}}$均是无意义的。可见，无论分数指数幂是否拓展到底数为负数的情形，根式的存在均是有必要的。

6.2 定义的合理性

将整数指数幂推广到分数指数幂时，部分教科书直接说明$a^{\frac{1}{n}}$为$\sqrt[n]{a}$另一种表示方式，没

有解释其合理性，再在此基础上推广得到 $a^{\frac{m}{n}}$ 的含义[11]。大多数早期代数教科书对其合理性进行了说明，且一般均先拓展得到分子为 1 的分数指数幂，再推广到更一般的分数指数幂。早期代数教科书主要采用“与分数乘法的类比”，“运算性质的推广”和“开方时指数变化规律的观察”三种方式来解释分数指数幂引入或定义的合理性。

6.2.1 与分数乘法的类比

Thomson 在《大学代数》中借助分数乘法与分数指数幂的类比来帮助读者接受分数指数幂的定义[21]。27 的 $\frac{2}{3}$，即 $27\times\frac{2}{3}$，它的得到可以通过先将 27 平均分为 3 等分（27÷3=9），再将其中的两个部分加起来（9×2=18 或 9+9=18）；类似的，27 的 $\frac{2}{3}$ 次幂，即 $27^{\frac{2}{3}}$ 可以通过将 27 分解为 3 个相等的因数（$27=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{27}$，即 27=3×3×3），再将其中的两个因数相乘（$3^2=9$ 或 3×3=9）得到。

6.2.2 对运算律的直接推广

将运算律（1）或（2）推广到分数情形，可以得到分数指数幂。

对于正整数指数幂，有 $a^r a^s = a^{r+s}$，当取 r、s 都为分数，而 $r+s$ 的结果为正整数时，可以探讨特定的分数指数幂的含义[错误!未定义书签。]。例如，取 $r=s=\frac{1}{2}$，则有 $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^1=a$，则 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。更一般地，由 $\underbrace{a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\times a^{\frac{1}{n}}}_{n\text{个}}=a$，可得 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$；由 $\underbrace{a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\times a^{\frac{m}{n}}}_{n\text{个}}=a^m$，可得 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$。

根据运算律（2），可得 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$，则 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，再由 $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$，可得 $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$；或直接由 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$，即可得 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ [18]。

大多数教科书没有讨论底数 a 的范围，但实际上，上述推广过程隐含了 $a\geq 0$ 的要求。本文所考察的早期代数教科书中，无一采用运算律（3）来推广或解释分数指数幂定义的合理性，但部分教科书在定义了分数指数幂之后，对定义是否满足运算律（3）进行了验证[7]。

6.2.3 观察开方后指数的变化规律

18 世纪，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《代数基础》中指出，对正整数指数幂的性质进行观察可以发现，a^2 的平方根为 a，a^4 的平方根为 a^2，a^6 的平方根为 a^3，等等，平方根为同底数的幂，指数折半。将这一规律类比到分数指数幂中，则 a 的平方根应为 $a^{\frac{1}{2}}$，a^3 的平方根应为 $a^{\frac{3}{2}}$，a^5 的平方根应为 $a^{\frac{5}{2}}$，等等。这里，平方根均指算术平方根，$a>0$。类似地，可考虑更高次方根[22]。欧拉通过类比的方式，厘清了方根与分数指数幂之间的关系。

19 世纪部分代数教科书所采用的引入方式与欧拉并无二致[13]。通过观察可以发现，要得到一个数的平方根，需要将其指数除以 2，则类似地有，a^3 的平方根为 $a^{\frac{3}{2}}$；a^5 的平方根为 $a^{\frac{5}{2}}$。可见，$a^{\frac{1}{2}}$ 等同于 a 的平方根，即 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$；类比到其他分数指数幂的情形，可以得到 $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$，$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$，…。以此类推，可得 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$。

7 指数推广的意义

19 世纪的英美代数教科书主要从数学内部的统一性来说明指数幂拓展的价值与意义。Van Velzer 等在其《代数教程》中指出，用分数指数幂来表示开方根具有优越性，因为一方面使得表示更为简洁，另一方面我们可以用相同的法则处理整数指数幂和分数指数幂的问题[15]。换言之，指数幂运算律的使用范围更大了[18]，体现了数学对于“统一美”的追求。

另一方面，分数指数幂的定义是实数指数幂定义的基础，而指数幂的拓展是指数函数的产生的基础。而指数函数产生以后，被广泛应用于刻画细胞的分裂、人口的增长、放射性物质的衰减等自然现象。1748 年，欧拉在《无穷分析引论》中讨论指数函数和对数函数时，引入了人口指数增长的实例：大洪水的幸存者有 6 人，若以每年 $\frac{1}{16}$ 的速度繁衍，那么 200 年后，6 个幸存者将有 10^6 个后代；400 年后，将有 10^{11} 个后代，这将超过地球所能支撑的数量[23]。

从数学内部与数学外部来看，指数幂的拓展都具有极大的价值与意义。

8 教学启示

在所考察的 94 种早期代数教科书中，先后出现了“连乘”、“连除”、“取倒数”三种负指数幂的描述性定义和“相同‘因数’连乘或连除”、“幂的根”、“根的幂”三种分数指数幂的描述性定义。在中学阶段的有理数指数幂教学可以参考早期教科书的做法，在教学中增加负指数幂、分数指数幂的描述性定义，或在通过运算律得到有理数指数幂的形式定义之后，引导学生用描述性的语句描述相应的内涵，帮助学生在原有的“反复自乘”的指数幂认识[24]的基础上构建负指数幂和分数指数幂的内涵。

另一方面，早期教科书通过观察类比或对正整数指数幂运算律的直接推广来说明有理数指数幂定义的合理性，体现了数学推广的原则在于追求与原有的法则相容，教学中教师也可以借鉴早期教科书的做法，引导学生通过观察、类比得到负指数幂、分数指数幂的内涵，再进一步揭示定义与原有运算律的一致性。同时，定义与原有运算律一致并不足以说明定义的合理性，0 的 0 次幂定义的不唯一性导致如今我们对其不加以定义，但在早期教科书中却以满足三条运算律为由将其值定义为 1，教师可以在教学中引导学生展开讨论，帮助学生认识定义的唯一性对于定义的必要性。

94 种早期代数教科书对于有理数指数幂的定义也存在不严谨和错误之处，部分早期教科书对于根式与分数指数幂之间的关系存在误解，这说明数学定义是从不完善到严谨的动态逐步发展的。在教学中，教师可以借由早期教科书中的定义发展，向学生呈现有理数指数幂定义的发展历程，引导学生树立动态的数学观，达成德育之效。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] Docharty, G. Beekman. *The institutes of algebra* [M]. New York: Harper & Brothers, 1852.

[3] Greenleaf, B. *New elementary algebra* [M]. Boston: Robert S. Davis & Co, 1864.

[4] Oliver, J. E., Jones, G. W., Wait, L. A. *A treatise on algebra* [M]. Ithaca: The authors, 1882.

[5] Olney, E. *A university algebra* [M]. New York: Sheldon, 1873.

[6] （美）科朗, （美）罗宾.什么是数学：对思想和方法的基本研究[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2012: 69.

[7] Venable, C. S. *An elementary algebra* [M]. New York: University Publishing Company, 1869.

[8] Hall, H. S., Knight, S. R. *Elementary algebra for schools* [M]. London, 1885.

[9] 汪晓勤, 叶晓娟, 顾海萍. “分数指数幂”：从历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015,(4): 59-63.

[10] Robinson, H. N. *An elementary treatise on algebra* [M]. Cincinnati: J. Ernst, 1850.

[11] Venable, C. S. *An easy algebra for beginners* [M]. New York: University Pub. Co, 1886.

[12] Shoup, F. A. *The Elements of algebra* [M]. New York: E. J. Hale & Son, 1874.

[13] Olney, E. *Introduction to algebra* [M] New York: Sheldon, 1874.

[14] Loomis, E. *A treatise on algebra* [M]. New York: Harper & Bros, 1846.

[15] Van Velzer, C. A., Slichter, C. *Sumner. A course in algebra* [M]. Madison, Wis.: Capital City Pub. Co., 1888.

[16] Dodd, J. B. *Elementary and practical algebra* [M]. New York: Pratt, Woodford & Co, 1852.

[17] Mitchel, O. M. *An elementary treatise on algebra* [M]. Cincinnati: E. Morgan & co, 1845.

[18] Wentworth, G. A. *Shorter course in algebra* [M]. Boston: Ginn & Co, 1887.

[19] Alsop, S. *A treatise on algebra* [M]. Philadelphia: E. C. & J. Biddle, 1848.

[20] 彭厚富, 胡能发. 有关分数指数幂的几个问题[J].数学通报,1999(01):41-43.

[21] Thomson, J. B., Quimby, E. T. *The collegiate algebra* [M]. Chicago: Clark & Maynard, 1880.

[22] Euler, L. *Elements of Algebra*[M]. London: Longman, Hurst, Rees,Orme, & Co., 1828.

[23] Euler, L. *Introduction to Analysis of the Infinite* [M]. New York: Springer-Verlag, 1988: 75-92.

[24] 王莹颖. 中学学生对幂与指数函数的理解 [D].华东师范大学, 2012.

英美早期几何教科书中的勾股定理

韦润蓉

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

勾股定理作为几何学中的重要定理，被 17 世纪德国数学家和天文学家开普勒（J. Kepler, 1571-1630）誉为几何学两大法宝之一，拥有贯穿古今的悠久历史，也是全人类共同的文化精华。早在公元前 1700 年，古巴比伦人就在泥版上记录了十五组勾股数和勾股定理的许多应用问题。勾股定理的证明最早起源于毕达哥拉斯学派，据说毕达哥拉斯发现这个定理后，即宰杀百头牛以示庆祝，故又称百牛定理。公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得（Euclid）在《几何原本》中用面积方法证明了该定理。而在中国，三国时代数学家赵爽（3 世纪）在注释《周髀算经》时，利用弦图对勾股定理进行了证明；同时代的数学家刘徽则在注释《九章算术》时给出了另一种证明。可见，勾股定理是数学多元文化的典型例子。

现行的沪教版和人教版教科书采用赵爽的弦图来证明勾股定理，而其他证法，如欧几里得证法、加菲尔德证法仅仅以阅读材料的形式出现在单元的末尾。鉴于勾股定理的悠久历史以及它所蕴含的丰富的思想方法，人们在讨论特定理念指导下的数学教学时，往往首选勾股定理。调查表明，勾股定理是教师运用数学文化开展教学的最典型的主题[1]。目前，虽有教师从 HPM 的视角开展勾股定理的教学实践[2][3]，但他们往往局限于赵爽的弦图证法，对于其他典型的证明只是一语带过，忽视了勾股定理证明方法的历史演变规律，以及其中蕴含的各代数学家们对真理不懈追求的精神。究其原因，教师的数学史知识还较为匮乏，未能建立数学知识和数学文化之间的内在联系[1]。

那么，在平面几何教学的历史上，人们倾向于哪些证明方法？这种倾向性有何演变规律？导致演变的动因是什么？为了回答上述问题，本文聚焦勾股定理的证明，对英美早期几何教科书进行考察，以期为今日的数学教学提供思想启迪。

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库中选取 1730-1969 年间出版的 126 种英美早期教科书作为研究对象，以 40 年为一个时间段进行划分，具体时间分布如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无明显变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同种类的教科书。

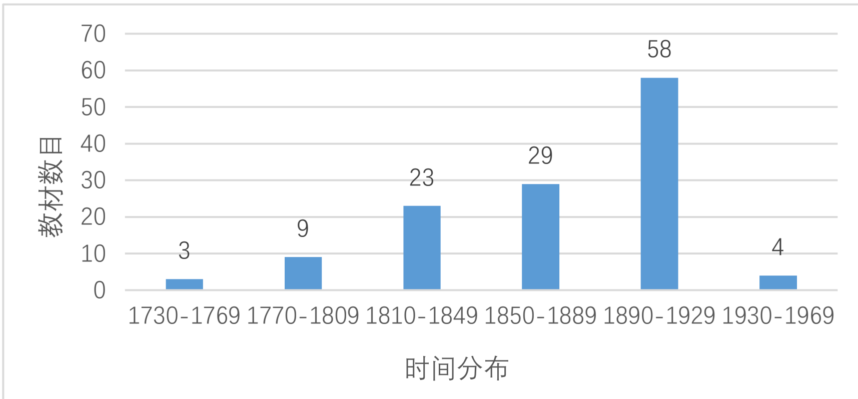


图 1 126 种英美早期几何教科书出版时间分布

在 126 种几何教科书中，勾股定理出现的章节各有不同且经常在同一本书的不同章节都有出现。早期教科书由于章节设置不清晰，此时的勾股定理，大多出现在“命题”部分；随着时间的推移，勾股定理更多地出现在“相似三角形”、“比与比例”、“四边形与多边形”、“四边形面积”等章节中，图 2 展示了不同章节的占比情况，其中对于勾股定理出现在同一本书的不同章节时，也分别进行统计。

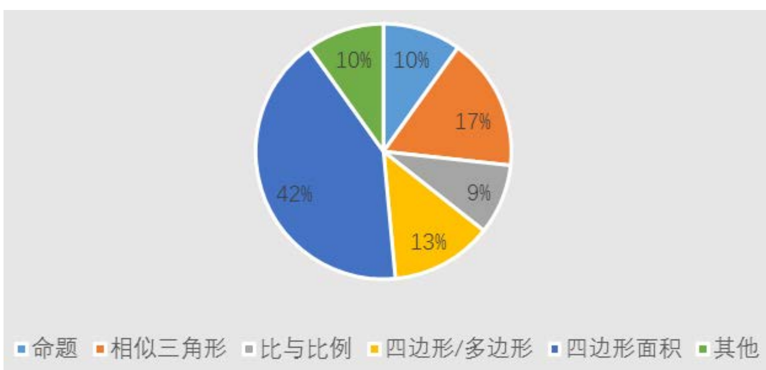


图 2 勾股定理在各章节占比情况

由图 2 可知，“四边形面积”章节占比最高，可见，英美早期的几何教科书大多利用四边形面积的关系来证明勾股定理。

3 勾股定理的证明

本文所考察的 126 种教科书均给出了勾股定理的证明，证明方法多达 11 种，并且同一种教科书常常使用了多种不同的证明。在此基础上，我们对这 11 种方法进行归纳总结，根据它们的异同点，可分为五类方法，即搭桥法、割补法、摆拼法[4]、相似三角形法以及利用圆的切割线定理法。

3.1 搭桥法

3.1.1 欧几里得证法

有 90 种教科书采用了古希腊数学家欧几里得的证法，如英国数学家 Rossignol（1787）将两个较小的正方形面积通过三角形将其转化为面积相同的矩形，从而证明勾股定理。[5]

如图 3 所示，$\triangle ABC$ 是直角三角形，分别以 AC，AB 和 BC 为边作正方形，过点 A 作 $AJ\perp DE$，交 BC 于点 K，分别连接 CI 和 AD。易知$\triangle ABD \cong \triangle CIB$，又因为$S_{\square AI}=2S_{\triangle CIB}$且$S_{\square BJ}=2S_{\triangle ABD}$，因此，正方形 BH 的面积与矩形 BJ 的面积相等，同理正方形 CF 的面积与矩形 CJ 面积相等，故可得$AB^2+AC^2=BC^2$。

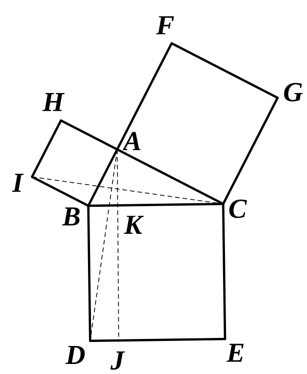


图 3 欧几里得证法

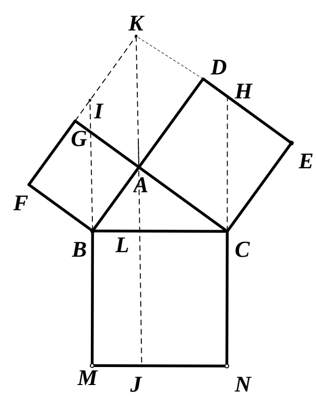


图 4 梅文鼎证法

3.1.2 梅文鼎证法

梅文鼎证法与欧几里得证法有异曲同工之妙，只不过将欧几里得证法中的中间变量三角形面积替换成了平行四边形面积。如，Simpson（1760）将正方形 $ABFG$ 的面积转化为等底等高的平行四边形 $ABIK$ 的面积（图 4），从而转化为矩形 BJ 的面积，再通过平行四边形 $ACHK$，将

正方形 *ACED* 的面积转化为矩形 *CJ* 的面积，即得勾股定理。[6]

有 17 种教科书采用了上述证法。

3.2 摆拼法

3.2.1 弦图证法

最早的摆拼法是中国古代数学家赵爽（公元 3 世纪）的弦图证法，之后印度数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114-1185）给出同样的方法，因此，早期英美几何教科书常称之为婆什迦罗法。如图 5，由四个全等的直角三角形与一个小正方形通过摆拼，构成大正方形 *ABCD*，通过两种方式计算正方形 *ABCD* 面积，得

$$S_{\square ABCD}=c^2=\left(b-a\right)^2+4\times\frac{1}{2}ab$$

化简后得 $a^2+b^2=c^2$。[7]

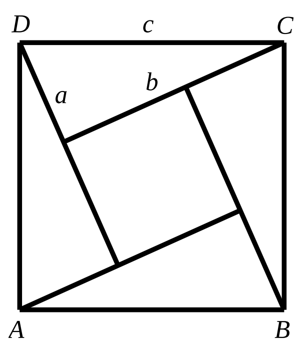


图 5 婆什伽罗证法

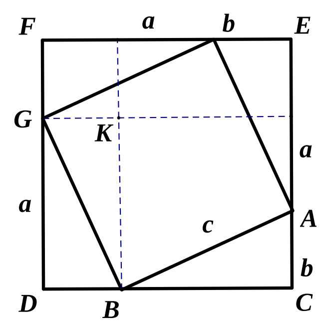


图 6 毕达哥拉斯证法

有 15 种教科书采用了赵爽或婆什迦罗证法的代数形式。

3.2.2 毕达哥拉斯证法

25 种教科书采用了学术界所猜测的毕达哥拉斯证法，如 Lambert（1916）给出了该证法的几何与代数两种形式[8]。如图 6，对于给定的 Rt△*ABC*，分别以斜边与两直角边的和为边长作正方形，其中大正方形面积可表示为 $S_{\square CDEF}=S_{\square KF}+S_{\square KC}+2S_{\square DK}$，还可表示为 $S_{\square CDEF}=S_{\square AG}+4S_{\Delta ABC}$，易知矩形 *GB* 的面积与是△*ABC* 面积的两倍，所以，易证得 $S_{\square AG}=S_{\square KF}+S_{\square KC}$，即勾股定理。利用代数法计算边长为 c 的正方形面积，可表示为

$$c^2=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab$$

化简后即得 $a^2+b^2=c^2$。

3.2.3 加菲尔德证法

该方法是美国第 20 任总统加菲尔德（J. A. Garfield, 1831-1881）提出的，故被称为“总统法”。有 10 种教科书提到了该方法。如图 7 所示，加菲尔德将两个全等直角三角形和一个等腰直角三角形拼成梯形[9]，因 $S_{梯形ACHD}=2S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BCH}$，故有

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}c^2+2\times\frac{1}{2}ab$$

由此立得 $a^2+b^2=c^2$。

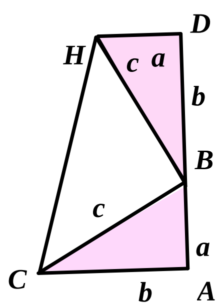


图 7 加菲尔德证法

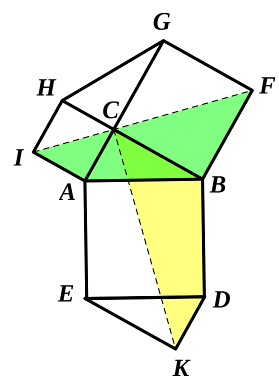


图 8 达芬奇证法

3.2.4 达芬奇证法

只有 2 种教科书采用了意大利艺术家和科学家达芬奇（L. da Vinci, 1452-1519）的证明[10]。如图 8，以△*ABC* 各边为边长分别作正方形，过点 *E* 和 *D* 分别作 *CB*、*CA* 的平行线交于点 *K*，连接 *HG*，*IF* 和 *CK*。由图易知，将四边形 *CBDK* 绕点 *B* 顺时针旋转 90°，*C* 点与 *F* 点重合，*K* 点与 *I* 点重合，*D* 点与 *A* 点重合，所以四边形 *ABFI*，*FGHI*，*ACKE* 和 *CBDK* 两两相等，故六边形 *IHGFBA* 面积与六边形 *CAEKDB* 面积相等，各减去全等的两个直角三角形，即得勾股定理结论。

