上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2017 年第 6 卷第 6 期

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语——2017 年 HPM 研究回顾

在中国大陆，HPM 业已成为数学教育中的特色鲜明、富有魅力、充满活力的研究领域。迄今为止，我们从文献研究到课例开发、课例应用和案例教学，再到教材编写和教师专业发展，最后上升到理论探讨，建立了 HPM 研究的基本框架。

2017 年，HPM 学习共同体坚守“领悟、勤奋、协作、高效”的学训，焚膏继晷，辛勤耕耘，取得了丰硕的成果。

在文献研究方面，对一些核心数学概念（如极限、无理数等）在美英早期教科书中的嬗变过程进行了历史考证，为 HPM 课例开发提供教学素材和历史借鉴；对 ICME-13 中的 HPM 专题作了考察。

在理论探讨方面，在深入分析各学段 HPM 课例的基础上，确立了数学史教育价值的分类框架（知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效）以及用于课堂教学和教材编写的数学史料的选择原则（趣味性、可学性、有效性、科学性、人文性）；考察了基于数学史的新知引入方式和问题提出（HBPP）的策略；初步建立了 HPM 与 MKT 之间的联系。

在课例研究方面，合作开发或参与研讨了三角形面积、圆周长、初中数学序言课、完全平方公式、平行线、演绎证明、和角公式、点到直线距离公式、三角学序言课、圆锥曲线序言课、椭圆的定义与方程等课例。课例研究的流程以及课例撰写更加规范。此外，初步建立了同课异构的 HPM 课例分析框架。

在专业发展方面，从知识、信念和能力三个维度，对参与课例开发的执教者实施了个案研究。

在社会服务方面，我们主办了 500 人规模的新青年数学教师工作室东部论坛暨 HPM 暑期学校以及 150 人规模的第五届 HPM 教学研讨会，HPM 研究由于聚焦实践、紧接地气，正日益受到一线数学教师和数学教育方向研究生的关注，HPM 学习共同体正在进一步发展壮大。

回首丰收的 2017，我们深信，幸福是奋斗出来的！且让我们一起展望美好的 2018！

目 录

CONTENT

理论探讨

HPM 视角下的初中数学问题提出课例分析

丁倩文，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

数学史与数学教育之间的关系（HPM）是数学教育的重要研究领域之一，而 HPM 视角下的数学教学实践研究是 HPM 领域最主要的工作之一[1]。近年来，越来越多的大、中、小学教师对 HPM 产生了浓厚的兴趣[2]，相关的课例也日益增多。在这些课例中，数学史融入教学的方式可分为附加式、复制式、顺应式和重构式四种，除了附加式以外，其他三种方式都与数学问题提出息息相关。

所谓“问题提出”，是指在给定的情境下编制新的问题或在解决问题过程中对问题进行改编[3]。已有研究表明，关于问题提出的一个重要研究方向是探索教师和学生能够提出什么样的问题[4]。在一节数学课中，引入、探究、例题、练习诸环节都离不开数学问题，好的数学问题往往是成功的关键。另一方面，教师通过让学生参与问题提出活动，可以更好地了解学生对知识的理解情况，但这样的活动要求教师自己具备较好的问题提出能力[5]，并且能够创设出适合学生提出问题的情境[6]。因此，教师需要掌握相关的素材以及根据这些素材提出新问题的策略。

历史上的数学问题浩如烟海，为数学教学提供了丰富的素材。但历史问题并非都可以直接用于课堂教学，需要经过裁剪和加工；同时，很多历史材料本身并非数学问题，但往往可以成为教师提出新问题的背景或出发点。那么，在已有的初中 HPM 课例中，教师在提出数学问题时，究竟运用了哪些数学史素材？又采用了哪些策略来提出问题？本文试图通过课例分析来回答上述问题。

2 课例的选取

本文选取 2014 年-2017 年四年间发表的 15 个初中 HPM 课例作为研究对象[7-21]。这些课例的课题主要涉及代数和几何两个领域，对应的内容有数与式、方程与不等式、函数、

图形的认识、图形与变换、图形与坐标以及图形与证明。所有课例都是由大学研究者和中学一线教师合作开发，具体流程见图 1。

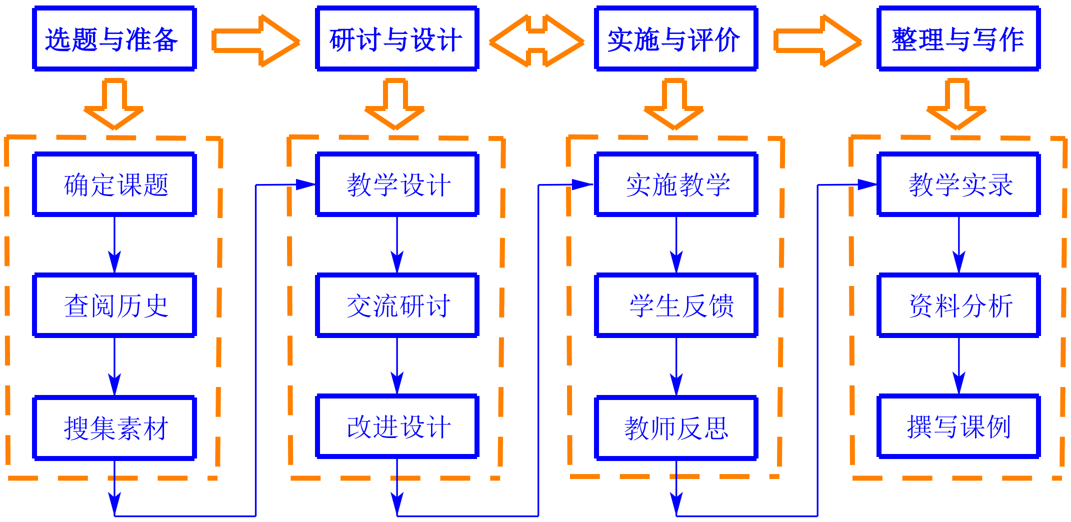

图 1　HPM 课例研究流程

课例的设计遵循“趣味性”、“可学性”、“科学性”、“新颖性”和“有效性”五项原则，都以体现“探究之乐”、“知识之谐”、“方法之美”、“文化之魅”、“德育之效”为目标。从课型上看，它们都是新授课。课例的选择标准是其中包含基于数学史料提出的数学问题。

3 基于数学史料的问题提出策略

已有的研究表明，问题提出的策略有条件操作、目标操作、对称互换和新旧链接四种[22]。根据数学史料来提出新问题，当史料本身为一个数学问题时，所用策略或为直接采用，或为改变情境（不改变条件和目标），或为上述四种之一，所提出的问题分别称为再现式问题、情境式问题、条件式问题、目标式问题、对称式问题和链接式问题。当一则史料不是某个数学问题，而是一个命题、一个故事、一段史实等时，需要根据教学需要来选择问题的条件和目标，此时所用策略不符合上述策略中的任何一种，称为自由设问策略，所提出的问题称为自由式问题。当史料为一个数学问题时，也可能使用自由设问策略来产生新问题。表 1 总结了基于数学史的问题提出策略和相应的例子。

表 1　基于数学史的问题提出策略分类

策略	描述	例子	问题类别
直接采用	直接采用“原汁原味”的问题或仅仅进行语言的翻译	今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问：折者高几何？（《九章算术》	再现式

		勾股章原题）	
改变情境	对原问题的情境进行改编、或增加符合现代学生生活经验的情境，而保持已知条件和目标不变	大风将学校一丈高的木制旗杆吹折，杆头着地，着地处距离杆根3尺，请你计算旗杆断裂处离地面距离？	情境式
条件操作	对原问题的条件进行改编而保持目标不变	竹高12尺，被大风吹折，竹梢着地，着地处离竹根4尺。问：折断处离地面有多高？	条件式
目标操作	对原问题的目标（所求项或所证明的结论）进行改编而保持已知条件不变	竹高一丈，被大风吹折，竹梢着地，着地处离竹根3尺。问：折断处离树梢有多高？	目标式
对称互换	互换原问题中的条件和目标	竹高一丈，距离地面4.55尺处被大风吹折，竹梢着地，求着地处到竹根距离？	对称式
新旧链接	将原问题的目标作为新的已知条件提出新问题	竹高一丈，被大风吹折，竹梢着地，着地处离竹根三尺。求折断部分与未断部分之间夹角的正弦。	链接式
自由设问	根据教学需要自由选择问题的条件和目标，不符合上述六种策略的任何一种	大风将学校高15米木制旗杆从距离地面6米处吹裂，随时可能倒下伤及他人，学校现决定从断裂处砍断旗杆，现需要划一个安全警戒区域，你能求出这个区域的面积吗？	自由式

4 各课例中的数学史问题

在我们所考察的 15 个课例中，共发现 41 个基于数学史料提出的数学问题（简称基于数学史的问题或 HBP），这些问题分为再现式、自由式、情境式、条件式和对称式五类，各类型的分布如图 2 所示。

由图 2 可知，41 个问题中绝大多数为自由式问题，其次为再现式问题。其他类型的问题很少。

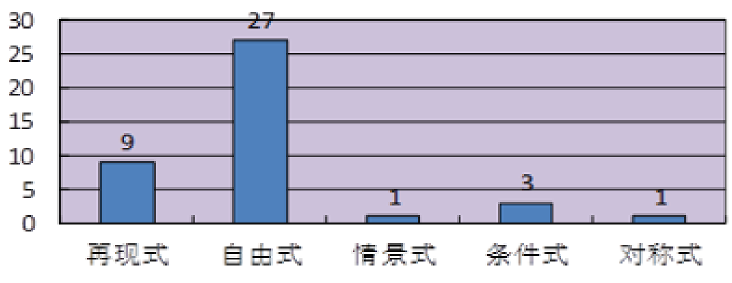

图2 各类数学史问题的频数

4.1 再现式问题

共有 6 个课例采用了再现式问题。课例“分数指数幂”[7]采用了欧拉《代数基础》中的问题：将 a^2 和 $\sqrt{a}$ 化成指数同为 $\frac{1}{3}$ 的幂。课例“平方差公式”[8]直接采用了古希腊数学家丢番图（Diophantus，3 世纪）《算术》中的问题：已知两个正数的和为 20，积为 96，求这两个数。丢番图利用“和差术”和平方差公式来解决。课例“字母表示数”（I）[9]采用了丢番图《算术》中的另一个问题：已知两数的和与差，求这两数。该问题要求学生用字母表示已知的和与差。

课例“一次方程组的应用”[10]直接采用了意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 13 世纪）《计算之书》和程大位（1533-1606）《算法统宗》中的问题：“若甲得乙之 7 第纳尔，则甲的钱是乙的 5 倍；若乙得甲之 5 第纳尔，则乙的钱是甲的 7 倍。问：甲、乙各有多少钱？”“隔墙听得客分银，不知人数不知银；七两分之多四两，九两分之少半斤。试问各位善算者，多少人分多少银？”这些问题都是原汁原味的数学史文献中的问题。

4.2 自由式问题

共有 11 个课例采用了自由式问题。在课例“同底数幂的运算”[11]中，教师根据阿基米德《数沙者》中的大数记法，采用自由式问题来引入新课：

问题 1：从 1 数到 1 万，再从 1 万数到 1 万万，请用科学记数法来表示 1 万万；

问题 2：把第一步得到的数作为一个新数 a，从 a 开始数到 1 万万个 a，请用科学记数法来表示这个数；

问题 3：把第二步得到的数作为一个新数 b，从新数开始数到 1 万万个 b，请用科学记数法来表示这个数。

问题 4：阿基米德得到装满整个“宇宙”（以地球为中心，地日距离为半径的球）的沙粒数目不超过 6 个 1 万万相乘再乘以 1000，用今天的记数法如何表示？

16 世纪德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1657）在《整数算术》（1544 年）中将幂指数从非负整数推广到负整数，建立了表 2 所示的指数和幂之间的对应关系。在课

表 2 指数和幂的对应表

指数	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
幂	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

例“分数指数幂”[7]中，教师根据这则材料提出如下问题：

（1）1、2、4 三个数中，中间的 2 与左右的 1、4 之间究竟有什么关系？

（2）如果在指数 0 和 1 之间插入平均数$\frac{1}{2}$，那么对应的幂$2^{\frac{1}{2}}$会是什么数呢？

这里，教师借鉴斯蒂菲尔的“幂与指数对应法”，从正整数指数与幂之间的对应关系入手，提出问题，引导学生通过类比得到分数指数幂与方根之间的关系，从而经历分数指数幂的形成过程。

美国数学家贝曼（W.W.Beman）和史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）在《新平面与立体几何》中、贝兹（W. Betz）和韦布（H. E. Webb）在《平面几何》中分别给出湖畔两点之间距离的测量方法：如图 3，欲测量湖畔两点 A、B 之间的距离，在点O处立一个木桩，过点O固定线段$A'B$和$'AB'$，使得$OA'=OA$，$OB'=OB$，则$A'B'=AB$;如图 4，在点 C 处立一个木桩，过点 C 固定线段 AA′和BB'，使得$CA'=CA$，$CB'=CB$，确定点 B′，则$A'B'=AB$。

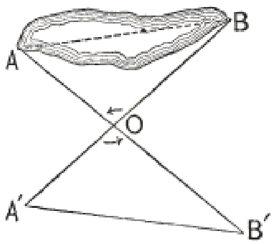

图 3

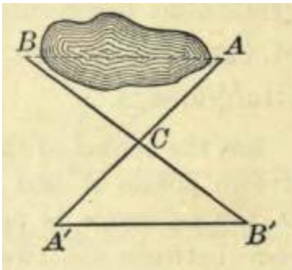

图 4

课例“全等三角形的应用”[12]根据上述史料，提出更开放的问题：“小明和朋友们游览风景区看到一个美丽的池塘，想知道池边两点A、B 之间的距离，问有哪些方法？”由此为学生提供更多的探究性机会。

