# 上海 HPM 通讯

## SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2019 年第 8 卷第 6 期

1833 年狮子座流星雨“爆发”

（采自基督复临安息日会《圣经解读》，1889 年）

# 《上海 HPM 通讯》编委会名单



（更多讯息，敬请关注“HPMCommunity”公众号）

# 刊首语

2019 年，HPM 专业学习共同体继续在“领悟、勤奋、协作、高效”学训的指导下，如火如荼地开展 HPM 的学术研究与教学实践工作，取得了十分丰硕的成果。

**专业引领初见成效。**2019 年是数学史与数学教育（HPM）工作室创建的第二年。来自小学、初中和高中各学段的三十余名学员在 HPM 工作室中学习与实践 HPM，先后开展了三十余次 HPM 课例研究活动。同时，HPM 工作室学员与 HPM 方向研究生密切合作，在各类期刊上发表了二十余篇 HPM 课例论文。5 月，致力于小学 HPM 研究的岳增成博士与玉溪师范学院文萍老师一起，首次走进云南玉溪开展小学 HPM 课例研究。6 月，HPM 方向研究生与浙江省义乌市王芳高中数学工作室一起开展远程 HPM 学术交流。10 月，齐春燕博士带领四十余名广东省乡村中小学教师来到上海，参加 HPM 视角下的中小学课堂教学观摩活动，并与 HPM 团队进行了广泛而深入的交流。11 月，岳增成和李卓忱再次走进云南玉溪开展 HPM 研修活动。

**学术交流稳步进行。**2019 年 5 月，HPM 研究团队参加在上海交通大学举行的“第十届中国数学会数学史分会学术年会暨第八届数学史与数学教育会议”，本次会议中，汪晓勤教授作了题为“基于数学史的数学学科德育案例分析”的大会报告，十余位博士、硕士研究生以及 HPM 工作室部分成员分别作了分组报告。12 月，“上海数学教育研究与实践高峰论坛暨第七届数学史与数学教育（HPM）高级研修班”将在华东师范大学举行，HPM 研究团队以及 HPM 工作室成员将会在此次会议中展示最新的理论和实践研究成果。

**学术研究再创佳绩。**2019年， HPM研究团队与HPM工作室成员在上海市数学教育教学研究基地研究项目“如何在数学课程中体现立德树人的根本任务”上取得了丰硕的研究成果，团队出版学术专著《数学史与初中数学教学——理论、实践案例》，发表论文四十余篇，其中有3篇被人大复印报刊资料中心转载。

**社会影响持续扩大。**《教育研究与评论（中学教育教学）》、《数学教学》、《中小学课堂教学研究》等刊物的HPM专栏文章受到一线教师的关注和喜爱，产生了广泛的社会影响，有效地促进了HPM教学理念和教学方法的传播。《教学月刊小学版（数学）》发表HPM 专辑，在小学数学教育界产生了一定的影响。

新时代焕发新气象，新气象号召新征程。百舸争流千帆竞，乘风破浪正远航。且让我们怀着始终不渝的理想，携手走进充满机会与挑战的 2020 年！

# 目　录


**刊首语 ........................................................................................沈中宇，姜浩哲 I**

**历史研究**

**16 世纪的测量工具与相似三角形的应用 ......................................................王　娟 1**

**古希腊数学中的平面轨迹问题 ..........................................................张佳淳 13**

**教学实践**

**HPM 视角下的“基本不等式”同课异构课例分析 ................................赵丽红 23**

**HPM 视角下的“点到直线距离”同课异构课例分析 .............................彭思维 35**

**活动讯息**

**别裁历史入课堂，几何复习出新彩 ..........................................................刘思璐 47**

# CONTENT

**FOREWORD**·········································· **Shen Zhongyu, Jiang Haozhe I**

**HISTORICAL STUDY**

**The Mechanical Tools of Measurement and Application of Similar Triangles in the 16th Century** ··························································· **Wang Juan 1**

**The Problems on Loci in Greek Mathematics**······················ **Zhang Jiachun 13**

**TEACHING PRACTICE**

**Teaching of the AM-GM Inequality from the Perspective of HPM**··················· ·······························································**Zhao Lihong 23**

**Teaching of the Formula for the Distance from a Point to a Line from the Perspective of HPM** ··················································· **Peng Siwei 35**

**ACADEMIC INFORMATION**

**Analogical reasoning in geometry teaching of grade 12: Lesson study in Tonghe Senior High School**························································ **Liu Silu 47**

# 历史研究

## 16 世纪的测量工具与相似三角形的应用*

王娟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

## 1 引 言

数学史上，相似三角形很早就被人们所认识。大约公元前 1600 年，古巴比伦人就已经知道“两个相似直角三角形对应边成比例”这一性质，并利用该定理求解几何问题。公元前 6 世纪，古希腊的工程师欧帕里诺斯在设计隧道挖掘工程时就运用了相似三角形的性质[1]；我国汉代数学名著《九章算术》“勾股”章中含有一系列勾股测量问题，均需以相似三角形性质来解决。虽然数学史上关于相似三角形应用的文献浩如烟海，但是中学教师所掌握的可直接用于课堂的材料却极为缺乏。现行教科书在相似三角形的性质和判定定理之后大多涉及定理的应用，人教版、华师大版教科书设计了泰勒斯测量金字塔的例题；北师大版教科书设计了一个活动课题（旗杆或路灯高度的测量），并附加了一则关于刘徽与《海岛算经》的历史小故事；浙教版和沪教版教科书都用树高测量问题来体现相似三角形的应用，但并未运用数学史料。

在已有的关于“相似三角形应用”的教学设计中，个别 HPM 视角下的设计主要运用了古代中国和希腊的数学史素材，并未涉及近代西方数学史文献[2]。大多数教学设计虽然都很重视实际应用，但除了泰勒斯测量金字塔等个别例子，很少涉及数学史 [3-7]。

为此，我们选取 16 世纪欧洲具有代表性的三本关于测量的文献——巴托里（C. Bartoli, 1503-1572）的《测量方法》[8]、贝里（S.Belli, ? -1580）的《测量之书》[9]和费奈乌斯（O. Finaeus, 1494-1555）的《数学入门》[10]进行考察，试图回答以下问题：16 世纪数学家是如何利用有关测量工具进行测量的？测量方法有哪些类型？我们从中能得到什么教学启示？

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究（A8）。

## 2 16 世纪的测量工具

### 2.1 表

表（拉丁文名 baculus，英文名 staff）是西方最古老的一种测量工具，如图 1 和 2，它由一根已知长度的直杆做成，利用日光投影这一自然现象，构造两个相似直角三角形，进而确定所测物体的高度。

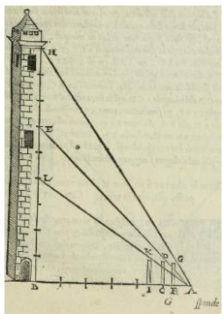


图 1 《测量方法》中的表

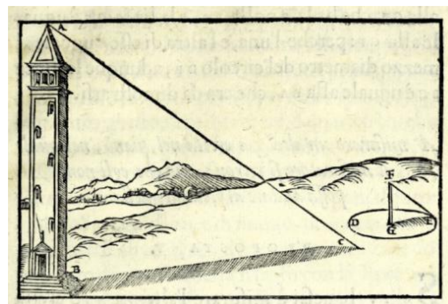


图 2 《测量之书》中的表

### 2.2 平面镜

平面镜（拉丁文名 speculum，英文名 mirror）本身并非专门的测量仪器，后来逐渐成为借作此用的简单工具[11]，如图 3 所示。人们使用平面镜，是利用了光的反射这一物理特性，通过构造一对相似直角三角形来完成测量的。

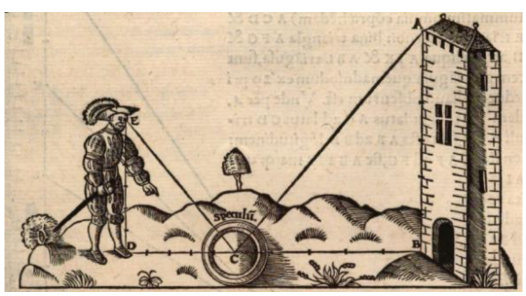


图 3 《数学入门》中的平面镜测高法

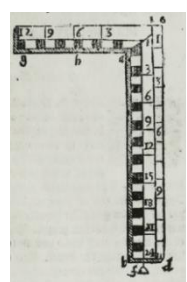


图 4 《测量之术》中的矩尺（[12]）

### 2.3 矩尺

和平面镜一样，矩尺（拉丁文名 norma 或 gnomon，英文名 carpenter's square）也是一种简单测量工具。如图 4，矩尺由相互垂直的一长尺、一短尺构成，呈“L”形，尺上带有刻度。有的矩尺上还系有权线，使用时权线自然下垂。有的矩尺没有权线，测量时可以与表搭配使用。

### 2.4 十字杆

十字杆（英文名 cross-staff）亦称几何杆（英文名 geometric cross）、雅各布杆( Jacob's staff，拉丁名 baculus Jacobi) 或测量杆( 拉丁名 baculus mensorius)[11]。图 5 所示的十字杆是由一根长约 4 尺的直杆 $AB$ 以及一根与之垂直的滑动横杆 $CD$ 组成，直杆上有刻度，其单位长度等于滑动横杆的长度。十字杆既可以测量建筑物的高度，也可以用来测量两物之间的距离。

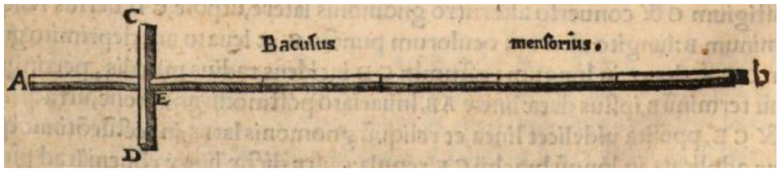



图 5 《数学入门》中的十字杆

## 2.5 四分仪

四分仪（英文名 quadrant，拉丁文名 quadrans）形制多样，是一种十分古老的测量仪器，可以上溯到托勒密（Ptolemy, 公元 2 世纪）的《天文学大成》[11]。四分仪上有两种装置，窥衡（sighting rule）和权线（plumb line），测量时这两种装置可独立使用或搭配使用[13]。

在窥衡尺的两端附近各立一个完全相同的通光耳，每个通光耳上都有钻有两个圆形的通光孔，一大一小，制作时必须保证这两个通光孔的圆心都位于窥衡尺的中心线上，实际测量时，先用两个通光耳上大的通光孔进行粗略观察，然后再用两个小的通光孔进行精确测定。权线末

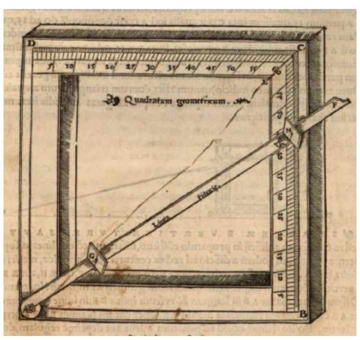
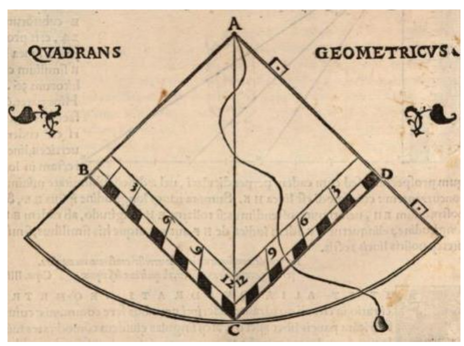




图 6 《数学入门》(1532) 中的两种四分仪（左为定仪、右为游仪）

端栓有小锤权，令小锤权自然下垂，受重力作用可以使权线保持竖直。测量时可以选择仪身不动，转动窥衡测望目标并读取相应数据；也可选择转动仪身，用四分仪的直边对准目标物进行测望，然后权线自然下垂而读取相应数据。因此，根据使用方式，四分仪也分为“定仪”、“游仪”两种[13]，如图 6 所示。

## 2.6 鼓面

鼓面（英文名 drumhead）是一种测量角度的简单工具，通过测量角度进一步也可以用来测距、

测高。如测量到城堡的距离、测量塔的高度等。美国数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）在其《数学史》中提到了这种测量工具，文艺复兴时期接连不断的战争推动了测量技术的发展，鼓面就是在这种背景下诞生的[11]。

图 7 《测量方法》中的鼓面测量方法

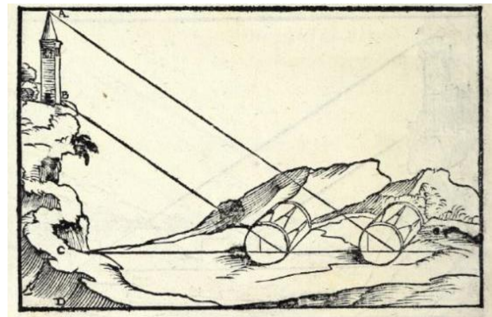


图 8 《测量之书》中的鼓面测高法

## 3 测量方法

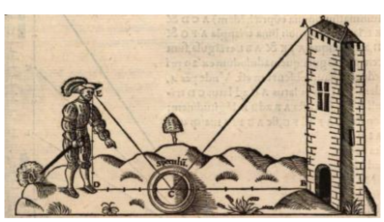
因为测量环境的不同，所需的测量次数也不一样，在我们所考察的三本书中，出现了一次测量、二次测量和四次测量的情形。

### 3.1 一次测量

这种测量是最简单的，当测量环境比较理想时，测量员可以借助平面镜、矩尺、四分仪等构造一组相似三角形来测量所需的高度、深度、距离。下面一一举例。

**情境 1：平面镜测高**

如图 9，测量员要用平面镜来测量建筑物 $AB$ 的高度。将平面镜平置于地平面上，其中心位于点 $C$。测量员立于与建筑物底部点 $B$、点 $C$ 同在一水平线上的点 $D$ 处，调整点 $D$ 的位置，使得从点 $E$ 目视平面镜，恰好能看到建筑物顶部点 $A$ 在平面镜中心 $C$ 处所成的像。测出人目至足底的距离 $ED$、人到平面镜的距离 $CD$、建筑物底部到平面镜的距离 $BC$。根据光的反射原理，$\angle ECD = \angle ACB$，故$\Delta ECD \backsim \Delta ACB$，于是得建筑物的高度 $AB = \dfrac{ED \times BC}{CD}$。



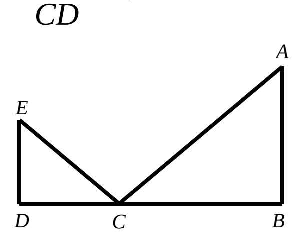



图 9 《数学入门》中的平面镜测高

**情境 2：四分仪测远**

如图 10，测量员要用四分仪测量点 $B$ 和 $E$ 之间的距离，利用窥衡，从点 $A$ 测望点 $E$，读取 $DF$ 的数据，利用 Rt$\Delta ADF$∽Rt$\Delta BEA$，可得 $BE=\dfrac{AB\times AD}{DF}$。