3.3 割补法

3.3.1 伊本·库拉证法

有 21 种教科书采用了中世纪阿拉伯数学家伊本 • 库拉（Thabit ibn Qurra, 826-901）的割补证法[11]。如图 9，延长 Rt△*ABC* 的直角边 *AB* 至点 *D*，使得 *AC*=*BD*，在 *AB* 边作 *AE*=*AC*，分别以 *AC*，*ED* 为边长构造正方形 *AEFC* 和正方形 *EDGH*，此时将△*ABC* 和△*BGD* 分别平移至子图(b)处，构成以斜边 *BC* 为边长的正方形，因为(a)、(b)两图的面积大小不变，因此，可得两直角边的平方和等于斜边的平方和。

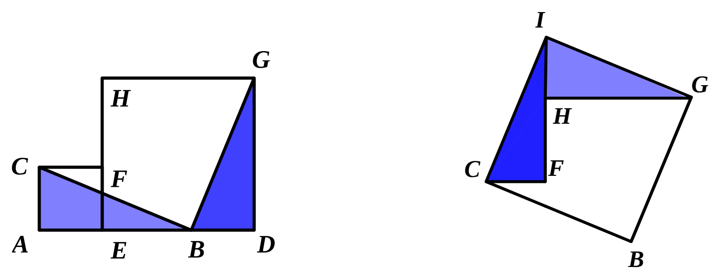


图 9 伊本 • 库拉证法

3.3.2 佩里加尔证法

佩里加尔证法又称“水车翼轮法”，最早由英国牧师佩里加尔（H. Perigal, 1801-1898）提出，后被刻在佩里加尔的墓碑上。Wormell（1882）与 Failor（1906）各在勾股定理章节的练习题中提到了该方法[12][13]。如图 10，相互垂直的线段将正方形 *ABGF* 分割成两两全等的四个四边形，将这四个四边形和小正方形 *ACIH* 重新组合，恰可拼成大正方形 *BCED*。与上述几种证法相同，佩里加尔法不需要进行代数运算，只需对图形进行简单的分割与拼接就可完成直观的证明。

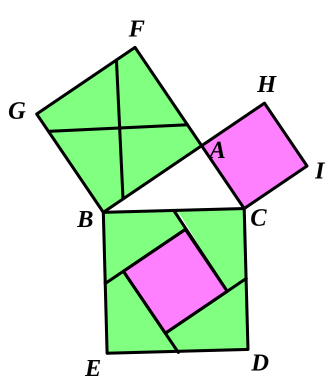


图 10 水车翼轮法

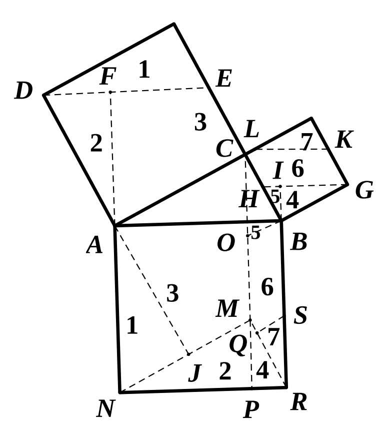


图 11 十字分块法

3.3.3 十字分块法

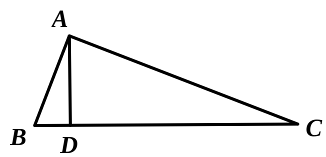
有 3 种教科书提到了十字分块方法，但并未提及其作者与来源，只是简单的进行证明或者放在练习中供有能力的学生进行思考。如 Lardner (1840)采用了此法[14]。

如图 11，过 D，G 两点分别作直线 DE 和 GH 平行于 AB，延长 NA 与 RB 分别与 DE，GH 交于点 F 和点 I，作 $CM // AN$ 且 $AN=CM$，连接 NM，RM，易知$\triangle ABC\cong\triangle NMR$，延长 DA 和 GB 分别交 MN 和 LM 于点 J 和 O，作 $GK=BH$ 以及 $KL//HG$，作 $RS=KL$ 以及 $SQ //BG$。此时正方形 DC 与正方形 GC 正好被分割为 7 个部分，通过这 7 个部分的重新组合拼接，可组成大正方形 AR，由此可证明勾股定理。

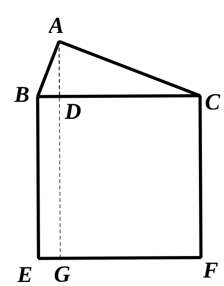
3.4 相似三角形证法

有 60 种教科书采用了相似三角形的证法。如图 12（a），在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，由射影定理可得$AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=CD\cdot BC$，两式相加，即得勾股定理。[15]

在欧几里得的证明中，正方形的面积被转化为矩形面积，实际上就是射影定理的两个结论：$AB^2=BD\cdot BE=BD\cdot BC$，$AC^2=CD\cdot CF=CD\cdot BC$（图 12（b）），因此，面积证法与相似三角形证法本质上是一致的。



(a)



(b)

图 12 相似三角形证法

3.5 利用切割线定理的证法

共有 6 种教科书将勾股定理的证明放在有关圆的章节，并通过圆的切割线定理进行证明，即从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项，在图 13 中可表示为：$BC^2=BE\cdot BD$，而$BE=AB-AC$，$BD=AB+AC$，两式相乘即可得到$BC^2=BE\cdot BD=AB^2-AC^2$，从而证明勾股定理[16]。

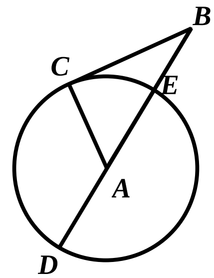


图 13 利用圆的切割线定理进行证明

利用圆的切割线进行证明是一种较为新颖的方法，即采用后续的知识对前面出现过的知识点进行二次证明，更有利于加深对勾股定理的理解以及构建更系统的知识框架。

4 证明方法的演变

126 种教科书在时间上横跨三个世纪，若以 40 年为单位，各方法在不同时间段的分布情况如图 14 所示。

从图 14 可见，关于勾股定理的证明，不同年代都会出现新方法，早期教科书不仅继承了古代数学家的典型方法，而且将有特点的新方法也纳入其中。欧几里得证法出自《几何原本》，是西方最早的关于勾股定理的证明方法，它将勾股定理的代数形式转变为几何面积进行证明，在近 300 年来的几何教科书中占据主要地位，且大部分的教科书都将其作为首选方法。此外，相似三角形证法在 19 世纪 50 年代以来也开始占据重要地位，由于图形简单，

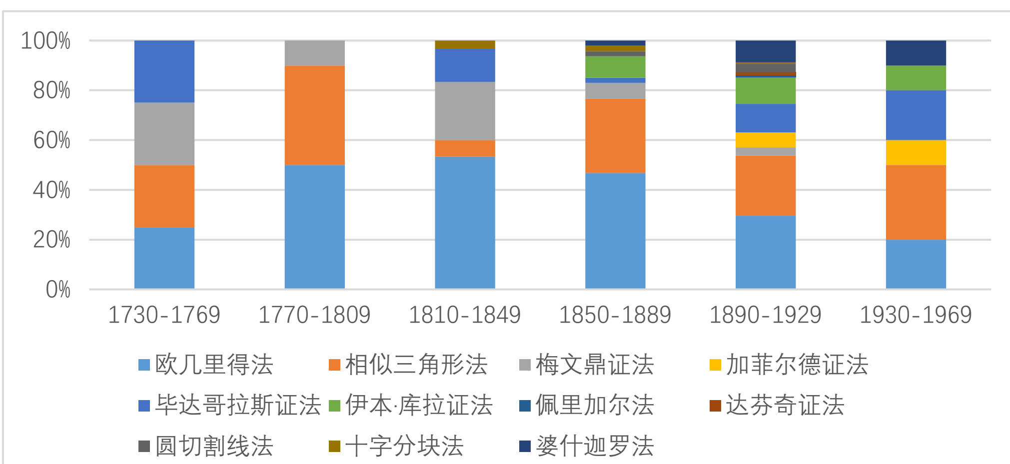


图 14 勾股定理证明方法的时间分布

不需要太多额外的补充知识使得相似三角形法在后期教科书中的地位与欧几里得法不相上下。加菲尔德的证明方法也在 19 世纪出现后迅速的进入了几何教科书中，而梅文鼎的证明方法与欧几里得证法的思路一致，在后来的大部分教科书中只保留欧几里得证法，梅文鼎证法则逐渐减少。

20 世纪初，英国数学家培利（J. Perry, 1850-1920）提出其教育改革的鲜明主张：要从欧几里得《几何原本》的束缚中解脱出来，实验几何与实际测量不仅应先于论证几何，而且在演绎推理过程中也应该伴随实验几何。与此同时，德国数学家 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）指出，初等数学的各分支融合不够，应将算术与平面几何进行融合[17][18]。20 世纪初，勾股定理在教科书中的编写方式就体现了这一时期的课程理念。

1912 年，美国几何大纲十五人委员会在其报告中提出，在几何学上要用更为简洁的几何语言而不是欧几里得著作中某些冗长的解释，应在几何课程的实用价值与逻辑思维之间寻求平衡[18]。这些观念深刻地影响了当时几何教科书的编写。

19 世纪末 20 世纪初，关于勾股定理的不同证明开始大量涌现，以欧几里得证法为代表的演绎方法占比逐渐减小，并且常伴随着实验几何和直观几何的方法一同出现，如伊本·库拉法、达芬奇证法等利用图形的旋转分割等位置变化来证明勾股定理。与此同时也在证明中融入了代数的方法，如加菲尔德证法、婆什迦罗法代数形式等。此外，德国在第三次改革运动中支持用射影几何概念对学生进行入门教育，也影响了相似三角形法在勾股定理证明中占据的比例[18]。虽然有的方法仅仅占据了部分教科书或只出现在练习题中，但也体现了早期的几何教科书与时俱进以求开拓思维、培养学生数形结合思想的特点。

5 结论与启示

从上述分析可见，在早期英美的几何教科书中，关于勾股定理的证法不仅仅停留在单一的证明模式，而是不断地进行探索与更新，涉及拼摆法、分割法、相似三角形等多种类型的证明方法。作为几何学的基础，教科书中勾股定理证明方法及其演变过程，为我们今日的教学提供了许多启示。

首先，教师应适当加强数学史的学习，丰富课堂的教学。纵观勾股定理的发展史可知，直至今日，对于勾股定理的证明方法已达 400 多种，涵盖几何、代数等各种知识点[19]。作为教师，

应该能够从数学的历史文化中汲取营养，通过古代数学家们发现勾股定理的过程来引导学生进行学习，激发他们的兴趣。在教学过程中也不要拘泥于单一的证明方式，而应该利用古今中外各种典型的证明方法，如加菲尔德证法，相似三角形法等来锻炼学生的思考能力，引领学生用欣赏的目光学习数学家们的研究方法，让他们感受数学文化的魅力，提升课堂的活跃度。

其次，要通过思考古今中外证明方式的异同，来锻炼总结与分析能力。在西方，从毕达哥拉斯学派的地砖问题到欧几里得通过严谨的公理化方法证明了勾股定理[20]，体现了观察、归纳、猜想、证明的合情推理数学思想，展现了对数学的理性逻辑的追求及其在实际生活中的应用；而国内教科书常用的赵爽弦图法，通过图形的拼接向学生直观的展示了勾股定理的证明，体现了数学中数形结合的思想。而两者的共同之处在于都将勾股定理的代数关系转化为图形的面积进行解释，体现了数学中重要的转化思想。当我们在研究不同民族的教学成果时，要注意分析它们的共性与特性，并且要注意分析其变化背后的历史因素，因为各个学科的发展都与当时的现状密不可分，从而才能够更加深入地理解不同民族的思考特性与文化传统，更好地将不同的方法、不同的文化融入我们的教学中。

最后，我们要学会运用数学史对学生进行德育。勾股定理的证明方法处在不断发展的中，从早期的单一证明到如今涌现的无数方法，无一不在说明数学家们在对待数学研究时绝不因为某种方法的出现就停止前进的脚步，而是锲而不舍、不断探索，也只有在前人努力的基础上不断推陈出新、继承发展，才是让如今的数学文化生生不息的关键。因此，通过数学史的德育功能，可以更好地让学生在数学学习的过程中不畏艰难、奋勇向前。同时，通过勾股定理所在的章节（如将其放在圆的切割线章节之后进行证明），体现了数学的学习是一个连贯的过程，而是孤立存在的个体，各个部分之间都存在着不同程度的联系，在学习数学的过程中更要注意前后知识点的衔接，从而更好地理解数学的逻辑。

参考文献

[1] 赵东霞,汪晓勤.关于数学文化教育价值与运用现状的网上调查[J].中学数学月刊,2013(03):41-44.

[2] 曾泽群,赖宝禧. HPM 视角下的“勾股定理”教学设计[J]. 数学教学，2019(09): 14-19.

[3] 傅文奇. HPM 视角下的数学教学设计——以勾股定理为例[J]. 数学教学通讯, 2015(07): 10-

11.

[4] 李迈新. 挑战思维极限：勾股定理的 365 种证明[M]. 北京：清华大学出版社, 2016:17-57

[5] Rossignol, A. *Elements of Geometry*[M]. London: J. Johnson, 1787: 44-46.

[6] Simpson, T. *Elements of Geometry*[M]. London: J. Nourse, 1760: 33-34.

[7] Beman., W. W., Smith, D. E. *New Plane Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1899: 103-104.

[8] Young, J. W. A., Lambert, L. J. *Plane Geometry*[M]. New York: D. Appleton and Company, 1916: 225-227.

[9] Hopkins, G. I. *Manual of Plane Geometry, On the Heuristic Plan*[M]. Boston: D. C. Health, 1891: 90-93.

[10] Smith, D. E. *The Teaching of Geometry*[M]. Boston: Ginn and Company, 1911: 261-264.

[11] Halsted, G. B. *The Elements of Geometry*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1885: 102-103.

[12] Wormell, R. *Modern Geometry*[M]. London: T. Murby, 1882: 146-153.

[13] Failor, I. N. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Century Co., 1906: 155-206.

[14] Lardner, D. *A Treatise on Geometry* [M]. London: Longman, Orme, Brown, Green, & Longmans, 1840: 103-106.

[15] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. Appleton & Co., 1855: 84-98.

[16] Hopkins, G. I. *Inductive Plane Geometry* [M]. Boston : D. C. Heath & Co,1902: 90-92.

[17] 张奠宙，宋乃庆. 数学教育概论 [M]. 北京：高等教育出版社, 2004: 19-28.

[18] National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus. Final Report of the National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus. *The Mathematics Teacher*, 1912, 5(2): 46-131.

[19] Hull, G. W. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: E. H. Butler & Co, 1897: 152-168.

[20] Lyman, E. A. *Plane Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1908: 158

美英早期几何教科书中的圆幂定理

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

在平面几何的学习中，“圆”是极其重要的一部分内容。它所涉及的知识面广，而且易于和其它平面几何的知识进行结合，并相伴出现在学生的面前，因而在学习的过程中难度较大。圆幂定理作为初中平面几何 “直线和圆”一章中的重要定理之一，有着及其广泛的应用。圆幂定理是相交弦定理、割线定理和切割线定理的统称，其揭示了过同一点的弦、切线及割线之间存在的比例关系。

回溯历史，早在公元前 3 世纪，欧几里得（Euclid）在《几何原本》第III卷的命题 35 和命题 36 中运用等面积法证明相交弦定理和割线定理[1]。在 1798 年，法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）摈弃等面积法，改用相似三角形法证明圆幂定理[2]。在历史的长河中所呈现的各种证明方法，不仅是为解题所用，其背后所蕴含的数学思想，更是我们的教学目标之一，也为圆幂定理的教学增添了一抹亮色。

在《义务教育数学课程标准》（2011 年版）中，关于圆幂定理的教学内容和教学要求已经被删去，因而在现行的初中人教版和北师大版教材中也难觅其踪迹。但是，在沪教版九年级数学下册（拓展二）的教材中，依然保留了圆幂定理的内容。“圆”作为初中阶段平面几何的最后一部分知识，学生已经学习了有关相似三角形的知识，因而在课本中，教科书编者运用相似三角形来证明圆幂定理。圆幂定理作为学生解题的“好帮手”，部分教师在课堂中仍然会予以补充，但是教师在进行教学设计的过程中，往往会遇到不知道怎么教、教得好的困境。因而，我们对美英早期的若干几何书籍进行考察，希望从中获得关于圆幂定理的历史素材，并为今后的教学提供有益的参考。

2 早期教科书的选取

本文选取 1829-1948 年间出版的 80 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个

时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

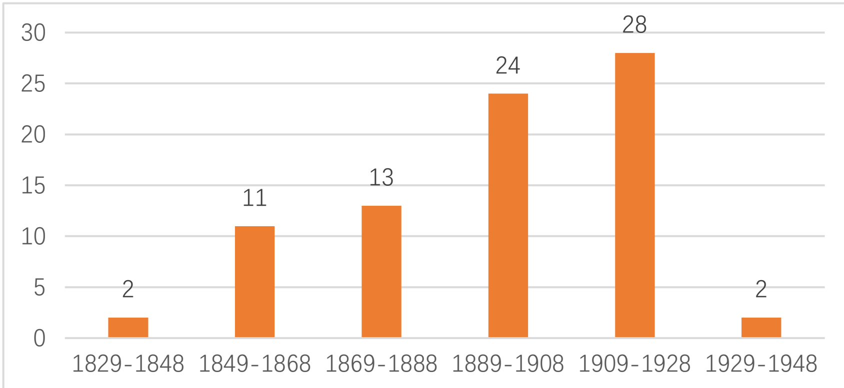


图 1 80 种美英早期数学教科书的出版时间分布

在 80 种几何教科书中，圆幂定理所在的章节主要包括“相似多边形”“比例线段”“比例线段与相似形”“圆”“数值性质”等，其中圆幂定理大多归于“相似多边形”一章之中。由此可见，早期教科书编写者往往会运用相似多边形对应边成比例这一定义来证明圆幂定理。

3 圆幂定理

圆幂定理包括相交弦定理、割线定理和切割线定理。在 80 种教科书中，有 68 种教科书给出了圆幂定理的完整证明过程，有 4 种教科书将证明过程留给了学生，而有 1 种教科书让学生通过测量得到圆幂定理。

3.1 相交弦定理

在 74 种给出相交弦定理证明过程的教科书中，教科书编者全都运用相似三角形来进行证明[3]。如图 2，$\odot O$ 中的弦 AB 与 CD 相交于点 P，连接 AC，BD。因为 $\angle CAB, \angle CDB$ 都是 $\overset{\frown}{BC}$

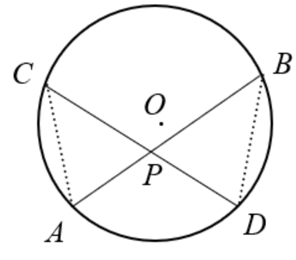


图 2 相交弦定理

所对的圆周角，$\angle ABD, \angle ACD$ 都是 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的圆周角，由圆周角定理可知，$\angle CAB = \angle CDB$ 以及 $\angle ABD = \angle ACD$。于是 $\Delta APC \sim \Delta DPB$，因此 $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB}$，或表示为 $AP \cdot PB = CP \cdot PD$。我们把相交弦定理概括为：在圆的两条相交弦中，每条弦被交点分成的两条线段的乘积相等。

3.2 割线定理

所谓割线定理，即从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆交点的两条线段的积相等。在 70 种给出割线定理证明过程的教科书中，有 37 种教科书选择构造相似三角形进行证明，而有 33 种教科书选择使用切割线定理进行证明。

3.2.1 构造相似三角形

类似于证明相交弦定理的做法，运用圆周角定理，我们依然可以证明两个三角形相似，进而得到比例线段[3]。在图 3 中，$\odot O$ 的两条割线 AEB, AFC 交于圆外一点 A，得到弦 BE, CF，以及有关线段 AE, AF, AB, AC。

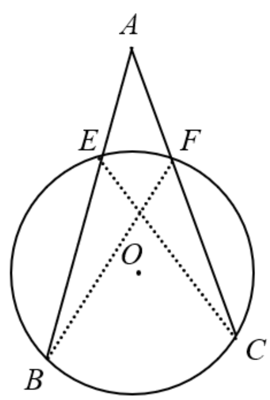


图 3 构造相似三角形证明割线定理

因为 $\angle ABF, \angle ACE$ 是 $\overset{\frown}{EF}$ 所对的圆周角，所以 $\angle ABF = \angle ACE$。又因为 $\angle BAC$ 是公共角，所以 $\Delta ABF \sim \Delta ACE$，于是 $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE}$，即 $AE \cdot AB = AF \cdot AC$。

3.2.2 使用切割线定理

切割线定理揭示了从圆外一点引圆的切线和割线时，割线与圆交点的两条线段的乘积为定值，这个定值即为切线长的平方。在图 4 中，过点 A 作 $\odot O$ 的一条切线 AD，切点为 D。