4.3 情境式数学史问题

情境式问题仅仅出现在 1 个课例中。斐波那契在《计算之书》中设题：“若干人平分 10 第纳尔，每人得若干。若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同，求第一次分钱人数。”这是一个分式方程问题。课例“可化为一元一次方程的分式方程”[13]对该问题进行改编，添加了“雇工付酬”的生活情境：斐波那契连续两天雇佣工人搬运货物（人数和酬金见表 3），若两天人均所得酬金相等，求第一天雇佣的工人数 x。

表3 雇佣工人搬运货物的账目

	工人人数（人）	人均所得（第纳尔/人）	总金额（第纳尔）
第一天雇人	x		10
第二天雇人	$x+6$		40

4.4 条件式问题

有 3 个课例采用了条件式问题。课例“一次方程组的应用”[10]采用了古巴比伦泥版 VAT8389 上的问题，但对其中的数据作了适当的改编：“已知两块地共 5 亩，第一块地亩产 4 担粮食，第二块地亩产 3 担粮食。第一块地的产量比第二块的产量多 6 担。问：两块地的面积各为多少？”

课例“一元二次方程的配方法”[14]中将阿拉伯数学家花拉子米《代数学》中的问题“一平方与十根等于三十九迪拉姆，求根”进行改编，将 39 改为 20，使得问题难以直接用因式分解法来解，从而凸显配方法的必要性。

课例“字母表示数”[15]将历史上著名的鸡兔同笼问题进行改编，题目改为：有一天，鸡、兔、蜘蛛被关在同一个笼子里，一共有 45 个头，240 条腿。第二天早上，发现蜘蛛被鸡吃掉一半，又有一半的鸡和三分之一的兔逃跑了，剩下的鸡、兔、蜘蛛一共有 130 条腿。问：鸡、兔、蜘蛛原来各有几只？显然改后的问题将原来鸡兔同笼问题的条件和情境做了修改，此题目的在于让学生体会用字母表示未知数。

上述问题有的是直接将数学史问题的条件进行修改，有的则是同时改变问题情境和问题条件，都属于条件式问题。

4.5 对称式问题

对称式问题只出现在课例“可化为一元一次方程的分式方程”[13]中。将斐波那契《计算之书》中的原题加以改编，将原问题“若干人平分 10 第纳尔，每人得若干。若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同，求第一次分钱人数”的条件和目标进行互换，即告知第一次分钱人数为 2 人，加上 6 人后，总金额增加 30 第纳尔再进行平分，每人所得与前面相同，求第一次分的总金额。

5 若干特点

5.1 历史素材

HPM 视角下的数学教学设计必须遵循科学性原则，因此，15 个课例中的 41 个数学问题均源自历史上的数学原始文献。图 5 和图 6 分别给出了原始文献的地域和年代分布情况。

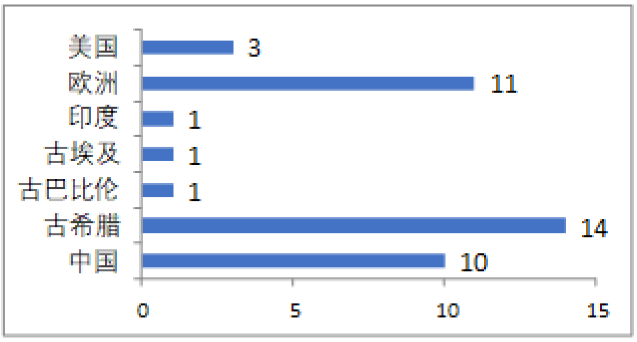

图 5 数学史料的地域分布

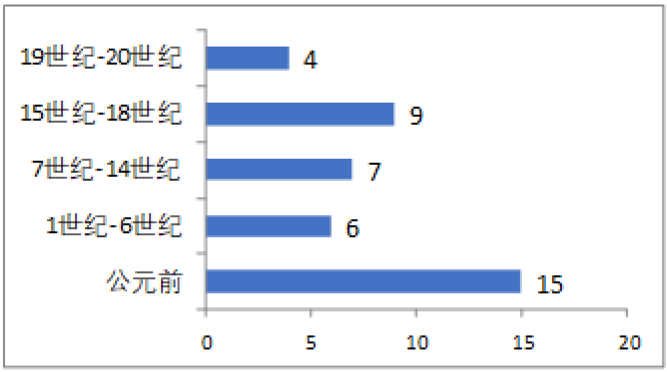

图 6 数学史料的时间分布

从图 5 可见，基于数学史的问题，主要源自古希腊、中国和近代欧洲的数学文献，但教师在选择史料时并不局限于某一国家或地区。数学名著是教师的第一选择，其中最典型的是欧几里得的《几何原本》、斐波那契的《计算之书》、程大位的《算法统宗》和欧拉的《代数基础》。从图 6 可见，这些原始文献分布在各个历史时期。数学史是一座宝藏，蕴含了取之不尽，用之不竭的教学资源[2]。参与课例研究的教师和大学研究人员主要是出于教学设计的需要，才从这些名著中选择素材，但对于数学名著并没有全面、深入的了解；大部分相关人员所能接触到的名著也屈指可数。总的说来，15 个课例所涉及的历史材料是十分有限的。

5.2 问题提出的策略

虽然我们在 15 个课例中发现了五类基于数学史的问题，但自由式问题占有压倒性的多数，备受教师的青睐。究其原因，一是相关教师所掌握的历史材料（特别是历史文献中的数学问题）十分有限。二是在所掌握的材料中，能直接用于课堂教学的很少。根据弗赖登塔尔的观点，在教学过程中，教师应该充分利用学生的认知规律、已有的生活经验和教学实际，灵活处理教材，根据实际需要对原材料进行优化组合[22]。三是相关教师所掌握的问题提出策略比较单一，而自由式问题相对其他类型的问题显得灵活且易于操作。

15 个课例中未出现链接式问题和目标式问题，进一步说明教师在问题提出策略上还有很大的提升空间。

5.3 基于数学史的问题在不同教学环节中的分布

图 7 为基于数学史的问题在不同教学环节的分布情况。从图中可见，基于历史的数学问题主要用于引入和探究环节。在引入环节，基于历史的问题易于激发学生的学习动机和兴趣；在探究环节，基于历史的问题为学生提供了探究机会，让他们经历新知的发生和发展过程。

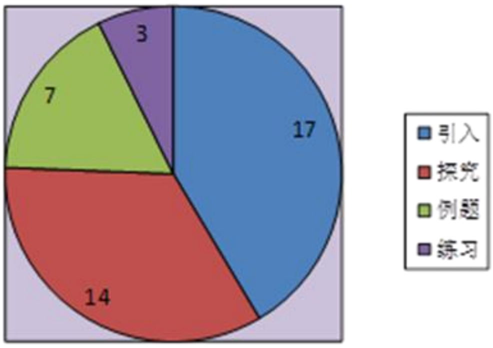

图 7 基于数学史的问题的教学环节分布

然而，教师在例题和练习环节很少运用基于历史的问题。究其原因，一是教师在教学中多地依赖教科书和学校统一使用的学案；二是教师缺乏适合用作例题或习题的历史材料；三是他们可能认为数学史在帮助完成引入或探究任务之后，本来就该悄然谢幕，无需贯穿一节课的始终。

6 结语

本文所考察的 15 个初中 HPM 课例，从某种意义上说，是初中 HPM 实践的一个缩影。从中我们看到，根据数学史材料提出数学问题，乃是数学史融入数学教学的重要途径。课例中所涉及的绝大多数历史材料采自不同时空的数学原始文献，确保了科学性；问题提出的策略包括直接采用、改变情境、自由设问、条件操作和对称互换五种，目标操作和新旧链接策略付之阙如，自由设问策略一枝独秀；基于历史的问题主要用于引入和探究环节。

课例分析表明，经典数学名著为问题提出提供了丰富的素材，但教师在名著的研读和

材料的搜集上有待于加强，所运用的问题提出策略不够丰富。在教学设计过程中，初中教师有必要与高校研究人员一起对原始文献进行研讨，并掌握史料的选择、裁剪和加工方法，学习 HPM 视角下的问题提出策略，思考基于数学史的问题的教育价值，从而提高问题提出的能力，获取更加丰富多彩的问题，从而进一步优化 HPM 教学设计，改善 HPM 教学实践的效果。

参考文献

[1] 汪晓勤.HPM 的若干研究与展望[J].中学数学月刊, 2012, (2): 3-7.

[2] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M].北京: 科学出版社,2017: 237-316.

[3] Silver,E. A. On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 1994, 14(1), 19–28.

[4] Cai, J. et al. Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. Educational Studies in Mathematics, 2013, 83(1): 57-69.

[5] Leung, S. S., & Silver, E. A. The role of task format, mathematics knowledge and creative thinking on the arithmetic problem posing of pre-service elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal, 1997, 9(1): 5-24.

[6] Gonzales, N. A. Problem formulation: Insights from student generated questions. School Science & Mathematics, 1996, 96(3):152.

[7] 汪晓勤,叶晓娟, 顾海萍.分数指数幂: 从历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (4): 59-63.

[8] 李玲, 顾海萍.平方差公式: 以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2014, (11): 43-47.

[9] 孙洲. HPM 视角下的“字母表示数”教学[J]. 数学教学, 2017, (6): 28-30+46.

[10] 顾海萍, 汪晓勤. 一次方程组的应用: 从历史到课堂[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014, (6): 30-34.

[11] 齐春燕, 顾海萍. 同底数幂的运算: 以重构和顺应的方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (3): 39-42.

[12] 仇扬,沈中宇. 全等三角形应用: 从历史中找到平衡[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2015, (11): 62-67.

[13] 洪燕君, 顾海萍. 可化为一元一次方程的分式方程: 按五项原则融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (1): 42-46.

[14] 沈志兴, 洪燕君. 一元二次方程的配方法: 用历史体现联系[J]. 教育研究与评论(中学教育学), 2015, (10): 38-42.

[15] 叶晓娟, 顾海萍. 基于历史相似性的“字母表示数”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014, (10): 29-33.

[16] 王进敬, 栗小妮. 反比例函数: 实验重构数学史, 故事凸显价值观[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (6): 36-41.

[17] 岳秋, 张德荣. 平面直角坐标系: 利用历史故事, 实现维度跨越[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016, (11): 32-37.

[18] 唐秋飞. 三角形内角和: 在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (7): 40-44.

[19] 宋万言, 栗小妮. 实数的概念: 折纸、拼图中发现, 计算、比较中建构[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (8): 41-47.

[20] 牟金保, 孙洲. 平行线的判定: 基于相似性, 重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (5): 34-40.

[21] 李玲,汪晓勤,胡晓娟.HPM 视角下“角的和差倍”的教学[J].中学数学月刊, 2014, (11):57-59.

[22] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(3): 293-309.

[23] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京: 高等教育出版社,2009. 42-45.

基于数学史的高中数学问题串初探*

马艳荣，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

实践表明，将数学史融入数学教学，离不开基于数学史料的数学问题提出。由于数学教师所掌握的历史材料十分有限，问题提出的策略较为单一，因此，在已有的 HPM 课例中，相关数学问题并不丰富，问题的质量也有待于改善；这些问题往往只出现在引入或探究环节，之后便悄然谢幕了，毫无系统可言，数学史的教育价值难以得到最大程度的发挥。数学问题串的运用是改变这种状况的途径之一。

所谓“基于数学史的数学问题串”（简称 HPM 问题串），是指以相关数学史料为主线，紧扣数学教学目标，运用一定策略提出的一系列具有内在联系、构成一个整体的数学问题。在课堂上，HPM 问题串为学生提供了“再创造”的机会，有助于他们在探究中经历知识的发生发展过程，形成较为完整的知识体系，获得数学活动的经验，体验“探究之乐”，感悟数学活动的本质。

另一方面，教育部《关于 2017 年普通高考考试大纲修订内容的通知》要求“充分发挥高考命题的育人功能和积极导向作用”，并提出“在数学试题中增加数学文化的内容”，因而基于数学史的高考试题日益受到人们的关注，但对近年来的高考试题的分析发现，这些试题所涉及的历史材料较为有限，问题提出的策略十分单一[1]。鉴于此，本文拟对基于数学史的问题串设计作一初步探讨。

2 基于数学史料的高中数学问题串

2.1 轨迹问题串

古希腊数学家研究过大量的轨迹问题。古希腊数学家将轨迹分成平面轨迹（直线和圆）、立体轨迹（即圆锥曲线）和线轨迹（直线、圆、圆锥曲线以外的曲线）三类。阿波罗尼奥斯

* 上海市教育科学研究重大项目 “中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 系列论文之一。

（Apollonius, 公元前 3 世纪）在《平面轨迹》中研究了大量的平面轨迹，如“与两直线等距的点的轨迹”。帕普斯（Pappus, 公元 3 世纪末）在《数学汇编》中研究了一类新的轨迹问题[2]：

- 三线轨迹：到两条已知直线的乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数的动点轨迹为圆锥曲线；
- 四线轨迹：到两条已知直线距离的乘积与到另两条已知直线距离的乘积之距离比等于常数（不等于 1）的动点轨迹为圆锥曲线。

帕普斯还提出更一般的“n 线轨迹”问题，当 $n \geq 5$ 时，古希腊的几何方法就完全无能为力了。17 世纪，法国数学家费马（P. de Fermat, 1601-1665）和笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）正是在研究古希腊“n 线轨迹”问题时发明了解析几何。

为了让学生经历解析几何的产生过程，在“曲线与方程”一节课中，可以设计以下问题串：

问题 1：在平面上，到一条定直线的距离相等的点的轨迹是什么？

问题 2：平面上，与两条已知直线等距离的动点轨迹是什么？

考虑两条直线平行或相互垂直两种情形。

问题 3：如图 1，给定三条直线 l_1、l_2 和 l_3，其中 $l_2 \perp l_1$、$l_3 \perp l_1$、l_2 和 l_3 之间的距离为 2。若动点 P 到 l_2 和 l_3 的距离乘积与到 l_1 的距离的平方相等，则点 P 在直线 l_2 和 l_3 之间的轨迹是什么？