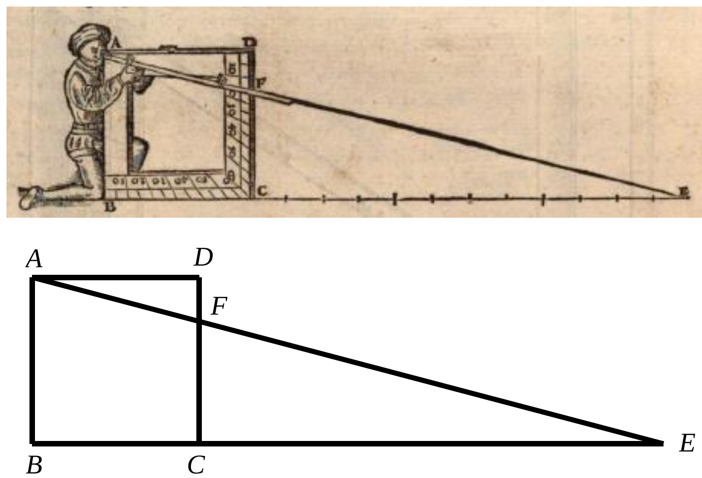



图 10 《数学入门》中的四分仪测远

类似地，也可以用四分仪来测山坡的长度（图 11）。

另一种测远的方法如图 12 所示。测量员用含窥衡和权线的四分仪来测点 E 和 F 之间的距离。左手持四分仪，眼睛通过窥衡测望点 $F$，此时权线自然下垂，与 $BC$ 交于点 $G$，记录 $BG$ 的长度以及人目距地面高度 $AE$。因∠$GAB$=∠$AFE$，故$\Delta ABG$∽$\Delta FEA$，于是得 $\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{BG}{AE}$，从而得所求距离为 $EF=\dfrac{AB\times AE}{BG}$。

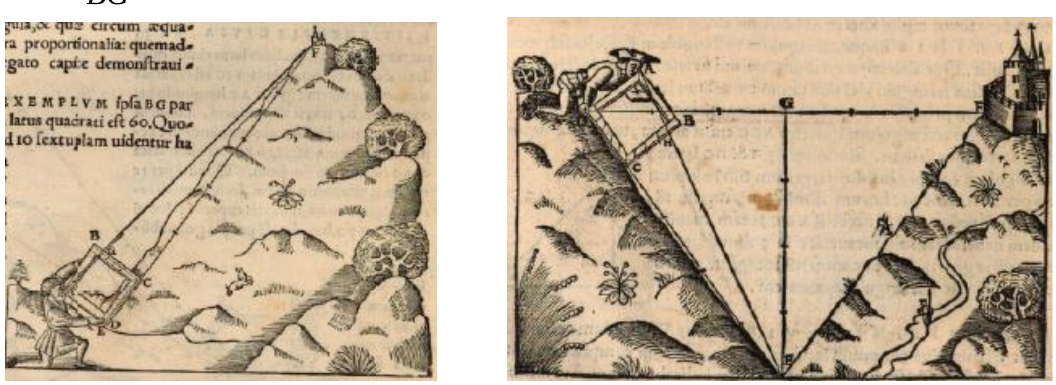


图 11 用四分仪测山坡的长度

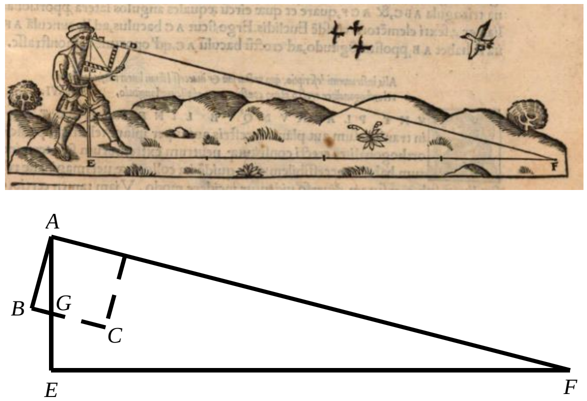



图 12 《数学入门》中的四分仪测距

**情境 3：四分仪测高**

利用四分仪，根据直角三角形的相似性以及测量地与建筑物的距离，可以测出建筑物的高度，如图 13 所示。另外，利用四分仪和铅垂线，也可以根据斜三角形的相似性以及山坡的长度来测量山顶上的建筑的高度。如图 14 所示。

**情境 4：由影测高**

利用四分仪，根据直角三角形的相似性以及建筑物的影长，也可以测出建筑物的高度，如图 15 所示。

当太阳分别在点 $M$、$K$、$H$ 处时，建筑物 $FG$ 的影长分别是 $GN$、$GL$、$GI$，利用$\Delta ADE \backsim \Delta FGN$

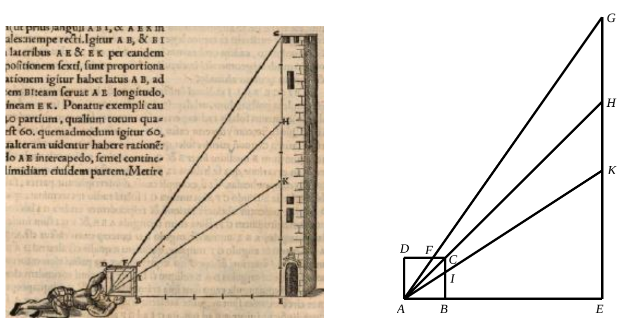



图 13 《数学入门》中的四分仪测高

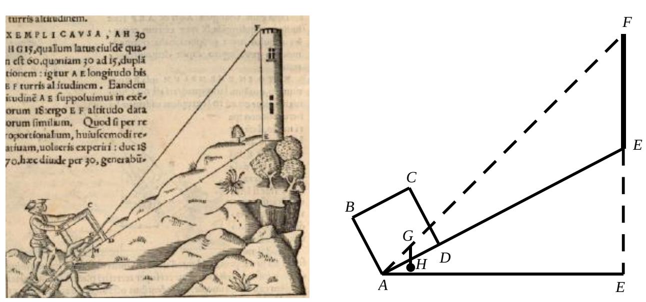



图 14 《数学入门》中的四分仪测高

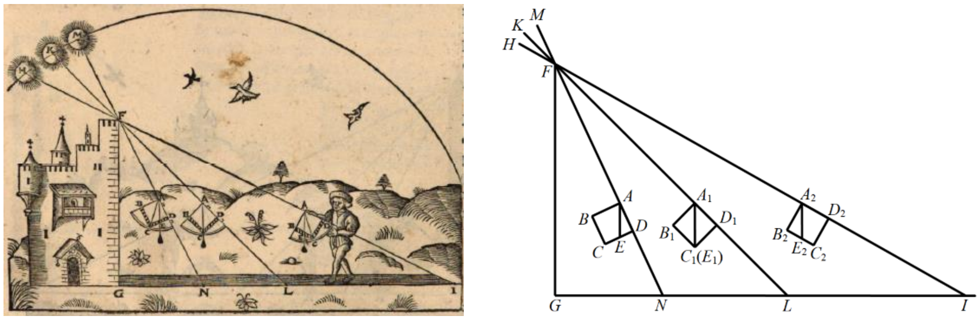



图 15 《数学入门》中由影测高法

可得 $\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{FG}{GN}$，因此建筑物的高度 $FG$ 等于 $\dfrac{AD\times GN}{DE}$。同理也能得到 $FG$ 等于 $\dfrac{A_1D_1\times GL}{D_1E_1}$ 或 $\dfrac{A_2B_2\times GI}{B_2E_2}$。

**情境 5：四分仪测深**

如图 16，测量员用四分仪测量一方井的深度，即图中 $BG$ 或 $EF$ 的长度。将四分仪置于方井上的边沿，通过窥衡测望井底点 $F$，窥衡杆与四分仪的一边 $BC$ 交于点 $H$，记录 $BH$ 的长度。由 $\Delta ABH\backsim\Delta AGF$ 得 $\dfrac{AB}{AG}=\dfrac{BH}{GF}$，其中 $GF=BE$ 可以直接测得，$AB$、$BH$ 可从四分仪中读出，故可求得 $AG$，减去 $AB$，即得井深 $BG$。

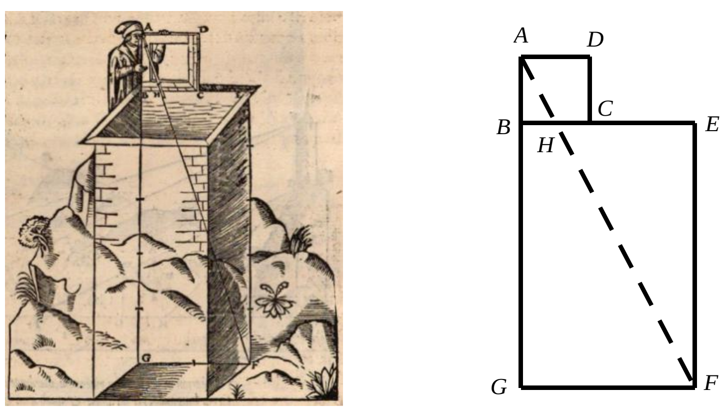



图 16 《数学入门》中的四分仪测井深

**情境 6：矩尺测远**

如图 17，测量员想测量点 $A$ 和 $B$ 之间的距离，所用测量工具为矩尺和表。先将表 $AC$ 立于点 $A$，与地面垂直，然后将矩尺置于表上，直角顶点与表顶 $C$ 重合。通过测望，使矩尺一边 $CD$ 指向点 $B$，此时，矩尺的另一边 $CE$ 对准地面上的点 $F$，记录 $AF$ 的长度。因 $\Delta FAC\backsim\Delta CAB$，故

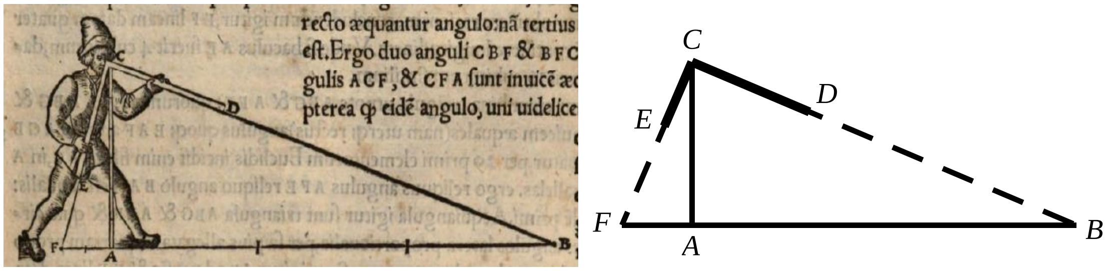



图 17 《数学入门》中的矩尺测距

$\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$，从而得 $AB=\dfrac{AC^2}{AF}$。

用矩尺测望比只用眼睛测望准确度高，并且表长 $AC$ 是已知的，只需记录 $AF$ 的长度，这种测量方法方便快捷、测量数据少。如果用权线代替表也是可行的，这时表长 $AC$ 就等于权线竖直下垂时所对地面上的点到矩尺直角顶点的距离，这个数据是需要另外记录的。

### 3.2 二次测量

现实情境中，测量环境可能并没有那么理想。实际上，测量员经常会遇到一些障碍物，如河流、灌木丛、沼泽地等，测量地与建筑物之间的距离无法直接测得。此时一次测量无法满足测量要求，于是人们想到了进行二次测量，先获得测量地与建筑物之间的距离，进一步再通过计算，得到建筑物的实际高度。

**情境 7：四分仪测高**

如图 18，测量员用四分仪测量远处河对岸的塔楼高度，但是由于河水阻断，无法测得人和塔楼之间的距离。测量员伏身于点 $G$ 处，测望塔楼顶部一点 $F$，记下 $DH$ 的刻度值，然后，向后挪动四分仪到点 $I$ 处，伏身测望塔楼顶部同一点 $F$，记录 $D'K$ 的刻度值，并记录向后挪动的距离 $IG$。由三角形的相似性，易得 $\dfrac{ID'}{IE}=\dfrac{D'K}{EF}$，$\dfrac{GD}{GE}=\dfrac{DH}{EF}$，因 $ID'=GD$，由上面两个等式可求得建筑物的高度为 $EF=\dfrac{DH\cdot D'K}{DH-D'K}\times\dfrac{IG}{GD}$。

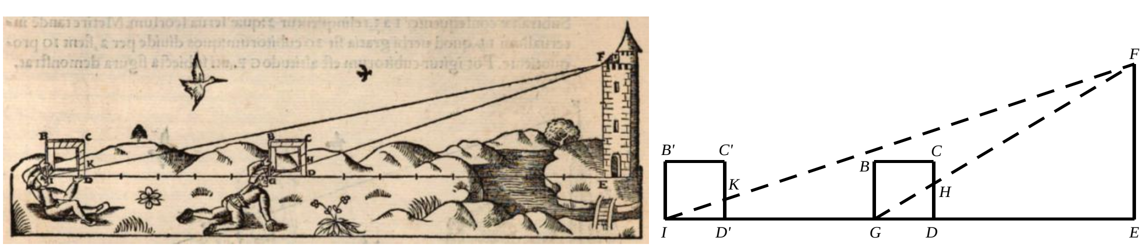



图 18 《数学入门》中的四分仪测高

**情境 8：鼓面测高**

如图 19，与情境 5 一样，测量员需要测量远处建筑物的高度，所用测量工具是鼓面，与四分仪相比，鼓面的特点是不仅能测量高度，还可以测量角度。该情境下，建筑物的前方是一块坡地，测量员只能在坡地上测望。此时建筑物底部一点 $B$ 与测量位置在同一水平面，建筑物的底部一点 $C$ 在测量位置水平面以下。因此，测量员需先测地面到建筑物顶部的距离 $AB$，再加上地面到建筑物底部的距离 $BC$，其和为建筑物的高度 $AC$。