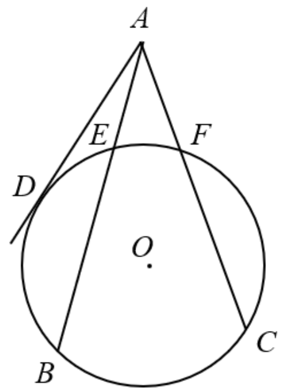


图 4 使用切割线定理证明割线定理

由切割线定理，因为 $AD^2 = AF \cdot AC,\ AD^2 = AE \cdot AB$，所以 $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ [4]。

3.3 切割线定理

所谓切割线定理，即从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段的比例中项。在 71 种给出切割线定理证明过程的教科书中，证明方法分为构造相似三角形和使用割线定理两类。

3.3.1 构造相似三角形

有 64 种教科书运用相似三角形来证明切割线定理[3]。如图 5，A 为 $\odot O$ 外一点，AB 是 $\odot O$ 的一条切线，切点为 B，AD 为 $\odot O$ 的一条割线，AD 交 $\odot O$ 于点 C, D。

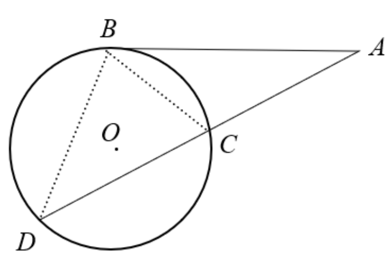


图 5 构造相似三角形证明切割线定理

连接 BD, BC，由弦切角定理可知，$\angle ABC = \angle ADB$，又因为 $\angle BAD$ 是公共角，所以 $\Delta ABC \sim \Delta ADB$，于是 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$，即 $AB^2 = AC \cdot AD$。

3.3.2 使用割线定理

美国著名的数学家、天文学家本杰明（P. Benjamin，1809-1880）在《平面与立体几何基础》（1858）中，将切线看作由割线旋转而得，于是运用割线定理即可完成证明[5]。在图 4 中,将割线 AEB 绕点 A 顺时针旋转直至 AB 与 $\odot O$ 切于一点 D，此时 $AE = AB = AD$。于是由割线定理，即 $AE \cdot AB = AF \cdot AC$，可以得到 $AD^2 = AF \cdot AC$。

4 圆幂定理的演变

证明圆幂定理方法有三种，包括方法 1：运用相似三角形证明圆幂定理；方法 2：运用相似三角形证明相交弦定理和切割线定理，再运用切割线定理证明割线定理；方法 3：运用相似三角形证明相交弦定理和割线定理，再运用割线定理证明切割线定理。

以 20 年为一个时间段，图 6 给出了证明圆幂定理的时间段分布：

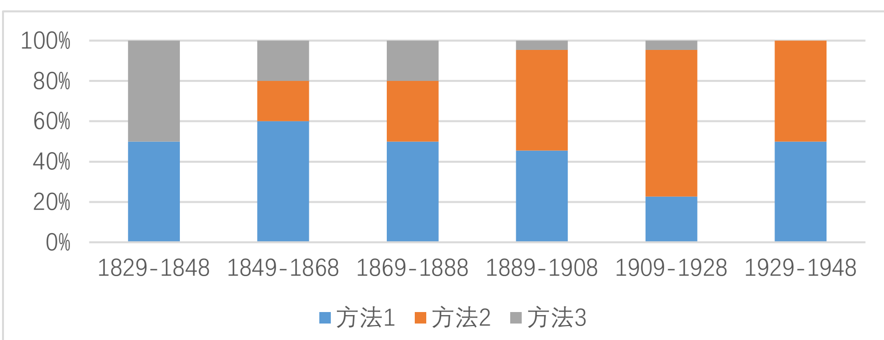


图 6 证明圆幂定理的时间段分布

除去 1929-1948 年教科书样本数量较少的一个时间段，可以看出，方法 1 和方法 3 早已出现在 19 世纪上半叶的教科书中，但随着时间的推移，出现的频次逐渐减少；而方法 2 在 19 世纪中叶的教科书中首次出现，在接下来的 100 年中，出现的频次逐步提高，并在 20 世纪以后的

美英教科书中占据主流。我们认为，这样一种趋势背后有其更深次的原因。

从历史的角度来看，19 世纪以前美英大都把欧几里得的《几何原本》作为学校的几何教科书，然而，在 1813 年，几位年轻的英国数学家在剑桥成立了名为“分析学会”的团体，旨在鼓励英国人学习法国的高等数学，呼吁人们正视欧陆特别是德、法数学家在分析领域取得的巨大成就，这场运动的影响也波及到了美国。于是，勒让德的几何教科书被美国教师所翻译并在学校中广泛使用，这也是许多美英早期教科书采用勒让德的相似三角形法来证明圆幂定理的原因之一。

从教材序的角度来看，教科书编者通常是以圆周角定理、弦切角定理和圆幂定理的顺序来安排教材内容，与此同时，圆幂定理大多出现在相似多边形一章中，因而运用圆周角定理和弦切角定理来证明相似三角形进而得到圆幂定理也显得顺利成章，这也契合了现行沪教版教科书中的证明方法。

从学生心理序的角度来看，美英早期几何教科书中的圆幂定理通常又是以相交弦定理、切割线定理和割线定理的顺序展开，因此学生则会考虑从已经学过的切割线定理出发去证明割线定理。运用切割线定理的推论，即从圆外一点引圆的割线，这一点到割线与圆的交点的两条线段长的积为定值，一方面学生免去构造相似三角形进而直接证明割线定理，使得证明过程更加简洁流畅，符合学生的认知水平，另一方面这一推论也可以帮助学生很好的理解“幂”的含义。因此，这一方法会在 20 世纪的几何教科书中占据主流。

5 圆幂定理的应用

圆幂定理的历史源远流长，而在漫长的数学发展史上，圆幂定理又有诸多应用。当我们翻开美英早期几何教科书，首先就能看见圆幂定理在现实生活中的应用。例如，罗宾逊在《几何基础》（1868）中问：“特内里费岛上有一座山，山的垂直高度约为 3 英里，当船距离山顶 154 或 155 英里时可以看见山顶，问地球的直径为多少？”[6]此时，将问题用数学语言可以描述为：

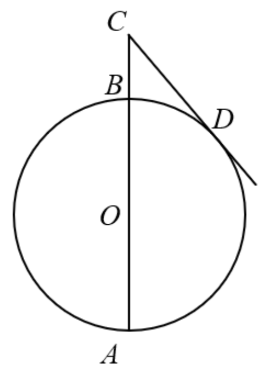


图 7 特内里费岛问题

在$\odot O$中，AB为直径，延长AB至点C，过点C作$\odot O$的切线，切点为D（图 7），已知$BC=3$英里，$CD=154.5$英里，问直径AB长为多少。运用切割线定理可以写出$CD^2=BC\cdot AC$，于是代入数据计算可得$AB=7953.75$英里。

当然，圆幂定理的应用不只局限于现实生活，在数学上的许多构造问题也会用到圆幂定理的相关结论。美英早期教科书中最常见的两大与圆幂定理有关的构造问题，即问题一：求作两条线段的比例中项；问题二：将给定线段分成两段，使得长线段是整条线段和短线段的比例中项。

对于问题一，《几何原本》第Ⅵ卷命题 13 早已提出过一个相同的问题，并用射影定理予以解决[1]，但在这一问题上用圆幂定理同样可以解决。如图 8，对于给定线段 AE，EB，将

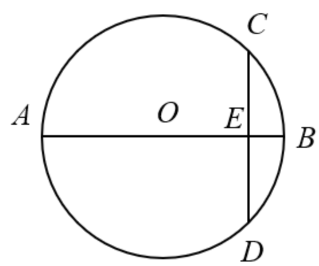


图 8 圆幂定理中的构造问题一

这两条线段首尾相连且 A，E，B 三点共线，并以 AB 为直径作$\odot O$。过点 E 作线段 AB 的垂线，交$\odot O$于点 C，D，由垂径定理知 $CE=ED$。又由相交弦定理可知$CE\cdot ED=BE\cdot AE$，于是$CE^2=BE\cdot AE$，即$CE=\sqrt{BE\cdot AE}$，则线段 CE 即为所求[7]。

对于问题二，给定线段 AB，作 $BC\perp AB$ 且$BC=\dfrac{1}{2}AB$。以点 C 为圆心，CB 为半径作半

圆，交射线 *AC* 于点 *D*，*E*。再以 *D* 为圆心，*AD* 为半径作弧，交线段 *AB* 于点 *F*，此时线段 *AF*，*FB* 即为所求[8]（图 9）。

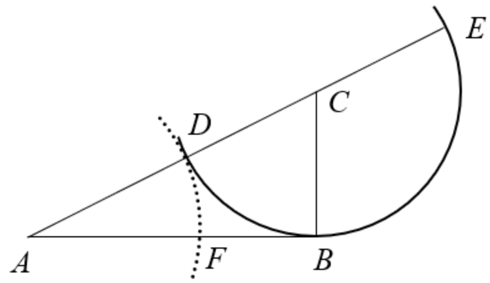


图 9 圆幂定理中的构造问题二

由切割线定理可知 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AB}$，于是 $\dfrac{AB-AD}{AD}=\dfrac{AE-AB}{AB}$。又因为 $AD=AF$，$AB-AD=AB-AF=FB$ 以及 $AE-AB=AE-DE=AD$，所以 $\dfrac{FB}{AF}=\dfrac{AF}{AB}$，即 $AF=\sqrt{FB\cdot AB}$。

早在古希腊时期，毕达哥拉斯派认为“万物皆数”，宇宙间一切的现象都能归结为整数或整数之比。而当毕达哥拉斯派发现有些比，诸如正方形对角线与其一边之比不能用整数之比表达时，他们就感到惊奇不安[9]。毕达哥拉斯派曾用归谬法证明 $\sqrt{2}$ 与 1 不可公度比，历史上也出现过许多不同的证明方法，而在教科书中给出了一种运用切割线定理证明正方形对角线与其一边不可公度比的方法。

为了找到在正方形 *ABCD* 的对角线 *AC* 与边长 *AB* 的比值，于是以点 *C* 为圆心，*BC* 为半径作半圆，并交射线 *AC* 于点 *E*，*F*（图 10）。不难发现，在线段 AC 中减去一倍长线段 *AB*，剩余线段 *AE*，则问题转化为求 *AE* 与 *AB* 之比。由圆幂定理可以知道 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AB}{AF}$，因

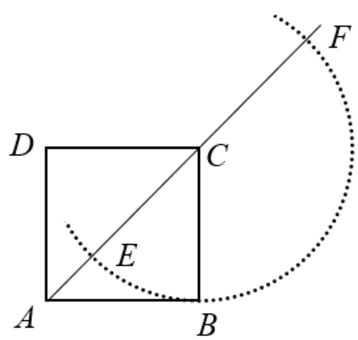


图 10 圆幂定理中的不可公度比问题

为 $AF-2AB=AE$，所以

$$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{\dfrac{AF}{AB}}=\frac{1}{\dfrac{AE}{AB}+2}=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{AE}{AB}+2}+2}=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{AE}{AB}+2}+2}+2}=\cdots。$$

如此以往进行计算，这一算法将永远不会停止，所以正方形对角线与其一边不可公度比[10]。

6 教学启示

综上所述，历史上出现的多种证明圆幂定理的方法，为今日圆幂定理的教学提供了诸多启示。

（1）拨开迷雾，探究“幂”的本质所在。在教学过程中，我们首先要让学生理解，为什么要将相交线定理、切割线定理和割线定理合称为“圆幂定理”以及这其中的“幂”究竟体现在哪里。其实，当我们翻开历史的画卷就可以找寻到答案。在部分美英早期教科书中给出过这样一条定理，即从圆内或圆外一点 P 作 $\odot O$ 的一条割线，交半径为 r 的 $\odot O$ 于点 A,B，总有 $|PA|\cdot|PB|=\left|r^2-|OP|^2\right|$。由此我们也就发现了“幂”之所在。通过了解圆幂定理的由来，不仅有助于学生理解和记忆定理的具体内容，还有利于培养学生的数学发现和数学创造的能力。

（2）咬文嚼数，领略证明方法之精妙。历史上出现了圆幂定理的多种证明方法，为此教师可以设计探究活动。学生们集思广益、各抒己见，在小组讨论中既可以提高学生的数学语言表达能力，还能让学生真正成为课堂的主人。与此同时，圆幂定理将数与形紧密的结合在了一起，体现了代数与几何的转化思想；两条弦的交点可以分为在圆内、在圆上以及在圆外三种情况，体现了分析问题常用的分类讨论思想；在证明过程中没有条件创造条件构造相似三角形，体现了解决问题常用的归纳推理思想。在课堂教学中，教师可以向学生渗透圆幂定理中所蕴含的数学思想，这不仅有助于拓展学生的数学思维，培养学生的发散性思维，还有助于培养学生的数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学学科核心素养。

（3）辩证统一，体会数学定理的和谐之美。从历史和现实中我们看到了多种证明方法，既

有《几何原本》中的等面积法，又有美英早期教科书中用切割线定理和割线定理相互推导，还有我们现在所熟知的相似三角形法。虽然这些证明方法各有不同，但是最后都得到了相同的定理，一方面可以让学生感受到“殊途同归”的魅力，另一方面也可以提高学生学习数学的兴趣，感受数学的简洁美、统一美。

（4）豁然开朗，领略数学的魅力。学数学就是为了用数学，而简单地套公式计算并不能达到用数学的要求。我们认为，想要学好数学，则要学会利用相关的数学知识与方法解决一些实际问题。因此，教师可以在圆幂定理的教学中补充联系现实生活的实际问题，也可以补充一些将数与形结合在一起的构造性问题，这样做既有助于培养学生的理性思维，让学生体会到数学在实际生活中的用处，还有助于培养社会所需要的创新型人才。

参考文献

[1] 欧几里得. 几何原本(兰纪正，朱恩宽译)[M]. 南京: 译林出版社, 2014.

[2] Legendre, A. M. *Elements of Geometry and Trigonometry*[M]. New York: Chicago, 1798: 127-128.

[3] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1855:102-103.

[4] Sharpless, I. *The Elements* of *Plane and Solid Geometry*[M]. Philadelphia: Porter & Coates, 1879: 126-127.

[5] Benjamin, P. *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry*[M]. Boston, Cambridge: J. Munroe and company. 1858: 55.

[6] Robinson, H. N. *Elements of Geometry*, *Plane* & *Spherical Trigonometry Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Company, 1868: 104.

[7] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry*[M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 112.

[8] Robinson, H. N. *Elements* of *Geometry, Plane* & *Spherical Trigonometry Geometry*[M] Cincinnati: Jacob Ernst, 1850: 86.

[9] M·克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979: 37-38.

[10] Loomis, E. *Elements of Geometry and Conic Sections Geometry*[M]. New York: Harper &Brothers, 1849: 81-82.

美法早期几何教科书中的扇形面积公式

杨舒捷

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

扇形与扇形面积是数学中的重要课题，不仅在平面几何中占据主要地位，还为学生后面学习立体几何打下基础。《义务教育数学课程标准》（2011 年版）要求学生能够计算扇形的面积，扇形的面积公式要由学生独立分析得出，以帮助学生更好地理解公式[1]。

现行数学教科书中，扇形的面积是沪教版六年级上册“圆和扇形”章中“圆和扇形面积”这一节的内容，教科书先介绍扇形的概念，再求出圆心角是 1°的特殊扇形的面积，进而得出圆心角为 $n°$ 的扇形面积公式，最后结合弧长公式给出扇形面积的另一公式；人教版和苏教版则是在九年级上册“圆”这一章的“弧长与扇形面积”节中讲解扇形面积公式，在讲解弧长公式之后，采用与沪教版同样的方法得到两个扇形面积公式；北师大版则在九年级下册“圆”这一章的“弧长及扇形的面积”节中介绍扇形面积，但并未直接给出证明。不同的教科书处理方式互有不同，但大都是从特殊的扇形入手，经计算得到扇形面积公式，并借助弧长公式进行变形得到新公式。

现行的教科书大多只介绍一种证明方法，但追溯历史，我们会发现数学家们提出了多种多样的方法来推导扇形面积，在提倡将数学文化融入数学教学的今天，深入挖掘这些数学史素材，无疑可以为我们今日的教育教学提供帮助。

鉴于此，本文聚焦扇形面积公式的推导与证明，对 1805-1924 年间出版的 43 种西方早期几何教科书进行考察，试图探究出的早期教科书中给出了哪些扇形面积公式和证明方法，以及他们的演变过程，以期为今日的扇形面积教学和教科书的编写提供参考。

2 教科书的选取

本研究从有关数据库中选取了 20 世纪 30 年代之前出版的 43 种西方早期几何教科书作为研究对象，其中，41 种出版于美国，2 种出版于法国。以 20 年为一个时间段，这些教科书的时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无明显变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

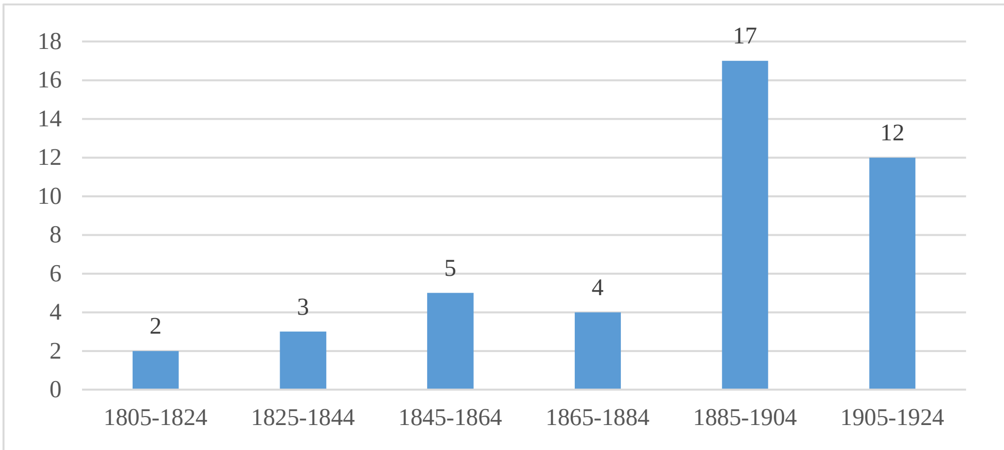


图 1 43 种教科书的时间分布

扇形面积所在的章节主要有“正多边形与圆”“圆的测量”“圆的面积”“圆”“扇形的面积”和“表面”六类，表 1 为扇形面积所在章节的分布情况。其中，“圆的测量”章的占比最高，其次是“多边形与圆”章。

表 1 扇形面积在 43 种教科书中的章节分布

章名	多边形与圆	圆的测量	圆的面积	圆	扇形的面积	表面
数量	12	14	6	5	2	4
比例	27.91%	32.56%	13.95%	11.63%	4.65%	9.30%

图 2 为含扇形面积的章节在各时间段的分布情况。由图 2 可知，在 19 世纪 40 年代以前出版的教书中，扇形面积主要在“表面”这一章节中呈现，而在 19 世纪 40 年代之后出版的教科书中，扇形面积开始出现在“圆”和“圆的测量”章节中，主要分布在“圆的测量”和“多边形与圆”中，且呈现出分布的多样性。

本文采用的统计方法如下：首先，按照年份查找并摘录出研究对象中有关扇形面积的推导与证明部分；然后，参考相关知识确定初步分类框架，并结合早期教科书中的具体情况进行适当调整，形成最终的分类框架；最后，依据此框架对研究对象进行分类与统计。

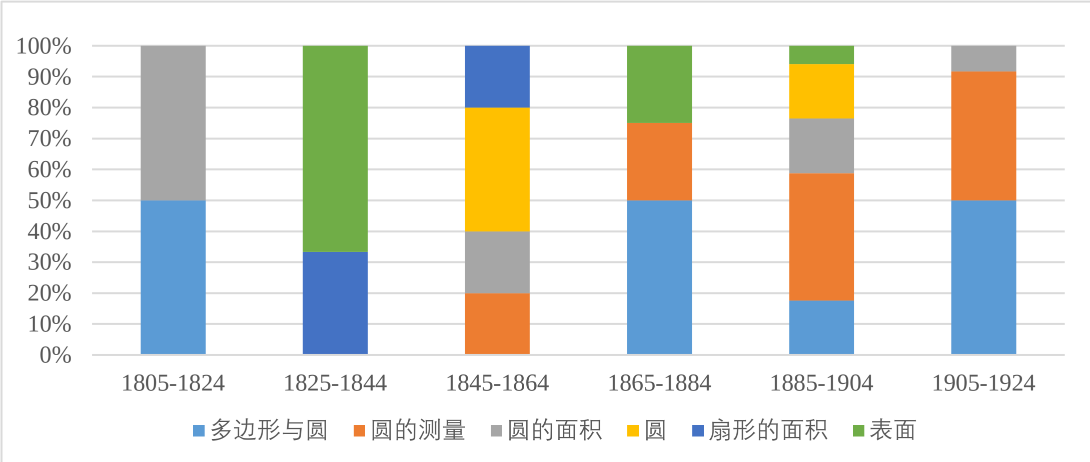


图 2 扇形面积所在章节的时间分布

3 扇形面积的公式

考察发现，在 43 种西方早期几何教科书给出的扇形面积公式中，根据公式的内容可以分为“弧长与半径公式”“角度与半径公式”“角度与面积公式”和“三角形公式”四种，分别有 36，2，8，2 种教科书给出，其中，有 38 种教科书给出了一种公式，5 种教科书给出了两种公式。表 2 给出了典型的例子。