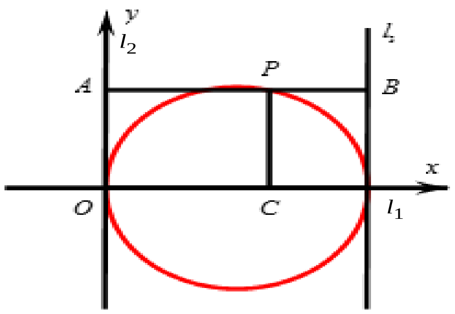

图 1 特殊的三线轨迹问题之一

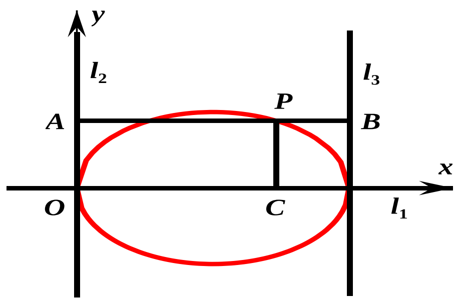

图 2 特殊的三线轨迹之二

问题 4：如图 2 所示，在问题 3 中，若动点 P 到 l_2 和 l_3 的距离乘积与到 l_1 的距离的平方之比等于 2，则点 P 在直线 l_2 和 l_3 之间的轨迹是什么？

问题 5：如图 3 所示，设直线 $l_1 // l_2$，$l_3 \perp l_1$，$l_4 \perp l_1$，l_1 与 l_2，l_3 与 l_4 之间的距离均为 2，动点 P 到 l_1、l_2 的距离乘积等于到 l_3、l_4 的距离乘积，求动点 P 的轨迹。

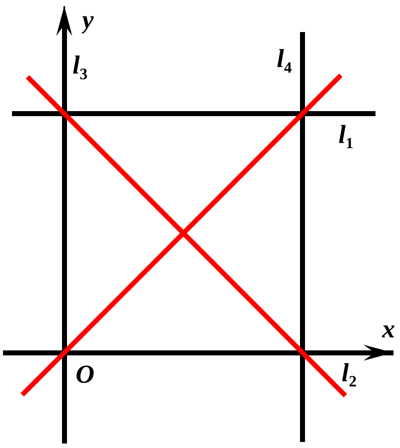

图 3 特殊的四线轨迹问题之一

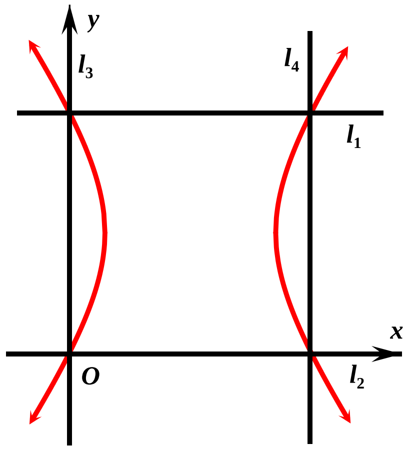

图 4 特殊的四线轨迹问题之二

问题 6：如图 4 所示，在问题 5 中，若动点 P 到 l_1、l_2 的距离乘积与到 l_3、l_4 的距离乘积之比等于 2，求动点 P 的轨迹。

教学实践中，上述问题串中的部分问题已为石和飞老师所采用[3]。将《几何原本》命题 I.31（过已知直线外一点，作一直线与已知直线平行）改编为“一线轨迹”问题，依次增加已知直线的数目，相继得到古希腊的二线、三线和四线轨迹问题；在三线和四线的情形中，又根据两种不同的比值分别提出问题，各问题构成了一个完整的问题串。

2.2 均值不等式问题串

《几何原本》第 6 卷命题 13 给出了求作两条已知线段的比例中项的方法[4]：如图 5，设 AC、CB 是两条已知线段，它们在同一条直线上，在 AB 上作半圆 ADB，在点 C 处作 AB 的垂线 CD，交半圆周于 D，则 CD 就是所求的几何中项。

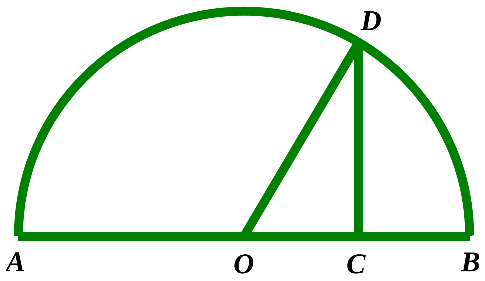

图 5 《几何原本》命题 VI.13

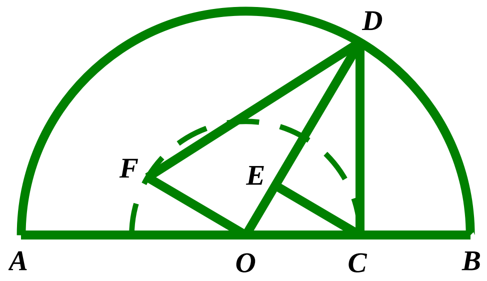

图 6 调和平均数与平方平均数的作图

根据上述命题，我们可以设计以下均值不等式问题串：

问题 1：图 5 中，OD 是半圆 ADB 的半径，即 AC 和 CB 的算术中项。试比较算术中项和几何中项的大小。当 $AC=CB$ 时，两者有怎样的关系？

问题 2：设 $AC=a$，$CB=b$，则 AC、CB 的几何中项和算术中项的大小分别为 $\sqrt{ab}$ 和，$\dfrac{a+b}{2}$ 我们也把 $\sqrt{ab}$ 和 $\dfrac{a+b}{2}$ 分别称为正数 a 和 b 的几何平均数和算术平均数。根据问题 1

的结论，能很容易得到两个正数的几何平均数和算术平均数的大小关系。根据图 5，你能用代数方法证明两者的大小关系吗？它们何时相等？

问题 3：在数学上，我们将 $\frac{2ab}{a+b}$ 称为正数 a 和 b 的调和平均数。在图 5 中，作 $CE \perp OD$，垂足为 E，如图 6 所示。证明 DE 的长度为 a 和 b 的调和平均数。从图 6 中你能得出 a 和 b 的调和平均数和几何平均数之间的大小关系吗？

问题 4：根据图 6，你能用代数方法证明调和平均数和几何平均数之间的大小关系吗？两者何时相等？

问题 5：我们将 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 称为正数 a 和 b 的平方平均数。在图 6 中，试作出一条线段来表示 a 和 b 的平方平均数，并比较它与算术平均数之间的大小。

问题 6：根据图 6，你能用代数方法证明平方平均数和算术平均数之间的大小关系吗？两者何时相等？

教学实践中，上述问题串中的大部分问题已为张小明老师所采用[5]。6 个问题均以《几何原本》第 6 卷命题 13 为出发点。该命题证明了图 6 中的半弦 CD 为 AC 和 CB 的几何中项。因 $CE \perp OD$，根据射影定理，故有

$$DE = \frac{CD^2}{OD} = \frac{2ab}{a+b}$$

以 O 为圆心，$OC = \frac{a-b}{2}$ 为半径作圆弧，过 O 作 OD 的垂线，交圆弧于 F，则连接 DF，DF 即为平方平均数在图中所对应的线段。则

$$DF = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

易见，当 $AC \neq CB$ 时，在 RtΔDEC、RtΔDCO 和 RtΔDOF 中，有 $DE < CD < OD < DF$，即

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

当 $AC = CB$ 时，$DE = CD = OD = DF$，即调和平均数、几何平均数、算术平均数和平方平均数两两相等。又在 RtΔDEC、RtΔDCO 和 RtΔDOF 中运用勾股定理，分别得到代数恒等式

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\sqrt{ab}\right)^2 \tag{1}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\sqrt{ab}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

因此得不等式链

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2\le ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$$

或即

$$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

当且仅当$a=b$时等式成立。

问题 1 和 2 的目标是建立算术平均数和几何平均数之间的大小关系，问题 3 和 4 的目标是建立调和平均数和几何平均数之间的大小关系，问题 5 和 6 的目标是建立算术平均数和平方平均数之间的大小关系。在图 5 和图 6 中，利用直角三角形斜边大于直角边的事实，可以解决问题 1、3 和 5；根据勾股定理建立有关代数恒等式，即可解决问题 2、4 和 6。问题 1-6 建立了两个正数的四种平均数之间的不等式链，构成了一个完整的问题串。

2.3 三角公式问题串

帕普斯在《数学汇编》中证明了如下命题[6]：如图 7，设 C、E 是半圆 O 上的两点，CD 和 EF 为 OA 的垂线，D、F 为垂足；过圆心 O 作 $OH\perp CE$，H 为垂足，则 $\left(CD+EF\right)\cdot CE=2OH\cdot DF$。事实上，作 $HG\perp OA$，垂足为 G，已知 RtΔOGH 与 RtΔCIE 相似，注意到$HG=\frac{1}{2}\left(CD+EF\right)$，由此即得结论。

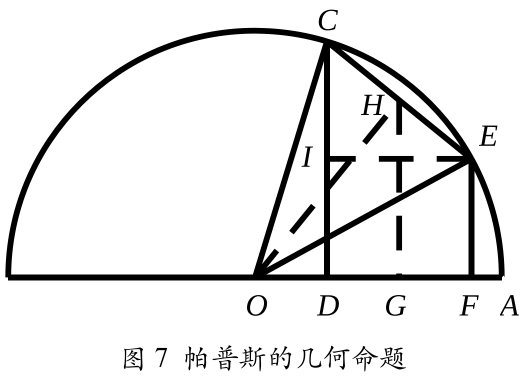

图 7 帕普斯的几何命题

上述命题为和角正、余弦公式提供了几何模型，该模型通常被称为“帕普斯模型”，在三角学历史上被广泛使用[6]。为了引导学生通过探究得到该模型，我们设计了如下和角公式

问题串。

问题 1：在初中我们已经知道，$\sin 30° = \frac{1}{2}$，$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$。你是如何求得这些值的呢？

如图 8，构造特殊的直角三角形即可求得有关的值。

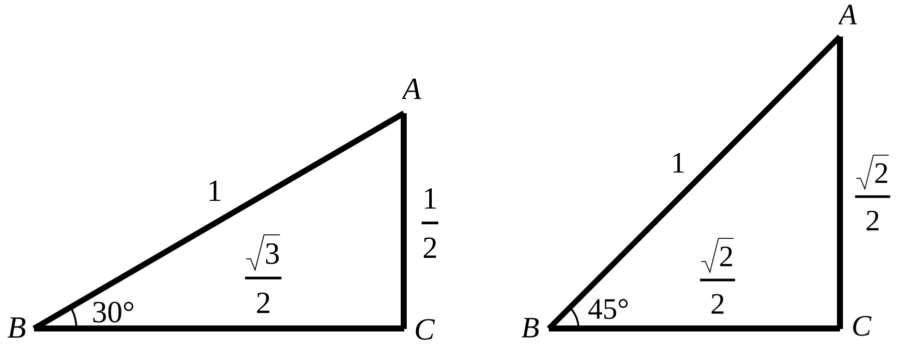

图 8 特殊角的正弦值

问题 2：你能通过构造直角三角形来求 $\sin 75°$ 和 $\cos 75°$ 吗？

如图 9，作 $\angle CBD = 45°$，过点 D 作 $DE \perp AB$，垂足为 E。设 $CD = x$，则

$BD = \sqrt{2}x$，$DE = \frac{\sqrt{2}}{2}x$，$BE = \frac{\sqrt{6}}{2}x$，

$$AD = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \sqrt{2x^2 - \sqrt{6}x + 1}$$ 。于是有

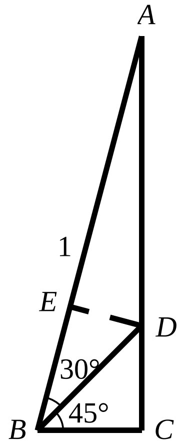

图 9 $\sin 75°$ 的几何解法之一

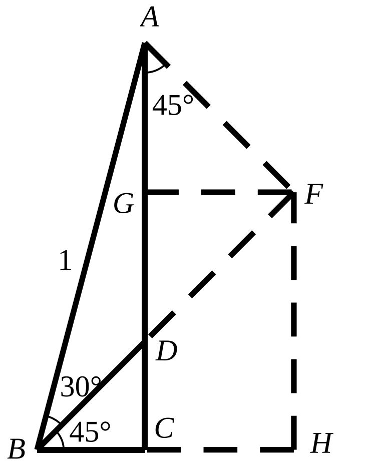

图 10 $\sin 75°$ 的几何解法之二

$$\left(x + \sqrt{2x^2 - \sqrt{6}x + 1}\right)^2 + x^2 = 1$$

解得 $x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，从而得 $AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $\sin 75^\circ = AC=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75^\circ = BC=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。

问题 3：利用上述方法计算太繁琐，通过构造直角三角形，你还能给出其它更好的方法来求 $\sin 75^\circ$ 和 $\cos 75^\circ$ 吗？

如图 10，过点 *A* 作 *BD* 的垂线，垂足为 *F*；过 *F* 分别作 *AC* 和 *BC* 的垂线，垂足分别为 *G* 和 *H*。于是 $AF=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$BF=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。因此有

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= AC = FH + AG = BF\sin 45^\circ + AF\cos 45^\circ \\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= BC = BH - FG = BF\cos 45^\circ - AF\sin 45^\circ \\ &= \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

问题 4：根据上述 $\sin 75^\circ$ 和 $\cos 75^\circ$ 结论，在图 10 中，若用锐角 α 和 β 分别代替 45°和 30°（图 11），你能得到什么结果？