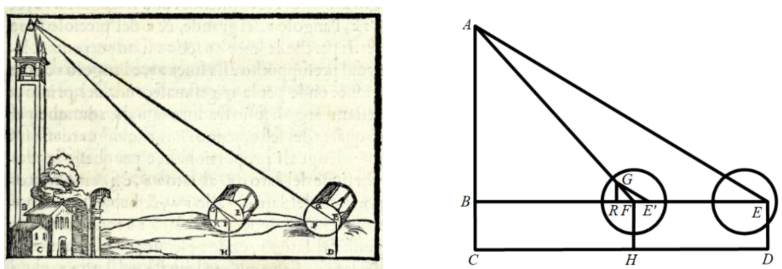



图 19 《测量之书》中的鼓面测高

具体操作如下：先将鼓面置于点 $D$ 处，伏身测望建筑物顶部一点 $A$，记录此时的仰角 $\angle AEB$，然后将鼓面向靠近建筑物的方向挪动至 $H$ 处，继续伏身测望点 $A$，在鼓面上标记视线 $AF$ 上的任意一点 $G$，过 $G$ 作水平线 $EF$ 的垂线，垂足为点 $R$。在直线 $EF$ 上取一点 $E'$，使得 $\angle GE'R=\angle AEB$，此时 $AE//GE'$。测量员需要记录两次测量鼓面移动的距离 $DH$，以及 $GR$、$E'F$ 和 $BC$ 的长度。因 $\Delta GFE' \backsim \Delta AFE$，$\Delta FGR \backsim \Delta FAB$，故得 $\dfrac{E'F}{DH}=\dfrac{FG}{FA}$，$\dfrac{FG}{FA}=\dfrac{GR}{AB}$，于是有 $\dfrac{E'F}{DH}=\dfrac{GR}{AB}$，从而得 $AB=\dfrac{DH \times GR}{E'F}$，加 $BC$，即得建筑物高度。

**情境 9：十字杆测距**

如图 20，测量员想测量河对岸两点之间的距离 $FG$，使用的工具是十字杆。先立于点 $H$ 处，将十字杆的横杆 $DC$ 滑动到一个刻度（点 $E$）上，使得人眼在观察目标 $FG$ 时其视线正好被横杆遮住。然后测量员立于点 $L$ 处，将横杆向后滑动一个单位长度（至点 $E'$），此时横杆 $DC$ 恰好也能遮住目标 $FG$。于是，根据十字杆的构造原理，可得 $FG$ 等于两次测量位置之间的距离 $LH$。当然这项工作也可以由两位测量员同时完成，只要标记两个测量员进行测望时所处的位置，然后测量两个位置之间的距离即可。

根据十字杆的构造可知，在测量过程中，横杆 $DC$ 滑动一个刻度的距离刚好等于其本身的长度，即 $A'E'-AE=DC=D'C'$，接下来只要说明 $LH$ 等于 $FG$ 即可。根据相似三角形性质可

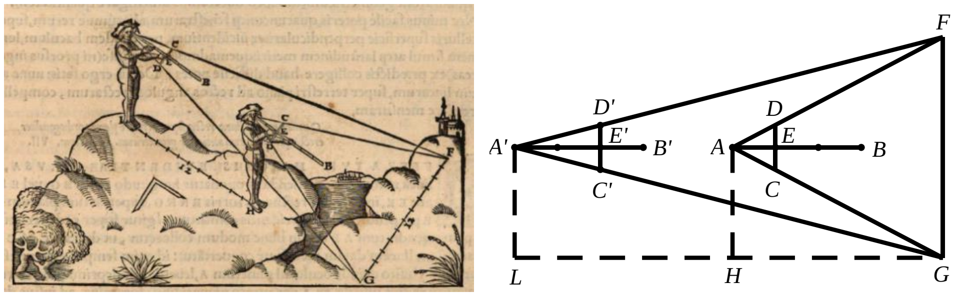



图 20 《数学入门》中的十字杆测距

知，$\dfrac{A'E'}{C'D'}=\dfrac{LG}{FG}$，$\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{HG}{FG}$。接着，由第一个等式可得 $\dfrac{A'E'}{CD}=\dfrac{LG}{FG}=\dfrac{LH}{FG}+\dfrac{HG}{FG}$，由此得 $\dfrac{A'E'}{CD}=\dfrac{LH}{FG}+\dfrac{AE}{CD}$，进一步移项、化简，可知 $\dfrac{LH}{FG}=1$，即 $LH=FG$。

### 3.3 四次测量

由上文可知，当建筑物坐落于远处平地时，需要进行二次测量。那么，当建筑坐落于远处高地时，则应该进行四次测量，其原理与二次测量相同，是二次测量情境的复杂版本。

**情境 10：四分仪测高**

如图 21，测量员用四分仪测量远处山上的一个建筑物的高度，受周围地理环境的限制，无法测得人到建筑物的水平距离。第一次测量时，测量员立于点 $I$ 处测望建筑物底部一点 $G$，此时权线竖直垂下正好过点 $C$；第二次测量时，测量员立于点 $L$ 处，测望建筑物底部同一点 $G$，此时，权线自然下垂，且与四分仪的一边 $BC$ 交于点 $E$，记录 $BE$ 的长度。接着，第三、四次测量，测量员分别立于点 $N$ 和 $P$ 处测望建筑物顶上一点 $F$，分别记录权线所在的位置。前两次测量是为了求得建筑物底部到平地的垂直距离，即 $GH$ 的长度，后两次测量是为求得建筑物顶部到地面的垂直距离，即 $FH$ 的长度。将两次所求相减，即得到建筑物高度 $FG$。

如图 21，矩形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 代表四分仪，$AC$ 与 $A_1E_1$ 为权线所在的位置，因 $\Delta ABE \backsim \Delta KHG$，$\Delta A_1B_1E_1 \backsim \Delta MHG$，故 $\dfrac{GH}{KH}=\dfrac{BE}{AB}$，$\dfrac{GH}{MH}=\dfrac{B_1E_1}{A_1B_1}$，于是得 $KH=\dfrac{B_1E_1}{BE-B_1E_1}\times MK$。从而得到建筑物底部与地面的垂直距离 $GH=\dfrac{BE\times B_1E_1}{BE-B_1E_1}\times\dfrac{MK}{AB}$。同理，经过三、四次测量也能得到 $FH$ 的值，则 $FG=FH-GH$。

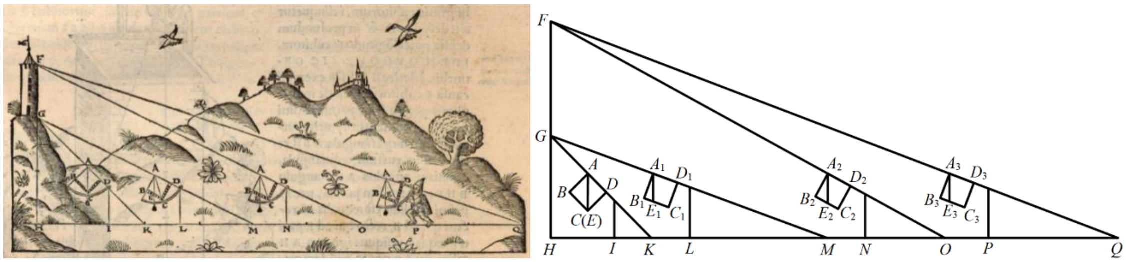



图 21 《数学入门》中的四次测量

## 4 教学启示

16 世纪各种测量术都与相似三角形密切相关，人们根据实际需要，构造一组（情境 1-6）、两组（情境 7-9）、四组（情境 10）相似三角形，根据相似三角形对应边成比例这一性质，可以在建筑、勘探、水利、军事等方面有效解决测量问题。在 HPM 视角下的“相似三角形应用”教学中，16 世纪的测量工具与测量术是理想的教学素材。

（1）教师可以创设测量问题的情境，让学生分组讨论，尝试还原古人的测量方法。一方面，学生可以在这一过程中感受到学习相似三角形知识的必要性;另一方面,学生有机会与古人对话，体验成功的愉悦，树立学习的自信心。

（2)不同地域、不同的文明在同一数学课题上都有其各自的成就与贡献。教师可以利用技术，制作 HPM 微视频，介绍东西方测量的历史，让学生感悟数学文化的多元性。

（3）一次、二次、四次测量的难度依次递增。首先，教师可以设置一次测量的情境，让学生体会“知远求高、知高求远”的含义；在此基础上，设置一定的障碍，如遇河流、险滩使得“远”不可测，进而需要通过二次测量先求“远”、再测“高”；最后，在二次测量基础上，测量坐落于山上的建筑物，则需要两次先求“远”、再测“高”，即需四次测量。总之，编制习题时，可以根据知识的自然发生过程，注意题目的趣味性、选择合理的难易梯度。

（4）古人在测量的道路上一定不是一帆风顺的，他们克服种种困难、挫折，发明了诸多精巧的测量工具，使得“极远”、“极深”、“不知距”变得“可测”。了解这一点，学生既能体会数学的价值，也能明白数学学习需要不畏困难、坚韧不拔等品质，从而达成德育之效。

# 参考文献

[1] 汪晓勤. 相似三角形的应用：从历史到课堂[J]. 中学数学教学参考，2007，(09)：54-55.

[2] 王进敬，汪晓勤. 运用数学史的"相似三角形应用"教学[J]. 数学教学，2011，(08)：22-25.

[3] 倪昀倩. 变出精彩，提高效率——以"相似三角形的应用"为例[J]. 数学教学通讯，2014，(16)：17-19.

[4] 黄健，林采露. 数学文化视角下问题解决式教学——"相似三角形应用举例"教学设计[J]. 中学教研(数学)，2018，(07)：4-7.

[5] 尹慧敏. 初中数学教学中建模思想的应用——以"相似三角形的应用"为例[J]. 初中数学教与学，2018，(15)：7-9.

[6] 于建营. 基于核心素养的递进式教学实践研究——以"相似三角形的应用"教学为例[J]. 中学数学教学参考，2019，(08)：18-20，26.

[7] 姜小红. 相似三角形及应用[J]. 中学数学教学参考，2019，(01-02)：63-65.

[8] Bartoli, C. *Del modo di misvrare* [M]. Venetia: Francesco Franceschi Sanese, 1564: 25, 45.

[9] Belli, S. *Libro del Misvrar* [M]. Venetia: Giordano Ziletti, 1570: 65-95.

[10] Fine, O. *Protomathesis* [M]. Parisiis: Ioannis Petri, 1532: 65-68, 72-76.

[11] Smith, D. E. *History of Mathematics* [M]. Boston: Ginn and Company, 1923: 344-356.

[12] Digges, L. *Teconicon* [M]. London: F. Kyngston, 1605: 25.

[13] 潘澍原. 明季西方高远测量仪器的引介与影响——以《测量全义》之"小象限"为中心[J]. 自然科学史研究，2017，36(04)：462-488.

# 古希腊数学中的平面轨迹问题*

张佳淳

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

## 1 引 言

在几何学中，轨迹是几何图形经历运动与变化生成的新图形，是描述曲线构成规律的抽象概念。在数理逻辑中，轨迹的探求要经历观察、归纳、猜想和逻辑推理，虽没演绎证明那般严谨，但也经历了从前提到结论的过程。因此，轨迹既是静态几何与动态几何之间的桥梁，也是实验几何与论证几何之间的媒介。

现行教材中，沪教版八年级上册教科书从实际情境出发引入轨迹概念，并介绍三种基本轨迹与交轨法。人教版、北师大版教科书虽无“轨迹”一节，但人教版九年级上册教科书在描述圆的定义时利用了轨迹思想，教师在教学中也会渗透相关内容。轨迹更是连结初、高中数学内容的重要纽带，是学生学习平面解析几何的基础。

轨迹概念因其抽象性而成为教学难点，不少教学问题仍有待解决。例如，为什么要学习轨迹？如何激发轨迹概念的学习动机？教学中还可以运用哪些与三种轨迹相关的典型问题？要解决上述问题，就需要深入研究轨迹的历史，从中探寻轨迹概念产生的动因，获取丰富的教学素材，得出有益的教学启示，进而为 HPM 视角下的轨迹概念教学提供借鉴。为此，我们希望通过对古希腊数学史的考察来回答以下研究问题：轨迹概念如何产生？古希腊数学家研究了哪些平面轨迹问题？有何教学启示？

## 2 轨迹概念的历史概述

### 2.1 初露端倪

古希腊数学家在解决三大几何难题的过程中，逐渐摆脱了尺规作图的限制，相继发现了圆锥曲线、割圆曲线等高次曲线或超越曲线。公元前 4 世纪，辩士学派的数学家希皮亚斯（Hippias）

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究（A8）。

在解决三等分角问题时，利用轨迹思想发现了割圆曲线（quadratrix）。[1]如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，线段 $AB$ 绕点 $A$ 顺时针方向匀速转动至 $AD$，同时线段 $BC$ 平行于自身匀速下移至 $AD$。设 $AB$ 转到 $AD'$ 时，$BC$ 下移到 $B'C'$，则 $AD'$ 和 $B'C'$ 的交点 $P$ 所形成的曲线就是割圆曲线。

与圆锥曲线不同，割圆曲线纯粹是利用运动构造出来的，它一开始就以动点轨迹的角色登上数学舞台。它提示古希腊数学家们，可以用轨迹来解决某些问题，也可以从轨迹的角度来看待其他任何曲线。

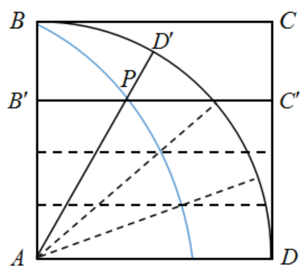



图 1 割圆曲线

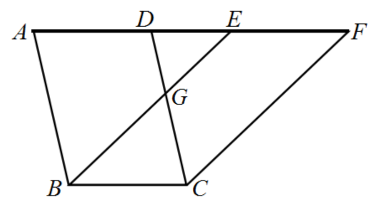



图 2 《几何原本》命题 I.35

### 2.2 动静相依

在同底的前提下，如何构造面积相等的平行四边形？这个问题的答案隐藏在欧几里得（Euclid）《几何原本》第 I 卷命题 35 中。该命题称：“在同底上且在相同两平行线之间的平行四边形彼此相等。”[2]如图 2，欧几里得先证明$\Delta EAB$ 与$\Delta FDC$ 全等，同减去$\Delta DEG$，则余下的梯形面积相等，同加上$\Delta GBC$，即得▱$ABCD$ 和▱$BCFE$ 面积相等。

上述命题中，直线 $AF$ 可视为底边固定、面积不变的平行四边形一边的轨迹，两平行线之间的平面区域可视为底边固定、面积不变的平行四边形所形成的轨迹。[2]因此，该命题常常被后人称为“轨迹定理”。《几何原本》第 I 卷命题 37 称：“在同底上且在相同两平行线之间的三角形彼此相等。”类似地，在该命题中，可把不与底重合的平行线视为底边固定、面积不变的三角形顶点的轨迹。

更进一步地，根据《几何原本》第III卷命题 26（相等的圆周角所对弧相等）和命题 31（半圆上的角是直角），圆可视为底边固定、顶角为直角的三角形顶点的轨迹，圆弧可视为底边固定、顶角相等的三角形顶点的轨迹[2]。

公元前 4 世纪，数学家阿契塔（Archytas）首先引入“曲线是点的轨迹”、“曲面是曲线移动的产物”的观点，从而把静态的曲线与动态的轨迹联系起来[3]。所以原本静态的直线、圆甚至任何曲线都可从轨迹的角度实现“静中悟动”。而有些曲线在现实生活中并不存在原型，必须利用轨迹