表 2 扇形面积公式

公 式	具体内容	教科书
弧长与半径公式	扇形的面积等于它的弧长与半径乘积的一半，即 $S=\frac{1}{2}lr$。[2]	Peirce (1837)
角度与半径公式	扇形的面积等于它的角度与半径平方乘积的一半，即 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2$。[3]	Beman & Smith (1900)
角度与面积公式	扇形的面积等于圆的面积乘扇形的角度再除以 360，即 $S=\frac{\alpha\pi r^2}{360}$。[4]	Peirce (1837)
三角形公式	扇形的面积等于三角形的面积，它的底是扇形的弧，高是圆的半径，即 $S=\frac{1}{2}ar$。[5]	Bertrand (1812)

图 3 为以上四种扇形面积公式的时间分布情况。从图 3 可见，“弧长与半径公式”一直受到各个时期编写者的青睐。19 世纪初，教科书主要采用“弧长与半径公式”和“三角形公式”，

二者平分秋色，到了 19 世纪末 20 世纪初，逐渐出现了“角度与半径公式”和“角度与面积公式”，但“弧长与半径公式”始终占据主流地位。

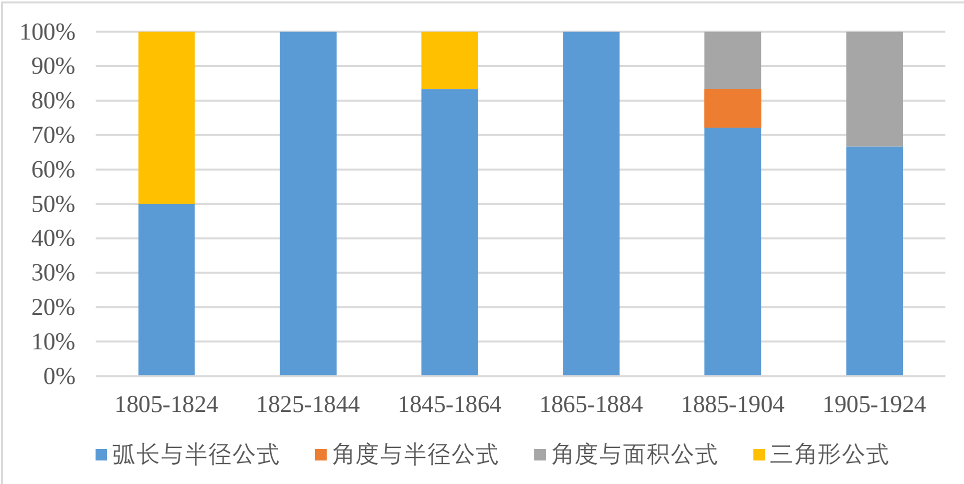


图 3 四种扇形面积公式的时间分布情况

4 扇形面积公式的证明

经过统计和分析，在 43 种西方早期几何教科书中，关于扇形面积公式的推导与证明方法可以分为“弧长法”“角度法”“扇形法”和“分割法”四种，其中，有 30 种教科书给出了一种证明，2 种教科书给出了两种证明，11 种教科书未给出证明。

4.1 弧长法

有 22 种教科书采用弧长法，借助扇形和圆的面积与弧长进行推理证明。不同的教科书证明扇形面积公式的方法不同，主要可以分为文字语言和符号语言两种表达方式。

（1）van Velzer 和 Shutts（1894）指出，因为扇形的面积与圆的面积之比等于扇形的弧长与整个圆周之比，所以扇形的面积等于其半径与弧长乘积的一半[6]。Tappan（1864）等人在编写教科书时也都采用此方法对扇形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}lr$ 进行了简略的证明[7]，根据统计，一共有 13 种教科书采用了此方法。

（2）Wells（1886）和 Bowser（1890）用 s，c 和 S，C 分别表示扇形的面积、弧长以及圆

的面积、周长，从$\dfrac{s}{S}=\dfrac{c}{C}$出发，得到$s=c\times\dfrac{S}{C}$，而$S=\dfrac{1}{2}R\times C$，所以$s=\dfrac{1}{2}c\times R$。[8][9]共有 9 种教科书以此方式进行证明。

4.2 角度法

有 5 种教科书采用角度法，借助扇形和圆的面积与角度进行推理证明。不同教科书的处理方法不同。

Olney（1886）采用角度制，因为扇形的面积与圆的面积之比等于扇形的角度与围绕圆心的整个角之比，即扇形的角度与四个直角之比，也就是扇形的角度与$360°$之比，因此，如果用$a°$表示扇形的角度，则扇形的面积为$\dfrac{a\pi r^2}{360}$。[4]

Beman 和 Smith（1900）则采用弧度制，根据扇形的面积与圆的面积之比等于扇形的角度与2π之比，用α表示扇形的角度，得到$s:\pi r^2=\alpha:2\pi$，因此扇形的面积$s=\dfrac{\alpha r^2}{2}$。[3]

4.3 扇形法

有 3 种教科书采用扇形法，借助同一个圆中两个扇形的关系进行证明。例如，Sanders（1903）

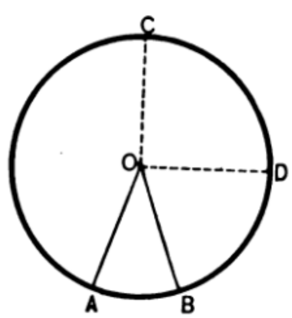


图 4　Sanders（1903）对扇形面积公式的证明

从扇形的定义出发，在圆 *O* 中任做一扇形 *AOB*，以及角度为直角的扇形 *COD*（图 4），即四分之一圆 *COD*，根据同一个圆中的两个扇形面积之比与它们所对应的弧长之比相同，可得[10]

$$\frac{S_{扇形AOB}}{S_{扇形COD}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}},$$

进而有

$$\frac{S_{扇形AOB}}{4\times S_{扇形COD}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{4\times\overset{\frown}{CD}},$$

记圆的周长为 C，面积为 S，则有

$$\frac{扇形AOB}{S}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{C},$$

又因为 $S=\frac{1}{2}CR$，故得

$$S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}R\times\overset{\frown}{AB}。$$

4.4 分割法

有 4 种教科书采用分割法，借助极限的思想，利用三角形的面积来推导证明，不同教科书的证明方法有所不同。

Peirce（1837）将扇形 AOB 的弧 AB 分为 AM，MN，NP 等无限小的弧（图 5），分别绘制半径 OM，ON，OP 等，这样扇形 AOB 就被分为 AOM，MON，NOP 等无限小的扇形，这些扇形面积的总和就是扇形 AOB 的面积，而这些无限小的扇形可以看作是分别以半径 OA，OM，ON 等为高，以 AM，MN，NP 等为底的三角形，因此扇形 AOB 的面积 $S=\frac{1}{2}OA\times\overset{\frown}{AB}$。[2]

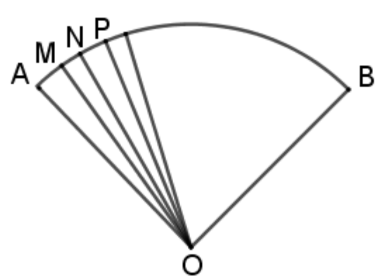


图 5 Peirce（1837）对扇形面积公式的证明

Benjamin（1858）假设扇形 $CAMB$ 的弧 AMB 由无限小的线段组成（图 6），从圆心 C 向这

些线段的端点作半径，这样扇形 *CAMB* 就被划分成若干个分别以半径为高，以弧 *AMB* 上的无限小线段为底的三角形，这些三角形面积的总和就是扇形 *CAMB* 的面积，即 $S=\frac{1}{2}CA\times\overset{\frown}{AMB}$。[11]

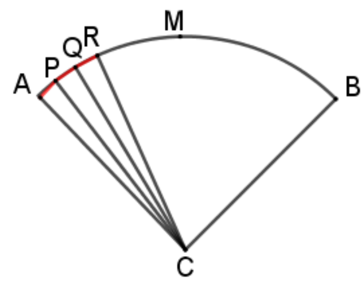


图 6 Benjamin（1858）对扇形面积公式的证明

4.5 证明方式的演变

图 7 为以上四种扇形面积公式证明方法的时间分布情况。从图 7 可见，19 世纪初，教科书主要采用“扇形法”和“分割法”，二者平分秋色，19 世纪 20 年代，教科书逐渐开始采用“弧长法”，且呈现增长趋势，到了 19 世纪中叶，“弧长法”已经成为教科书中的主要方法，在 19 世纪末出现了“角度法”，但“弧长法”始终占据主流地位，扇形面积证明方法的演变呈现出从单一走向多元而最终又回归单一的趋势。

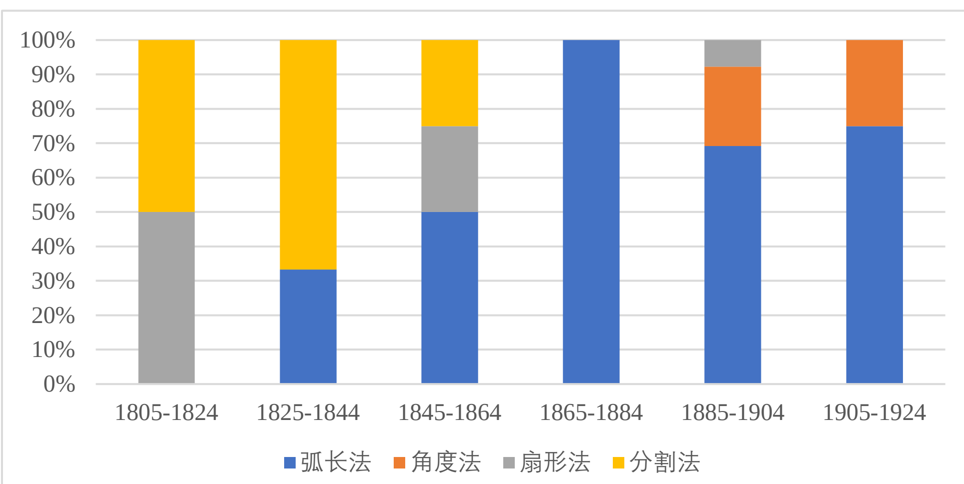


图 7 四种证明方法的时间分布情况

扇形作为与圆密切相关的数学概念，扇形面积推导方法的演变与圆面积推导方法的演变也

是密切相关的。在 19 世纪到 20 世纪之间，将圆分割成无数以半径为高、弧长为底的等腰三角形这一直观性较强的圆面积证明方法一直占用一席之地，该方法也影响着扇形面积的证明，使得有着类似证明思路的“分割法”在 19 世纪上半叶较为盛行。而到了 19 世纪下半叶和 20 世纪初，随着微积分的严密化和极限概念的完善，更加简洁地利用“当圆内接或外切正多边形边数趋向无穷时，其周长和面积的极限分别是圆的周长和面积”成为了主流的圆面积公式证明方法，由此，在扇形面积公式的证明中，编写者也更倾向于采用类比的思想，直接利用“扇形的面积与圆的面积之比等于扇形的弧长与整个圆周之比，也等于扇形的角度与围绕圆心的整个角之比，所以扇形的面积等于其半径与弧长乘积的一半”这一关系进行证明，更加简洁易懂，因而出现了“角度法”与“弧长法”，而“弧长法”也始终占据着主流地位。

5 结论与启示

西方早期几何教科书主要在“圆的度量”和“多边形与圆”章节中介绍扇形面积，所介绍的扇形面积公式主要有四种，其中 $S=\dfrac{1}{2}lr$ 最受编写者的青睐，所采用的推导与证明方法也多种多样，根据证明思路可以归纳为四类，其中，借助“扇形的面积与圆的面积之比等于扇形的弧长与整个圆周之比”的“弧长法”始终占据主流地位，19 世纪 60 年代前的教科书主要采用“扇形法”“分割法”和“弧长法”，呈现多样性，而 60 年代后的教科书则侧重于采用“弧长法”和“角度法”。

早期教科书中扇形面积公式和推导方法的多样性及演变过程为今天的扇形面积教学提供了诸多启示。

现行数学教科书中，沪教版先介绍扇形的概念，再根据半径为 r 的圆中 $360°$ 的圆心角所对扇形的面积就是圆的面积 $S=\pi R^2$，得出圆心角为 1°的扇形面积是 $\dfrac{1}{360}\pi r^2$，进而得出圆心角为 $n°$ 的扇形面积是 $S_{扇形}=\dfrac{n}{360}\pi r^2$，最后结合弧长公式 $l=\dfrac{n}{180}\pi r$ 给出扇形面积的另一公式 $S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lr$；人教版和苏教版则是在推导出弧长公式之后，再采用与沪教版同样的方法得到扇形面积的两个公式 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi R^2}{360}$ 和 $S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lR$；北师大版则并未直接给出证明，而是先引导学生

自主探究出弧长公式，再探究出半径为 R，圆心角为 $n°$ 的扇形的面积公式，并尝试用弧长来表示扇形面积公式。由此可见，现行的教科书所介绍的证明方法较为单一，而历史上数学家所提出的诸多证明方法在今日仍有重大的教育意义，例如蕴含极限思想的“分割法”，以及与借助圆心角进行证明相类似的借助弧长进行证明的“弧长法”。

因此，教师在进行教学设计时，应将所收集的有关扇形及扇形面积的数学史资料进行分析整理，通过合适的方式融入到课堂教学的各个环节中，使课堂充满浓郁的历史文化气息，让学生体会到扇形面积悠久的探索历史，从而吸引学生的学习兴趣，帮助学生突破重难点，进而高效地完成教学目标。

在引入环节，教师可以采用复制式，通过呈现历史上数学家研究过的图形或相关问题来激发学生的学习兴趣。在新知环节，教师应以学生为中心，充分发挥学生的自主探究能力。教师可以引导学生类比弧长公式的推导过程来探究出扇形面积公式；也可以采用重构式，让学生经历扇形面积的发现和推导过程，通过让学生自己动手折纸，或利用 GeoGebra 将动态分割过程可视化，化静为动，使学生充分体会其中的极限思想。

同时，因为扇形面积公式证明方法的多样性，教师可以引导学生自行探究出多种证明方法，然后向学生介绍此方法也曾由某位数学家提出过，或者直接采用附加式，利用 PPT 或视频来展示古代数学家推导扇形面积公式所采用的方法与证明过程，让学生体会各种方法之间的区别与联系，在帮助学生锻炼思维、开阔视野的同时也能够使学生感受到古代数学家们的巨大贡献以及数学知识背后所蕴含的文化气息。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011 年版）[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.

[2] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: James Munroe & Company, 1837: 85-86.

[3] Beman, W. W., Smith, D. E. *New Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 224.

[4] Olney, E. *Elementary Geometry* [M]. New York: Sheldon and Company, 1886: 197.

[5] Bertrand, L. *Elémens de Géometrie* [M]. Paris: J. J. Paschoud, 1812: 142.

[6] van Velzer, C. A., Shutts, G. C. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Atkinson, Mentzer& Grover, 1894: 228.

[7] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 173.

[8] Wells, W. *The Elements of Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886: 203.

[9] Bowser, E. A. *The Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. van Nostrand Company, 1890: 222-223.

[10] Sanders, A. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1903: 238.

[11] Benjamin, P. *An elementary treatise on plane and solid geometry* [M]. Boston, Cambridge: J. Munroe and Company, 1858: 43.

美英早期几何教科书中的平行线判定和性质

刘凯月

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

平行线是学习平面几何的重要基础，《几何原本》第一卷便给出与之相关的基本定义、公理和公设，将平行直线定义为“在同一平面内的直线，向两个方向无限延长，在不论哪个方向它们都不相交”[1]。命题 1-26 给出了三角形的相关命题，如全等三角形的判定方法、三角形外角性质等，命题 27-29 给出了基于三角形知识的证明平行线的判定和性质的方法，但与现行教科书中的方法有所不同[2]。

《义务教育数学课程标准》要求中学阶段理解平行线概念以及相关角的概念，掌握平行线的性质定理，探索并证明平行线的判定定理，并能解决简单的实际问题[3]。现行七年级数学教科书中，基本都以两条直线的位置关系为切入，引出垂直和平行的概念。人教版、北师大版等大部分教材都以实际生活中平行线的例子，以及三角尺的实际平移操作为切入点，先引入平行公理，即“过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行”，和平行的传递性，即“平行于同一条直线的两条直线平行”，进而结合实际例子，通过三角尺的平移引出平行线关于同位角、内错角、同旁内角的判定和有关性质。

但以上判定和性质定理的得出都基于学生实际平移操作和观察，运用对顶角、补角的概念，且包含推理的成分较多，未能究其本质，学生易死记硬背。而且实际中三角尺的操作难免有误差，不易使人信服。苏科版和华师大版教材中有利用反证法证明平行线性质的例子，有利于通过严谨的论证帮助学生更好地理解这些定理。部分教材也提到了古代测量地球周长的史料，有利于帮助学生更好地体会平行线在生活中的应用。

数学史是全面理解数学、攀登数学大厦的基石[4]，研究平行线发展的历史有利于丰富教学过程，提高知识的接受度。为了探究其他严谨的证明和证明方式，本文聚焦平行线的判定和性质，对西方早期几何教科书进行考察，希望为当下数学教学提供思想启迪。

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库中选取 1800-1949 年间的 88 种美英早期几何教科书为研究对象，其出版

时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。以 30 年为一个时间段，各教科书的分布情况如图 1 所示。

88 种几何教科书中，平行线主要位于“平行”、“平行线”、“空间中的线和面”、“平行线和平面”等章节。其中大多归于“平行线”一章之中，可见早期教科书大都将平行线相关知识作为一个单独章节来研究。

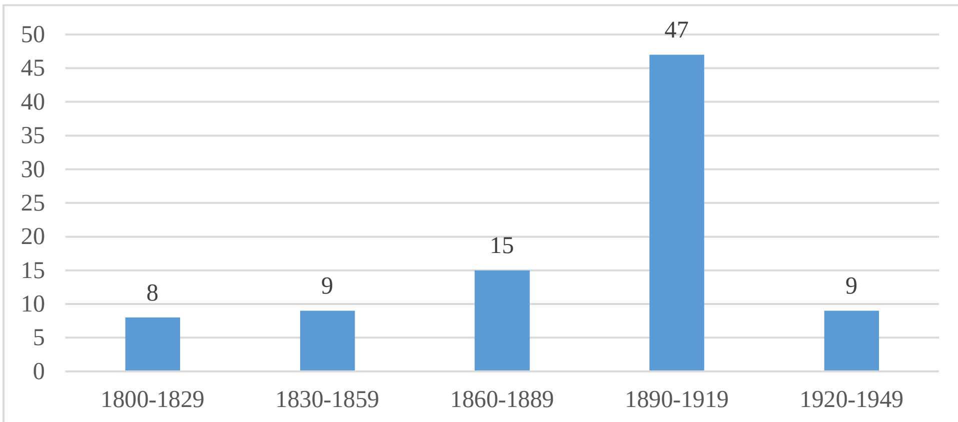


图 1 88 种几何教科书的时间分布

3 平行线的判定

88 种几何教科书中，有 52 种沿用了《几何原本》中的平行线定义，即同一平面内无限延长不相交的两条直线互相平行。也有少数教科书以“两条直线距离处处相等则平行”、“直线方向相同则平行”给出定义，更有 2 种教科书直接以“内错角相等，两直线平行”作为定义，进而以此为基本事实推出其他定理。从定义中可以看出，除了最后一种定义用到了第三条直线，其他几种都是只考虑两条直线的位置关系，如果从定义出发进行判定，不难发现，“无限延长”、“处处等距”、“方向相同”是具有抽象性的描述，无法实际操作，且通过度量证明定理违背公理化思想，故早期教科书大多引入第三条直线构造“三线八角”，利用角的数量关系来判定直线的位置关系。