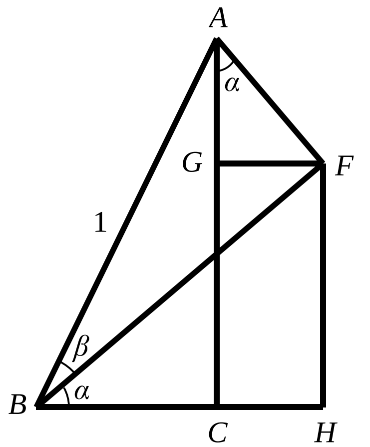

图 11 和角公式的帕普斯模型

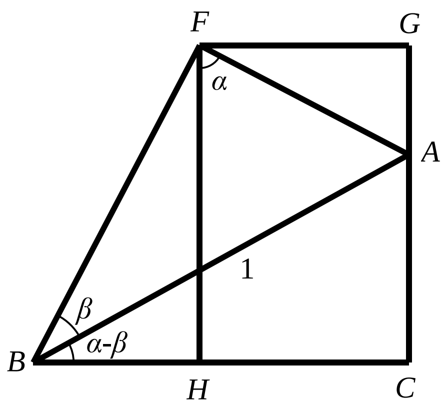

图 12 差角公式的帕普斯模型

由图 11 易得：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

问题 5：你能用类似的几何方法推导差角公式 $\sin(\alpha-\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$（α 和 β 为锐角）吗？

利用图 12 即可。

问题 6：问题 4 和 5 所得到的四个公式对于任意的 α 和 β 是否都成立？

可利用诱导公式来解决。

上述问题串中，问题 1 让学生回顾初中学过的特殊角 30°和 45°的正弦和余弦值，进而通过问题 2 让学生探究 30°和 45°的和角的正弦和余弦值。在任意斜三角形中，已知角角边，可以通过直角三角形来求其他边和角。但学生所用的方法可能并不理想。通过问题 3，学生可以获得帕普斯模型。通过问题 4，得到锐角情形下的和角公式。通过问题 5，得到锐角情形下的差角公式。通过问题 6，得到一般情形下的和角与差角正、余弦公式。各问题以帕普斯模型为核心，构成了一个完整的问题串。

3 三个问题串的特点

上述三个问题中，各个问题都是以古希腊数学史料为基础提出来的，且均围绕某一个主题展开，构成了一个不可分割的整体，因此，它们都属于“基于数学史的问题串”。

三个问题串分别具有以下特点。

- 改编史料，一线贯穿。轨迹问题串中的所有六个问题都源于历史问题，但对原问题的条件进行了特殊化处理，即直线由任意位置关系改成两两垂直或平行，使其适合于课堂教学。各问题均通过对上一个问题进行条件操作而得到，如图 13 所示。问题串可以贯穿于“曲线与方程”整节课的始终。

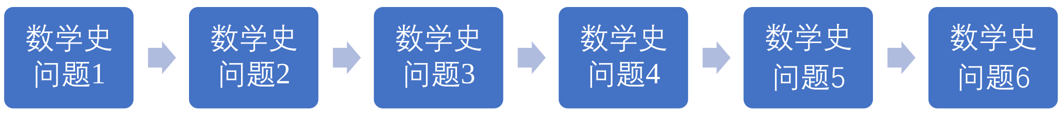

图 13 轨迹问题串

- 以史为基，多题同源。均值不等式问题串中的所有六个问题都不属于历史问题，但它们都是根据同一则史料——《几何原本》命题 VI.13 提出来的，各问题之间并没有显著的递进关系，如图 14 所示。该问题串适用于“均值不等式”一课的新课探究环节。

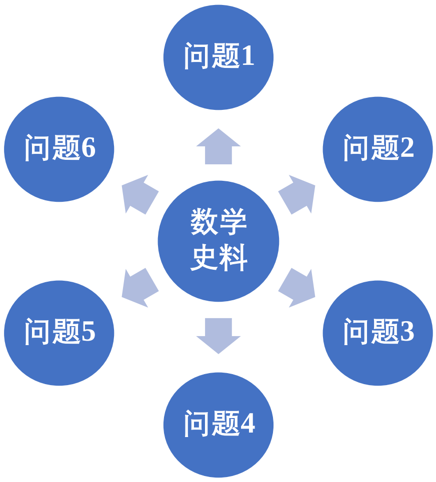

图 14 均值不等式问题串

• 重构历史，层层递进。和角公式问题串中的六个问题大多并不属于历史问题，但它们都是为了发现和运用帕普斯模型而设计，整个问题串的探究过程即是对和角公式历史的重构，除问题 3 外，各问题均通过对上一问题进行条件操作[7]而得到，如图 15 所示。该问题串适用于“两角和与差的正弦公式”一课的新课探究环节。

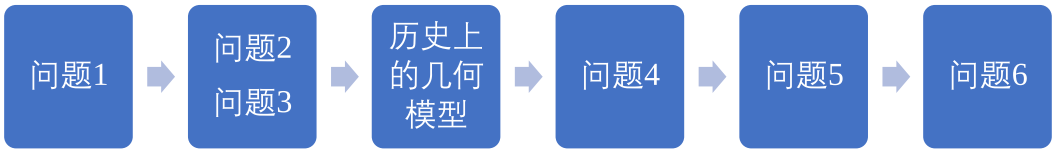

图 15 和角公式问题串

4 结 语

“基于数学史的问题串”是 HPM 视角下的数学教学的需要，问题串的使用将更完整地再现概念、公式、定理和思想的发生和发展历史，使数学史的教育价值得以最大化，因而使数学课堂变得流畅而精彩。在已有的 HPM 课例中，我们很少看到完整的问题串，可见，基于数学史的问题串设计并非易事。对于由历史问题所构成的问题串，教师需要了解有关主题的宏观历史，掌握较为丰富的数学史料，并根据教学目标对其进行裁剪和加工；对于以同一史料为出发点的问题串，教师需要从浩如烟海的数学史文献中选择恰当的史料；对于重构历史的问题串，教师不仅需要了解历史，而且还需要兼顾有关主题的历史顺序、逻辑顺序和学生心理发生顺序。

因此，为了设计一个基于历史的数学问题串，中学一线教师需要与大学研究人员组成一个 HPM 学习共同体，大学研究人员可以对有关主题的历史进行深入研究，为中学数学

教师提供合适的历史素材；共同体经过交流和研讨，设计出问题串并付诸课堂实践，最终根据课堂观察、学生反馈和同行评议，对问题串进行必要的修正。我们有理由相信，基于数学史的问题串的广泛使用必将使 HPM 课例研究的水平迈上一个新台阶。

参考文献

[1] 陈莎莎, 汪晓勤. 基于数学史的高考试题分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (5): 26-33.

[2] 汪晓勤, 柳笛. 解析几何的产生(一): 古希腊的三线和四线轨迹问题[J]. 中学数学教学参考(高中), 2007, (9): 58-59.

[3] 石和飞. “曲线与方程”:用古希腊轨迹问题串联[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016, (3): 52-56.

[4] Heath, T. L. The Thirteen Books of Euclid’s Elements (Vol. II) [M]. Cambridge: The University Press, 1908. 216.

[5] 张小明. 均值不等式的 HPM 学习单设计[J]. 中学数学教学参考, 2012, (10): 68-70.

[6] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017, 190-191.

[7] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(3): 293-309.

教学实践

HPM 视角下完全平方公式的教学

栗小妮[1]，沈中宇[2]

（1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062; 2.华东师范大学数学系，上海 200241）

1 背景介绍

完全平方公式是沪教版七年级第一学期以及人教版八年级第一学期的内容。在现行沪教版和人教版教科书中，乘法公式位于整式的乘法一节之后，分为平方差公式和完全平方公式，均作为多项式与多项式乘积的特例。在人教版中，多项式与单项式乘法以及多项式与多项式的乘法均由现实问题引入，多项式与单项式乘法由销售问题引入，而多项式与多项式的乘法由多种方法解决“增加长方形绿地的长和宽，求扩大后的面积？”引入。沪教版中直接采用两种方法计算组合长方形的面积引入。两套教科书，从多项式乘法到乘法公式均将“面积表示”作为暗线，贯穿始终，体现多项式乘法以及乘法公式的几何表征。

两套教科书中完全平方公式呈现的方式都是利用多项式相乘的计算方法，列出几个完全平方式的计算结果，然后归纳总结结果的结构特征，给出完全平方公式的文字语言和代数符号表征。在给出公式后，附带一个思考(讨论)，能用图 1 中的图形面积来说明完全平方公式吗？

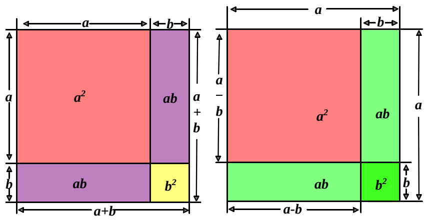

图 1

相较于代数符号表征，教科书中完全平方公式的几何表征较为淡化。同时，我们发现，很多学生在学习了完全平方公式后，依然采用多项式乘多项式的方式进行运算，存在认为$(a+b)^2=a^2+b^2$的错误认识[1]。教师基本采用教科书中呈现的方式进行讲授，当然也有部分教师会采用拼图的方式让学生进行操作验证完全平方公式。[2]但据调查，教师也存在这样的疑惑，既然可以利用多项式乘法法则进行计算，为什么要把完全平方公式单独作为一个乘法公

式学习呢？归根结底，学生对于为什么学习完全平方公式并不清楚。分析初中的教学知识点我们知道，在学生后续学习一元二次方程的解法和二次函数的图形时均需要用完全平方公式作为工具，“配方”是解一元二次方程的基本思路，一元二次方程的求根公式也是通过配方得到。而我们对二次函数的图像的研究，也是通过“配方”成“顶点式”后进行研究。那我们不禁要问，学习完全平方公式的原因仅限于此吗？历史上完全平方公式是如何出现的？如何发展？这些问题的回答有助于我们解决教学中的问题。

2 历史素材

2.1 两河流域时期

在两河领域时期，人们对数的认识仅停留在“整数和分数”阶段，且处于修辞代数阶段，多采用文字语言或几何图形表征解释数学问题。但据数学史家对现存古巴比伦时期的泥板分析，古巴比伦人已经估算出面积为 1 的正方形的对角线长约为 1；24；51；10（古巴比伦采用 60 进制，约为十进制的 1.414）。根据泥板上的记载，数学史家推测他们运用了完全平方公式的几何图形表征进行计算。用现代代数方法解释如下：假定有一面积为 N 的正方形，要求$\sqrt{N}$，第一步，先选择接近到小于要求的值的数 a，令$N=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$，接下来，选择 c，使得$(a+c)^2$尽可能接近 N，若a^2足够接近 N，则c^2会很小，舍去c^2，令$N=a^2+2ac$，即选择$c=\frac{N-a^2}{2a}$，$\sqrt{N}\approx a+\frac{N-a^2}{2a}$。具体以$\sqrt{2}$为例，先取$a=\frac{4}{3}$，令$2=\left(\frac{4}{3}+c\right)^2=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}c+c^2$，舍去$c^2$，然后选择$c=\frac{2-\frac{16}{9}}{2\frac{2}{3}}=\frac{1}{12}$，则$\sqrt{2}\approx\frac{4}{3}+\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$。[3]

古巴比伦人也利用完全平方公式的几何图形处理一元二次方程求解问题，如在泥板 BM13901 上记载有如下问题：“正方形面积与边长之和为$\frac{3}{4}$，求边长。”泥板中给出了具体解法，数学史家认为其解法依据如图 2 所示，用符号语言表示即将$x^2+x=\frac{3}{4}$，通过面积割补转化为$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$，从而求得$x=\frac{1}{2}$。[4] [5]

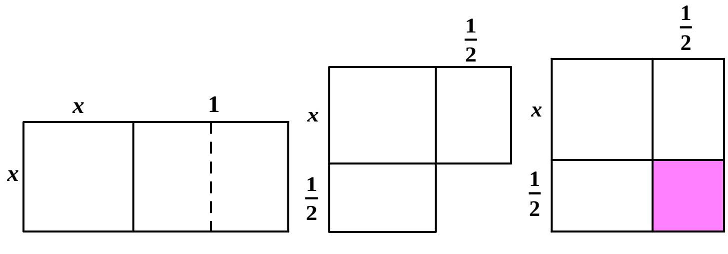

图 2

显然，古巴比伦人已经知道完全平方公式，但他们更注重于如何运用完全平方公式解决问题，而并没有将其单独作为结论呈现。

2.2 公元前 3 世纪——公元 16 世纪前

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得所著的《几何原本》第一次实现了几何学的系统化和公理化。《几何原本》中第一次将完全平方公式单独抽象出来以几何命题的形式呈现，其卷 2 命题 4 为：任意分一线段成两段，则整段上的正方形等于两分段上的正方形与两分段构成矩形的两倍之和，并利用卷 1 中已经得到的命题进行了证明。如图 3 所示，用符号代数表示即为完全平方式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。[6]

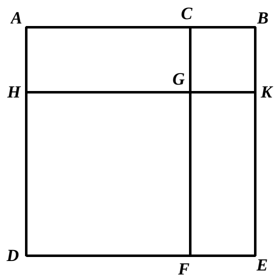

图 3 《几何原本》中卷 2 命题 4

《几何原本》卷 2 命题 4 将完全平方公式看做几何学中的一个命题，是后续数学家解决很多代数问题的重要依据。

公元 3 世纪的我国数学家刘徽的《九章算术》注中有关于开平方程序的叙述本质上也借用了完全平方公式，且第四章“少广”章的第十二题到第十六题，都是处理已知正方形面积，求其边长的问题，但其算法与两河流域时期的算法略有不同。刘徽采用的是“位值估计”，先估计开平方数是几位数，然后从高位到低位，依次计算出它的每一位值上的数学，戴震借助了完全平方公式的几何图形进一步进行了解释。以第十二题为例，原题目利用现代数学术语可表述为“已知一个正方形面积为 55225，问正方形的边长是多少？”即要求$\sqrt{55225}$的值。利用刘徽的开方术，具体算法如下：因为$300^2>55225>200^2$，所以$\sqrt{55225}$的百位数字是 2，设$55225=(200+x)^2=40000+400x+x^2$，则$400x<15225$（$55225-40000=15225$），可得$\sqrt{55225}$的十位数字为 3，设$55225=(230+y)^2=52900+460y+y^2$，则$460x<2325$，得$y=5$，发现$2325=460\times5+5^2$，所以$\sqrt{55225}=235$，如图 4 所示。[7]