思想“动中生静”，除了割圆曲线还有很多例子。例如公元前 3 世纪，阿基米德（Archimedes）研究出一种新的曲线：“一端固定的直线在平面内匀速旋转一周，同时有一动点从固定端点出发，沿直线匀速运动，则该动点在平面上将描出一条螺线。”[4]该曲线今称阿基米德螺线，如图 3 所示。

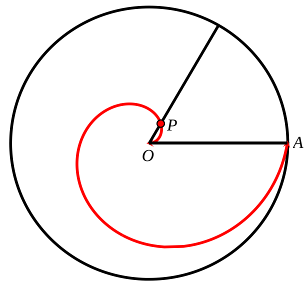



图 3 阿基米德螺线

### 2.3 系统研究

到了阿波罗尼奥斯（Apollonius）所生活的时代，曲线是动点轨迹的思想已经是人们的常识了。当时，数学家将他们所知道的曲线分成平面轨迹、立体轨迹和线轨迹三类[5]，其中，平面轨迹包含直线和圆，立体轨迹包含三类圆锥曲线——椭圆、双曲线、抛物线，而上述曲线以外的曲线被归入线轨迹。关于平面轨迹，阿波罗尼奥斯总结前人成果并加以创新，撰写了《平面轨迹》一书；关于立体轨迹，阿波罗尼奥斯撰写了划时代的巨著《圆锥曲线论》。《平面轨迹》记载了众多古希腊几何中的平面轨迹问题，虽不幸失传，但其中的部分内容通过后世评注者的收集和评论，得以流传至今，其中就包含了初中教材中的三个基本轨迹。

## 3 阿波罗尼奥斯的平面轨迹命题

阿波罗尼奥斯根据不同的限制条件，提出了八个有关平面轨迹的命题，这些命题可分为两类：一是与定直线有关的轨迹，二是与定点有关的轨迹。

### 3.1 与定直线有关的轨迹

**命题 1** 一条线段平行于一条已知直线，线段的其中一个端点位于另一条已知直线上，移动线段，则另一端点形成的轨迹是一条直线。

如图 4，已知直线 $l_1$ 和 $l_2$，线段 $MP//l_2$，端点 $M$ 位于直线 $l_1$ 上。当点 $M$ 在 $l_1$ 上运动时，点 $P$ 的轨迹为直线。

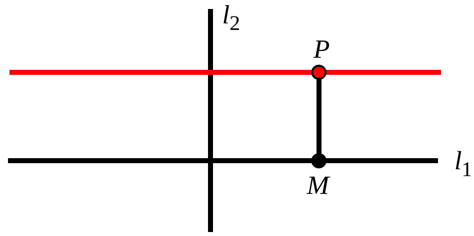



图 4 命题 1 的轨迹

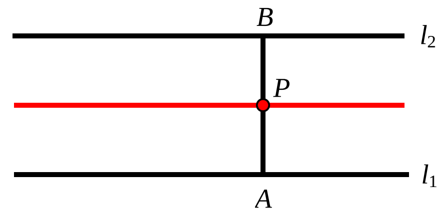
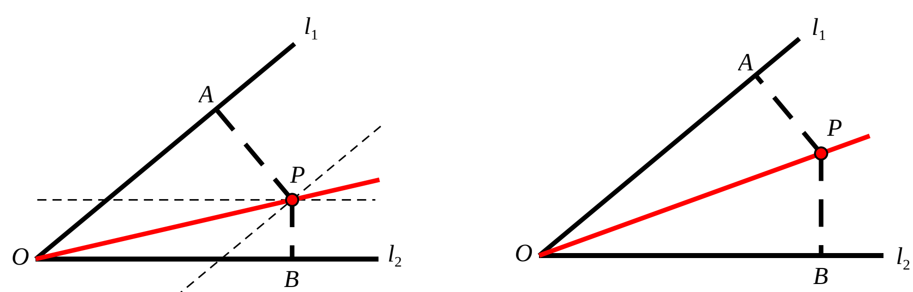



图 5 命题 2 中定直线平行时的轨迹

**命题 2** 到两条已知直线（平行或相交）的距离之比等于已知数的动点轨迹为直线。

已知直线 $l_1$ 和 $l_2$，$l_1//l_2$，动点 $P$ 到 $l_1$ 的距离与到 $l_2$ 的距离之比等于常数 $k$，则 $P$ 的轨迹为直线。当 $k = 1$ 时，$P$ 的轨迹位于 $l_1$ 和 $l_2$ 中间，如图 5。当 $k \neq 1$ 时，$P$ 的轨迹为 $l_1$ 和 $l_2$ 之间或之外的两条直线。

当 $l_1$ 和 $l_2$ 相交时，动点 $P$ 的轨迹也是直线。若只考虑动点在两直线所成锐角或直角范围内，利用命题 1，如图 6，分别作 $l_1$ 和 $l_2$ 的平行线，使两对平行线之间的距离之比为 $k$，则所作的两条平行线交点与直线 $l_1$ 和 $l_2$ 交点 $O$ 的连线即为点 $P$ 的轨迹，当 $k = 1$ 时，$P$ 的轨迹为直线 $l_1$ 和 $l_2$ 所成锐角或直角的角平分线。




（1）距离之比为 $k$　　（2）距离之比为 1

图 6 命题 2 中定直线相交时的轨迹

若考虑邻补角，则点 $P$ 的轨迹为两条相交于点 $O$ 的直线，今称“定比双交线”。[6]

**命题 3** $O$ 为定直线 $ON$ 上的固定点，$P$ 为动点，$PN$ 与 $ON$ 垂直，$N$ 为垂足，若 $OP^2 = a \cdot ON(a > OP > ON)$，则点 $P$ 的轨迹为圆。

如图 7，以 $O$ 为端点，作线段 $OE = a$，则点 $P$ 的轨迹是以 $OE$ 为直径的圆。事实上，因 $OP^2 = a \cdot ON = OE \cdot ON$，故$\angle OPE$ 为直角，故点 $P$ 位于圆上。反之，若点 $P$ 为圆上异于 $O$ 和 $E$ 的任意一点，则$\angle OPE$ 为直角，故$OP^2 = a \cdot ON$。

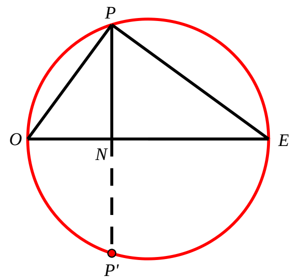



图 7 命题 3 的轨迹

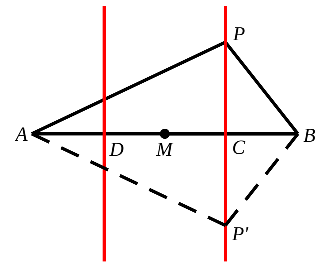



图 8 命题 4 的轨迹

### 3.2 与定点有关的轨迹

**命题 4** 到两定点距离的平方差等于已知数的点的轨迹为直线。

如图 8，设 $A$ 和 $B$ 为两个定点，$AB=a$，动点 $P$ 满足 $\left|PA^2-PB^2\right|=k^2$，$M$ 是 $AB$ 的中点，过点 $P$ 作 $PC\perp AB$，垂足为 $C$，当 $PA>PB$ 时，有

$$PA^2-PB^2=AC^2-CB^2=2a\cdot MC=k^2,$$

则 $MC=\dfrac{k^2}{2a}$ 为常数，故点 $C$ 的位置确定，点 $P$ 位于过点 $C$ 且垂直于 $AB$ 的直线上。当 $PA<PB$，取 $MD=\dfrac{k^2}{2a}$，故点 $D$ 位置确定，点 $P$ 位于过点 $D$ 且垂直于 $AB$ 的直线上。因此，动点 $P$ 的轨迹是垂直于 $AB$ 的两条直线，今称“定差幂线”。反之，直线上任一点均满足条件。

**命题 5** 到两定点距离之比等于常数的动点轨迹为直线或圆。

设 $P$ 为动点，$A$、$B$ 为定点，$\dfrac{PA}{PB}=k$。当 $k=1$ 时，易知动点 $P$ 的轨迹为 $AB$ 的垂直平分线，如图 9。当 $k\neq 1$时，如图 10，过点 $P$ 作$\angle APB$ 的内、外角平分线，交直线 $AB$ 于点 $C$、$D$，则$\angle CPD=90^{\circ}$，由角平分线性质、等面积法可得

$$\frac{S_{\Delta PAC}}{S_{\Delta PBC}}=\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=k,$$

$$\frac{S_{\Delta PAD}}{S_{\Delta PBD}}=\frac{AD}{BD}=\frac{PA}{PB}=k,$$

故点 $C$ 和 $D$ 点位置确定，从而得点 $P$ 的轨迹是以 $CD$ 为直径的圆。反之，圆上任一点均满足条件。

上述命题十分著名，比值不为 1 时的轨迹被后人称为“阿波罗尼奥斯圆”，但这是一个错误的名称，因为它之所以广为人知，是因为亚里士多德曾用它来为彩虹的半圆形状提供数学证明[7]。

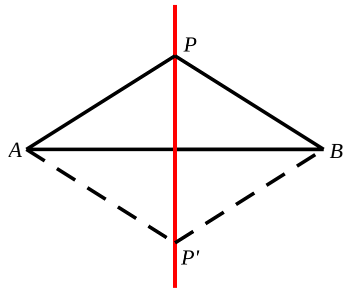



图 9 命题 5 在比值为 1 时的轨迹

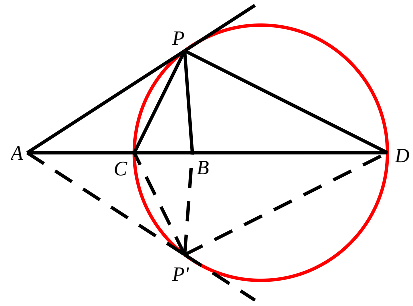



图 10 命题 5 在比值不为 1 时的轨迹

**命题 6** 到 $n$ 个定点的距离的平方和等于已知数的动点轨迹为圆。

这是 17 世纪法国著名数学家费马（P. de Fermat, 1601-1665）在其《平面和立体轨迹引论》中提到的阿波罗尼奥斯轨迹之一。费马借助古希腊数学家帕普斯（Pappus）在《分析荟萃》中的注释和引理，给出了上述命题的另一种表述：

**命题 6′**：从任意多个给定点向一点引线段，如果所得到的线段形成的正方形面积之和等于给定的面积，则该点位于一个确定的圆周上。

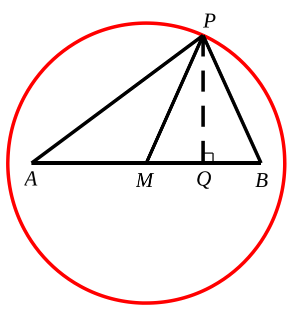



图 11 命题 6′的轨迹

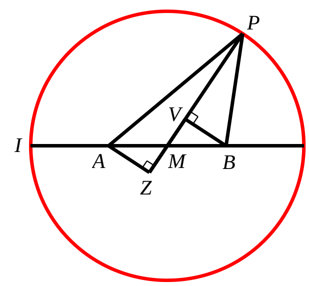



图 12 命题 6′的轨迹纯粹性证明

如图 11，设 $A$ 和 $B$ 为两个定点，$M$ 是线段 $AB$ 的中点，动点 $P$ 满足 $PA^2+BP^2=k^2$，过点 $P$ 作 $PQ\perp AB$，则有

$$PA^2+PB^2=AQ^2+BQ^2+2PQ^2=\frac{1}{2}AB^2+2PM^2=k^2,$$

故得

$$|PM|=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2},$$

因此，若 $2k^2-AB^2>0$，则点 $P$ 的轨迹是以 $M$ 为圆心、$MP$ 为半径的圆，今称“定和幂圆”；若 $2k^2-AB^2<0$，则轨迹不存在；若 $2k^2-AB^2=0$，则轨迹为点 $M$。

费马则证明了上述轨迹的纯粹性。如图 12，在直线 $AB$ 上取中点 $M$ 和点 $I$，使得 $2\left(AM^2+IM^2\right)=k^2$。以 $M$ 为圆心、$MI$ 为半径作圆，则圆上任意一点 $P$ 满足[8]：

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2&=PZ^2+AZ^2+PV^2+BV^2\\&=(PM+MZ)^2+AM^2-MZ^2+(PM-MV)^2+BM^2-MV^2\\&=2(PM^2+AM^2)\\&=2(AM^2+IM^2)\\&=k^2\end{aligned}$$

费马的思路是：先猜想点 $I$ 由从“原点”$M$ 测量的“坐标”确定，得到作为轨迹的圆，再验证两个变量 $AP$ 和 $BP$ 的平方和是否等于定值。

**命题 7** 动点 $P$ 到两个定点 $A$、$B$ 满足 $mAP^2+nBP^2=k^2$（$m$、$n$、$k$ 是正常数），则点 $P$ 的轨迹为圆。

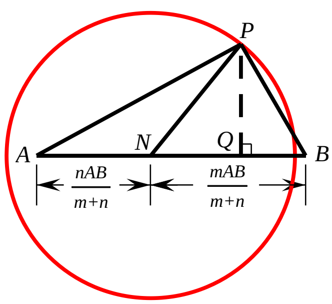



图 13 命题 7 的轨迹

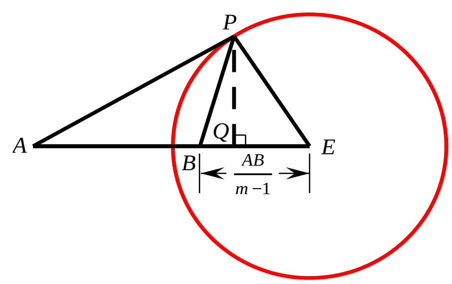



图 14 命题 8 的轨迹

命题 7 是命题 6 的推广。如图 13，$A$、$B$ 为定点，在 $AB$ 上取一点 $N$，使得 $AN=\dfrac{n}{m+n}AB$，$NB=\dfrac{m}{m+n}AB$，过点 $P$ 作 $PQ\perp AB$，垂足为 $Q$，则

$$\begin{aligned}&mPA^2+nPB^2\\&=m\left(AQ^2+PQ^2\right)+n\left(BQ^2+PQ^2\right)\\&=m\left(AN+NQ\right)^2+n\left(BN-NQ\right)^2+\left(m+n\right)PQ^2\\&=\frac{mn}{m+n}AB^2+\left(m+n\right)PN^2\\&=k^2\end{aligned}$$