本文所考察的 88 种教科书给出的平行线判定定理与现行教科书基本一致，包括以下四条定理：

（1）若两条直线同时垂直于第三条直线，则这两条直线平行。

（2）若两条直线被第三条直线所截所形成的内错角相等，则这两条直线平行。

（3）若两条直线被第三条直线所截所形成的同位角相等，则这两条直线平行。

（4）若两条直线被第三条直线切割所形成的同旁内角互补，则这两条直线平行。

以上所述直线都设定为处于同一平面内，下文不再说明。在所考察的教科书中，除少数教科书直接给出平行线判定的结论之外，大部分教科书都采用了反证法，只有 4 种教科书利用全等三角形，给出直接证明。因后三种判定方式可以通过邻补角知识互相推出，故下文只讨论前两种（以下分别简称为“垂直判定定理”和“内错角判定定理”）的证明。

3.1 垂直判定定理的证明

42 种教科书将垂直判定定理置于“平行线”这一章的开端，可见其重要性。该定理的典型证明如下[5]：设直线 AB 和 CD 均垂直于直线 XY。假设 AB 和 CD 不平行，则它们相交于一点，因为过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直，所以 AB 与 CD 不可能相交，故两者平行。

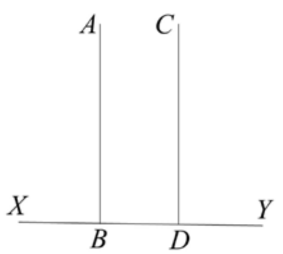


图 2 垂直判定定理

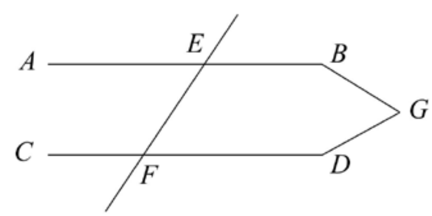


图 3 欧氏反证法

3.2 内错角判定的证明

关于内错角判定定理，早期教科书中共出现了四种证明，分别是欧氏证法、基于平行公理的证法、图形旋转证法和基于全等三角形的证法，前四种为反证法，最后一种为直接证法。

3.2.1 欧氏反证法

欧几里得在《几何原本》中证明了平行线判定定理，方法如下[1]：设直线 EF 和两条直线 AB、CD 相交所成的内错角 AEF 与 EFD 彼此相等。若 AB 和 CD 不平行，则延长 AB 和 CD，它们或者在 B，D 方向或者在 A，C 方向相交，不妨设它们在 B，D 方向相交于点 G。则在ΔGEF 中，

外角 *AEF* 等于不相邻的内角 *EFG*，这是不可能的。故知 *AB* 和 *CD* 经延长后不会相交，因而平行。

有 9 种教科书沿用了欧几里得的反证法。

3.2.2 基于平行公理的证明

苏格兰数学家普莱费尔（J. Playfair, 1748-1819）提出新的平行公理来代替欧几里得的第五公设："过已知直线外一点，能且只能作一条直线与已知直线平行"[4]。有 12 种教科书用这一新的平行公理来证明内错角判定定理。如，Wentworth（1880）的证明如下[6]：如图 4，设直线 *EF* 和两条直线 *AB*、*CD* 分别交于点 *H* 和 *K*，令∠*AHK*=∠*HKD*。过点 *H* 作直线 *MN*//*CD*，则

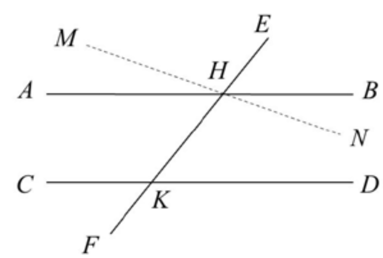


图 4 基于平行公理的证明

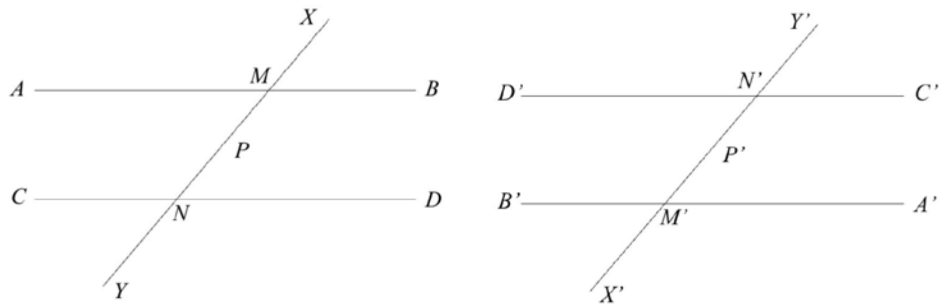
∠*MHK* = ∠*HKD*。而∠*AHK* = ∠*HKD*，故可得出∠*AHK* = ∠*MHK*，由平行公理知"两条相交直线不能同时平行于同一直线"，所以直线 *AB* 与 *MN* 重合，*MN*//*CD*，故 *AB*//*CD*。20 世纪，仍有教科书采用这类证法。

3.2.3 图形旋转证法

欧几里得在证明 SAS 定理时，用到了"顶点与边重合的角大小相等"的结论。同样地，该结论也可以用来证明平行线判定定理。例如，Newcomb（1884）给出如下证明[7]：如图 5（a），设直线 *XY* 和两条直线 *AB*、*CD* 分别交于点 *M* 和 *N*，∠*AMN* = ∠*MND*。取 *MN* 的中点 *P*，将图 5（a）绕点 *P* 旋转 180°，得到图 5（b），将点一一对应可得 *N′*与 *M* 重合，则 *N′M′*=*MN*，∠*A′M′N′* =∠*MND*，∠*M′N′D′* =∠*AMN*，故得 *M′A′*与 *ND* 重合，*N′D′*与 *MA* 重合，因此 *A′B′*与 *CD* 重合，*C′D′*与 *AB* 重合，故 *AB*//*CD*。

假设 *AB*，*CD* 在方向 *B*，*D* 一侧相遇。当图形旋转 180°时，*A′B′*，*C′D′*将在 *B′*，*D′*一侧相遇。由于两个图形应用时相一致，*B′A′*，*D′C′*也会在 *A′*，*C′*一侧相遇，但两条直线不能在两点相

遇，故 AB，CD 不会相遇，即两直线平行。



（a） （b）

图 5 图形旋转证法

3.2.4 基于全等三角形的证法

有 4 种教科书利用全等三角形来证明平行线判定定理。如，Newell 和 Harper（1918）给出如下证明[5]：如图 6，设直线 XY 和两条直线 AB、CD 分别交于点 P 和 R，$\angle APR = \angle PRD$。取

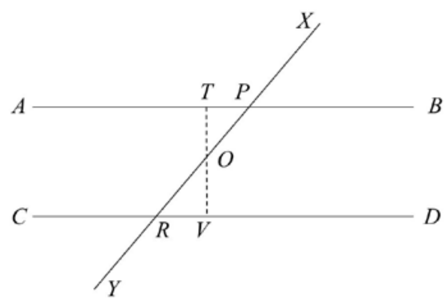


图 6 基于全等三角形的证明

PR 的中点 O，过点 O 作 $OV\perp CD$，交 AB 于点 T，易证$\Delta PTO\cong\Delta RVO$，故$\angle PTO = \angle RVO = 90°$，即 $TV\perp AB$。AB 和 CD 都与 TV 垂直，根据垂直判定定理，$AB//CD$。

利用全等三角形知识来证明，过程虽略微复杂，且涉及的定理较多，但有利于学生将所学全等知识与平行线建立联系，加深理解，将知识融会贯通。

3.3 证法的演变

19 世纪初至 20 世纪中期，美英早期教科书中展示了多种证明方法。以 30 年为一个时间段，图 7 给出了平行线的判定五种证明方法在每个时间段的分布。

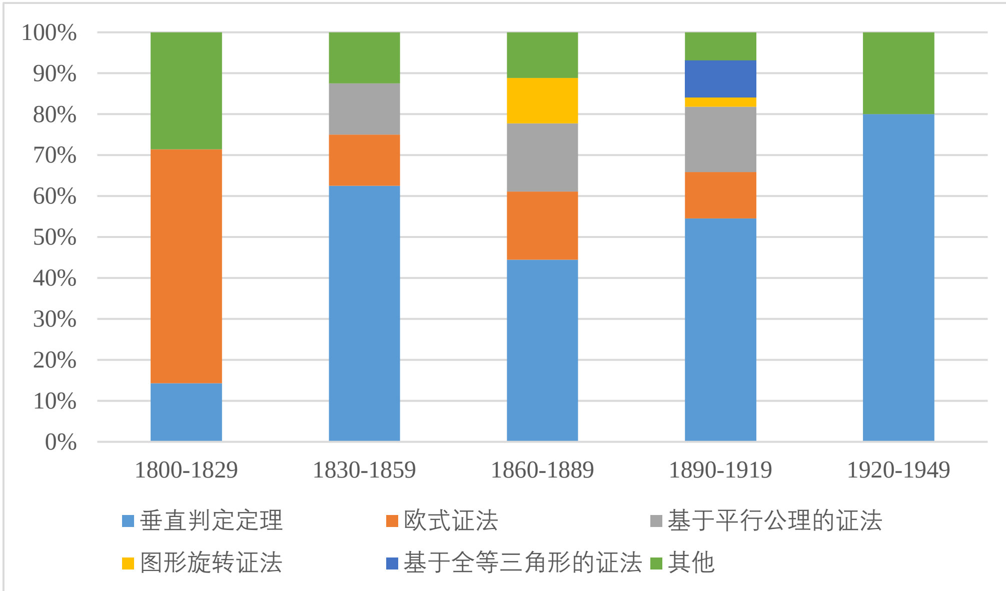


图 7 证明方法的演变

由图 7 可见，在这一段时间内，垂直判定定理都在教科书中占有重要的位置，在证明其他判定定理时，教科书采用方法也呈现多元化的特点，但以反证为主的公理化思想占据主流，基本是欧几里得相交反证法的应用和延伸。随着平行公理的提出和应用，基于平行公理的证方法逐渐得到关注。全等三角形的应用也仅出现在一小段时间内，并未占据主流。Phillips（1898）在教科书中提出了用三角尺和直尺证明平行线判定定理的方法[8]，与现行教科书相近，但在当时的背景下并未成为一种常用方法。

20 世纪初的“培利—克莱因运动”引发了数学教育改革浪潮，该运动主张摆脱《几何原本》的束缚、强调实验几何、增加立体几何和几何直观等内容、提倡结合实际问题学习几何等等[9]。受该运动的影响，20 世纪开始，公理化的证明思想遭到削弱，教科书中有关平行线的内容逐渐减少，以线面平行为代表的立体几何内容逐渐占据主要部分。

4 平行线的性质

88 种教科书给出的平行线性质与现行教科书基本一致，包括以下四条定理：

（1）若一条直线垂直于两条平行线之一，则它与另一条平行线也垂直；

（2）若两条平行线被第三条直线所截，则形成的内错角相等；

（3）若两条平行线被第三条直线所截，则形成的同位角相等；

（4）若两条平行线被第三条直线所截，则形成的同旁内角互补。

除少数教科书直接给出平行线的性质之外，大部分教科书采用反证法或利用全等三角形。由于后两条性质可通过邻补角知识由第二条性质得出，且第一条性质中的垂直也可以令内错角为 90°得出，故下文研究中只列出早期教科书中第二条性质的三种证明方法，分别是基于平行公理的证法、图形旋转证法、基于全等三角形的证法。

4.1 基于平行公理的证法

4.1.1 基于第五公设的证法

欧几里得第五公设指出，“同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角之和小于二直角，则这二直线经无限延长后在这一侧相交”。利用这一公设，欧几里得给出了平行线性质定理的证明，如下所示[1]。

如图 8，设 $AB//CD$，直线 EF 与 AB、CD 分别交于点 G 和 H。若$\angle AGH \neq \angle GHD$，不妨设

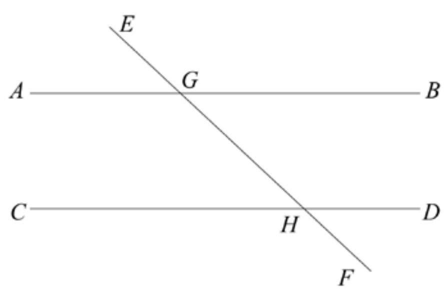


图 8 基于第五公设的证明

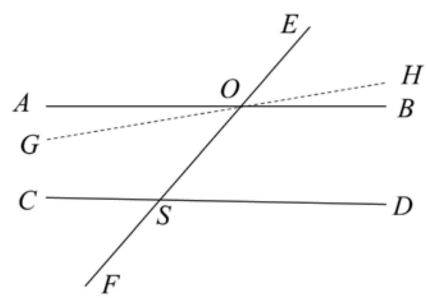


图 9 基于平行公理的证明

$\angle AGH$ 是较大的角，两个角同加上$\angle BGH$，则$\angle BGH + \angle GHD < \angle AGH + \angle BGH =$二直角，由第五公设可知，将 AB 和 CD 无限延长后，在$\angle BGH$、$\angle GHD$ 这一侧相交。但已知 $AB//CD$，故$\angle AGH = \angle GHD$。

4.1.2 基于新平行公理的证法

88 种教科书都给出了平行公理及其证明，受普莱费尔（J. Playfair, 1748-1819）新平行公理的影响，有 22 种教科书采用并发展了上述证法，如 Sanders（1903）给出了如下证明[10]：

如图 9，$AB//CD$，直线 EF 和 AB、CD 分别交于点 O 和 S。假设$\angle AOS \neq \angle OSD$，过 O 作直线 GH，令$\angle GOS = \angle OSD$，则由判定定理可得 $GH//CD$，而已知 $AB//CD$，过一点不能有两条相

交直线平行于同一条直线，所以$\angle AOS = \angle OSD$。

新平行公理避开了第五公设中第三条线的引入以及抽象的“无限延长”说法，根据“两直线不相交则平行”对第五公设进行了简化。教科书中的证法也相应避开抽象的描述，更加直观。同时，用到了平行线判定定理，对所学者的知识基础和逻辑顺序有一定要求，但也体现了反证法的严谨性，令人信服。

4.2 图形旋转证法

“顶点与边重合的角大小相等”的结论，同样也被用来证明平行线的性质定理。例如，Wells（1886）给出了如下证明[11]：如图 10，$AB//CD$，直线 EF 与 AB、CD 分别交于点 G 和 H。取 GH 的中点 O，过 O 作 $LM \perp AB$，由命题“垂直于两条平行线之一的直线与另一条垂直”可知 $LM \perp CD$。以 O 为旋转中心，旋转点 O 下方的图形，使 OM 与 OL 重合。因$\angle HOM = \angle GOL$，$HO = GO$，故 HO 与 GO 重合，从而知点 H 与 G 重合。因此，HM 与 GL 重合，从而得$\angle OHM = \angle OGL$，即$\angle AGH = \angle GHD$。

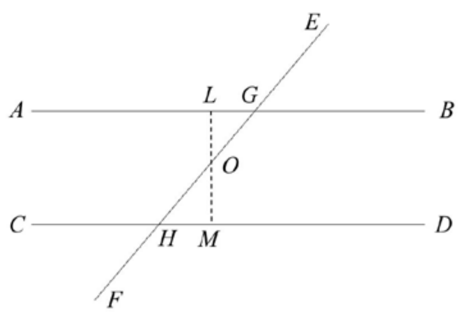


图 10 图形旋转证明

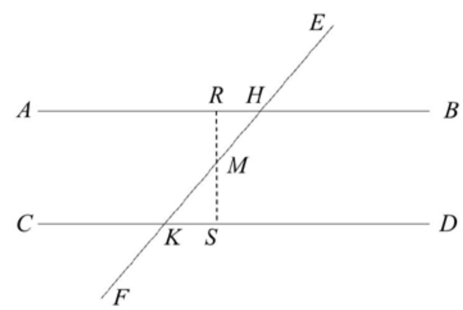


图 11 基于全等三角形的证明

4.3 基于全等三角形的证法

有 9 种教科书利用全等三角形给出了直接的证法。如，Robbins（1907）的证明如下[12]。如图 11，设 $AB//CD$，直线 EF 与 AB、CD 分别交于点 H 和 K。取 HK 的中点 M，过 M 作 $RS \perp AB$，则 $RS \perp CD$。易证 $\text{Rt}\Delta RMH \cong \text{Rt}\Delta SMK$，故有$\angle RHM = \angle MKS$，即$\angle AHK = \angle HKD$。

与图形旋转证法相比，利用全等三角形更具有说服力，结论也更易被接受。

4.4 证明的演变

19 世纪初至 20 世纪中期，美英早期教科书中展示了平行线性质的多种证明。以 30 年为

一个时间段，图 12 给出了三种证明在每个时间段的分布。

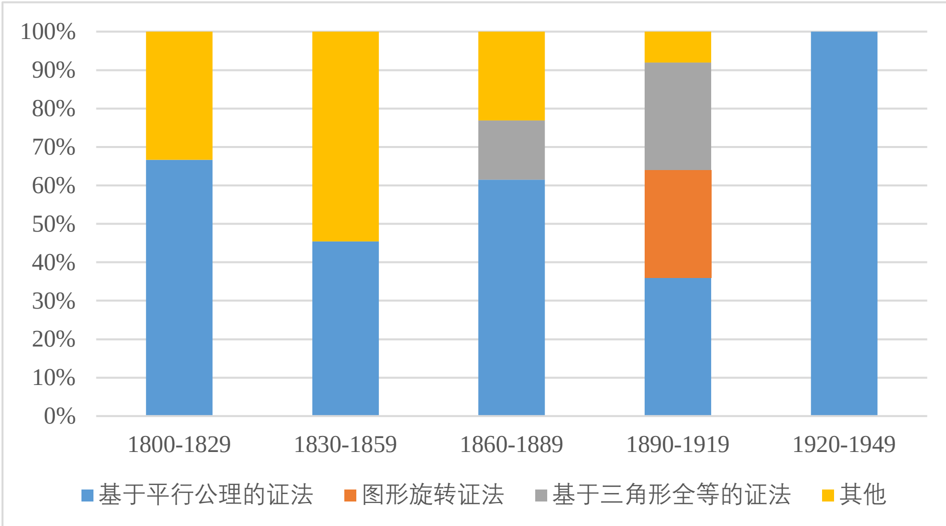


图 12 证明的演变

由图 12 可见，19 世纪至 20 世纪初的教科书大都借助于平行公理，以反证法来证明平行线性质。图像旋转证法在 19 世纪末逐渐淡出教科书，并未成为主流。19 世纪中后期，教科书开始利用全等三角形进行直接的证明，证明过程中用到“对顶角相等”、“垂直于两条平行线之一的直线与另一条垂直”等定理。

受“培利—克莱因运动”影响，20 世纪上半叶开始，随着教科书中立体几何内容增多，线线平行的内容主要作为线面平行的基础出现，故该时期不作为主要研究阶段。

5 教学启示

平行线的判定和性质是学习几何知识最重要的铺路石，本文所考察的 88 种美英早期几何教科书中展现了许多独特且优秀的证明方法，这些方法以反证法为主，并结合三角形有关知识，是对欧氏方法的继承和发展。研究东西方教科书的内在联系对当下教材编写以及教学具有重要价值。

由图 13 可见，美英早期教科书和我国现代教科书在逻辑体系上的顺序有所不同，西方多沿用欧几里得的逻辑体系，即先给出三角形部分知识，以此证明平行线有关定理，如在本文中，有部分教科书给出基于全等三角形的证法，而我国现行教科书将全等三角形知识置于平行线之后。

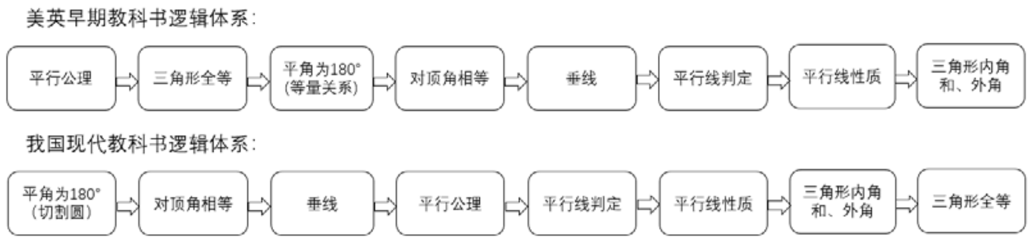


图 13 美英早期教科书和我国现代教科书逻辑体系对照

除上述差异外，二者也具有以下逻辑关联：在平行线这一章节，东西方都预先介绍了平角、对顶角、以及垂线知识，方法基本按照角的数量关系确定线的位置关系，之后又利用平行线进一步得出三角形角的关系，如“内角和为 180°”、“外角等于内对角之和”等，将线和角的知识建立联系、融会贯通。由于三角形知识放在平行线之后，现代教科书逻辑体系淡化了公理化思想。美英早期几何教科书为今日平行线教学提供了一定的启示。

（1）公理化思想的渗透。公理化思想是欧几里得《几何原本》的精髓，即根据基本事实推出其他定理。美英教科书多通过反证得出其中一条定理，以其为依据得出其他定理；而现行初中教科书对反证法不作要求，通过三角尺作图实践得出一条定理，后推导得出其他定理，反证思想不如美英教科书明显且具体。教师在引导学生通过三角尺作图研究平行线的同时，也应引导学生思考证明过程中用到的思想，平面几何并非靠直觉得出，而是基于客观事实论证而得。

（2）“第三条线”的由来。证明平行线判定和性质定理时离不开“三线八角”，实际教学过程中，教师应向学生讲述清楚“为什么要加入第三条直线”。如果从平行线的定义出发，即两条直线无限延长不相交则平行，以此判定不具有操作性，进而需要构造桥梁将两条平行线建立起关系。教师引导学生用三角尺画平行线时，移动的三角尺方向也是沿第三条线方向。同时，平行线性质也需要用角的数量关系来刻画，所以添加第三条线的必要性是教师应帮助学生理解的。

（3）知识体系的内在衔接。20 世纪出现了利用全等三角形知识的证明方法，逻辑推理更直观，更易被接受。但该方法要求学生已经掌握判定三角形全等的方法，在美英教科书中，全等三角形知识出现在平行线之前，而我国现行教科书与之相反，逻辑体系差异会使得证法选取不同。教师在讲授平行线时，可以适当引导学生思考垂线截平行线所形成的三角形的关系，为之后的全等三角形教学做铺垫。

（4）数学史的融入与思考。美英早期教科书中多涉及普莱费尔的平行公理，即欧几里得第

五公设的“替代”，但直到 18 世纪末，数学家对第五公设仍存有疑问。历史上，除普莱费尔外，古希腊天文学家托勒密、意大利数学家萨凯里（G. Saccheri, 1667-1733）等众多数学家曾尝试证明第五公设，并试图寻求一个更易接受、更自然的等价公设来代替它，但都不尽如人意[4]。现行教科书中的平行公理多为直接给出或简要说明，教师在讲授该公理时可以引入古代数学家对平行公理的探索和遇到的难题，激发学生的兴趣和提问，如“为什么要寻找替代公设”，引发思考，帮助学生加深理解。

参考文献

[1] 欧几里得. 几何原本[M]. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2003.