图 4 《九章算术》刘徽注中计算$\sqrt{55225}$的几何图示

相较两河流域时期的算法，这种算法相对“程序化”，按照相同的方法从最高位数依次计算到最低位数即可。在公元 4 世纪，亚历山大时期的数学家席翁（Theon，4 世纪）也用类似的方法估算$\sqrt{4500}$。[8]

公元 3 世纪，古希腊代数学鼻祖丢番图（Diophantus）在其著作《算术》中首次用字母“ζ”表示未知数，代数学进入了缩略代数阶段。由于不处理负数的情况，处于公元 9 世纪的数学家花拉子米（Al-Khwarizmi,780-850）在其著作《代数学》中借助完全平方公式的几何图形给出了六种类型的一元二次方程的几何解法。例如，花拉子米给出一元二次方程$x^2+10x=39$的两种几何解法，都是利用图形的割补将方程$x^2+10x=39$转化为$(x+5)^2=64$，进而求得方程的根。[9]

公元 12 世纪的印度数学家婆什迦罗（Bhāskara，1114-1185）在其著作《莉拉沃蒂》中求一个数的平方有两种方法，其中一种为：将其分割为两个数，这两个数乘积的两倍，加上两个数的平方和，即为原数的平方。可以看出他已知完全平方公式的文字语言表征，并能够利用完全平方公式计算一个数的平方。

公元 13 世纪意大利数学家斐波那契（Fibonacci，1170？-1250？）的著作《计算之书》中，第十四章是关于平方根、立方根及其运算的相关知识，在这章开端提到了这一章所要用到的关键性结论，其中包括“若将一个数分成任意两份，每一部分自乘所得的积加上这两部分成绩的两倍，等于原数的平方。”此结论与婆什迦罗在《莉拉沃蒂》中的表述基本相同，用代数符号表示即为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。这一章中对开方数的估算也利用了完全平方公式，且与古巴比伦人的方法类似。[10]

2.3 公元 16 世纪后

16世纪法国数学家韦达(F．Viète，1540-1603)在《分析引论》中第一次用字母表示已知数和未知数，代数学开始进入符号代数阶段，韦达用元音字母表示未知量，用辅音字母表示已知量。[11] 后来，笛卡尔对韦达的符号系统进行了改进，他用26个字母的末尾几个

表示未知量，而位于前面的字母表示已知量，即我们今天所习惯的用x、y、z等表示未知量，用a、b、c……表示已知量，从而开始有完全平方公式的代数符号表示$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。用字母表示数简化了代数学中的运算问题，人们开始慢慢舍弃用几何图形来表示代数的运算，多直接采用符号代数进行运算。

通过历史梳理，我们知道，完全平方公式古已有之，它来源于两河流域时期人们现实生活的需要，人们用完全平方公式的几何图形处理已知正方形边长求对角线的问题以及一元二次方程求解问题，但并没有给出完全平方公式的一般表达形式。完全平方公式最初出现的形式并非用符号语言表达，而是以文字语言或几何图形的形式呈现。《几何原本》卷 2 命题 4 第一次以几何命题的形式呈现完全平方公式，公式中的每一个量都表示一条线段的长度。《几何原本》卷 2 命题 4 中的完全平方公式是后续数学家处理代数问题的重要依据来源，数学家们利用完全平方公式的几何图形表征对开平方数进行估算，求解一元二次方程，直到 16 世纪韦达首次使用字母表示数。字母的简洁性开始代替几何图形，故而才有了我们今天教科书中所呈现的完全平方公式。

也就是说，完全平方公式的三种表征方式，文字语言、符号语言以及图形语言，这三种表征方式在历史上出现的顺序与我们今天教科书中所给出的顺序并不相同。历史上，早期在没有符号表征的时期，除语言文字表征外，人们所能想到的较为简便的表征方式是几何图形表征，所以，最早出现的是完全平方公式的文字语言表征和几何图形表征，在韦达首次运用字母表示数以后，用字母表示数可以更简洁地表示完全平方公式，符号表征开始广泛流传，逐渐位于文字表征和几何图形表征之上。同时完全平方公式的出现来源于开方的计算和方程的求解，从开方的求解入手，可以让学生更加体会到学习完全平方公式的必要性。

了解完全平方公式的历史可以帮助教师理解教科书中利用图形面积设计本节知识的缘由以及完全平方公式的地位，丰富教师对完全平方公式的认识，也可以帮助教师进行更有价值的教学设计。

3 教学设计与实施

在了解了完全平方公式的历史后，我们进行了本节课的教学设计和实施。我们将本节课的教学目标设定为：

（1）知道完全平方公式与多项式乘法的关系，熟悉完全平方公式的特征，并且能运用公式进行简单计算。

（2）经历完全平方公式几何图形表征的探索过程，领悟数形结合及字母表示数的数学思想。

（3）通过观看完全平方公式的历史小视频，了解完全平方公式的产生、发展和用途，拓宽视野，为后续学习打下基础。

具体教学流程如图 5 所示：

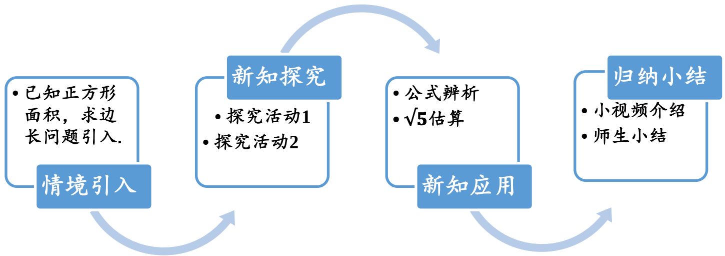

图 5 教学设计流程

3.1 情境引入

从前述完全平方公式的历史梳理中可知，完全平方公式的产生来源于对开平方数的估算，所以借助此史料，我们设计已知正方形边长求其边长的问题来引入，产生认知冲突，让学生感受完全平方公式产生的必要性。

问题：面积为 4 的正方形，边长是多少？

面积为 9 的正方形，边长是多少？

那面积为 5 的正方形，边长是多少？

面积为 4 和面积为 9 的正方形学生很快可以口答出边长分别是 2 和 3，而面积为 5 的正方形，学生无法立即口答出其边长。课上有学生回答不知道，也有学生课前有过预习，已经知道开平方数的表达，所以会说“$\sqrt{5}$”。

师：那你知道$\sqrt{5}$大约是多少吗？即面积为 5 的正方形，其边长大约是多少？

生：在 2 和 3 之间，大于 2 而小于 3，因为 5 比 4 大，比 9 小。

师：大多少呢？

学生无法立即看出大多少，教师揭示，这个问题可以转化为，若设面积为 5 的正方形面积比 2 大 x，则可列方程$(2+x)^2=5$，解出这个方程则可知道面积为 5 的正方形的边长。如何解这个方程是后续八年级将要学习的内容，今天我们主要学习如何计算$(2+x)^2$这样的代数式，由此引出本节课的新知。

3.2 新知探究

新知探究环节主要设计了两个活动，活动一探究两数和的平方公式，活动二探究两数差的平方公式，然后对公式特征进行简单辨析小结。

首先，学生能够利用多项式乘法的计算法则计算出$(2+x)^2=x^2+4x+4$。随后，教师给出更一般的代数式$(a+b)^2$，学生也能够迅速利用多项式乘法的计算法则，很快得到$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，接着提出本环节的第一个探究活动。

师：你是否能够利用手中的三块正方形纸片的面积关系来说明这个等式？（课前已将学生分为四人一小组，每小组分发三块大小不同的正方形彩色纸片，其中两个较小正方形的边长之和正好等于大正方形的边长。）

学生小组合作讨论探究后，在教室前的展板上进行演示说明，学生的拼图方法主要有以下两种，如图 6 所示。第一种拼法与课本中所给出的相同，也与欧几里得《几何原本》中卷 2 命题 4 的画法相同。而第二种拼法是学生的创新拼法，将两个小正方形的一边与大正方形的同一条边叠合，也可以利用这个图形的面积关系解释两数和的平方公式。

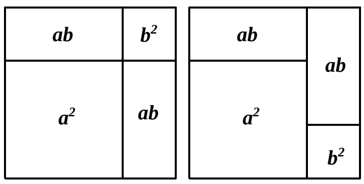

图 6　学生展示的拼图方法

在活动一之后，教师提出问题，若将$(a+b)^2$中的“＋”改为“-”，请学生用自己所能想到的方法计算$(a-b)^2$。学生小组合作探究并展示所想到的方法。

师：$(a-b)^2=$？，请同学们利用你所学过的代数知识，或者你手中的三块正方形纸片进行探究。

学生给出的方法主要有代数计算和拼图。利用多项式乘法进行计算是学生想到的最直接的方法。而由和的平方到差的平方，拼图难度有所增加，在学生合作探究讨论后，有些小组类比和的平方公式的拼图方法，给出了图 7 的两种拼法。

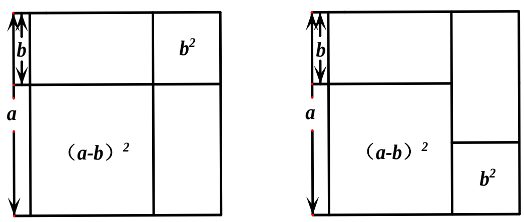

图 7　学生展示的拼图方法

对比图 6 和图 7 可以看出，两数和的平方公式和两数差的平方公式都可以用同样的图形进行解释，只是将三个正方形纸片的边长赋予不同的字母表示，则所表示的公式不同。图 7 中的第一个图，相对较好解释，$(a\text{-}b)^2$所表示的小正方形的面积正好等于大正方形的面积a^2减去两个长方形的面积 ab，再加上多减去的小正方形面积b^2。图 7 中的第二个拼图方法学生在教师的辅助下给出了同第一个拼法一样的解释，找小正方形面积$(a\text{-}b)^2$与大正方形面积a^2之间的关系。另外，教师补充了另外一种解释方法，小正方形的面积$(a\text{-}b)^2$等于大正方形的面积减去两个小长方形的面积以及另一个小正方形的面积b^2。即$(a\text{-}b)^2=a^2\text{-}2b(a\text{-}b)\text{-}b^2=a^2\text{-}2ab+b^2$，其中$2b(a-b)$表示图中两块小长方形的面积。

然后，教师对两个公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$（1）

$(a\text{-}b)^2=a^2\text{-}2ab+b^2$（2）

进行了结构上的分析，总结出完全平方公式的文字语言表达“两个数的和（差）的平方等于这两个数的平方和加上（减去）两数乘积的两倍”。到此为止，学生了解了完全平方公式的文字语言、图形语言和数学符号三种表征方式。

那这两个公式之间有怎样的关系呢？一方面学生发现公式（2）可由公式（1）得到，只需要将公式（1）中的 b 换为-b。另一方面，通过对两个公式的图形表征的探究过程可以看出，这两个公式可以用同一个图形进行解释，只是将图中正方形的边长取不同的字母表示。即将图 6 中的 a 换成 $a\text{-}b$ 即可变为图 7，那也就是说将$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$中的 a 换为$a-b$则可得到$(a\text{-}b+b)^2=(a\text{-}b)^2+2(a\text{-}b)b+b^2$，整理后可得$a^2=(a\text{-}b)^2+2ab\text{-}b^2$，移项可得公式（2）。

从图形结构观察到利用符号表征的公式推导，提升了学生的思维品质，也让学生对这两个公式有更深刻的认识。公式中的 a、b 可以表示任意数，也可以表示任意的代数式，本质上这两个公式是相同的。

3.3 新知应用

在本环节，首先教师通过判断题和一组常规例题，让学生辨析完全平方公式和平方差公式之间的区别以及应用公式时的注意点。

辨析：判断下列各式的计算是否正确，并说明理由.