故得

$$PN^2=\frac{1}{m+n}\left(k^2-\frac{mn}{m+n}AB^2\right),$$

若$k^2-\frac{mn}{m+n}AB^2>0$，则 $P$ 的轨迹是以 $N$ 为圆心的圆；若$k^2-\frac{mn}{m+n}AB^2=0$，则轨迹为点 $N$；否则，轨迹不存在。反之，易证圆上任一点均满足条件。

**命题 8** *若动点 $P$ 到定点 $A$ 的距离的平方减去已知数 $k^2$ 所得的差，与到定点 $B$ 的距离的平方之比等于已知数 $m$，即 $AP^2=k^2+mBP^2$，则 $P$ 的轨迹为圆。*

当 $m<0$ 时，命题 8 就是命题 7 的特殊情形，点 $P$ 的轨迹为以 $AB$ 上某一点（将 $AB$ 分成 $(-m):1$）为圆心的圆。当 $m=0$ 时，$P$ 的轨迹是以 $A$ 为圆心的圆；当 $m=1$ 时，命题 8 就是命题 4，轨迹为两条直线。

当 $0<m<1$ 时，在 $BA$ 延长线上取一点 $E$，使得 $EB=\frac{AB}{1-m}$；当 $m>1$ 时，在 $AB$ 延长线上取一点 $E$，使得 $BE=\frac{AB}{m-1}$。如图 14，不失一般性，过点 $P$ 作 $PQ\perp AB$，垂足为 $Q$，则

$$\begin{aligned}&AP^2-mBP^2\\&=\left[PQ^2+\left(AE-QE\right)^2\right]-m\left[PQ^2+\left(BE-QE\right)^2\right]\\&=\left(1-m\right)\left(PQ^2+QE^2\right)+\frac{m}{m-1}AB^2\\&=\left(1-m\right)PE^2+\frac{m}{m-1}AB^2\\&=k^2,\end{aligned}$$

故得

$$PE^2=\frac{1}{1-m}\left(k^2-\frac{m}{m-1}AB^2\right),$$

因此，若 $\frac{1}{1-m}\left(k^2-\frac{m}{m-1}AB^2\right)>0$，则 $P$ 的轨迹是以 $E$ 为圆心、$EP$ 为半径的圆；若 $\frac{1}{1-m}\left(k^2-\frac{m}{m-1}AB^2\right)=0$，轨迹为点 $E$；否则，轨迹不存在。反之，易证圆上任一点均

满足条件。

## 4 教学启示

从以上分析可见，轨迹概念诞生于古希腊，古希腊历代数学家对于轨迹都有深入的研究，阿波罗尼奥斯为集大成者之一，我们从其著作中发现了与直线、圆相关的八类平面轨迹问题，这些问题既包含了今日教科书中出现的问题，也包含了许多我们不太熟悉的问题。古希腊轨迹概念的历史以及古希腊数学中的轨迹问题对今日平面几何或解析几何教学有一定的启示。

- 追溯轨迹之源。轨迹概念的产生源于两方面的影响因素，一是数学外部因素，人们希望研究出客观事物运动路线的潜在规律，如流星划过的余迹、物体抛出后的运动路线等；二是数学内部因素，古人为了解决三大几何难题，构造机械运动而形成新的曲线，运动在曲线生成的过程中不可或缺，故轨迹的产生也源于数学内部问题解决的需要，教师可以举例希皮亚斯或阿基米德为解决三等分角而构造割圆曲线或螺线的史实，从而揭示学习轨迹概念的必要性。

- 揭示轨迹之义。轨迹可剖析曲线的本质属性，看清未知点与已知的原始几何元素间的限制关系，教师可用《几何原本》中的命题（如第Ⅰ卷命题 37、第Ⅲ卷命题 31）和阿契塔引入曲线是点的轨迹的史实，说明学生原来所认识的“静态的冰冷的曲线”都可用“动态的火热的轨迹”思想揭示其本质属性。例如已学的圆是无数点的集合，轨迹能揭露出静态各点形成的背后是与两已知点所成线段夹角为 90°这一本质属性。反之，基于圆、直线等基本轨迹利用交轨法能生成更多的曲线，从而丰富平面几何的宝库。以此加深学生的概念理解，激发轨迹概念的学习动机。

- 设计轨迹之问。教师可直接使用或适当改编阿波罗尼奥斯的轨迹命题，带学生穿越时空帮古人解决三种基本轨迹甚至更有挑战性的轨迹问题。问题串举例如下:$\triangle ABC$ 的一边 $AB=3cm$，问①$\Delta ABC$ 面积相等的顶点 $C$ 的轨迹；②$\Delta ABC$ 是等腰三角形的顶点 $C$ 的轨迹；③$\Delta ABC$ 是等边三角形的顶点 $C$ 的轨迹；④$\angle ACB=90^\circ$ 的顶点 $C$ 的轨迹；⑤$\angle ACB=30^\circ/150^\circ$的顶点 $C$ 的轨迹；⑥$CA:CB=k$ 的顶点 $C$ 的轨迹；⑦$AB \underline{\underline{/\!/}} DE=3cm$，使$\Delta ABC$ 与$\Delta DEC$ 面积相等的公共顶点 $C$ 的轨迹；⑧$AB=AD=3cm$，使$\Delta ABC$ 与$\Delta ADC$ 面积相等的公共顶点 $C$ 的轨迹，等等。

- 展示轨迹之理。古希腊人对轨迹的探求与证明展示了理性精神，例如费马证明命题 6′的轨迹纯粹性的方法是根据个别满足条件的点进行合理的猜想，再运用平行线、三角形、圆的相

关知识进行验证使轨迹“不重不漏”，这是一种推理严谨、言必有据和条理化的思维习惯[9]。而平面几何一个重要的教育功能就是以几何图形为载体，培养逻辑思维能力，提高理性精神[10]。

## 参考文献

[1] Merzbach, U. C., Boyer, C. B. *A History of Mathematics* [M]. New Jersey: Wiley, 2011: 62-63.

[2] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

[3] 何思谦. 数学辞海第一卷[M]. 太原: 山西教育出版社, 2002: 159.

[4] Heath, T. L. *The Works of Archimedes* [M]. New York: Dover Publications, 1959: 165.

[5] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1921: 185-189.

[6] 毛鸿翔, 左铨如. 轨迹[M]. 上海: 上海教育出版社, 1981: 41-43.

[7] Boyer, C. B. *History of Analytic Geometry* [M]. New York: Scripta Mathematica, 1956: 31-78.

[8] Katz, V. J. 数学史通论(李文林等译) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 338-339.

[9] 鲍建生. 几何的教育价值与课程目标体系[J]. 教育研究, 2000, (04): 53-58.

[10] 田载今. 应继续重视几何教学的理性特征[J]. 课程·教材·教法, 2004, 24(07): 43-46.

## 教学实践

# HPM 视角下的“基本不等式”同课异构课例分析*

赵丽红

(华东师范大学教师教育学院，上海 200062)

## 1 引 言

基本不等式是沪教版数学教材高一上学期第二章“不等式”第四节的内容。在学习本节内容之前，学生在初中不等式知识的基础上学习了不等式的基本性质、一元二次不等式及其他不等式的解法，已具备一定的代数运算基础。教材的引入方式是引述客观世界中一些恒成立的不等关系，进而直接呈现基本不等式，然后用作差法进行代数证明，再用赵爽弦图给出几何解释。这里，教科书虽然运用了数学史，但弦图原本是用来证明勾股定理的，数学史上的基本不等式并非源于弦图。因此，我们尚需运用更恰当的数学史料，去揭示基本不等式产生的真正动因，从而更好地激发学生的学习动机。

HPM 视角下的数学教学，在设计上，关注学生的学习动机与认知起点，选择恰当的数学史料、创设具有历史底蕴的情境、揭示知识产生的必要性并增加知识的趣味性。在实施上，力求将数学史自然而然地融入课堂教学。在评价上，从知识维度看知识之谐和方法之美，从过程维度看探究之乐和能力之助，从情感维度看文化之魅和德育之效。随着 HPM 教学理念的传播和 HPM 教学案例的增多，越来越多的一线教师对 HPM 产生浓厚兴趣，HPM 视角下的同课异构现象进入了人们的视野。

对于“基本不等式”这一课题，来自上海市两所不同高中的教师 A 和 B 精心选择相关的历史素材，各从 HPM 视角进行教学设计，并付诸实践。两位教师几度参加 HPM 工作室的教学研讨，也进行了数次试教，对教学设计进行了多次改进。本文运用 HPM 课例分析框架，对两节课在数学史料的选择、融入方式、运用效果等方面的异同点进行比较和分析，以期为 HPM 课例研究提

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究（A8）。

供参考。

## 2 基本不等式的历史素材

### 2.1 古希腊数学文献

公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派已研究过算术中项、几何中项与调和中项。后来，尼可麦丘（Nicomachus, 1 世纪）和帕普斯（Pappus, 3 世纪）统一了各类中项的定义。欧几里得《几何原本》第 2 卷命题 5 称："将一条线段二等分，再分成不相等的线段，则由二不相等的线段构成的矩形与两个分点之间一段上的正方形之和等于原线段一半上的正方形。"[1] 设不等的两条线段长分别为 $a$ 和 $b$，上述命题相当于一个代数恒等式：

$$ab+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2。$$

欧几里得的证明思路是"将矩形化为等积的矩尺形，再将其补成正方形"，如图 1 所示，由上述恒等式可得不等式（$a>0,b>0,a\neq b$）

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad （1）$$

即

$$\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2} \qquad （2）$$

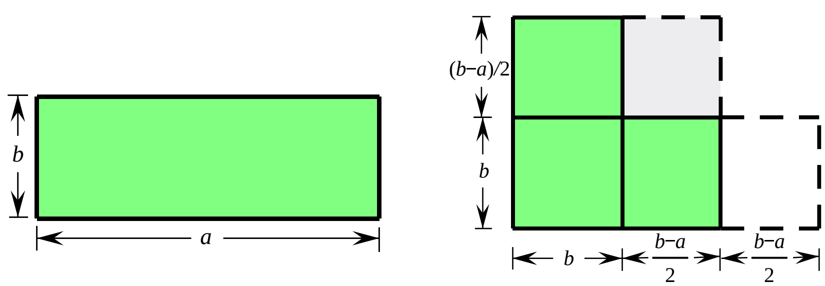



图 1 《几何原本》卷二命题 5 的另一种证明

公元前 2 世纪左右，古希腊数学家芝诺多鲁斯（Zenodorus）著《论等周图形》，此书中给出了以下命题："在边数相同、周长相等的所有多边形中，等边且等角的多边形的面积最大"[2]。考虑长为 $a$、宽为 $b$ 的矩形以及与之等周的正方形，即得不等式（1）或（2）。

公元 3 世纪末，古希腊数学家帕普斯在同一个半圆上作出了三类中项。如图 2，以 $AB$ 为直径

作半圆 $ADB$，$CD\perp AB$，$OD$ 为半径，$CE\perp OD$，则 $OD$、$CD$ 和 $DE$ 分别为 $AC$ 和 $CB$ 之间的算术、几何和调和中项[3]。

### 2.2 中国古代数学文献

公元 3 世纪，赵爽在给《周髀算经》"勾股圆方图" 作注时，给出如图 3 所示的"大方图"[3]。设 Rt$\Delta EBF$ 的勾、股、弦分别为 $a$、$b$、$c$，则有

$$\left(a+b\right)^2=\left(b-a\right)^2+4ab,$$

$$\left(a+b\right)^2=2c^2-\left(b-a\right)^2=2\left(a^2+b^2\right)-\left(b-a\right)^2,$$

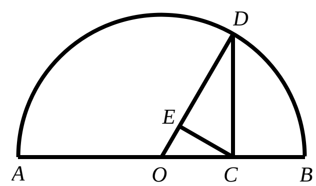



图 2 帕普斯三类中项的作图法

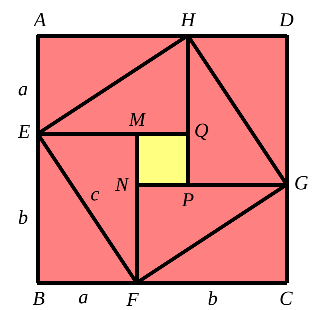



图 3 赵爽的大方图

因此可得不等式

$$4ab\le\left(a+b\right)^2\le2\left(a^2+b^2\right)。$$

《九章算术》勾股章中设题："今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何。" 其解法是："并勾股为法，勾股相乘为实，实如法而一，得方一步。"[4] 刘徽利用出入相补原理证明了上述公式。如图 4，用对角线将长和宽分别为 $a$ 和 $b$ 的矩形分成两个直角三角形，并用不同颜色标记不同类型的图形，得到"勾股容方图"。将图形重组，形成图 5 所示的矩形，即得出与直角三角形共直角的内接正方形边长为 $d=\dfrac{ab}{a+b}$。

利用"勾股容方图"，可以导出均值不等式。如图 6，延长 $IH$ 交 $EG$ 于 $K$，得到 Rt$\Delta HKE$。由三角形的相似性，易得 $HK=b-\dfrac{2ab}{a+b}$，$KE=\dfrac{2ab}{a+b}-a$。由 $CD>CB$，得 $HK>KE$，故得

$$b-\frac{2ab}{a+b}>\frac{2ab}{a+b}-a,$$

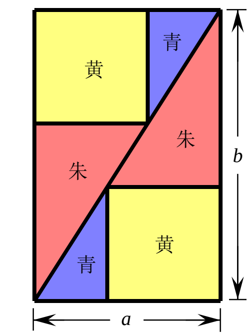



图 4 刘徽的勾股容方图

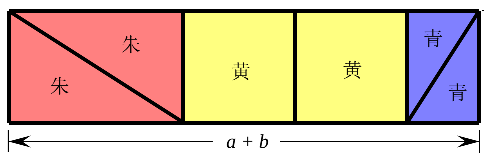



图 5 刘徽对勾股容方公式的证明

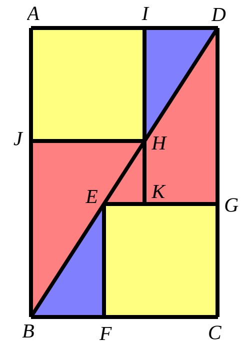



图 6 刘徽的勾股容方图

即

$$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2},$$

由此可得不等式（1）或（2）。

### 2.3 相关应用

1471 年，德国数学家雷吉奥蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）在给爱尔福特大学罗德教授的信中提出如下问题："一根垂直悬挂的杆子，从地面上哪一点看上去它最长？"[5] 此即"最大视角"问题，被称作数学史上的第一个极值问题。

16 世纪，意大利建筑大师帕拉第奥（A. Palladio, 1508-1580）认为建筑的美产生于形式，他在著作《建筑四书》中指出，具有一定形式和比例的房间是优美的[6]。他给出了优美房间的长、宽和高所满足的规则，其中有两类房间的高分别等于长和宽的算术中项与几何中项。