[2] 王进敬, 栗小妮. HPM 视角下平行线的判定[J]. 上海中学数学, 2018(5).

[3] 教育部. 义务教育数学课程标准[M]. 北京师范大学出版社, 2001.

[4] 李文林. 数学史概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[5] Newell, M. J., Harper, G. A. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Row, Peterson & Company, 1918.

[6] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1880.

[7] Newcomb, S. *Elements of Geometry* [M]. New York: Henry Holt & Company, 1884.

[8] Phillips, A. W., Fisher, I. *Elements of Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1898.

[9] Mock G D.The Perry Movement[J].Mathematics Teacher,1963,55(3).

[10] Sanders, A. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1903.

[11] Wells, W. *The Elements of Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886.

[12] Robbins, E. R. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1907.

美英早期平面几何教科书中的等腰三角形应用

钱 秦

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

为了适应时代发展对人才培养的需要，《义务教育数学课程标准（2011 年版）》特别指出在整个数学教育的过程中都应注重发展学生的应用意识。应用意识有两个方面的含义，一方面指有意识利用数学的知识解决现实世界中的问题；另一方面，认识到现实生活中蕴涵着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象、简化后用数学的方法予以解决。[1]

等腰三角形作为一种特殊的三角形，具有一般三角形不具备的独特性质。等腰三角形的性质的学习过程本身就是对全等三角形、轴对称图形以及平行线与相交线等知识的综合应用。并且本节内容的学习是对特殊几何图形进行研究的开端，对于学生后续探索直角三角形、特殊的平行四边形等意义重大，具有承上启下的作用。[2-3]等腰三角形的性质在数学内部与外部均有广泛的应用，其在数学内部的应用主要体现在几何证明上，现实生活中则广泛应用于建筑、测量、设计等领域。在已有的等腰三角形的性质教学课例中，第一方面应用意识得到了较高的重视，但另一方面从现实问题出发的应用意识则往往被忽略。

历史上的教科书作为历史素材的一种，其中蕴含了丰富的教学素材。由此，本文围绕等腰三角形性质，对 1800-1939 年间出版的 93 种美英早期平面几何教科书进行考察，试图回答以下问题：关于等腰三角形的性质，美英早期几何教科书中有哪些数学与生活上的应用？练习与应用呈现怎样的趋势？对当今课堂教学与教材编写有何启示？

2 早期教科书

本文从有关数据库中选取 1800-1939 年间出版的 93 种美英早期平面几何教科书作为研究对象，其中 75 种出版于美国，18 种出版于英国。以 20 年为一个时间段，各教科书的出版时间见图 1。对于同一作者再版的书籍，若相关内容无明显差异，视为同一种，并选择最早出版的版本。

早期教科书中的等腰三角形知识不胜枚举，本文拟从等腰三角形性质的应用角度进行深入考察，对早期教科书中的典型应用进行介绍。

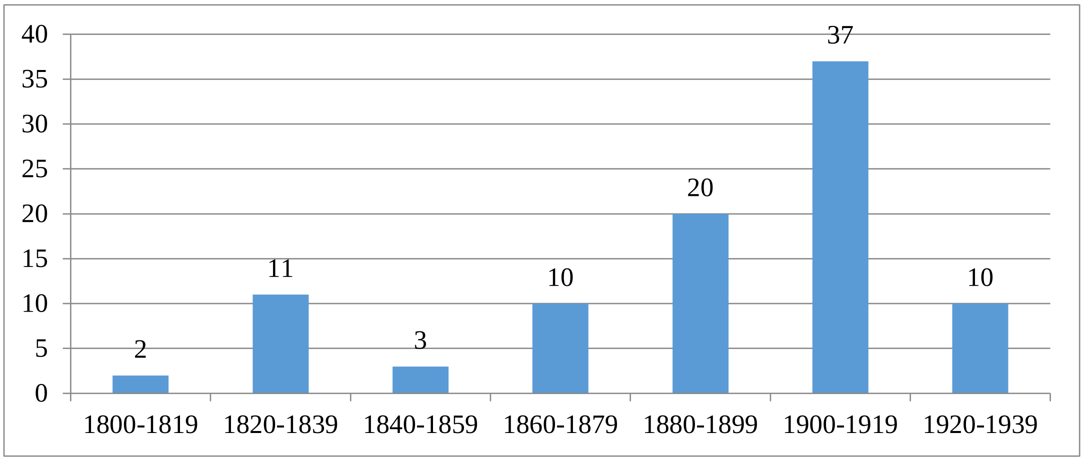


图 1 93 种美英早期平面几何教科书出版的时间分布

3 等腰三角形性质的应用

3.1 数学上的应用

“等边对等角”与“三线合一”能够将三角形的边、角关系进行转换，其广泛应用于线段相等、角相等的几何证明过程中。因此，等腰三角形的性质在早期教科书中的数学应用主要为几何证明。

3.1.1 证明 SSS 定理

我国现行初中数学教材对于 SSS 并未进行说理，直接以一个公理的形式呈现，要求学生会用 SSS 定理证明三角形全等。事实上，SSS 定理的证明需要用到“等边对等角”的性质，而我国数学教科书均将等腰三角形性质的有关内容安排在全等三角形判定定理之后的章节中。正因如此，不少学者质疑采用 SSS 定理证明“等边对等角”的方法有循环论证之嫌。下面对美英早期几何教科书中对 SSS 的说理过程进行介绍。

例 1 在ΔABC和ΔDEF中，$AB=DE$，$AC=DF$，$BC=EF$，求证$\Delta ABC\cong\Delta DEF$。[4]

证明：如图 2，将ΔDEF放在ΔAHC上,使 DF 与 AC 重合，且顶点 E 落在上 H，并连结

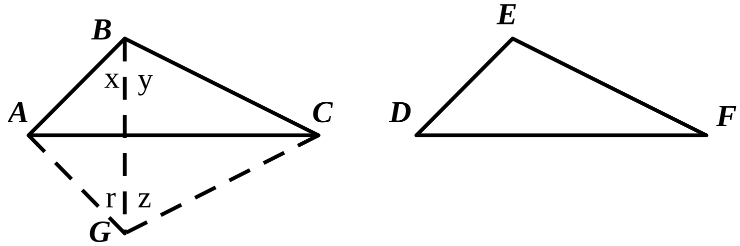


图 2　用“等边对等角”证明 SSS 的一种方法

AH。已知Δ*ABH* 和Δ*BCH* 都是等腰三角形，所以∠*x*=∠*r*，∠*y*=∠*z*（等边对等角），于是∠*x*+∠*y*=∠*r* +∠*z*，即∠*ABC*=∠*AHC*，所以有Δ*ABC*≌Δ*AHC*(SAS)，则Δ*ABC*≌Δ*DEF*。

3.1.2 角角关系

例 2 如图 3，已知 *AC*=*BC*，*D* 为 *AB* 的中点，且 *AE*=*BF*。求证：∠*DEF*=∠*DFE*。[4]

AC=*BC*，由等腰三角形两底角相等知，∠*A*=∠*B*。*D* 为 *AB* 的中点得 *AD*=*BD*，又 *AE*=*BF*，所以Δ*AED*≌Δ*BFD* (SAS)。故有 *AE*=*BE*，由“等边对等角”得∠*DEF*=∠*DFE*。

例 3 如图 4，*AC*=*BC*，∠*EAB*=∠*DBA*，且 *D* 与 *AC*，*E* 与 *BC* 在同一直线上，试证明：∠*D*=∠*E*。[5]

由“等边对等角”知，∠*CAB*=∠*CBA*。又有∠*EAB*=∠*DBA*，所以∠*CAE*=∠*CBD*。*AC*=*BC*，∠*C* 为公共角，故Δ*CAE*≌Δ*CBD* (ASA)，得∠*D*=∠*E*。

例 4 等腰三角形底角角平分线所构成的角与底角的外角相等。[6]

如图 5，等腰Δ*ABC* 中两底角相等，即∠*CAB*=∠*CBA*，又 *AD* 平分∠*CAB*，*BD* 平分∠*CBA*，则∠*DAB*=∠*ABD*=$\frac{1}{2}$∠*CBA*。故∠*ADB*=180°-(∠*DAB*+∠*DAB*)=180°-∠*CBA*=∠*CBE*。

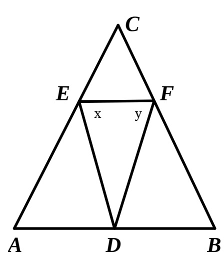


图 3

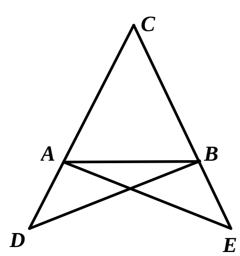


图 4

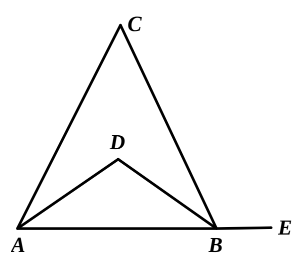


图 5

3.1.3 线线关系

例 5 如图 6，$AC=BC$，且 $AD=BE$，求证：ΔCDE 是一个等腰三角形。[4]

已知 $AC=BC$，由“等边对等角”得，$\angle A=\angle B$。又有 $AD=BE$，则$\Delta ACD\cong\Delta BCE$ (SAS) ，故得 $CD=CE$，ΔCDE 为等腰三角形。

例 6 证明：等腰三角形顶角的外角角平分线平行于底边。[6]

如图 7，由三角形外角的相关知识得，$\angle DCB=\angle CAB+\angle CBA$。$CE$ 平分$\angle DCB$，得$\angle ECB=\frac{1}{2}\angle DCB$。又有等腰三角形两底角相等，即$\angle CAB=\angle CBA$。所以，$\angle ECB=\angle CBA$，$CE\parallel AB$（内错角相等，两直线平行）。

例 7 图 8 展示了一种常见的桁架结构，等腰ΔABC 顶点 C 与底边 AB 中点 D 的连线 CD 为中柱，DE，DF 分别平分两腰 CA, CB。试证明：$DE=DF$，$CD\perp AB$.[7]

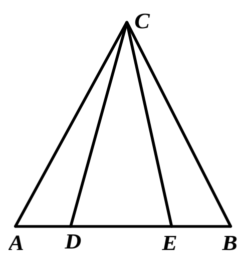


图 6

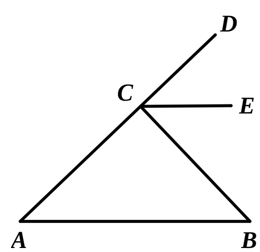


图 7

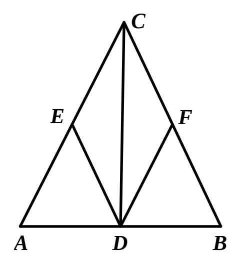


图 8

根据题意知 CD 为底边 AB 的中线，由等腰三角形“三线合一”的性质得 $CD\perp AB$，且 CD 平分$\angle ACB$，即$\angle ECD=\angle FCD$。E，F 分别为 CA，CB 的中点，则 $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=CF$。又有 $CD=CD$，所以$\Delta CED\cong\Delta CFD$(SAS),那么 $DE=DF$。

3.1.4 线角关系

例 8 如图 9，ΔCAB 和ΔDAB 为底边相同的两个等腰三角形，试证明 CD 平分$\angle ACB$。[4]

已知 $CA=CB$， $DA=DB$，且由等腰三角形两底角相等得$\angle CAB=\angle CBA$，$\angle DAB=\angle DBA$,根据“等量减等量，差相等”知$\angle CAD=\angle CBD$。所以$\Delta CAD\cong\Delta CBD$ (SAS)，则$\angle DCA=\angle DCB$，即 CD 为$\angle ACB$ 的角平分线。

例 9 如图 10，ΔCAB 和ΔDAB 为底边相同的两个等腰三角形，且分布在底边的两侧。试证明 CD 平分$\angle ACB$ 和$\angle ADB$。[4]

为同一种类型的题目，均考察同底的等腰三角形中的边角关系，只是例 8 中两等腰三角形处于同侧，而例 9 中处于异侧。同样地，由“等边对等角”知$\angle CAB=\angle CBA$，$\angle DAB=\angle DBA$, 那么$\angle CAD=\angle CBD$。所以$\Delta CAD\cong\Delta CBD$ (SAS)，则$\angle DCA=\angle DCB$，$\angle ADC=B\angle DC$，即 CD 为$\angle ACB$ 和$\angle ADB$ 的角平分线。[8]

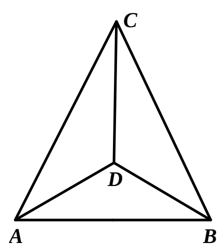


图 9

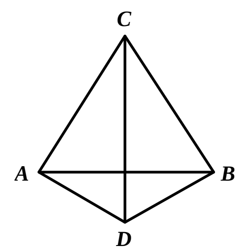


图 10

3.2 生活中的应用

等腰三角形是轴对称图形，具有对称美，同时也具备三角形的稳定性，是设计、工程、建筑等领域的常用结构。如屋顶、桥梁、衣架、马扎、三脚架等，只要留心观察，在我们的生活中随处可见等腰三角形的影子。

3.2.1 铅锤水准仪

等腰三角形“三线合一”的性质在生活中有一个典型应用，即铅锤水准仪。铅锤水准仪拥有悠久的历史，早在古埃及、古巴比伦时期，古人就巧妙的使用“三线合一”的性质制作了铅锤水准仪来判定水平。[9]

例 10 如图 11，铅锤水准仪由等腰三角形框架和一根悬挂在顶点的铅垂线构成，其中 AC 与 BC 是相等的边。标记出底边 AB 的中点 M，将垂线悬挂在顶点 A 处。使用这个仪器时，调整底边的位置。若铅垂线刚好经过中点 M，说明底边是水平的。[6]

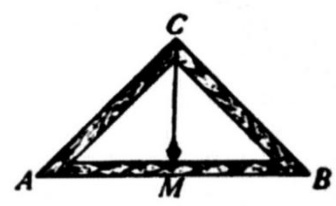


图 11 铅锤水准仪

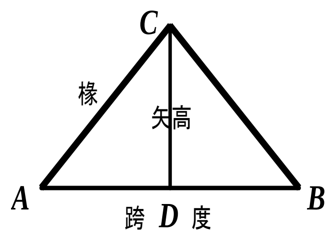


图 12 半斜屋顶

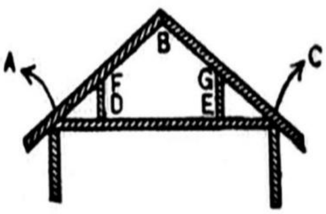


图 13

3.2.2 关于屋顶的应用

例 11 图 12 中展示的屋顶被称为“半斜屋顶”，其矢高等于跨度的一半。问：屋顶椽子与水平线成多少度?[4]

易知 $AD=DC=BD$，$\angle ADC=\angle BDC=90°$，则“半斜屋顶”可以看作由两个等腰直角三角形组成，屋顶椽子与水平线成 45°。

例 12 如图 13，AB 与 BC 是屋顶上两根相等的椽子，立柱 FD 和 GE 分别垂直横梁 AC 于点 D 和 E，且 $AD=CE$，求证：$FD=GE$。[10]

已知 $AB=BC$，则根据“等边对等角”得$\angle BAC=\angle BCA$。由 $FD\perp AC$，$GE\perp AC$ 得$\angle FDA=\angle GEC=90°$。又 $AD=CE$，则$\Delta FDA\cong\Delta GEC$ (ASA)，得 $FD=GE$。

3.2.3 关于测量的应用

例 13 一个人沿着 BC 方向，经过了一个物体 A。他注意到他的航线与该物体的方向成 45°角，BC 与 AC 成直角，且他在两个观测点之间走过的距离 BC 已知，求距离 AC。[11]

如图 14，易知$\angle ABC=\angle ACB=45°$，$\Delta ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $BC=AC$。

例 14 通过构造等边三角形，可以很容易地测量距离。如图 15，为了测量 P_1C，站在 P_1C 方向上的一个较为方便的点 A。构造方向 AB 使 AB 与 AC 成 60°，再沿着方向 AB 走到点 B_1 使 B_1C 与 B_1A 成 60°。易知ΔAB_1C 为等边三角形，则 $AB_1=AC$。因为 AP_1 可以测量得到，所以得到 P_1C 的距离。[11]

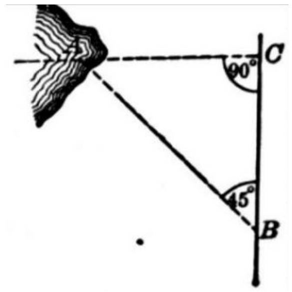


图 14

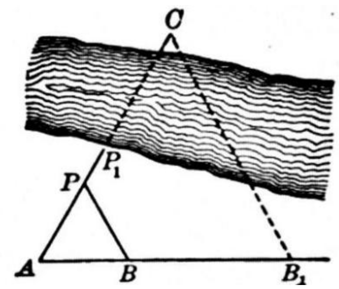


图 15

3.2.4 其他应用

例 15 如图 16，现有一楼梯每层楼高 18 英尺，问：铺满一层楼梯需要多少码的地毯？[4]

这个楼梯可以抽象、简化为一个等腰直角三角形，所以一层楼梯的水平距离等于楼梯的高。每一节小台阶宽度的总和即为楼梯的宽度，小台阶的高度总和即为楼梯的高度。所以，铺满这个楼梯共需 18*2 英尺＝12 码的地毯。

例 16 简化的风筝模型如图 17 所示，*AB* =*AC*，*CD*=*BD*，求证：∠*C*=∠*B*。[6]

连接 *BC*，易证∠*ACB*=∠*ABC*，∠*DCB*=∠*DBC*，则∠ACD=∠*ABD*。

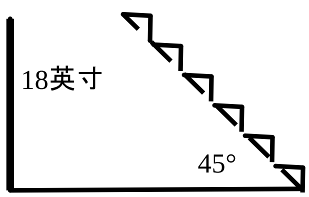


图 16 楼梯的简化模型

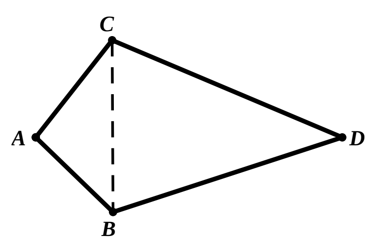


图 17 风筝的简化模型

4 等腰三角形应用的时间分布

经过统计和分析，本文将 93 种早期教科书中“等腰三角形性质”应用的情况大致分为“未设计有关应用”、“仅含数学上的应用”及“含数学与生活上的应用”3 类。以 20 年为一个时间段，其分布情况见图 18。