(1) $(a+b)^2= a^2+b^2$　（　　）

(2) $(a–2b)^2= a^2–2ab+4b^2$　（　　）

(3) $(3–a)^2= 9–6a+a^2$　（　　）

例题 1 计算：

（1）$(2x+3y)^2$；（2）$(6x-5)^2$；（3）$(-2a+b)^2$；（4）$(-3a-2b)^2$；

然后重新展示引入中的问题，并提出以下问题。

师：在没有符号代数，没有计算器的时代，古代数学家就是利用完全平方公式的几何图形表示来估算这样的正方形的边长，你能利用今天所学估算出面积为 5 的正方形，其边长约为多少吗（保留一位小数）？

学生根据黑板上呈现的完全平方公式的几何图形表示，很快进行了估算，利用$(2+x)^2=5$，可得$x^2+4x+4=5$，$x^2+4x=1$，结合图形可知$4x<1$，得$x<0.25$，从而可得其边长约为 2.2。然后，教师揭示在刘徽的《九章算术》注中正是运用这样的方法对已知面积，求边长的问题进行求解。

3.4 归纳小结

在环节三的基础之上，本环节利用小视频简要向学生介绍了完全平方公式的历史发展，小视频中将完全平方公式的发展分为五个阶段，第一阶段是古代两河流域时期，古巴比伦人利用完全平方公式的几何图形估算正方形的对角线长；第二个阶段是公元前 3 世纪，欧几里得《几何原本》中卷 2 命题 4，以几何命题的形式呈现完全平方公式；第三阶段是公元 3、4 世纪，我国数学家刘徽和亚历山大时期的数学家席翁都不约而同地运用完全平方公式解决“已知正方形面积，求边长”的问题；第四阶段是公元 9 世纪的花拉子米和公元 12 世纪的印度数学家婆什伽罗对很多代数问题，如对一个数的平方的计算，一元二次方程的求解，都借助了完全平方公式及其几何图形表示；第五阶段是公元 16 世纪，韦达首次用字母表示数，第一次将完全平方公式简洁地用字母表示，从而有了今天我们所认识的完全平方公式。然后，师生从数学知识、数学思想以及情感感受三方面总结本节课的体会。

4 学生反馈

课后，结合本节课的教学目标，我们对学生进行了问卷调查，问卷一共 6 题。

前两题的目的在于考察学生对多项式乘法的计算能力和几何表征的能力，第一题让学生计算$(2a+3b)(3a+2b)$，并用几何图形表示，考察学生多项式的乘法和从代数表征到几何表征的转换，全班 87.5%的人能正确的计算出结果，但能用几何表征正确表示的只有 31.25%，可以看出在本节课之前的多项式乘法中教师未能较好地渗透多项式乘法的几何表征，学生对多

项式乘法的几何表征并未理解。第二题让学生找到图 7 所示图形的等式，考察学生从几何表征到代数表征的转换能力。正确答案为$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$，得到正确答案的学生占 18.75%。以上可以看出，学生对多项式乘法掌握较好，但是几何表征能力还较差。

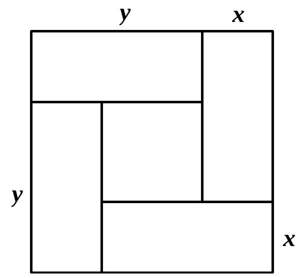

图 7　学生反馈问卷第 2 题

中间两题考察学生对完全平方公式的理解，第三题让学生用完全平方公式计算$(a+b+c)^2$，并用几何图形表示，考察学生对完全平方公式的掌握并进一步考察其几何表征能力。计算正确的占 81.25%，能用几何图形表征的占 43.75%。第四题让学生利用完全平方公式估算面积为 19 的正方形（至少保留一位小数）。学生能够正确估算的占 37.5%。以上可以看出，部分学生能够理解如何运用完全平方公式求解已知正方形面积，求边长的问题。学生对符号表征较为熟悉，对几何表征理解相对较弱。

最后两题考察本节课对学生情感方面的影响，对于本节课你印象最深刻的是什么？学生的回答有三类，21.4%的学生对用几何图形表示完全平方公式印象深刻、42.8%的学生对课上讲到的数学史感兴趣，惊叹古人的智慧、35.7%的学生对于课堂上的动手活动印象深刻。而谈到学生对本节课中运用的小视频或数学史的体会，大部分学生表示感受到了我国数学历史的悠远和数学家们的探究精神，并提到通过历史更好的理解了完全平方公式。

从问卷调查可以看出，本节课虽然强调了几何表征，但学生依然掌握的不够牢固，一节课很难改变学生对几何表征的认识，需要在平常教学中在相关知识中不断渗透，重视几何表征能力的培养。同时本节课希望让学生更深入的掌握完全平方公式，学生对此方面有一定突破，但仍有进步的空间，最后在情感方面，本节课的历史融入对学生留下了深刻的印象，在情感方面基本达到了目标。

5 结语

结合日常教学中存在的一些问题，本节课采用融入数学史的方式进行教学，希望达成知识之谐、能力之助、探究之乐、文化之魅以及德育之效等方面的目标。在知识方面，希望让

学生理解为什么学习完全平方公式，在能力方面，希望培养学生的几何表征能力，在探究方面，让学生通过探究得到完全平方公式，激烈学生的数学活动经验，在文化方面，整节课利用微视频渗透历史上完全平方公式的产生发展过程，形成动态的数学观，德育方面培养学生对中国数学文化的自豪感，并通过古人的探究精神激励学生不断探索新的知识。

但结合教师的反思，本节课还有很多的不足，由于探究的时间较长，学生练习时间有所不足，也导致了最后问卷中，有些思想学生还不能完全掌握，如何平衡课堂探究的时间与练习巩固的时间，是下一阶段需要研究的问题。同时，对于三种语言的转换，还需要对学生重点强调，需要设计更好的板书将三种语言充分的展示给学生。最后，微视频方面，虽然对史料进行了梳理和呈现，但还欠缺一些趣味性，以后在微视频的方面可以进一步加强。

参考文献

[1]程琨. 浅谈数学实验在初中课堂教学中的作用[J].学校党建与思想教育, 2012(7): 84-85.

[2]曹艳. “完全平方公式”的教学思考[J].中国校外教育, 2010(10): 110.

[3] V. J. Katz. 数学史概论[M].李文林等译,北京: 高等教育出版社, 2004: 23-59.

[4]黄甫华, 汪晓勤. 一元二次方程: 从历史到课堂[J].湖南教育, 2007(12): 42-44.

[5]邱华英, 汪晓勤. 一元二次方程的几何解法[J].中学数学杂志(初中), 2005(3): 58-60.

[6]欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽译, 西安: 陕西科学技术出版社, 2003: 47-48.

[7][汉]张苍等. 九章算术.[M]曾海龙译, 江苏: 江苏人民出版社,2011: 92-93.

[8] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. London: Oxford University press, 1921: 60-63.

[9]汪晓勤. HPM:数学史与数学教育.[M].北京: 科学出版社,2016: 181.

[10](意)斐波那契原著;(美)劳伦斯•西格尔英译. 计算之书[M].纪志刚,汪晓勤,马丁玲,郑方磊译,北京: 科学出版社, 2003: 583-584.

[11]汪晓勤, 樊校. 用字母表示数的历史[J].数学教学, 2011(9): 24-27.

发生教学法视角下“分数的初步认识”的教学

岳增成[1]，刘轩如[2]

（1 华东师范大学数学系 上海 200241；2 华东理工大学附属小学 上海 200093）

1 引言

近期读到了一篇对华应龙老师“分数的初步认识”进行评析的文章，白改平、李红红两位老师结合华老师的引入环节从数学史的角度对“分物”“测量”孰先孰后进行了分析[1]。事实上，她们基于的理论正是发生教学法，这种方法是对所讲授主题的历史、逻辑和心理顺序的融合，它遵循两种基本思想：教学必须建立在学生的认知基础之上，符合学生的认知规律；同时，凸显主题的必要性，激发学生的学习动机[2]。恰好我们也曾在上海基于发生教学法开发过“分数的初步认识”的课例，现呈现出来与大家分享，以期引发大家对“发生教学法视角下的（‘分数的初步认识’）教学是什么样的？”的思考。

2 历史材料及其应用

在历史的进程中，整数向分数的扩张有四个里程碑，分别是部分与整体、测量、除法、集合理论[3]。分数的概念来源于对物品实行分配，当所分配物品少于分配对象时，就可能产生分数的概念。这显然与部分与整体，或分数的释义“破碎的数（broken number）”相一致。虽然，古人很早就感受到了整数的使用在生产生活中的局限性，但是不同民族的人不约而同地试图通过创造更小的单位来避免分数的出现，因此早期社会只出现了一些与分数意义相近的词语，比如中国古代的半、少半（三分之一）、大半（三分之二）。显然，这样的处理会带来很多的不便，分数的计算更无从谈起，因此单位分数的概念出现了。最早的单位分数理论记载于约公元前 1650 年古埃及的阿默士纸草书上，其上记载有古埃及的祭司用单位分数计算面包的分配等问题。单位分数的传统影响深远，中世纪的数学家斐波那契（Fibonacci， 约 1170-1250）仍用单位分数进行分数的表示与计算[4]。从测量角度看，分数与可公度问题紧密相关，可公度指两个物体的长度可用同一个单位量尽，但“两个物体”的长度之比很可能不是单位分数。中国古代分数理论的发达与律、历两学密切相关。律学的核心问题是确定以管长为标尺的基本音程，长期以来律学家都采用三分损益法来推算律管长度。具体来说就是将

起始律管的长度均分为三份，去其一份为损，增其一份为益，逐步得到其他律管之长度[5]。这显然是一个与测量相关的例子。从除法的角度看分数，就会伴有被除数、除数等概念，《九章算术》中“实如法而一。不满法者，以法命之”（实、法分别为被除数和除数）就是一个例子。

以上呈现了分数产生的大致历史，从中可见分数起源于“分物”，最早出现的分数是单位分数，这也与学生的认知基础相一致，一方面学生在生活中经常使用一半、半个小时等词汇，另一方面，学生在学习、生活中，经常会进行剪一剪、折一折等操作活动，有了平均分的经验，也有了除法运算的基础。因此，教学从“分物”开始引发学生的认知冲突，引导学生逐步认识 $\frac{1}{2}$、其他单位分数、分数，并在其中穿插分数记法的历史[6]，以引导学生形成动态的数学观。

3 教学过程与实施

3.1 情景引入

师：春天来了，我们的数学小伙伴们也要去春游了，看他们玩得多开心呐！小丁丁带来了很多的食物想和小胖一起分享，看！

屏幕展示依次展示（1）6 块糖，平均分给 2 人，每人分得几块？（2）12 个小金橘，平均分给 2 人，每人分得几个？（3）1 个月饼，平均分给 2 人，每人分得几块？教师要求学生列式并计算。学生很容易列式并正确计算。但对于问题（3），

师：这是我们以前在除法横式中学过的，这个 0 余 1 又表示什么意思呢？

生：表示没有人分到，而且还多出来一个。

师：真的没有人分到了吗？这可怎么办？因为小丁丁不仅仅带了一个月饼，还带了一块巧克力和一个三明治，他都想和小胖分享，怎么办？你有方法吗？

3.2 探究新知

（1）$\frac{1}{2}$ 的得出

师：看来有些同学已经有想法了，老师这里也为每个美食准备了相对应的纸片（见图 1），请你自己折一折，涂一涂小胖能分得的部分。再和你的同桌说一说：为什么这么分？

图 1

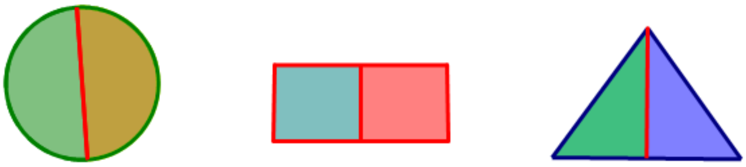

图 2

图 3

师：老师看到大部分同学是这样分的，你和他们分得一样吗？（如图 2）

生：一样

师：我们先来看看分月饼，说说你是怎么想的？

生：虽然只有一个月饼，不能分给任何人，但是只要切成一半，一人一半就好了。

师生借助图 3 辨析平均分的概念，并进一步辨析 $\frac{1}{2}$ 的概念，最终得到了如图 4 所示的与 $\frac{1}{2}$ 相关的概念。（这也是教师的板书）

分数

分子 1 取其中的一份

分数线 $\overline{}$ 平均分

分母 2 把一个整体平均分成 2 份

读作：二分之一

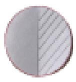

图 4

（2）分数概念

教师引导学生回到分月饼、巧克力、三明治的情境，让学生进一步巩固所学到的 $\frac{1}{2}$ ，并引出后续的问题。

师：刚才我们知道了把一个整体平均分给两个人，每人获得整体的 $\frac{1}{2}$，现在小巧带来了一个大蛋糕，打算平均分给几个人，那这几个人，每人又能分得多少呢？老师给大家准备了圆形的纸，请你自己折一折，涂一涂，说一说，并且填一填，记录在学习单上（如图 5）。

学习单：折一折，说一说

我想小巧会请（　　）人，

把蛋糕平均分成（　）个部分，

每部分是这个蛋糕的（　　），是（　　）个蛋糕，

所以每人分得（　　）个蛋糕。

图 5

学生将蛋糕分成了四份、八份、十六份，教师引导学生进一步巩固平均分的概念，并引出分数的概念。

师：真是厉害，分给了这么多人，再多的人可不可以分？

生：可以分，一直折下去。

师：了不起！一块蛋糕竟然可以平均分给这么多人，所以我们说一个一个整体平均分成几个部分，每个部分就是这个整体的几分之一，这就是我们今天要学习的几分之一（板书），像$\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$……这样的数我们都可以叫它分数。

（3）分数的历史

师：为什么命名这样的数为分数呢？

生：要分的数呗。

师：有一点道理哦，还记得吗？我们以前学过的数像1、2、3、4……这样的数，我们称它们为整数，意思是完整的数，那么和完整的数相对的是破碎，也就是破碎的数，所以分数也就是破碎的数的意思。（如图6）

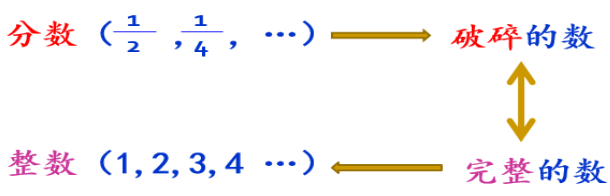

图 6

师：在古代，人们分东西时，经常出现结果不是整数的情况，像是把1个面包或1桶酒分给两个人时，于是，渐渐就产生了分数。其实在很早以前，人类就有用各种方式表示分数。你看得懂吗？（如图7）