## 3 两节课的宏观比较

### 3.1 教学目标和重难点

两节课共有的教学目标：

（1）了解数学史料，经历基本不等式的探究与发现过程；

（2）掌握两个基本不等式及其应用前提，并利用它们求解相关最值问题；

（3）通过最值的应用，理解基本不等式在实际生活中的用途与重要性。

不同之处在于，教师 A 注重让学生去亲历基本不等式产生的过程，培养学生逻辑推理、直观想象和数学建模的素养，使学生理解基本不等式的意义；教师 B 则着重从历史上的数学问题出发，让学生在探究中发现基本不等式，领悟转化的思想、品味数学文化。

两节课的教学重、难点也是一致的：

教学重点：基本不等式的证明方法与应用前提；

教学难点：基本不等式的几何探究及其在最值问题中的灵活应用。

### 3.2 教学过程

教师 A 和 B 的教学过程主要分为情境创设、证明探究、新知运用、课堂小结和布置作业五个环节，具体内容见表 1。

表 1 A 和 B 的教学环节对比

| 环节 | 教师 A | 教师 B |
| --- | --- | --- |
| 情境创设 | 从蹦床公园中海绵池的形状改建引入，让学生思考面积的变化规律。 | （1）课前播放文艺复兴时期意大利建筑大师布鲁内莱斯基建造穹顶的微视频；<br>（2）引出古希腊数学家帕普斯给出的算术中项与几何中项定义；<br>（3）计算意大利建筑大师帕拉第奥《建筑四书》中两个房间的高（长和宽的算术平均数与几何平均数）。 |
| 证明探究 | （1）学生用作差法得出基本不等式；<br>（2）引入等周问题，学生小组合作、利用尺规作图探究古人的几何证法，再借助几何画板直观演示不等式中取等号的情况；<br>（3）将不等式推广到一般情形，并引导学生进行两种变形，获得两个基本不等式的严谨定义；<br>（4）引出算术平均数和几何平均数，归纳两个基本不等式的几何意义。 | （1）学生利用相似三角形性质求解《九章算术》中的“勾股容方”问题；<br>（2）教师介绍出入相补原理，学生小组合作拼图，探究中国古代数学家刘徽的解法；<br>（3）进一步研究“勾股容方图”，利用相似观点探究两直角边的数量关系，从几何角度得到两个基本不等式；<br>（4）引导学生用作差法给出两个基本不等式的代数证明。 |
| 新知应用 | （1）以例题让学生体会“积定和最小，和定积最大”，并总结应用条件；<br>（2）利用基本不等式解决生活中的最值问 | （1）首尾呼应，比较帕拉第奥眼中“好房间”的高；<br>（2）用基本不等式解决现实生活中的最值问题，进而总结“积为定值，和有最值”； |

| | | |
|---|---|---|
| | 题，然后以“最大视角”问题来强化其广泛的应用性；<br>（3）播放微视频，介绍中国古代数学家赵爽的“大方图”。 | （3）学生讨论、改编例题并求解，进而总结“和为定值，积有最值”。 |
| 课堂小结 | 让学生回答：学到了什么？印象最深刻的是什么？还有什么困惑？ | （1）小结知识点；<br>（2）总结基本不等式的用途与意义。 |
| 布置作业 | 根据拓展材料，写一份关于均值不等式的探究小报告。 | 完成等周问题的变式题，并与一元二次函数解法作对比。 |

从表 1 可见，教师 A 和 B 均采用了 HPM 的视角，相同之处在于五个着眼点：学生（激发兴趣）、活动（合作探究）、方法（数形结合）、文化（中西交融）、应用（走向生活）。不同之处在于：A 从生活的角度出发、关注学生的认知起点，蹦床情境的背后具有历史文化底蕴，引入比较自然；接着在证明探究环节，自然过渡到欧几里得的命题，基本不等式发生与发展的逻辑十分贴切且顺畅。B 直接从历史角度出发，用蕴含算术、几何中项的建筑情境作为引入；在证明探究环节，借助“勾股容方”问题及其解法来导出基本不等式，整个过程散发着浓郁的数学文化气息、创新性较强。

## 4 两节课的微观比较

以下我们从史料的适切性、融入的自然性、方法的多样性和价值的深刻性[7]对两节课进行微观比较。

### 4.1 史料的适切性

在 HPM 实践中，史料的选取原则有科学性、趣味性、有效性、可学性和人文性[8]。本文按照教学环节来分析史料的适切性，见表 3。

首先，由于 HPM 专业学习共同体实现数学史资料共享，教师 A 和 B 所用的素材来自高校研究者的历史研究，其科学性均得到保障。教师 A 在情境创设环节引入蹦床公园中海绵池的改建问题，体现了趣味性、可学性和有效性。在证明探究环节，欧几里得几何图形为引出基本不等式创造了条件，体现了可学性和有效性。在新知应用环节，A 引入史上第一个最值问题——“最大视角”问题，体现基本不等式的应用，虽符合有效性和趣味性原则，但由于该问题的求解需要利用

表 3 A 和 B 所用历史素材的对比

| 环节 | 教师 A | 教师 B |
|---|---|---|
| 情境创设 | 古希腊数学家芝诺多鲁斯的等周问题。 | （1）帕普斯的算术中项与几何中项定义；<br>（2）帕拉第奥《建筑四书》中“好房间”涉及的算术平均数与几何平均数。 |
| 证明探究 | 《几何原本》第 2 卷命题 5。 | （1）《九章算术》中的“勾股容方”问题；<br>（2）刘徽关于“勾股容方”公式的证明。 |
| 新知应用 | （1）数学史上的“最大视角”问题；<br>（2）赵爽的“大方图”。 | （1）根据帕拉第奥“好房间”改编的问题；<br>（2）等周问题的应用。 |
| 布置作业 | 帕普斯的半圆模型。 | 等周问题的变式。 |

和角正切公式，不符合学生的知识基础，缺乏可学性。接着用微视频介绍赵爽的“大方图”，引起学生好奇，富有趣味性和人文性；补充的证法增进学生对基本不等式的理解，体现有效性。拓展作业涉及帕普斯的半圆模型，为学生提供进一步探究基本不等式的机会，符合可学性和有效性原则。

教师 B 在情境创设环节引入算术中项与几何中项的建筑背景，体现了人文性；帕拉第奥“好房间”所涉及的两类平均数，为基本不等式的探究做好了铺垫，体现了趣味性和人文性。在证明探究环节，B 抛出“勾股容方”问题，并介绍刘徽的证明方法，为基本不等式的推导创造了条件，符合可学性和人文性原则，但有效性体现不足。

### 4.2 融入的自然性

要将数学史自然地融入数学教学，教师需要将知识的历史序、逻辑序和学生心理序有机统一起来。以下是两位教师的教学片段与评析。

**（1）教师 A 的教学片段**

**师**：正方形海绵池与长方形海绵池有什么关系？

**生**：周长相等。

**师**：其实这就是历史上的等周问题，古人很早就进行了研究。同学们也做了课前问卷，有的古人认为周长越大，面积就越大，你觉得古人的想法合理吗？

**生**：不合理。

**师**：那么他们如何探究这个问题呢？古代数学家并不会代数解法，他们其实是借助了几何作图。今天我们就追寻古人的足迹，小组合作、利用尺规作图去截出正方形的边长，探究长方形与正方形的面积关系。

小组探究活动之后，学生代表分享了作图方法，教师 A 借助几何画板来直观演示。

**师**：同学们发现了什么？

**生**：长方形面积比正方形面积小。

**师**：能用简单的式子表达吗？

**生**：当 $a \neq b$ 时，$ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$。

**师**：非常好，大家从几何模型抽象出这个代数表达式，那么它背后存在的几何意义是什么呢？

**生**：周长相等的矩形中正方形的面积最大。

**师**：这就是我们今天要研究的基本不等式。

**评析**：关于基本不等式，教科书中采用的逻辑体系是从一般的不等关系、代数不等式及其解法到基本不等式。在这样的逻辑体系中，基本不等式只是作为特殊的不等关系而出现，因而教科书无意去探求其背后的动因。从历史上看，等周问题是导致基本不等式诞生的动因之一，教师 A 借助海绵池面积问题引出基本不等式，符合历史序；关于等周长方形和正方形面积的大小关系，学生在小学和初中阶段已有接触，因此该情境符合学生的认知基础；同时，A 在课前问卷中介绍了古人对周长和面积关系的误解，再加上课上提出的实际问题，有效地激发了学生的学习欲望。事实上，当教师在课堂上再现知识的历史动因时，往往就激发了学生的学习动机。另一方面，从海绵池形状变更前后的几何模型，学生实际上建立了长方形与正方形面积之间的恒等式，因而遵循了“从等式到不等式”的逻辑序。可见，在 A 的课堂上，数学史的融入是比较自然的，基本实现了逻辑序、历史序和心理序的统一。

**（2）教师 B 的教学片段**

**师**：同学们知道了出入相补原理，接下来小组合作，把“勾股容方图”拆开来重新拼，求出正方形的边长 $x$。

活动之后，各小组展示了几类长方形的拼图方案。

**师**：很聪明，这就是古代数学家刘徽的做法。求出 $x$ 是多少？

**生**：$x = \dfrac{ab}{a+b}$。

**师**：这种方法非常简洁，接下来我们继续研究“勾股容方图”中的 Rt$\Delta HKE$（图 6），试试看，能否求出两条直角边？

**生**：能。

**师**：好，请同学说说思路。

两位学生积极分享了自己的做法：一位利用相似三角形法，另一位利用各边长之间的数量关系做差求解，两位同学都得出 $HK = b - 2x$，$KE = 2x - a$。

**师**：$HK$ 与 $KE$ 之间有什么数量关系呢？

**生**：$HK > KE$。

**师**：为什么？

**生**：Rt$\Delta HKE$ 与 Rt$\Delta DCB$ 相似，而 $DC > CB$。

**师**：很好，那么大家把边长代入 $HK > KE$ 中，看看式子能不能化简？

**生**：（师生互动）$ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$。

**师**：还能发现什么？

**生**：两边开方，几何平均数小于算术平均数。

**评析**：教师 B 从刘徽的“勾股容方图”出发，引导学生先求出直角三角形内接正方形的边长，然后根据直角三角形的相似性，从直角三角形直角边的大小关系得出基本不等式，遵循“从几何上的不等关系到代数上的不等关系”的逻辑序，十分创新。但是，刘徽的“勾股容方图”本身并非导致基本不等式产生的历史动因，就像赵爽“弦图”的初衷也无关基本不等式一样。今天，“勾股容方图”和“弦图”被用于基本不等式的证明，颇有点“无心插柳”的味道。相比较而言，“弦图”显然比“勾股容方图”更直观。因此，虽然 B 的设计很创新，但从“勾股容方图”到基本不等式，并不符合历史序，也未能有效地揭示基本不等式产生的动因，因而也不符合学生的心理序。可见，在 B 的课堂上，数学史的融入在自然性上打了折扣。

### 4.3 方法的多元性

数学史融入教学有四种方式：附加式、复制式、顺应式和重构式。

教师 A 从海绵池的改建方案中抽象出长方形等周问题，引导学生用尺规作出与长方形等周的

正方形，从中探究等周正方形与长方形的面积关系；接着用代数形式来表征上述关系，得出代数恒等式，最后，从恒等式中得出基本不等式。因此，A 重构了基本不等式的产生过程。学生在探究过程中所借助的几何模型，实际上是《几何原本》中命题所涉及图形的改编，是数学史料的顺应式运用。在新知应用环节，复制式地采用了雷吉奥蒙塔努斯的“最大视角”问题。通过微视频介绍赵爽的“大方图”以及基本不等式的相应证明，属于附加式。利用帕普斯半圆模型设计探究任务，也是数学史料的顺应式运用。

教师 B 结合学生课前观看的建筑视频，首先附加式引出帕普斯的算术中项与几何中项定义。接着，让学生计算帕拉第奥“好房间”中与高相关的两类平均数，是数学史料的顺应式运用。然后，复制式运用“勾股容方”问题让学生求解，在学生交流解决方案之后，教师介绍刘徽的原始解法，建立古今联系，是历史上问题与解决方法的复制式运用。B 借助“勾股容方图”，引导学生进一步探究直角三角形的边长关系，最后导出基本不等式，是数学史料的顺应式运用。最后，在新知应用环节，改编帕拉第奥“好房间”中与高相关的问题，并以等周问题为背景设置应用题，也属于顺应式。

可见，在 A 和 B 的课堂上，数学史的运用方式都是多元的，但 A 运用了重构式，而 B 没有。

### 4.4 价值的深刻性

数学史融入数学教学主要有六类教育价值：知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效。

**（1）A 的教学**

在知识维度上，数学史启示教师重构基本不等式的发生和发展过程，因而帮助教师构建了知识之谐。在证明探究环节，欧几里得的几何方法、微视频所呈现的基于“弦图”和“勾股容方图”的几何证法，彰显了方法之美。

在过程维度上，教师综合借鉴历史上的等周问题以及《几何原本》中的命题来设计探究活动；基于数学史的几何方法有助于培养学生的直观想象、逻辑推理和数学抽象素养；提供的课后拓展材料也有助于提升学生的阅读能力。

在情感维度上，从欧几里得作图法到赵爽弦图、从等周问题到“最大视角”问题，既有中西文化的交融，又有数学文化对生活的启示，展示了文化之魅[9]。探究活动之后，A 将学生的方法与欧几里得方法进行对照，提升了学习数学的自信心。问卷调查表明，等周问题让学生感悟到数

学背后的理性精神。此外，数学史的融入激发了学生的学习兴趣。因此，A 借助数学史达成了德育之效。

**（2）B 的教学**

在知识维度上，虽然 B 从建筑的角度引入，设计比较新颖，但算术平均数与几何平均数的定义以及两者的关系是直接抛出来的，因而比较突兀，在知识之谐的构建上有待于改进。但在证明探究环节，B 利用“勾股容方图”，引导学生发现基本不等式，数学史彰显了方法之美。

在过程维度上，“勾股容方”问题为学生提供了探究机会，也有助于培养学生的直观想象和逻辑推理素养。

在情感维度上，设计的情境充满数学文化味，既让学生感受到数学与建筑之间的联系，又体会到数学背后的多元文化，展示了文化之魅。从问卷调查可知，“勾股容方图”给学生带来新奇的感受，激发了他们的学习兴趣。而且，中国古代的“勾股容方”有助于学生了解中国古代的数学文化。因此，B 的课堂蕴含了比较丰富的德育元素。

## 5 结 语

综上分析可知，A 和 B 所用的史料都比较丰富，符合科学性、趣味性、可学性和人文性原则，但 B 所用史料的有效性不足。A 和 B 运用数学史的方式均有附加式、复制式和顺应式，A 还运用了重构式。A 重在重构基本不等式的发生与发展过程，基本实现了逻辑序、历史序和心理序的统一，融入较为自然；B 注重基本不等式的几何探究与推导过程，呈现了清晰的逻辑序，但未能兼顾历史序与心理序。在两节课中，数学史都体现了多元的教育价值，但由于 B 未采用重构式，因而在追求教学设计创新的同时忽略了知识之谐的构建。

通过对两节课的比较和分析，我们得到以下启示。

首先，数学史融入数学教学，营造了不一样的课堂。数学史为学生提供了探究机会，为培养核心素养创造了条件；数学史让课堂变得人性化，充满文化的芬芳；数学史也为课堂注入了丰富的德育元素。因此，HPM 视角下的数学教学有着广阔的前景，必将成为一种常态。

其次，在将数学史融入数学教学时，教师需要在创新性和有效性之间寻求平衡。发生教学法强调，要让学生认识到新知的产生是源于问题解决的需要[10]。透过数学史，我们才能找到知识产生的动因；课堂上运用数学史的重要目的之一就在于揭示新知的必要性，激发学生的学习动机。

如果学生学会了一个命题的推导，却不知道该命题从何而来、为何而来，那么他对于命题不可能有深刻的理解，数学史也就失去了应有的意义。这就是为什么有效性是教师选取数学史材料的重要原则之一。

再次，教育取向的数学史研究始终是教学实践的重要基础，HPM 视角下数学教学的成功与精彩，往往取决于史料本身。本文中的两节课所采用的数学史料仅仅局限于几何领域，而基本不等式本身所属代数领域的史料却付之阙如，有待于深入挖掘和整理。学无止境，教无止境，HPM 实践研究永无止境。

## 参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[2] 汪晓勤, 郭锦融. 古希腊数学中的均值不等式[J]. 中学数学月刊, 2015, (02): 54-56.

[3] 汪晓勤. 均值不等式: 从历史到课堂[J]. 数学传播, 2014, 38(04): 53-67.