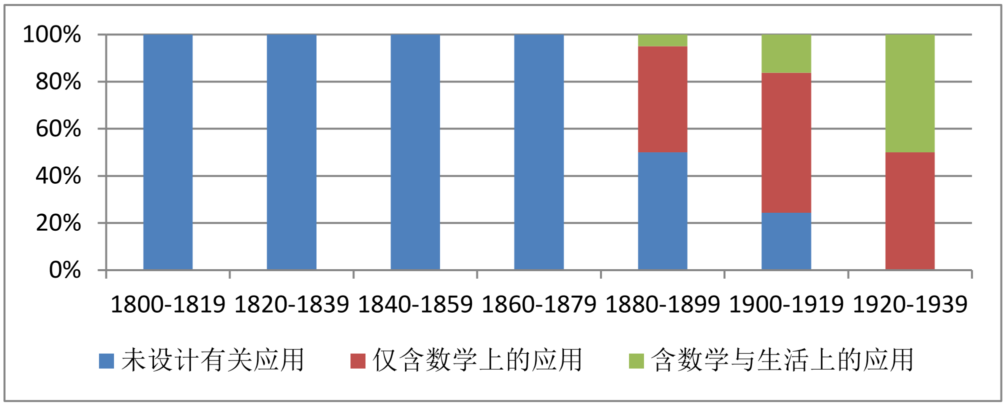


图 18 教科书中等腰三角形性质的应用情况

从图 18 可见，早期的几何教科书深受《几何原本》的影响，19 世纪的几何教科书几乎未涉及任何“等腰三角形性质”的应用，教科书大多仅对等腰三角形的性质进行严格的演绎证明。从 19 世纪 80 年代开始，数学知识的应用意识普遍得到提升，越来越多的教科书设计在定理后设计了相关的应用来巩固知识，并且应用与生活相结合的程度逐渐升高。到了 20 世纪 20 年代，全部的教科书都设计了练习与应用，并且已有一半的教科书介绍了等腰三角形在现实中的应用。

以上几何教科书中应用情况的转变与数学教育史上的两大事件有关。

一是 20 世纪初爆发的“培利—克莱因”运动。1901 年，因不满当时英国的数学教育现状，数学家培利（J. Perry, 1850-1920）在英国数学促进会上率先呼吁人们进行数学教育改革，要求数学教育从《几何原本》的束缚中解放出来，更多地利用几何直观，重视实验几何，强调数学的实际应用。培利的主张不仅得到了英国社会的广泛支持，而且对世界各国的数学教育改革都起到了积极作用。如，美国数学家摩尔（E. H. Moore, 1862-1932）就是培利观点的忠实拥护者，他强调在教学中要关注数学与科学的联系，重视数学的应用，提倡实验教学。1904 年，数学家 F・克莱因（F. Klein, 1849-1925）起草了《数学教学要目》，并于次年在意大利的米兰会议上正式公布。他指出，不得过分强调形式训练，也应重视数学知识的实用方面，以展示学生对自然界和社会中的问题进行数学观察的能力。[12]1908 年，克莱因在其出版的《高观点下的初等数学》书中再次强调数学的实际应用。

二是美国几何课程改革。自“培利—克莱因运动”后，如何权衡数学的“逻辑思维训练”和“实用价值”之间的关系，就成了摆在数学教育家们面前的难题。1908-1909 年，美国数学与科学教师联盟设立了“十五人委员会”，致力于几何课程大纲的修订，以期达到“形式主义”

与“实用主义”之间的平衡，为几何教科书的编写指明方向。在十五人的最终报告中，分章节对几何的历史、逻辑体系、教科书中的练习、课程标准等进行了探讨。关于练习的分布、难度，委员会建议在学习每个定理后都能得到及时的练习和应用，要求题目难度适中但数量与相比之前要有所增加。此外，委员会还就问题的来源进行了介绍，指出在建筑、装饰和设计等领域，物理、机械等科学中都有丰富的实际应用可以借鉴。[13]

19 世纪的教科书注重几何逻辑体系的建立，书中的命题基本都进行了严格的证明，却很少涉及命题的应用，直到 19 世纪末各教科书中才零星出现“等腰三角形性质”的应用。正是在“培利—克莱因”运动和美国几何课程改革的共同作用下，20 世纪的数学教育开始走向实用，教科书中的练习题也逐渐丰富了起来。20 世纪后出版的美英几何教科书大部分都包含了“等腰三角形性质”的相关练习及应用，并且用与社会生活的联系愈趋紧密。

5 若干启示

本节内容在数学上的应用比较灵活，涉及线、角关系的证明等；生活上的应用主要体现在铅锤水准仪、屋顶的常见等腰三角形结构中。但本文发现在给出“等腰三角形性质”相应应用的早期教科书中，无一不是将应用放在性质之后作为知识的巩固。荷兰著名数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）就曾说过：“如果传统的数学教育也涉及到数学的应用，那它根据的模式却经常与教学法颠倒。不是从具体问题出发，再用数学方法研究，而是先学数学，再将具体问题作为它的应用。”[14]

那么，今日的教学如何培养学生的应用意识呢？早期教科书给我们提供了如下启示：

其一，在引入“等腰三角形性质”时，可以向学生介绍铅锤水准仪及其在历史上的应用。这样既能使学生产生“为什么铅锤水准仪能判定水平”的疑问，让学生带着问题进入学习提高学习积极性，学会从实际问题出发用数学方法解决问题。同时，又能使感受到等腰三角形的悠久历史，增加数学课堂的人文情怀。时间允许的前提下，教师还可以安排学生分小组制作简易水准仪，让学生亲自动手操作、探究。

其二，“等腰三角形性质”的应用部分是对全等三角形、平行线、轴对称变换等知识的综合练习。因此，在该部分的教学过程中，教师应该有意识地对相关知识进行复习，帮助学生构建和谐的平面几何知识体系。

其三，在教材编写时，适当提高练习中实际应用的比例。等腰三角形在生活中的应用素材相对丰富，它在建筑、工程、设计等领域发挥着不可替代的作用。因此，“等腰三角形性质”一节是培养应用意识的良好载体。例如半斜屋顶这种现实中实实在在的模型，能让学生感受到数学与生活的普遍联系，从而获得良好的数学体验。当然，也可以布置开放性的作业，让学生自己留意身边的应用并尝试用数学的知识进行解释，进一步发展学生的应用意识。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2011.

[2] 乌日力格. 课例:三角形家族的壮大——等腰三角形(第 1 课时)[J].中学数学教学参考, 2021(05): 20-22.

[3] 滕媛媛. “等腰三角形”教学设计[J]. 中国数学教育, 2020(09): 25-28.

[4] Palmer, C. I., Myers, G. W., Taylor, D. P. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Scott, Foresman, 1915: 40-47.

[5] Schultze, A., Sevenoak, F. L. *Plane Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913:30.

[6] Stone, J. C., Millis, J. F. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Sanborn, 1925: 56-58.

[7] Sykes, M., Comstock, C. E. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Rand McNally & Company., 1918: 42.

[8] Baker, A. *Elementary Plane Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1903: 29.

[9] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019.

[10] Wells, W., Hart, W. W. *Plane Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1916:37-38.

[11] Auerbach, M., Walsh, C. B. *Plane Geometry*[M]. Philadelphia: J. B. Lippincott, 1920: 66-67.

[12] 赵雄辉. 数学教育改革的三次国际性浪潮及其启示[J]. 中学数学教学参考, 1996(Z2):16-18.

[13] National Education Association. Final Report of the National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus[J]. *Mathematics Teacher,*1912, 5(2): 46-160.

[14] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平, 唐瑞芳译. 上海: 上海教版社, 1995

教学实践

HPM 视角下的“长方体直观图画法”教学

李德虎

（上海市新杨中学，上海，200331）

1 引言

“长方体直观图的画法”是沪教版初中六年级数学教科书第八章“长方体的再认识”第 2 节的内容，学生在小学阶段已经认识了长方体，会根据公式计算长方体、正方体的表面积和体积，对长方体的直观图也有初步的认识。《上海市中小学数学课程标准（试行稿）》指出：熟悉长方体直观图的某一种常用图形，会画长方体的直观图（采用“斜二测”画法）[1]。本节课的学习，是立体几何的启蒙课，为学生后续学习长方体中棱与棱、棱与面和面与面的关系乃至高中立体几何打下基础。

现行的初中数学各版教材中，只有沪教版中有“长方体直观图的画法”，其他教材都没有这个内容。与之对应的是北师大版教材与人教版教材三视图的部分，均放在九年级相似三角形之后的章节，并且这一章节的内容均为投影与视图，三视图之前介绍了中心投影与平行投影的概念，并利用已经学习的相似图形知识对平行投影中的简单问题进行了计算；三视图这一节则讲述了三视图的概念、识别三视图与三视图的画法。

研究发现，本节课教师通常直接告知学生长方体直观图中水平的面画成一个夹角为 45° 的平行四边形；教师注重带领学生一起按步骤用“斜二测”画法法画长方体；而对于水平的面为什么画成一个夹角为 45° 的平行四边形，以及宽为什么取实际长度一半，均不作说明[2]。这样教学，学生难免会对“斜二测”画法的规定产生疑问。鉴于此，我们希望从 HPM 的视角，重新设计“长方体直观图的画法”教学内容，并付诸实施，拟定的教学目标如下：

（1）通过观察，感悟平面的形象，掌握平面的画法及表示法；

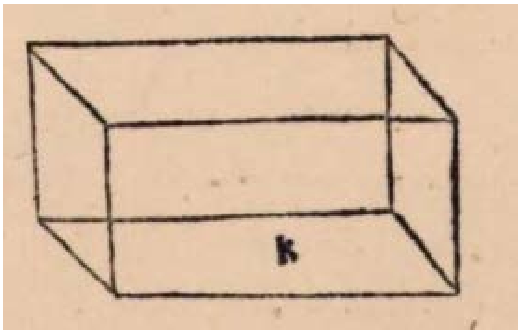
（2）会用“斜二测”画法画长方体，掌握长方体表示法；

（3）借助数学史创造情景，培养学生交流合作的能力；让学生认识到“斜二测”画法的合

理性，培养初步的空间观念和空间想象能力.

2 数学史料及其运用

根据华东师范大学汪晓勤教授整理的《西方几何书籍中立体直观图的演进》一文，在 16 世纪的几何书籍中，已经普遍使用平行四边形来表示长方体的六个面，在 1509 年出版的《欧几里得集》中[3]，长方体直观图的画法如图 1 所示。



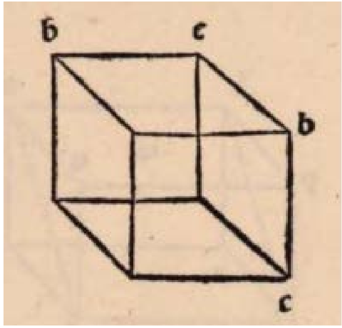
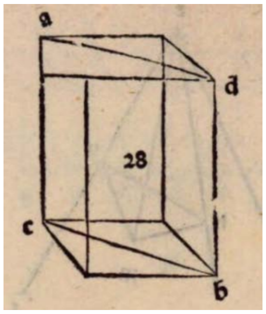


图 1 《欧几里得集》中长方体直观图 图 2 《欧几里得集》（1509）中正方体直观图

可见当时人们已经采用斜投影画法画长方体直观图，其中平行四边形的一个夹角近似取 45°，但是宽没有取实际长度的一半。特别在正方体直观图中，把长和宽取相等形成四个面为菱形，如图 2 所示。书中还出现了一些错误的长方体直观图，如图 3 所示。



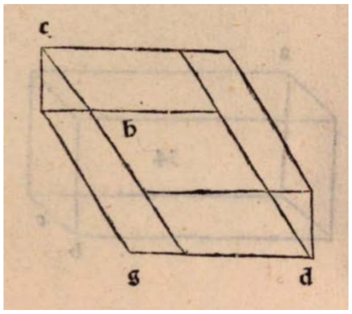
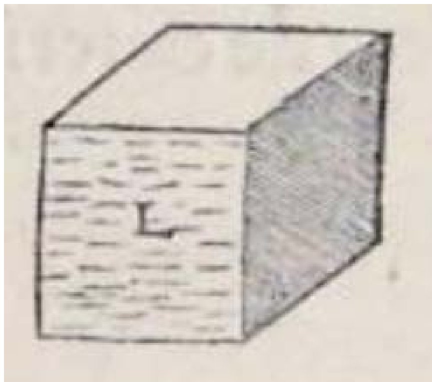


图 3 《欧几里得集》（1509）中的错误直观图

1532 年，法国数学家费奈乌斯（O.Finaeus，1494—1555）出版的《数学之源》中[4]，长方体的画法与《欧几里得集》类似，将正方体的上、下、左、右四个面画出菱形，如图 4 所示。

1564 年，意大利数学家巴托利（C.Bartoli，1503-1572）出版的《测量之术》中[5]，正方体的直观图保持长、宽和高一样的长度，看起来像一般的长方体，如图 5 所示。



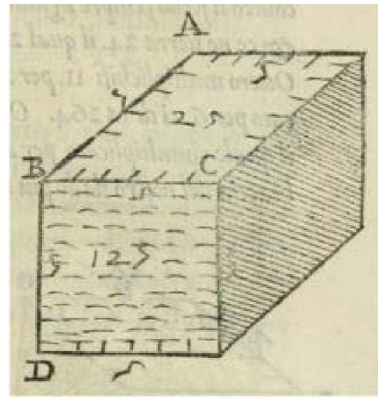
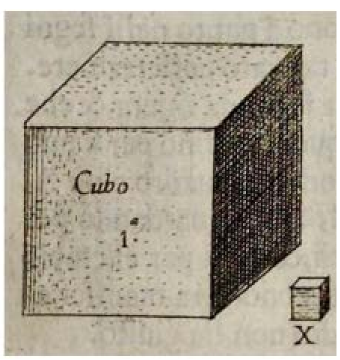


图 4 《数学之源》（1532）中正方体直观图 图 5 《测量之术》（1564）中正方体的直观图

直到 17 世纪，长方体的画法有了明显的改进，如 1624 年，意大利数学家博莫多罗（Pomodoro）在《实用几何》中画的正方体直观图就不在保持长和宽相同[6]，但是图中的宽并没有取一半，而是实际长度的 $\frac{2}{3}$，上面的面还是保持菱形，如图 6 所示。

到 19 世纪末，长方体直观图的画法有了明显的改进，例如 1899 年，米尔恩（W.J.Milne）在《平面与立体几何》中[7]，把正方体看不见的三个棱用虚线来表示，宽取一半，夹角接近 45°，如图 7 所示。



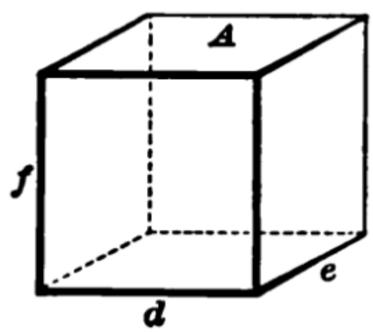


图 6《实用几何》（1624）中正方体直观图 图 7《平面与立体几何》（1899）中正方体直观图

通过史料我们发现，在接近 400 年的时间里，数学的教科书中基本采用斜投影的轴测图来画长方体，但是表示面的平行四边形的一个夹角不固定，基本在 30° 到 60° 的范围内。宽取实际长度的 $\frac{1}{3}$ 到和实际长度相等的范围，看不见的棱开始用虚线表示。

直到 1916 年，美国数学家贝茨（W. Betz）和韦布（H. E. Webb）在出版的《立体几何》中[8]，给出了斜二轴测投影（简称“斜二测”画法）的作图法，作者称这种投影是一种“令人满意的投影方式”，如图 8 所示。

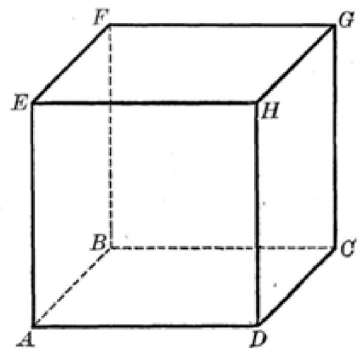


图 8《立体几何》（1916）中正方体直观图

历史告诉我们，长方形直观图的“斜二测”画法经历了很长探索过程，其实是一种规则的制定，是数学家在讨论中“约定俗成”的。教师可以采用探究式教学方法，让学生在讨论中形成画法规则，重现“斜二测”画法规则制定过程，揭示学生画法的历史相似性。

3 教学设计与实施

根据史料，本节课教学设计运用项目化学习的理念，分为选美大赛、古书修订、厚积薄发、建章立制、牛刀小试和画龙点睛六个部分。以四本古书修订为驱动性问题，引导学生小组探究，讨论制定长方体直观图的画法规则，形成核心知识“斜二测”画法。

课前，教师要求每位同学画边长是 3cm 的正方体。教师对每位学生的画法进行分析，发现大部分同学都是采用斜投影画法，并得到相应的数据（参加图 15-16）。

课上，教师首先播放 HPM 微视频，介绍人类对长方体画法的探索，包含中国古画（宋徽宗文会图）中桌子的画法、达芬奇绘画作品中透视画法，以及本节课介绍的画法为长方体直观图画法的一种，如图 9 所示，从而引入本节课课题。

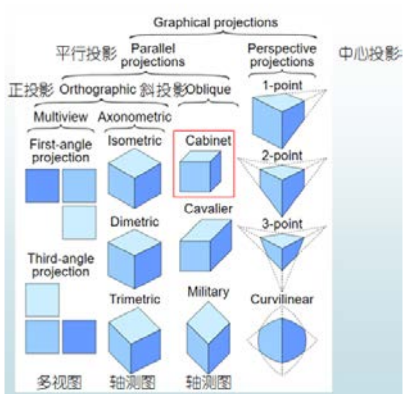


图 9 长方体不同投影画法示意图

3.1 选美大赛

师：课前每位同学都画了一个边长是 3cm 的正方体，请每个小组先组内选出认为最美的，再通过希沃投屏展示在教室的五个屏幕上。

生：小组讨论出最美的一幅，并分别投屏在教室四周的五个屏幕上，如图 10 所示。

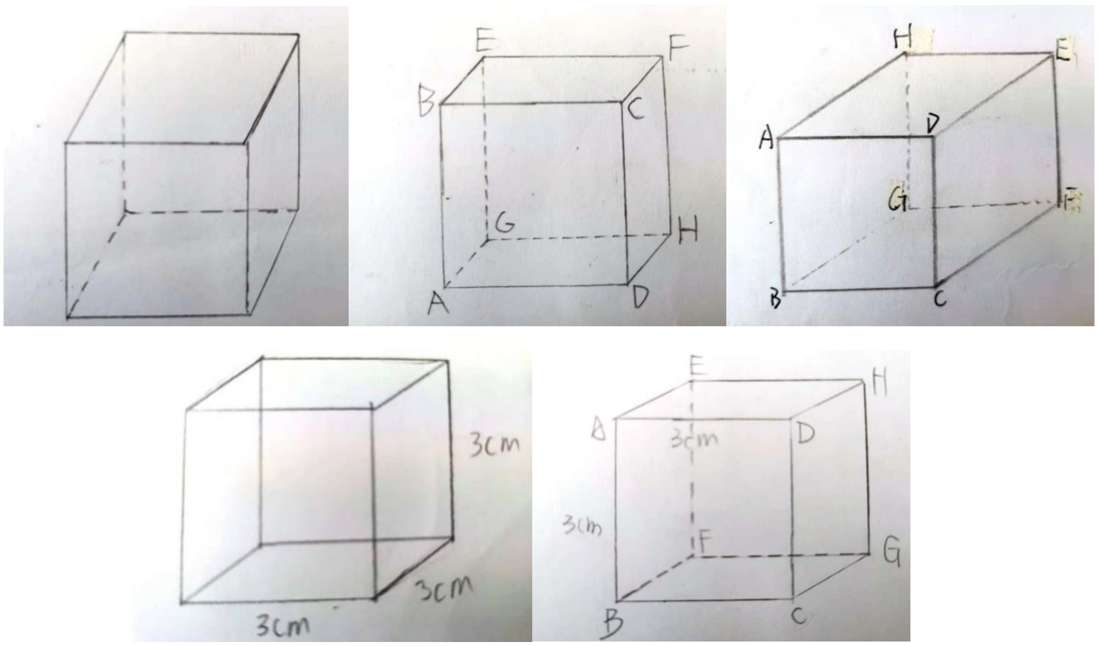


图 10　课堂五个小组选出的五副”最美”正方体

师：下面大家一起选一选哪一副最美？

生：产生不同的看法。

师：为什么大家形成不了统一的意见

生：没有评价的标准。

师：很好，这节课我们一起来制定这个“选美”标准？

设计意图：通过选美大赛，让学生明白制定长方体直观图画法的必要性，为后面探究长方体“斜二测”画法的三个规定做铺垫。此外，部分学生和历史上教科书的画法也相似（例如图 10 第三幅图），揭示出长方体直观图的画法历史相似性。