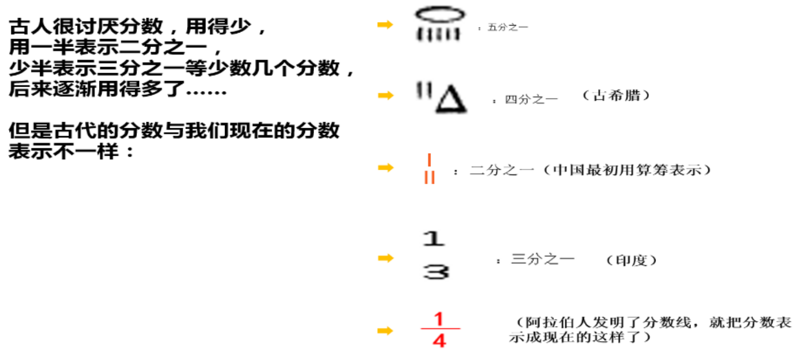

图 7

教师引领学生对分数记法的历史进行讨论，学生给出的答案有：以前的分数，五分之一是一个圆下面有5条线，我觉得可能是把一个整体平均分成5份，所以这样画；以前中国的算筹表示二分之一，和印度的分数很像，只不过中国是用算筹，印度是用阿拉伯数字；我觉得印度的和阿拉伯的很像，就是把印度的加一个分数线就是现在的我们写的分数了。教师进一步引导学生对发现分数现代表示的优越性，比如有学生讲“我觉得有一条分数线的好，印度的那个方式很容易和1跟3这样的数（整数）混（淆），但是有了分数线就能分得清了”。

3.3 练习巩固

（1）这一块正方形的土地，平均分给四户人家，每户人家能分得原来土地的多少呐？

师：很久以前人们在土地分割时常常会用到分数，这里也有一个类似的问题，每家分得多少？

生：$\frac{1}{4}$。

师：到底该怎么分呢？接下来请你用一个正方形的纸，折一折，涂一涂，说一说，比一比哪个小组的方法最多？（图8呈现了学生的一些方法，师生就此一起辨析）

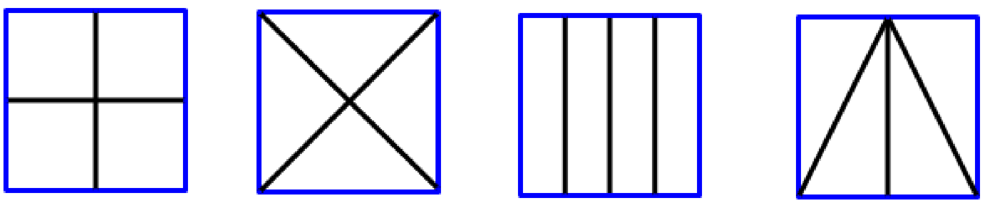

图 8

（2） 小朋友们还准备了长条糖分给其他人，请你用纸带代替长条糖折一折，画一画：$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{6}$。（如图9）

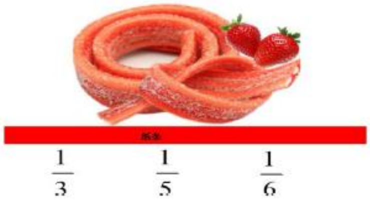

图9

图10

师：任选一个分数请你折一折，涂一涂，说一说

学生用折一折的方法得到了$\frac{1}{3}$（生：我把这个纸带两端都往当中折，能够完全重合，就得到了$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$ ，用量一量的方法$\frac{1}{5}$。

3.4 课堂小结（学生总结这节课所学习的内容）

3.5 课后拓展

师：今天老师还带来了七巧板（如图10），你们看！可以留给你下课后思考哦。

红色板、蓝色板、绿色板分别占整个七巧板的（　　）（　　）（　　）

4 学生反馈

课后对班级 34 名学生进行了问卷调查。学生对“你觉得我们为什么要学习分数？”的回答如表 1 所示，可见学生对这一问题的回答较为多元，其中回答分数对生活很重要学生最多，约占总数的 50%，有 8 人从分数产生的源头，即“为了表示从一个整体平均分后，所得的数”进行回答。题目“两条线 AB 和 CD 把正方形分成了的四部分（如图 11），并交于正方形的中心 O，EF 过正方形的中心 O，求阴影部分的两个三角形之和占整个正方形的(　)”主要考察学生的认知，对学生而言有一定的挑战性。从学生的答案看，全对的有 14 人，占全班人数的 41.2%，6 人给出的答案是$\frac{1}{6}$，4 人是$\frac{2}{6}$，可见他们对平均分的概念理解不够深刻。“很多知识经过几千年的发展，经过不同民族很多数学家的努力才成熟起来，比如分数，而我们通过了一节课就学会了很多分数的知识，对此你有什么感受？”考察学生对数学史的看法，表 2 呈现了学生的答案，从中可以发现融入数学史的课堂能为学生创造轻松的学习环境，激发他们的兴趣，拓展了他们的知识面；学生能用发展的眼光看待分数，感受到了古代数学家的聪明才智，加深了对分数的理解。以下是一些学生的答案：我觉得分数被造出来，

而且一直进化，我觉得数学家们不容易；这些知识都是有规则的，学习起来比较轻松；古人很聪明；我觉得很有趣，因为这节课我知道了古代是怎么写分数的；我觉得我们今天 35 分钟就学了许多分数知识，都是古人的功劳；我觉得我学到了几千年来不同民族和很多数学家的智慧的结晶；我的感受是，如果没有多年观察和研究分数，就不会有今天如此巧妙（神奇又简易的分数）。“这节课，你印象最深刻的是什么？为什么？”考察学生整节课的感受，也为上述三题提供佐证，其中 16 人的回答与分子、分母的关系有关，8 人的回答涉及折一折、画一画这些获得分数概念的操作活动，4 人的回答是古时候的分数。以下是一些具体的回答：“我印象最深的是‘分母’与‘分子’，因为它和生活中的‘母亲’与‘孩子’比较像”、“印象深刻的是古代的分数，因为很好笑”、“分数的写法，因为以前一直不会写”。

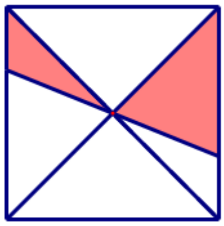

图 11

表 1

内容	人数	百分比
为了表示从一个整体平均分后，分得的数	8	23.5%
分数对生活很重要	16	47.1%
以后计算学习要用	8	23.5%
答非所问	2	5.9%

表 2

感受	人次
历史上的数学家很聪明	5
分数变得越来越简单，学起来很容易。	4
现在的分数是从历史中进化而来（历史感）	8
拓宽了知识	4
很有趣，很开心	13
更认识了分数	4
无	2

5 结语

通过将分数“分物”的起源重构于“分数的初步认识”的教学，将分数的历史、分数记法的历史附加式的介绍给学生，学生感受到了知识之谐，即分数不是天上掉下来的，学生在除法的背景下，感受到了“分物”的必要性；获得了探究之乐，学生在“分物”的探究活动中，探究出了问题的答案，获得了成功的体验；体验到了文化之魅，在分数记法的讨论活动中，学生观察到了不同民族分数的记法，感受到了不同民族对分数发展的贡献；整个教学过程彰显了德育之效，学生在发生教学法视角的教学中具有浓厚的学习兴趣，特别地，教师通过分数产生与记法发展的介绍，使学生感受分数从产生到发展经历的漫长过程，感知数学的发展，认识到数学不是一成不变的。学生课后的反馈也大致验证了这些数学史融入数学教学的价值。

发生教学法是数学史融入数学教学最重要，也是最难的方法，因其能将学生的认知发展、知识的逻辑顺序、历史的发展顺序融入在一起，如处理得当，势必会达到多元的、好的教学效果。但苦于“无米之炊”的现状，苦于基于原始、权威素材的知识发展脉络梳理的匮乏，很少有教师能将发生教学法应用于教学。因此，我们期望更多高校 HPM 专家与中小学一线教师以共同体的形式合作，以梳理出的知识的历史发展为基础，进行发生教学法视角下 HPM 课例的开发。

参考文献

[1] 白改平，李红红．从测量的角度引入分数真的可取吗？——对特级教师华应龙“分数的初步认识”教学的再评析[J]. 教学月刊·小学版, 2017(1-2): 16-19.

[2] 汪晓勤. HPM 视角下的小学数学教学[J]. 小学数学教师, 2017(7-8): 77-82.

[3] Park, J., Güçler, B., McCrory, R. Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives [J].Educational Studies in Mathematics, 2013,82(3): 455-479.

[4] Smith, D. E. History of Mathematics(Vol. 2)[M]. Boston: Ginn& Company, 1925: 208-220.

[5] 刘钝.大哉言数[M]. 沈阳，辽宁教育出版社, 1993: 103-105.

[6] Cajori, F. A history of mathematical notations[M]. New York, Dover Publications, 1993: 309-312.

学术讯息

第五届数学史与数学教育（HPM）教学研讨会纪要

沈中宇，孙丹丹

（华东师范大学数学系，上海 200241）

2017 年 12 月 25-26 日，第五届 HPM 教学研讨会在杭州市文海实验学校隆重举行。岁末的杭州，渐入寒冬，研讨会现场却气氛热烈。此次研讨会由上海市“立德树人”数学教育教学研究基地、上海市华大教育研究所、华东师范大学教师教育学院、杭州经济技术开发区社会发展局共同主办，浙江省杭州市第四中学和杭州市文海实验学校承办。

本次研讨会共有来自全国 15 所高校、60 余所中小学、多家媒体单位的高校教师、研究生、中小学一线教师、杂志编辑等 160 余人参会，覆盖上海、浙江、江苏、山东、陕西、贵州、黑龙江、内蒙古等 13 个省份，业已成为全国数学史与数学教育领域的重要学术交流平台。

一、大会报告

来自浙江省教育厅教研室的张金良老师为大家带来了本次研讨会的第一场大会报告“基于核心素养的数学教学课例研究”。张老师不仅从理论上阐述了高中六大数学核心素养——数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算、数学建模、数据分析的内涵，而且以课例为载体，具体展示了如何在一线课堂中落实数学核心素养。

东华大学的徐泽林教授作了题为“日本江户时代的几何及其教育价值”的大会报告。报告首先简要介绍了东亚数学之源：中国古代的几何传统，然后分三个阶段——日本江户前期对天元术及几何传统的受容与改进、江户中后期几何内容的充实与丰富及江户后期的几何变换方法介绍了日本江户时代几何的发展过程，最后阐述了日本传统几何的教育价值。

江苏省启东市中小学教师发展中心小幼教研室主任蔡宏圣老师作了题为“数学史驱动下的团队建设”的大会报告。在简要介绍团队核心成员后，蔡老师结合自己团队建设的宝贵经验，从团队凝聚——工作室的运行理念及机制、团队活动——读史、磨课及研讨、团队成果——思想提炼及成员发展等方面为大家展示了一个团队的系统发展。

华东师范大学汪晓勤教授作了题为“HPM 视角下的有效教学课例研究”的大会报告。报告首先介绍了有效教学的三个维度——效果、效益、效率，阐述了有效教学与数学史六大教育价值之间的联系，然后结合三个 HPM 课例来具体分析数学史如何助力有效教学，最后提出了 HPM 视角下的有效教学课例研究流程。

杭州市教研室的王红权老师作了题为“新高考制度下的高中数学教学研究”的大会报告。报告揭示了数学教学的一般现状及新高考制度引发的新变化，结合具体知识阐述了突破困境的办法：取势－明道－优术，总结出教学的核心是理解数学，关键为乐学和落实，要坚持两条腿走路，既要坚持成熟的方法，也要引进新方法。

西北大学的赵继伟老师作了题为“阿基米德的数学发现方法”的大会报告。报告首先以阿基米德的两个命题为例介绍了其数学发现方法与数学证明方法的不同，然后具体介绍了阿基米德的数学发现法在求面积、体积以及重心等问题上的应用。

人民教育出版社的宋莉莉老师作了题为“数学史带给数学教科书编写的启示——以‘数列’的编写为例”的大会报告。宋老师结合“数列”一章的教科书编制，从两方面具体阐述了数学史在数学教科书编写中的价值：数学史帮助编者把握数学内容的本质、数学史为数学教科书的编写提供贴切的素材。

浙江省义乌中学的王芳老师为大家带来了题为“数学概念的 HPM 重构”的大会报告。王老师首先阐明了数学概念对于学生数学学习的重要意义，然后结合抛物线的概念等具体课例展示了 HPM 重构式视角下的数学概念教学，并介绍了学生在经历这样的学习过程以后所产生的思维的火花。

江阴市要塞中学、新青年数学教师工作室的仓万林老师作了题为“数学史与数学写作”的大会报告。报告首先简要介绍了全国“数学写作”学校联盟的相关讯息，然后从课程建设、核心素养等角度解释了“数学写作”的内涵并分享了徐利治先生对“数学写作”的期望和建议，最后结合学生写作作品案例阐述了“数学写作”的价值。

小学教学（数学）编辑部的袁伟刚老师作了题为“小教不小——《小学教学》与数学文化”的大会报告。袁老师首先阐述了其对于数学文化与数学史的认识，然后结合《小学数学（数学）》杂志介绍了数学文化融入数学教学实践的不断深化，并介绍了杂志中与数学史及数学文化有关的专辑，希望通过杂志，引领一个方向，组一些好文章，影响一部分教师，为数学文化融入课堂出自己的一份力。

杭州文海实验学校的刘松老师作了题为“‘以文化人’理念下数学课堂的构建”的报告。刘老师首先阐述了“化”的丰富含义：演化、转化与点化等，并分别将其与情感、结构与创

造联系起来，然后通过三个课例介绍了文海实验学校在“以文化人”理念下进行的数学课堂实践。

华东师范大学刘攀老师作了题为“HPM 与数学话剧”的报告。刘老师介绍了华东师范大学数学系自 2012 年至 2017 年在数学文化推广与传播方面的尝试，并以 2017 年原创话剧“几何人生——大师陈省身”的创作与实践为例进行了阐释，希望数学文化可以更好地走进学生的生活，帮助更多的学生培养学习数学的兴趣。

南通大学钟志华老师作了题为“基于 HPM 的函数概念教学设计”的报告。从教材分析、学情分析到教学目标、教学重难点的确定，再到整个教学过程的设计，钟老师详尽地阐述了基于发生教学法的整个教学设计过程及其背后的设计理念。