[4] 汪晓勤. 从“勾股容方”到均值不等式[J]. 数学通报, 2015, 54(02): 7-9.

[5] 关嘉欣. HPM 视角下均值不等式的教学设计[J]. 中学数学研究 (华南师范大学版), 2017, (05): 32-33.

[6] 文静. 行走中欣赏西欧现代建筑之十: 维琴察的巨匠: 帕拉第奥[J]. 中国对外贸易, 2013, (01): 88-92.

[7] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2017, (01): 35-41.

[8] 陈晏蓉, 汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析[J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2017, (01): 37-43.

[9] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, 42(02): 39-45.

[10] 吴骏, 汪晓勤. 发生教学法: 从理论到实践——以数学教学为例[J]. 教育理论与实践, 2013, (02): 5-7.

# HPM 视角下的“点到直线距离”同课异构课例分析*

彭思维

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

## 1 引 言

“点到直线的距离”是沪教版高二数学下册第 11 章第 4 节的内容，是解决点线问题、线线问题的基础，也是研究其他解析几何问题的工具。在此之前，学生学习了两点间的距离公式、定量刻画直线的倾斜程度及两相交直线的夹角。教科书主要内容是通过向量的投影（以下简称向量法）解决直线 $l$：$Ax+By+C=0$ 外一点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 到 $l$ 的距离。点到直线距离公式的推导是用代数研究几何问题，用几何简化代数运算的典型例子。现有教学设计有：

- 从特殊到一般，猜想点到直线的距离公式，再用向量法加以证明[1]；
- 用交点法和向量法推导公式[2]；
- 从特殊到一般，用三角法、面积法、向量法、最值法推导公式[3]。

上述教学设计大都以向量法为主来推导公式，虽然该方法比较简单，但是学生在之前学习的向量知识中大部分与向量的基本运算和数量积有关，尚未树立用向量法解决代数问题的观念，所以向量法对学生而言并非最自然的方法。

HPM 视角下的数学公式教学关注学生的认知基础，运用相关历史素材，将公式的推导方法与学生心理发展结合起来，让学生经历公式推导的探究之乐，感受数学的方法之美和简洁之美。在实践中，由于不同教师的教学风格、个人倾向、学生水平的彼此不同，即使他们都采用了 HPM 视角实施教学，但所选取的数学史素材、设置的教学目标、教学过程和教学效果也会互不相同。

针对“点到直线的距离”这一主题，HPM 工作室的教师 A 和 B 各从 HPM 视角实施了教学。教学之前，HPM 工作室围绕教学设计开展了研讨，在此基础上，A 和 B 对各自初步的教学设计进行了改进。本文关注以下问题：A 和 B 是如何根据学生认知水平借鉴和运用数学史的？他们又是如何处理公式推导和公式应用之间关系的？两节课中，数学史所体现的教育价值有何异同？为此，

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究（A8）。

我们采用 HPM 课例分析框架，对两节课进行比较和分析，以期为未来的 HPM 课例研究提供借鉴。

## 2 相关历史素材

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l$：$Ax+By+C=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1}$$

（1）是解析几何历史上的重要公式，考察 19-20 世纪出版的英美解析几何教科书，我们发现其推导方法丰富多彩，大致经历以下几个阶段。

### 2.1 化点线距离为两点之间的距离

早期解析几何教科书多采用这种方法[4][5]：如图 1，先求过点 $P$ 且垂直于 $l$ 的直线与 $l$ 的交点 $Q(x_1,y_1)$ 的坐标，再利用两点之间距离公式得出（1）。为了简化计算，19 世纪英国数学家杨格（J. R. Young, 1799-1885）将 $l$ 的方程化成关于 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的方程，与 $PQ$ 的方程联立得

$$\begin{cases}A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C)\\ B(x-x_0)-A(y-y_0)=0\end{cases}$$

解出 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$，从而直接计算距离[6]。到了 20 世纪，又有人在杨格的基础上采用了设而不求法[7]，即将联立的两个方程两边平方求和，进一步简化计算。

### 2.2 化点线距离为直角三角形边长

为了简化计算，19 世纪英国著名数学家托德亨特（I. Todhunter, 1820-1884）对点线距离作了另一种方式的转化，用三角方法来解决[8]。如图 2，过点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线，垂足为 $M$，交 $l$ 于点 $R\left(x_0,-\dfrac{Ax_0+C}{B}\right)$。直线 $l$ 的倾斜角为$\alpha$，则 $\angle QPR=\alpha$（$0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）或 $\pi-\alpha$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，$\cos\angle QPR=\dfrac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。故得

$$PQ=d=PR\times\cos\angle QPR=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

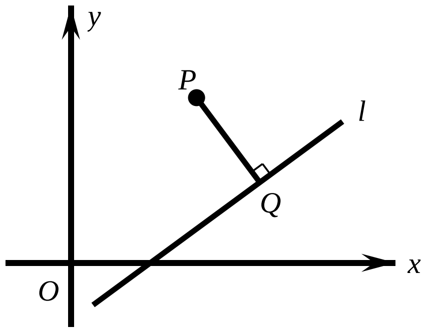



图 1　化点线距离为两点之间的距离

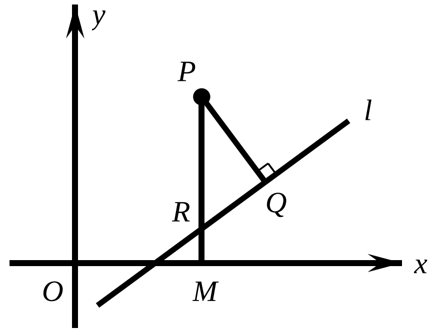



图 2 化点线距离为直角三角形边长

也可以过点 $P$ 作 $x$ 轴的平行线，在得到的另一个直角三角形中解决问题。

## 2.3 化点线距离为三角形的高

19 世纪末，英国数学家约翰斯顿（W. J. Johnston, ?-1924）将点线距离转化成三角形的高，通过用代数方法求得三角形的面积[9]，从而得出公式（1）。如图 3，直线$l$与坐标轴的交点 $M$、$N$ 的坐标为$M=\left(-\dfrac{C}{A},0\right)$，$N=\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$，则有

$$S_{\Delta PMN}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -\dfrac{C}{A} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{C}{B} & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|MN|\times d=\frac{1}{2}\left|\frac{C}{AB}\right|\sqrt{A^2+B^2}\times d .$$

为了避免使用行列式，我们可以对上述方法进行改编。如图 4，过 $P$ 作 $l$ 的平行线交 $x$ 轴于 $R$，则

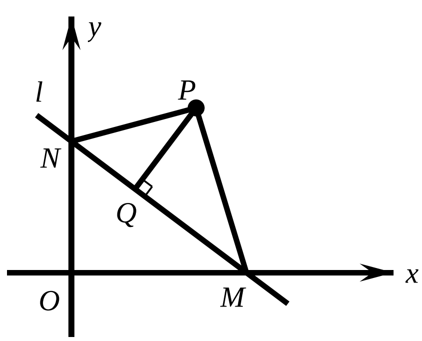



图 3 化点线距离为三角形的高

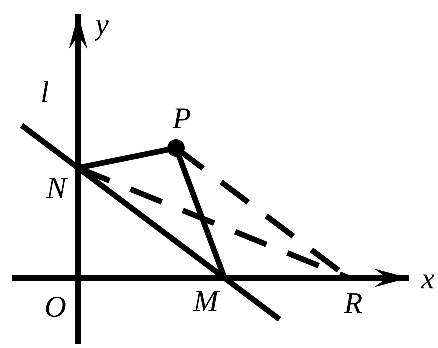



图 4 化点线距离为三角形高的改编

$$S_{\Delta PMN}=S_{\Delta RMN}=\frac{1}{2}MR\times ON=\frac{1}{2}\times\left|\frac{C}{B}\right|\times|MR|=\frac{1}{2}\times d\times\left|\frac{C}{AB}\right|\times\sqrt{A^2+B^2}.$$

### 2.4 化点线距离为向量的投影

20世纪40年代以后，向量知识逐渐出现于西方数学教科书中，教科书编者开始用向量解决点线距离问题[10]。如图5，直线 $l$ 的法向量为$\vec{v}=(A,B)$，在$l$上任取一点$P_1(x,y)$，则$\overrightarrow{PP_1}=(x-x_0,y-y_0)$。于是得点到直线的距离为

$$d=\frac{\left|\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}\right|}{|\vec{v}|}=\frac{\left|A(x-x_0)+B(y-y_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

此法即为现行沪教版教科书中的方法。

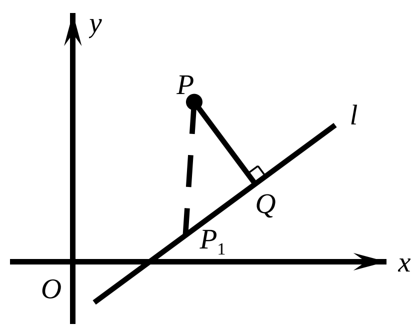



图 5 化点线距离为向量的投影

### 2.5 函数的视角

向量方法并没有为点到直线距离公式的推导画上句号。20 世纪，美国数学家泰勒（A. E. Taylor, 1911-1999）在其《微积分与解析几何》中，抓住距离概念的本质，通过函数的最值来求点到直线的距离[11]。在直线 $l$ 上任取一点$(x,y)$，将直线方程变形为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C)$$

点 $P$ 到直线 $l$ 的距离 $d$ 为二元函数 $f(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的最小值。由柯西不等式得

$$\left|A(x-x_0)+B(y-y_0)\right|\le\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

因此有

$$\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2} \geq \frac{\left|A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

我们也可以通过一元函数的最值来推导距离公式。

## 3 两节课的宏观比较

### 3.1 教学目标和重难点

两位教师设定的教学目标有：（1）掌握点到直线的距离公式及其推导方法；（2）会求两平行线间的距离；（3）理解点到直线距离的内涵。此外，B 还增加了一条教学目标：通过经历自主探究和合作互助，掌握用数形结合、转化、函数等思想过程来研究数学问题的方法，培养发散思维。

A 和 B 的教学重点也彼此不同。A 的教学重点是：点到直线的距离公式及其应用；B 的教学重点是：点到直线的距离公式探究过程及其中蕴含的数学思想方法、点到直线距离公式的应用。

两位教师的教学难点一致，都是：点到直线的距离公式的推导方法。

### 3.2 教学过程

教师 A 的教学过程分为情境创设、公式推导、知识运用、课堂小结四个环节，教师 B 在知识运用环节之后，增加了“历史回溯”环节。具体内容见表 1。

表 1 两位教师的教学环节对比

| 教学环节 | 教师 A | 教师 B |
|---|---|---|
| 情境创设 | 复习回顾定量刻画两直线相交的问题，进而询问如何定量刻画两平行线间的距离，引出点到直线的距离。 | 通过需要修建最短公路的问题引出点到直线的距离。 |
| 公式推导 | 教师引导学生思考推导方法，主要有交点法、面积法、三角法，教师主讲向量法，推导出点到直线距离公式，再进一步推出两平行线间的距离公式。 | 学生先自主思考，后小组交流，教师与每小组交流，学生上黑板展示想法，教师总结学生的方法。 |
| 知识运用 | （1）求两平行线间的距离；<br>（2）已知 $5x+12y-3=0$，求 | （1）求点到直线的距离<br>（2）已知 $5x-12y+8=0$，求 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ 的最小值。 | $\sqrt{x^2+y^2-6x-12y+45}$ 的最小值。<br>（3）求两平行线间的距离。 |
| 历史回溯 | 无 | 将学生的方法与数学家进行对比，并给出相应的历史材料，拓展设而不求法。 |
| 课堂小结 | （1）点到直线距离概念的内涵；<br>（2）点到直线距离公式的推导；<br>（3）点到直线距离概念的外延。 | （1）点到直线的距离公式；<br>（2）回顾公式的不同推导方法，讨论它们的优劣；<br>（3）数形结合、转化、函数等数学思想。 |

从表 1 可以看出，A 和 B 均未局限于教科书中仅有的向量法，而是运用了历史上多种方法来求点到直线的距离，但他们的教学设计却彼此不同。总体上说，A 以讲授为主、探究为辅；B 以探究为主、讲授为辅。在情境创设环节，A 主要从定性和定量刻画两直线位置关系的角度切入，B 则从实际问题引入，引导学生通过建系，将实际问题转化为代数问题求解。公式推导环节，A 主要采用讲授式和启发式，而 B 主要让学生自己探究公式的推导方法。在课堂小结环节，A 和 B 根据各自的教学目标进行小结，另外，教师 B 增加了“历史回溯”环节，并为学生引出了历史上另一种巧妙的方法——设而不求法。

## 4 两节课的微观比较

我们从史料的适切性、融入的自然性、方法的多样性和价值的深刻性四个维度对两节课进行微观的比较[13]。

### 4.1 史料的适切性

数学史材料的选取要根据学生的认知特点及教学内容，遵循趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性五个原则[14]。历史上，点到直线距离公式的推导方法有许多种，由于学生认知水平不同，所以需要选取的史料也不一样。