3.2 古书修订

接着，教师 PPT 展示四本古书，如图 11 所示，让学生对照自己画的正方体，有没有和古代数学家画的相似的，同学们纷纷表达自己和其中一幅图画的一样。

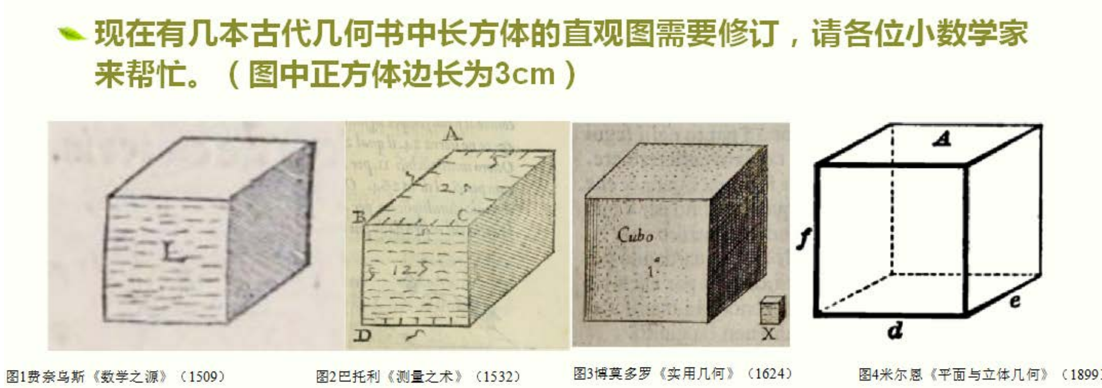


图 11　古书修订情境

教师设置情景：四本古书画的都是边长为 3cm 的正方体，但各不相同，请各位小数学家们帮忙修订这 4 本古书，便于后人的阅读。

设计意图：教师事先对史料进行整理，发现很多书籍中都涉及正方体的画法且又不尽相同；所以截图保存并缩放图像，保持每个正方体的长均为 3cm，高也为 3cm 制成学习单（学生课前画的正方体的直观图长和高均为 3cm）。借助历史相似性原则和项目化学习的理念，让学生化身为修订古书的数学家，在修订古书的情境中展开探究式学习。

3.3 厚积薄发

本部分主要学习平面的概念和表示法，以及长方体直观图的概念，为后续的探究做好准备。

师：长方体有六个面，我们要研究长方体的直观图，首先来看看怎么画平面。生活中有那些实例给我们以平面的形象？

生：地面、黑板、桌面、平静的湖面和黑板。

师：结合图 12 介绍古代数学家对平面的“定义”。

图 12 古代数学家对平面的“定义”

师：数学中，平面是平的，无边无沿，我们可以用一个平行四边形来表示它。

特别地，把水平放置的平面画成一边是水平位置，另一边与水平线所成的角为 45° 的平行

四边形。如图 13 所示，表示为平面 ABCD 或平面 α。

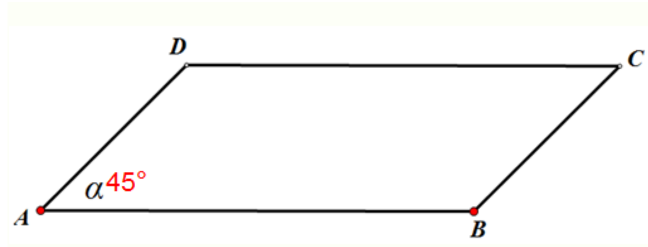


图 13 平面的表示法

师：我们把空间图形画在平面内，使得既富有立体感，又能表达出图形主要部分的位置关系和度量关系的图形叫直观图。

师：结合图 14，同学们想一想画长方体直观图的关键是什么？

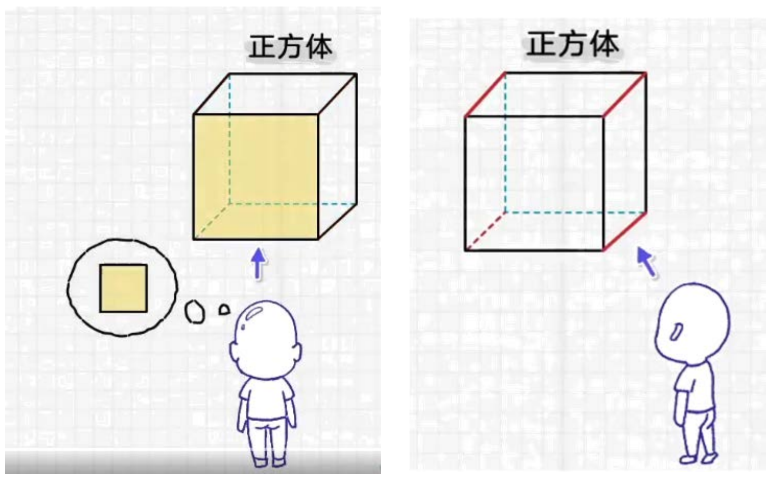


图 14 长方体直观图的观测角度

生 1：斜着画。

生 2：调整长度。

设计意图：借助历史上几位数学家对“平面”的定义，引出平面画法及表示法；补充直观图的概念，让学生思考长方体直观图的两个关键因素，为后面画法规则制定提供依据。

3.4 建章立制

师：出示图 11，要求学生借助直三角尺和量角器对四副图进行测量后思考：（立体感、位置关系和度量关系）

1、正方体的边长（长、宽、高）画为多少？

2、平行四边形中的锐角取多少度？

3、看不见的棱如何画？

生：测量导学案上四本古书中正方体直观图的长、宽、高和平行四边形一个夹角。小组讨

论教师提出的三个问题，每组形成一份结果。借助希沃投屏到教室四周的五个屏幕上。

师：归纳学生们的讨论结果，对于看不见的棱大家意见比较统一，用虚线表示。关于平行四边形中的锐角取多少度，同学们也赞同取 45° 比较方便。关于长和高大家也都是觉得要取 3cm，课前的直观图大家也都是保持原来的长度。关于宽取多少，主要有两种意见，一部分同学取实际宽的一半为 1.5cm，另一部分同学取 2cm。

师：那么大家想一想，如果老师给的正方体边长是 2.6cm，同学们觉得宽取多少合适？

生：取一半，1.3cm 比较好画。

师：请同学再看一下课前你们画的边长 3cm 正方体的统计图（如图 15-16 所示）。

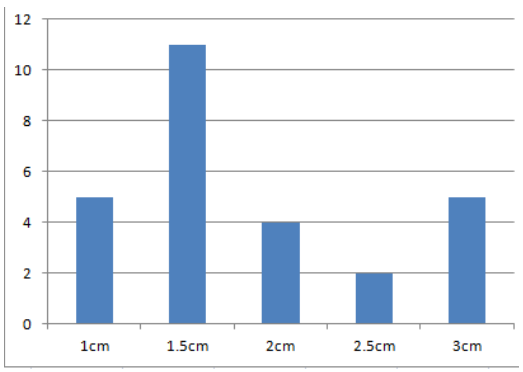


图 15 直观图中宽的取值情况

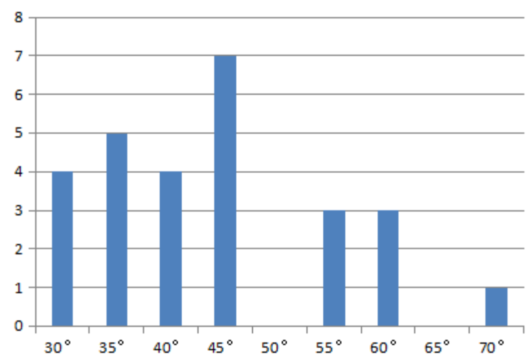


图 16 直观图中平行四边形的一个夹角

师生一起归纳画长方体直观图的规则：

1、长方体直观图中，长和高不变，宽取实际长度的一半；

2、平行四边形中的锐角取 45 度；

3、看不见的棱用虚线表示。

师：这种画长方体直观图的画法我们成为“斜二测”画法。（PPT 展示宋徽宗的《文会图》和《立体几何》（1916）中的正方体），在中国古代，画家们通过实践发现上述规则兼顾立体感和位置关系，是一种无意识的几何实践；数学家贝茨和韦布综合前人的画法称“斜二测”画法为“令人满意的投影方式”。

师：请同学们课后根据我们制定的“斜二测”画法，把每组选出的五副正方体直观图中选出最美的一幅，并在导学单上完成对四本古书的修订。

3.5 牛刀小试

通过练习巩固新知，学生掌握本节课的重点长方体直观图的画法。

师生共同完成：画长 4cm、宽 3cm、高 2cm 的长方体 ABCD—EFGH 直观图（教师演示，

学生跟画）。

课堂练习：指出《欧几里得集》中的长方体的问题（参见图 3）。

3.6 画龙点睛

师：通过本节课的学习，大家有什么收获？

生 1：我掌握了平面的画法和表示法。

生 2：画长方体直观图的时候，宽取实际长度的一半，平行四边形中的锐角取 45 度；

生 3：画长方体直观图看不见的棱用虚线表示。。

生 4："斜二测"画法的规定是讨论制定的，既体现了图形的立体感，又保持了位置关系和度量关系。

师：同学们说的很好，老师这里给出一个关键字"序"，同学们有什么感悟？

生 5：平面的表示字母要按照顺时针或者逆时针顺序；

生 6：用"斜二测"画法画长方体要注意画图的顺序；

师：对，现实的世界本来是混沌无序的，数学的学习就是帮助我们在无序的世界发现规律，建立规则或标准，这样我们的世界就更加和谐。

通过小结，点明了本节课的核心内容"序"的建立。这个"序"，既包括平面和长方体表示法中字母之序、"斜二测"画法之序；也包括长方体直观图画法的形成之序。让学生体会借助数学知识，建立现实之"序"的意义。

4 学生反馈

基于本节课，笔者对班级学生进行了前、后测。在前测中，笔者通过问卷调查了解到：96.4%的学生采用斜投影的轴测图来画边长是 3cm 的正方体，3.6%的同学采用透视画法；全部同学长和高都取 3cm，宽的取值和平行四边形的夹角参见图 15-16。42.9%的同学没有画遮挡的三条棱，17.9%同学用实线来画遮挡的三条棱，35.7%的同学用虚线来画遮挡的三条棱。可见，学生初步了解长方体的轴测图画法，但对于宽的取值、平行四边形的夹角和如何处理遮挡的三条棱没有形成统一的意见。

在后测中，笔者对全班 28 名学生进行问卷调查，旨在了解学生对本节课教学的感想与建议。在问卷调查中，100%的学生正确的采用"斜二测"画法画出边长是 3cm 的正方体直观图，完成"古书修订"任务；

关于这节课与平时课堂教学感受最大不同的问题，学生问答统计如图 17 所示。

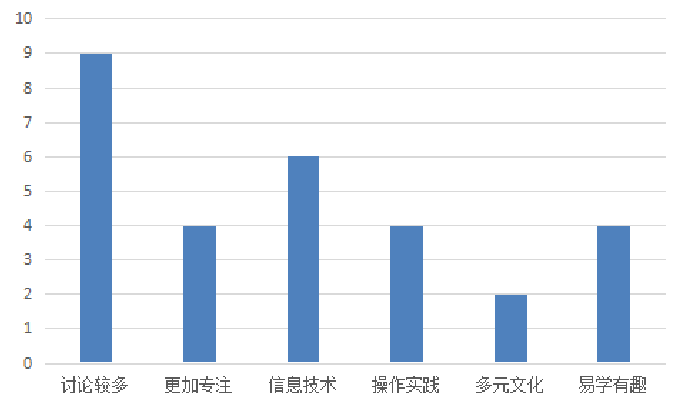


图 17 后测问卷学生对本节课与平时教学的不同感受

通过调查发现，数学史融入数学教学开展探究式教学，课堂谈论更加充分（课堂中关于长方体直观图画法规则的制定讨论时间为 7 分钟）；信息技术的使用为数学史融入数学教学提供了便利，学生学习的兴趣得以提升，课堂学习也更加专注。

关于数学史（古书修订）有没有帮助你理解“斜二测”画法合理性的问题，96.4%的学生给出肯定回答，学生认为：“这些图也体现了我们自己作图的问题”、“我们只有不断和古时对比，才能研究出斜二测画法”、“通过古人不同的画法拟定一个方便的值”、“通过与古书对比，我发现斜二测画法更容易画和美观”和“古书中的画法为斜二测画法奠定了基础，斜二测画法汲取了古书中画法的优点”等。

如果有其它班同学问你，长方体“斜二测”画法中，为什么宽要取一半、平行四边形一个夹角为什么画 45 度？学生的回答如图 18 所示。

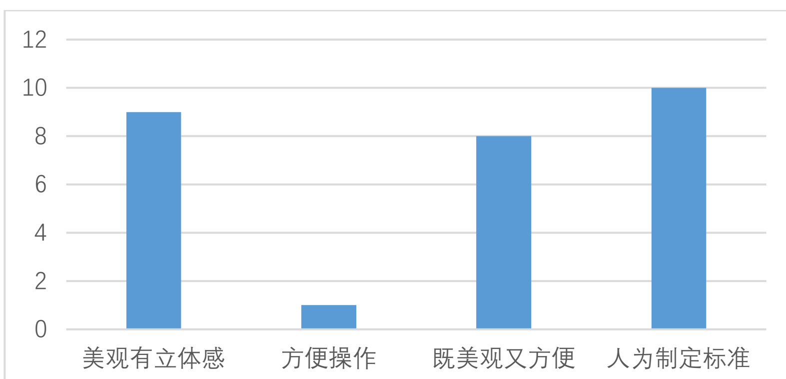


图 18 后测问卷学生对“斜二测”画法中规定的认识

通过问卷发现，学生体会到“斜二测”画法符合长方体直观图的定义，是一种既美观又简便的画法，35.7%的同学认识到这是一种人为的规定，从而揭示出“斜二测”画法的本质：一种人为规定的既美观又简便的长方体直观图的画法。

5 讨论

从教师教的角度，本节课构建了三个层次："就题论题"、"就题论法"和"就题论道"。在"就题论题"的层面，本节课的核心是学会用"斜二测"画法画长方体的直观图，教学中，教师通过板演，按照四个步骤带领学生一起画，通过课后的反馈，100%的学生掌握了这种画法。在"就题论法"的层面，本节课借助项目化学习和数学史料构建情境，借助历史相似性原则，让学生一起讨论制定长方体直观图画法的规则，真实还原"斜二测"画法诞生的过程。在"就题论道"的层面，教师课前设计"选美大赛"和"古书修订"两个环节，引发学生对"选美标准"和"修订规则"的制定，进而形成三条规则，诞生"斜二测"画法，在最后的小结中，用一个"序"字结尾，让学生体会到数学学习让"无序"的世界变得"有序"。

从学生学的角度，本节课践行了数学教育家弗赖登塔尔数学教学原则。课前学生的"数学现实"为会用斜投影法画长方体直观图，但没有形成"斜二测"画法；教师从学生的"数学现实"出发，引导学生"数学化"活动体验[9]，设置"选美大赛"和"修订古书"两个情境；通过合作探究引导学生进行"再创造"，制定长方体直观图的画法三条规则，形成"斜二测"画法；整节课贯穿数学"思想实验"原则，教师大部分问题都是开放性问题，没有固定的答案，启发学生思考，实现数学知识的自我构建。

从数学文化进课堂的角度，基于数学史的数学文化内涵有五个维度框架——知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化[10]。本节课借助六个环节，让学生从内容和形式上体验了"斜二测"画法演进过程，体现了长方体画法的"知识源流"；教师借助"透视画法"不足之处引入，展示无意识几何中《文会图》中接近"斜二测"画法的桌子，都体现了数学与美术的"学科联系"；让学生扮演小数学家进行"古书修订"，推动"斜二测"画法的发现，体现了"社会角色"；通过"选美大赛"的设计、贝茨和韦布"令人满意的投影方式"下正方体直观图的展示，均体现了"审美娱乐"；在探究的过程中，对于宽取实际长度的$\frac{1}{2}$还是$\frac{2}{3}$，学生有两种不同的观点，从严格意义上说，其实这两种取法都是可以的，符合长方体直观图的定义，教学中教师并没有否定学生的观点，而是借助课前取得的数据，让学生自己体会哪一种取法更简便，体现了"多元文化"。

数学史是数学文化的重要组成部分；本节课运用数学史重构式开展教学，学生经历"斜二

测”画法的产生过程，揭示了知识之谐；通过“斜二测”画法下正方体直观图与课前同学自己所画之图对比，呈现了方法之美；借助“古书修订”问题驱动学生开展讨论，营造了探究之乐；以“序”为关键字的课堂小结，实现德育之效。

现行教学中学科联系和审美娱乐、多元文化体现的还不是很明显[10]。本节课尝试运用项目化学习理念，通过驱动性问题引发学生的探究，学生以团队形式自主地设计、展示、讨论和评价。在教学中，教师基于历史相似性原则，提供丰富的数学文化供学生学习，运用项目化学习组织教学，“斜二测”画法规则讨论制定的结果呈现，体现了数学文化的学科联系、审美娱乐和多元文化。项目化学习与 HPM 的融合是一个全新的领域，利于体现数学文化的五大维度，实现数学史的六大价值。

此外，本节课融合 HPM 微视频、希沃投屏等教育信息技术，带动数学史内容的可视化呈现和情景的创设，引发学生的探究，为项目化学习与 HPM 的融合助力。

参考文献

[1] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准（试行稿）[S]. 上海:上海教育出版社,2004.

[2] 王慎洁.以混合式教学落实差异化教学的探索——以“长方体直观图的画法”一课为例[J].现代教学,2021(Z1):146-147.

[3] Euclid. *Euclidis Megarensis* [M]. Venezia: A. Paganius Paganinus, 1509

[4] Finaeus, O. *Protomathesis* [M]. Parisiis: Impensis Gerardi Morrhij & Ioannis Petri, 1532.

[5] Bartoli, C. *Del Modo di Misvrare* [M]. Venetia : Per Francesco Franceschi Sanese, 1564.

[6] Pomodoro, G. *La Geometria Prattica*[M]. Roma: Angelo Ruffinelli, 1624.

[7] Milne, W. J. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1899

[8] Betz, W., Webb, H. E. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1916

[9] 王晓杰. 数学文化教学对小学生数学抽象素养的影响研究[D]. 西南大学.

[10] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019(2): 37-43.

活动讯息

当历史照进现实：二面角的历史探究与课堂实践专题研讨

杨孝曼[1]，雷沛瑶[2]

（1. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2. 华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

数学史与数学教育（HPM）高中网络研修班于 2021 年 6 月 5 日和 6 月 13 日开展了两次线上专题讲座，主题分别为“二面角的历史发展”与“HPM 视角下二面角教学分享研讨会”。本次活动由 2020HPM 高中教师网络研修班主持人雷沛瑶主持，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、HPM 高中网络研修班的专家组指导老师、学员以及华东师范大学 HPM 方向研究生参与了本次活动。

图 1

“二面角的历史发展”专题讲座首先由华东师大硕士韩嘉业进行专题报告。报告分为四个部分，分别是二面角历史发展过程、早期教科书中二面角概念的引入与应用、二面角度量的合理性、二面角的性质。汇报结束后，汪晓勤老师对二面角的历史研究做了简要点评。随后，高中网络研修班的老师们就二面角的历史与教学中的问题进行了交流和讨论。

图 2

“HPM 视角下二面角教学分享研讨会”则邀请了 HPM 工作室中于本学期开展过“HPM 视角下二面角”教学实践的三位成员进行分享，三位老师分别是来自上海市行知中学的高振严老师、上海市风华中学的苏燕老师以及上海市建平中学的李传峰老师。首先，高振严老师基于上课流程图介绍了自己的教学设计与思路，重点关注了二面角定义的必要性、合理性和唯一性的问题，分享利用折纸活动和蛋糕带领学生探究定义合理性和唯一性的经验，至于本节课的“未尽之处”，高老师认为通过类比的方法引入二面角可能更符合知识的逻辑序。苏燕老师则首先介绍了自己的教学理念，接着从教材解读、学情分析、教学目标、教学过程和教学反思五个部分进行了分享，其中，教具的使用是本节课的一大亮点。李传峰老师从对 HPM 模式的认识谈起，随后介绍了“二面角及其平面角”的教学设计与反思。三位老师分享结束后，上海市松江四中的朱亮雅老师分享了听课感受，华师大研究生韩嘉业就如何设计“二面角”教学中的细节问题表达了自己的一些思考，长风区教研员栗小妮博士与大家交流了自己现场听课的体会，专家组指导老师、江苏省宜兴中学的张海强老师对三节课进行了点评。最后，汪晓勤老师从关注 HPM 视角下的教学理念，历史研究和史料选择三个角度对 HPM 视角下的教学提出更高期望。

图 3

通过 HPM 高中教师网络研修班的专题讲座，来自全国各地的教师们积极分享、交流。相信在这个专业共同体里，老师们可以一起学习，共同进步，不断打磨出更多更好的 HPM 课例。