桐乡凤鸣高级中学的沈金兴老师作了题为“HPM 模块教学的行与思”的大会报告。沈老师结合自己团队多年的 HPM 教学研究经验，讨论了 HPM 课例开发的价值取向、需遵循的原则及课例开发的多样性等问题，并结合具体课例重点介绍了他的团队在 HPM 模块化教学方面的尝试。

华东师范大学的岳增成博士作了题为“HPM 与教师专业发展的本土化研究”的报告。报告首先介绍了进行 HPM 与教师专业发展的本土化研究的背景，然后从对象、内容、形式、结果四方面梳理了国际视野下 HPM 与教师专业发展的相关研究，在此基础上，尝试建构具有中国特色的 HPM 与教师专业发展体系。

诸暨中学的张小明老师作了题为“HPM 实践研究的若干观点”的报告。作为 HPM 早期的关注者和实践者，结合十几年的 HPM 研究经验，张老师阐述了十几年来我国 HPM 研究的进展，并结合 HPM 教学实践中出现的问题，就评价 HPM 课例的基本维度、基于 HPM 理念的教学诠释学循环、单元整体布局等问题发表了深刻的见解。

二、工作坊

小学和中学两个分会场同步举行了 HPM 工作坊活动。

小学 HPM 工作坊由张范辉老师主持，来自江苏省启东市蔡宏圣名师工作室的成员陈金飞老师展示了课例“圆的面积”、陈黎春老师展示了课例“用算盘表示数”、王芳老师展示了依据调查结果设计的课例“厘米和米”、刘爱东老师展示了课例“‘鸡兔同笼’问题”、王丽娟老师展示了课例“三角形内角和”，杭州市萧山区教研室的邵汉民老师展示

了圆的系列教学研究与实践，上海理工大学附属小学的刘轩如老师展示了课例“几分之一”、上海市静安区科技学校的马思聪老师展示了课例“平行线”。

在中学 HPM 工作坊中，来自黑龙江省哈尔滨市阿城区第七中学的刘兴华老师展示了幻方在初中数学校本课堂中的应用、华东师范大学的栗小妮博士展示了课例“完全平方公式”、浙江省桐乡市凤鸣高级中学的孙冲老师展示了课例“圆锥曲线序言课”、王华老师展示了课例“椭圆定义及其标准方程”、杭州市第七中学的叶启垦老师展示了高中数学校本教材《当数学遇上艺术——理性与感性的交融》的开发与实践、华东师范大学的研究生王鑫对两节同课异构的“反比例函数”课例进行了分析。

图 1 小学工作坊

图 2 中学工作坊

三、HPM 教学展示

小学、初中、高中三个分会场分别进行了课例展示。

小学学段，杭州市文海实验学校的童晓琴老师和上海市虹口区曲阳第四小学的张婧老师进行了“圆的初步认识”的同课异构课例展示。

童老师从熟悉的正四边形开始，再到正八边形、正十六边形…，通过边数的增加，学生感觉到图形越来越接近圆，同时，在圆柱和球中也有圆的存在，从而引入课题——圆的认识，接着教师展示了不同的画圆工具，然后让学生找到其中的共同点，通过探究，学生得到了圆心和直径等概念，接着通过展示墨子的“圆，一中同长也。”，学生感受到圆的性质，即圆心到圆上的距离都相等，并通过观察生活，发现生活中很多设计都应用了这一性质，最后发现圆在生活中无处不在，最后老师将墨子的定义从圆拓展到了球，留给了学生思考的空间。

张老师从历史博物馆中的“圆”引入，让学生感受到书画、陶器、青铜器中的“圆”，接着引出古巴比伦人画的圆，让学生感受到其画的不圆，从而让学生探究用老师给的工具画圆，通过这一研究活动，学生认识到圆心和半径等概念，接着老师让学生思考

画一个特定大小的圆需要的条件和工具，从而让学生感受到定点和定长，于是引出墨子的“圆，一中同长也。”和《几何原本》中圆的定义，最后，老师让学生欣赏了生活中的圆，展示了圆在生活中的应用。

在两节课结束之后，特级教师蔡宏圣老师、特级教师邵汉民老师分别对课例进行了点评。

图 3 童晓琴老师观摩展示课

图 4 张婧老师观摩展示课

初中学段，杭州市文海实验学校的刘春江老师和上海民办建平远翔学校的贾彬老师进行了“演绎证明”的同课异构课例展示。

刘老师从“什么是证明”、“为什么需要证明”以及“怎样证明”三个层面设计和实施教学。课上刘老师首先给出数学中“证明”的定义，并利用微视频举例进一步介绍。然后，利用历史上数学家对费马在研究质数时的猜想“只要 n 是自然数，$2^{2^n}+1$一定是质数”以及费马大定理“若 $n>2$,则$x^n+y^n=z^n$没有正整数解。”这两个问题的研究，让学生了解为什么需要数学证明，同时利用数学史让学生感受数学家们在追求数学真理过程中展现出的科学精神。最后利用具体例子进行证明举例，展示如何进行数学证明。

贾老师以“证明—数学证明—演绎证明”为主线，层层递进展开教学，首先她以生活中的一些事例让学生了解举例证明、实验证明以及历史证明等证明方式，然后给出什么是数学证明，再利用“对顶角相等”具体阐述观察、操作测量以及演绎证明之间的区别，给出演绎证明的定义，并利用微视频介绍数学证明的历史。最后利用学生已知的“三角形内角和等于 180°”作为本节课的例题让学生体会进行数学演绎证明的一般思考流程。整节课利用事例和数学故事让学生体会学习演绎证明，可以使我们思维严密、有条理，终身受益，并渗透了环保、爱国等德育价值。

杭州市教研员王红权老师和上海市延河中学副校长蔡捷老师分别对课例进行了点评，复旦第二附属中学的蔡老师、易良斌名师工作室的徐老师、文海实验学校的吴老师等也就课例发表了自己的见解。

图 5 刘春江老师观摩展示课

图 6 贯彬老师观摩展示课

高中学段的两节观摩展示课分别是江苏省宜兴中学的特级教师张海强老师带来的“三角学序言课”、杭州市第四中学的王元真老师带来的“函数的变化率与导数”。

张老师以三角学的发展历程贯穿整节课，首先介绍了三角学的起源为古埃及和古巴比伦时期，接着介绍了古希腊时期的托勒密制造弦表，利用托勒密定理引出和角公式，其后，僧一行制作了正切表，阿布·韦发改进了弦表。然后到了 16 世纪的欧洲，韦达采用代数公式研究了解三角形问题。在下一个环节，老师首先展示了日常生活中的力学世界，让学生从中总结中生活中存在的周期现象，然后介绍了单摆，并用其绘制了正弦函数图像，从而引出欧拉及其对三角学的贡献，最后老师带领大家回顾了三角学的发展历程并让学生进一步借助图形探究差角公式。

王老师首先介绍了十七世纪的三大数学发明，其中之一为牛顿和莱布尼兹的微积分，接着向学生简单介绍了微积分，然后引出三个问题，分别是注水量与水深的关系问题、气球内空气容量与半径之间的关系问题和跳水运动中运动员离水面高度与时间的关系问题，从三个问题的研究中发现，如果需要精切反映这些现象的运动状态，需要瞬时变化率的概念，从而引出导数，最后，通过展示，让学生感受到导数在生活中的联系并体会到数学与生活之间的密切联系。

两节观摩课之后，来自浙江省教育厅教研室的特级教师张金良老师和来自浙江省诸暨中学的正高级教师张小明老师对课例进行了点评。

图 7 张海强老师观摩展示课

图 8 王元真老师观摩展示课

四、青年学者、研究生论坛

青年学者、研究生论坛在六艺楼举行，来自华东师范大学、聊城大学、宁波大学和浙江师范大学的九位研究生做了学术报告。来自华东师范大学的陈莎莎同学作了题为“HPM 视角下的复数概念教学——同课异构课例分析”的报告，从宏观和微观两个方面对两节 HPM 视角下的复数课例进行了分析。来自华东师范大学的陈晏蓉同学作了题为“基于数学史的新知引入课例分析”的报告，对 11 个 HPM 课例进行了分析其引入方式和特点。来自聊城大学的孙若涵同学作了题为“基于 HPM 视域下‘对数概念’的教学设计与思考”的报告。来自华东师范大学的李霞同学作了题为“HPM 视角下古典概型的教学”的报告，以古典概型为例说明了概率发展史中一些经典的错误在教学中的应用。来自宁波大学的汤虹同学作了题为“HPM 视角下‘三角形中位线定理’的教学设计”的报告。来自聊城大学的张娜同学作了题为“HPM 视角下无理数的教学设计”的报告。来自华东师范大学的丁倩文同学作了题为“HPM 视角下的初中数学问题提出课例分析”的报告，对 15 个初中 HPM 课例中基于数学史提出的数学问题进行了分析。来自浙江师范大学的邵丽娜同学作了题为“国际协作问题测评的数学文化及 HPM 案例研究”的报告，对国际协作问题测评中的数学文化进行了分析。最后，来自华东师范大学的刘欣雨同学作了题为“数学文化的推广与实践”的报告，以数学话剧《物镜天哲》为例研究了其对观众和参与的演职人员的影响。报告后大家进行了讨论。

最后，华东师范大学汪晓勤教授作此次研讨会总结发言，此次 HPM 教学研讨会群贤毕至，少长咸集；聚焦实践，成果丰硕；会风淳朴，紧凑高效；前景广阔，未来可期。

让我们一同期待明年的 HPM 教学研讨会，憧憬 HPM 的美好未来！

图 9 大会合影

2017 年 HPM 研究成果

[1] 汪晓勤. HPM 与小学数学教师专业发展: MKT 的视角[J]. 云南教育, 2017, (1/2): 13-15.
[2] 沈中宇, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊, 2017, (1): 44-47.
[3] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 视角下的三角形中位线定理教学案例评析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (1): 35-41.
[4] 杨懿荔, 汪晓勤. "点到直线的距离":基于认知基础,选择历史方法[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(02): 60-64.
[5] 岳增成, 汪晓勤. HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展——以"角的初步认识"为例[J]. 基础教育, 2017, 14(02): 96-103+112.
[6] 李婷, 汪晓勤. HPM 视角下的数学教学的特点——基于任意角概念同课异构教学案例的分析[J]. 中小学数学(高中版), 2017, (4): 10-14.
[7] 陈莎莎, 汪晓勤. 2007～2016 十年间基于数学史的高考数学试题分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(05):26-33.
[8] 汪晓勤, 邵铭宇.三角公式的若干几何模型[J]. 数学通报,2017,56(06):1-5+49.
[9] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的[J]. 中学数学月刊, 2017, (6): 28-31.
[10] 汪晓勤. HPM 视角下的小学数学教学[J]. 小学数学教师, 2017, (7/8): 77-83; 人大报刊资料全文转载.
[11] 任芬芳, 汪晓勤. 美国早期数学教科书中的极限概念[J]. 数学教育学报, 2017, 26(4): 38-43.
[12] 汪晓勤, 郭学萍. 16 世纪的数学竞赛与三次方程求根公式的诞生. 载丘成桐主编《数学与人文》第 22 辑, 数学竞赛与数学研究(熊斌主编), 北京: 高等教育出版社, 2017. pp. 3-17
[13] 沈中宇, 邹佳晨, 汪晓勤. ICME-13 之 HPM 专题研究综述[J]. 数学教育学报, 2017, 26(5): 71-76.
[14] 方倩, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方代数教科书中的数学归纳法[J]. 数学教学,2017(11):1-4+31.
[15] 陈莎莎, 汪晓勤. HPM 视角下的复数概念教学——同课异构教学案例分析[J]. 中国数学教育, 2017, (11): 20-24.
[16] 栗小妮, 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的无理数概念[J]. 数学教育学报, 2017, 26(6):

86-91.

[17] 岳增成, 沈中宇. HPM 与小学数学核心问题探索——汪晓勤、邹佳晨老师访谈录[J]. 小学教学(数学版),2017(11):4-9.

[18] 华妹, 岳增成. 故事串联 探究为重——数学史融入“位置的表示方法”的教学[J]. 小学教学(数学版),2017(03):17-20.

[19] 冯晶, 岳增成. 历史与探究活动的结合 学生与古人思维的碰撞——HPM 视角下“角”的教学[J]. 小学数学教师,2017(Z1):94-98.

[20] 岳增成, 刘轩如. 课堂中一名额外的学生——数学史融入“两位数被一位数除”的教学[J]. 小学数学教师,2017(Z1):89-93.

[21] 牟金保, 岳增成. 列方程解相遇问题:基于数学史,设置问题串[J]. 上海课程教学研究,2017(11):59-63.

[22] 牟金保, 孙洲.“平行线的判定”:基于相似性,重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(05):34-40.

[23] 宋万言, 栗小妮. “实数的概念”：折纸、拼图中发现,计算、比较中建构[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(08):41-47.

[24] 王进敬, 栗小妮. “反比例函数”:实验重构数学史,故事凸显价值观[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(06):36-41.

[25] 沈金兴, 沈中宇.高中生对平面的理解:历史相似性研究[J]. 数学教学,2017(10):38-41.

[26] 刘轩如, 沈中宇.利用古今对照 展现精彩课堂——HPM 视角下“一位数与两位数相乘”的教学[J]. 小学数学教师,2017(Z1):83-88.

[27] 王倩, 沈中宇, 洪燕君. HPM 视角下可化为一元二次方程的分式方程教学[J]. 数学教学,2017(07):23-26+37.

[28] 洪燕君, 李霞, 常道宽.数学史融入“加减消元法”的课堂教学[J]. 数学教学,2017(01):39-42.

[29] 张奕一, 王敬进, 洪燕君.HPM 视角下可化为一元二次方程的分式方程教学[J]. 上海中学数学,2017(05):22-25.

[30] 刘帅宏, 陈莎莎, 王鑫, 李 婷. 聚焦数学史与数学教育领域的研究热点——第四届 HPM 研讨会综述[J]. 新教育,2017(02):4-8.

[31] Wang, X., Qi, C., & Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study, *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.