前已提及，对学生来说，向量法并非最自然的方法。在课例研讨过程中，教师 A 认真分析了学生的认知特点，认为学生最容易接受的是交点法、面积法和三角法，所以采用历史上相应三种

方法的思路进行讲解。在学生用较熟悉的知识解决问题后，回顾：向量的数量积能解决角和长度的问题，在学生的最近发展区进行提升，引导新的解题思路。教师 B 所教班级的理科成绩十分优异，多数学生接受过理科竞赛的训练。因此，B 大胆地把课堂交给学生，除原点距离法外，学生将历史上的七种方法都想出来了。B 进行了古今对照，并拓展了设而不求法。

由此看来，虽然两位教师所用的史料不尽相同，但都是根据学生认知特点来选择的，符合可学性原则。所用史料有助于学生理解、掌握点到直线的距离公式及其推导过程，最终帮助教师达成了教学目标，符合有效性原则。

遗憾的是，A 和 B 所用史料都仅仅局限于历史上的各种静态的推导方法，没有涉及具体的数学人物、数学应用和历史背景，因而缺失了人文性和趣味性。

### 4.2 方式的多元性

数学史融入数学教学方式，有附加式、复制式、顺应式和重构式四种[13]。

教师 A 首先是通过复制式介绍点到直线距离的交点法、三角法、面积法的思路，在讲解向量法时，使用顺应式，对向量法进行了适当改编，为讲解如何判断两点在直线的异侧或同侧做铺垫。在所有推导方法讲解完毕后，采用附加式简单介绍了这些方法都是历史上数学家使用的方法。

教师 B 则是通过学生的思考得到的方法再现历史上的各种方法，采用了复制式融入数学史，但同时也采用了顺应式，对历史上的方法进行改进，寻求更优解。又在“历史回溯”环节采用附加式介绍了有关方法和相应的数学著作，并拓展了设而不求法。

由此可见，A 和 B 均采用了复制式、顺应式和附加式，均未采用重构式。但 B 附加式选用的史料比教师 A 更丰富。

### 4.3 融入的自然性

数学史融入数学公式教学，需要考虑教学内容的历史序、数学内在的逻辑序和学生心理序，自然地将数学史融入课堂教学中[13]。以下是教师 A 和教师 B 的教学片段。

**（1）教师 A 的教学片段**

教师让学生思考求点到直线距离的方法，学生回答了交点法，教师问还有没有其他的方法，学生再思考后回答用三角比的方法求距离。

**师**：很好，请坐，这是把垂线放到了直角三角形中，历史上的一种方法跟刚刚这位同学差不多，它是过 $P$ 作了 $x$ 轴的垂线，最后也能求出点到直线的距离。但我刚刚根据同学的回答所画的图，包括历史上人们画的这个经典的图，都有一个缺陷，都默认了直线的倾斜角为一个锐角。如

果倾斜角为钝角，那就需要再重新考虑一下。还有没有别的方法呢？

学生思考后回答了三角形面积法，教师讲解了面积法的思路。

**师**：非常好，刚刚大家用了这三种方法求出了点到直线的距离，其实也是历史上研究点到直线距离最常见的三种思路，刚刚同学们都想到了。最近我们才学习了向量，为什么我们要引入向量数量积的概念？

**生**：研究角度。

**师**：很好，除了研究角度，还有吗？

**生**：研究长度。

**师**：很好，数量积可以用来研究长度，那大家能不能从数量积的角度来考虑点到直线的距离？

【评析】教师 A 在提出问题后，并没有像教教科书那样直接给出向量法，而是倾听学生的想法，在学生回答完交点法后，由于计算复杂，进一步引导学生思考其他解法，陆续出现了三角法和三角形面积法，然后教师给出向量法并重点讲解，在知识运用环节又引导学生用函数的观点看待点线距离，渗透点到直线距离概念的内涵。教师并没有刻意地去强调数学史，而是将数学史无声地融入公式推导和引导学生思考的过程中，丝毫没有增加学生在公式推导过程中的认知负荷。方法的呈现既符合距离公式的历史序，也符合学生的心理序。另外，A 也兼顾了教科书中的“从向量到点线距离”的逻辑序。

**（2）教师 B 的教学片段**

教师对学生的各种方法进行讲解和评价之后，询问学生最喜欢的方法并在课堂小结后介绍了数学史。

**师**：（播放微视频，介绍西方早期教科书中的推导方法）其实刚才大家所想出的各种方法都是历史上数学家们用过的方法。其中的交点法，作垂线求交点坐标，再用两点间的距离公式进行计算即可。但刚刚同学们用弦长公式来求距离，实际上简化了历史上数学家的方法，减少了计算量。还有三角形面积法，数学家和你们一样，也是用行列式做的。刚刚几位同学都觉得向量法很巧妙，但这种方法在历史上出现得很迟，而你们也是最后想出来的。

**师**：（播放微视频，介绍历史上数学家推导点到直线距离公式的方法）当然，如果大家对刚才这些方法还觉得不够满意的话，自己可以去查阅更多的数学文献。

**生**：（发出感叹，比较活跃）哇哦!

**师**：（播放设而不求法方法）刚才大家想到的各种方法中，大家觉得柯西不等式运算最简便，其实历史上还有一种比较巧妙的方法，我给大家扼要介绍一下。

【评析】教师 B 给予学生探究机会后，在课堂中巡视各小组的方法，充分调动学生的主观能动性，在已有的认知基础上，激发学生思考问题的兴趣，符合学生的心理序。B 根据学生探究得到的方法，按照如下顺序加以讲解：交点法→三角形面积法→三角法→向量法→最值法，基本符合历史序，同时又兼顾了教科书“从向量到点线距离”的逻辑序。

因此，在 A 和 B 的课堂中，数学史的融入都比较自然。在 A 的课堂中，数学史的呈现以隐性为主，而在 B 的课堂中，数学史的呈现更为显性化。

**4.4 价值的深刻性**

数学史融入数学教学主要有六种教育价值：知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、德育之效和文化之魅[13]。

教师 A 通过介绍历史上的各种方法向学生展示了数学的方法之美，拓宽了学生的思维，让学生了解到可以运用几何、代数、向量三种方法解决问题。在公式推导环节，A 指出了学生想到的几种方法也是历史的方法，增强了学生的自信心。在知识运用环节，A 又反问一句“如果回到两年前，大家会用什么方法解决这个问题”，让学生回想两年前自己的知识储备会如何解决问题，其实在某一方面也是让学生自己经历数学的发展。A 的提问极大地激起了学生的兴趣，学生的反响很热烈，纷纷思考随着自己知识的发展，解决问题方法的变化，这个过程展示了数学史知识之谐和德育之效的价值。

教师 B 通过把问题抛给学生，学生独立思考后和同学一起交流，让学生亲历知识解决的过程，积累数学活动经验，充分营造了探究之乐，让学生自己感受知识之谐、方法之美。教师一直在鼓励学生创造新的方法，从代数和几何的角度思考更简洁的办法，培养学生直观想象、数学运算的核心素养，达成了能力之助。最后教师将历史上各种方法与学生的方法进行对比，学生的想法和数学家的想法有相通之处，树立了学生的自信心，增强了学生的学习兴趣。进一步展现学生没想到的古人的方法，让学生感受到历史上数学家们不断追求简洁，不断创新的精神，鼓励学生不断探索，彰显了数学史德育之效。

从 A 和 B 的教学过程来看，由交点法到向量法，揭示了公式推导方法的发展过程，体现了数学史“知识之谐”的价值；不同方法的展现让学生感受到数学史的“方法之美”，同时培养了学生

直观想象、数学运算的核心素养，达成了 “能力之助”的教育价值。将数学家的方法与学生的方法古今对照，在树立学生的自信心的同时，激发学生进一步思考的兴趣，彰显了数学史“德育之效”。除此之外，B 让学生自主推导公式，并和小组成员交流，为学生营造了“探究之乐”。

## 5 结 语

通过以上分析可见，两节课所用的史料基本符合可学性、科学性和有效性原则，但趣味性和人文性还有待加强。教师 A 和 B 均采用了顺应式、复制式、附加式，但未采用重构式。在 A 和 B 的课堂上，数学史的运用既符合历史序和学生的心理序，也兼顾了教科书的逻辑序，融入较为自然。在两节课中，数学史课堂都体现了知识之谐、方法之美和能力之助，部分体现了德育之效，但都未能很好地展示“文化之魅”。B 为学生提供了充分的探究机会，而 A 提供的探究机会较少。总的来说，两位老师的课堂“异”出结构“同”出精彩。但由于 B 的学生基础较好，能呈现历史上大部分方法并进行拓展，所以在 B 的课堂中，数学史体现了更多的教育价值。

通过对两节课的分析和比较，我们得到如下启示。

首先，选择合适的史料融入课堂教学。历史上关于公式推导的方法和素材有很多，但并不是每一种都适合学生现有的学情，因此需要根据学生的认知水平和教学目标，选择合适的史料融入课堂教学，必要时还需对史料作出裁剪和加工。

其次，选择恰当的历史方法发展学生的核心素养、理解数学概念的内涵。本课例选择的历史方法：将点线距离转化为直角三角形边长、直角三角形的高，都是从几何的角度简化代数运算，有利于发展学生的直观想象、数学运算等核心素养。从函数的观点研究点线距离，指出了点线距离概念的内涵，有助于加深对数学概念的理解。

最后，合理设置探究的时间，为学生营造探究之乐。B 教师的班级理科成绩优异，所以 B 教师用一半的时间让学生充分探究、表达自己的想法，学生让历史上精彩纷呈的方法重现于课堂，感受到了探究的乐趣；A 教师则只用了少部分时间让学生探究交点法、三角法、面积法，考虑到教学内容较多，缺少让学生探究向量法及其他方法的时间，有学生在课后提出疑惑：还有没有更好的办法推导点线距离公式。因此，要根据学情和教学内容，合理设置学生探究的时间，必要时可以适当删减一点教学内容。

两节点到直线距离的课例在史料选取上均缺乏人文性和趣味性，部分原因源于历史研究的局

限性。现有的历史研究中仅仅关注公式推导方法本身，没有注意相关人物、方法的背景，以及各种方法背后所反映的人文精神。HPM 视角下的公式教学可以关注上述问题，将相关史料及理性精神融入课堂，让学生更好地感受数学方法的发生和演进过程。

## 参考文献

[1] 赵云培. 展现数学思维过程, 体验探究学习经历——“点到直线距离”教学实践[J]. 数学学习与研究, 2010, (07): 61-62.

[2] 曾国光. 是强调方程思想, 还是突出向量方法?——谈 “点到直线的距离”处理两难的教学设计[J]. 数学教学, 2008, (04): 6-8+50.

[3] 王敏杰. 研究性教与学: 点到直线的距离课例[J]. 中学数学月刊, 2018, (01): 24-26.

[4] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry* [M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831.

[5] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836.

[6] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. London: John Souter, 1830.

[7] Gibson, G. A., Pinkerton, P. *Elements of Analytical Geometry* [M]. London: Macmillan & Co., 1919.

[8] Todhunter, I. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry as Applied to the Straight Line and the Conic Sections* [M]. London: Macmillan & Co., 1855.

[9] Johnston, W. J. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry* [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1893.

[10] Murnaghan, F. D. *Analytic Geometry* [M]. New York: Prentice-Hall, 1946.

[11] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1959.

[12] 杨懿荔, 汪晓勤. 20 世纪中叶前西方解析几何教科书中的“点到直线距离公式” [J]. 数学传播, 2016, 40(03): 85-96.

[13] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构: 以 “三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2017 , (01): 35-41.

[14] 陈晏蓉, 汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析[J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2017, (12): 37-43.

[15] 杨懿荔, 汪晓勤. “点到直线的距离”: 基于认知基础, 选择历史方法[J]. 教育研究与评论(中学教育数学), 2017, (02): 60-64.

[16] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

## 活动讯息

# 别裁历史入课堂，几何复习出新彩

## ——上海市通河中学 HPM 教学观摩与研讨活动

2019 年 11 月 20 日，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授带领 HPM 工作室成员、高校访问学者以及 HPM 研究方向的博士、硕士研究生，来到了上海市通河中学，组织 HPM 工作室教学观摩与研讨活动，此次活动也是宝山区高三数学的一次教研活动，宝山区高中数学教研员王凤春老师出席。该课例在汪晓勤教授及其 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 视角探究如何在高三复习课中讲授立体几何中的类比推理，授课教师为 HPM 工作室成员、上海市通河中学的张冰老师。

张老师这节课是从“圆”到“球”，从“三角形”到“四面体”来探究立体几何中的类比推理的高三复习课。首先，通过向学生介绍沪教版教材第 15 章《简单几何体》中球体积公式来提出问题：“课本上球的体积公式是怎么推导出来的？”接着，张老师引导学生回忆初中圆面积的推导方法：先分割大圆，得到小三角形，再求所有小三角形面积的和来近似得到圆的面积。随后张老师提出“大家是否可以类比圆面积的推导过程来推理出球的体积公式？”学生很快给出了推导思路。之后张老师和学生们一起从基本元素、基本量、基本图形三个方面总结了“平面图形与空间图形的类比关系”。在学生探究部分，张老师让学生分为 4 个小组，以小组为单位各猜想 1 道学案上从三角形到四面体的类比题，让学生把答案写在磁力贴纸上，贴在黑板上分享答案。最后，张老师和学生探讨 1 道运用类比推理思想的高考题，并与学生一起做了课堂小结，布置课后继续证明自己猜想的作业。

图 1 张老师课堂教学

图 2 课堂中师生互动

课后研讨的环节，首先，张老师从课程标准的相关解读、对不同教材的分析、教学内容的分

析、HPM 团队的帮助四个方面阐明自己对这节高三复习课的选题与准备工作，以及与华师大 HPM 团体的研讨与设计的过程。接着，其他代表老师对这节课进行了肯定与评价。之后，汪晓勤教授从这节课的方法之美、能力之助、文化之魅、德育之效、探究之乐五个方面的教育价值对这节课进行了解读，特别是张老师将学生课堂上的错误与历史上数学家阿耶波多的错误相联系，鼓励学生们要有不怕困难、从错误中学习的勇气，这样的教育正是体现了德育之效，之后汪老师提出了对这节课的一些建议，比如教师可以加强学生从二维到三维的思考。

图 3 课后研讨

这节高三复习课既是张冰老师作为 HPM 工作室成员开的一次公开课，也是宝山区高三数学组的教研活动，此次课堂观摩让大家看到一节精彩的 HPM 高三复习课，通过教学研讨我们也进一步明白了未来HPM高三复习课的改进方向与进步空间，我们有理由期待未来会有更加精彩的、更多类型的 HPM 课进入到我们的数学课堂中，并大放异彩。

（刘思璐撰稿）