上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 5 期

大卫·尤金·史密斯

(David Eugene Smith, 1860-1944)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

夏日炎炎，却未能摆脱三尺讲台。讲学、授课之余，未忘《上海 HPM 通讯》的编辑工作。这是一份责任、一项工作、一种鞭策。

在“文献研究”栏目，我们安排了一篇古代两河流域数学史的讲座，对富有教育价值的古巴比伦数学成就作了总结，并对三角形内角和定理的历史和教学进行了链接。

在“实证研究”栏目，张连芳老师为我们带来了她的关于符号代数历史相似性的研究。历史相似性乃是 HPM 领域重要的研究方向之一，历史相似性的存在与否为我们的课堂教学提供了重要参考。希望张老师的研究可以起到抛砖引玉的作用。

在“教学实践”栏目，我们展示了一个 HPM 最新案例——“导数的应用”。该案例将 17 世纪数学家开普勒、费马的思想无声地运用于教学中，展现了数学史在数学教学中的不可替代的价值。

最后，在“学术动态”栏目，刚刚参加过韩国 HPM-2012 的蒲淑萍老师为我们带来了这次学术盛会的信息。在国际舞台上，HPM 学术共同体日益扩大，HPM 研究方兴未艾。HPM 学者们的不懈追求催人奋进。

感谢各位辛勤的作者，也感谢关心、支持本刊的所有朋友们，祝福你们！

目　录

CONTENT

文献研究

古巴比伦的数学遗产

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

太阳底下无新事。

——《圣经·传道书》

作为数学教师，你或许很难对远古的数学历史产生兴趣：逝去的时代，失落的文明，荒废的文字，陌生的语言，这一切与今天的数学教育有何关系？不懂数学历史，将来一样可以做优秀的数学教师。表明上看，这似乎是不错的，因为，我们今天数学教育关注的往往只是"技术"，而不是"文化"。但是，倘若学生问：为什么在角度制中，要将圆分成 360 等分，以每一等分所对应圆心角的大小为 1 度？如果将圆分成 10 等分，50 等分，100 等分，200 等分，300 等分，并以每一等分所对应圆心角的大小作为 1 度，难道三角学就不存在了吗？不知不觉，我们面对的就是一个用逻辑推理手段无法解决的"历史的为什么"。对于这样的"为什么"，我们只能诉诸两河流域的数学和天文学。实际上，这只是数学教育不能割裂历史的无数例子之一。

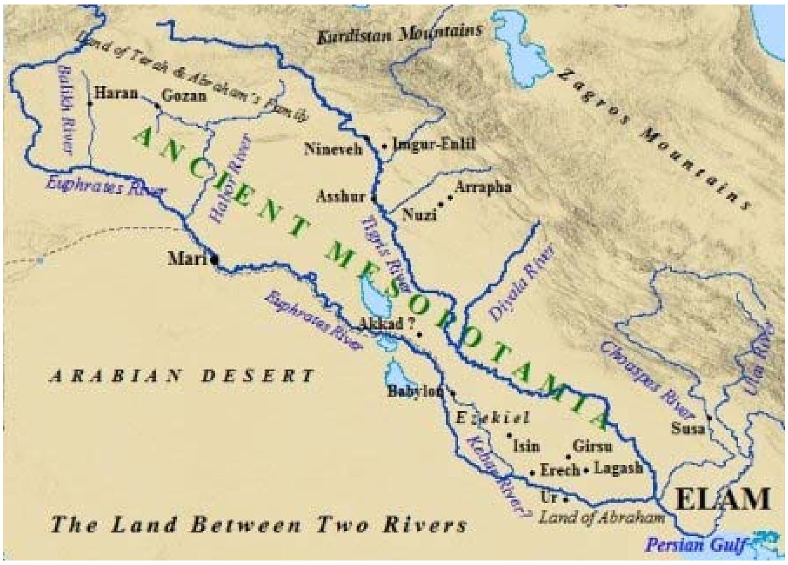


图 1 美索不达米亚地图

底格里斯河和幼发拉底河孕育了人类历史上最早的文明之一——美索不达米亚文明。古希腊人所称的"美索不达米亚"指的就是"两河流域"之意（图 1）。肥沃的土地，温暖的

气候，造就了发达的农业和商业；而农业和商业又促进了数学与天文学的发展，图 2 是两河流域数学发展的历史年表[1]。

图 2 美索不达米亚数学史年表

在两河流域历史上，巴比伦文明发达程度最高。19 世纪上半叶以来，考古学家对巴比伦古国进行系统发掘，发现了约 50 万块泥版，今藏巴黎、柏林、伦敦的博物馆以及美国的耶鲁大学、哥伦比亚大学、宾西法尼亚大学等。其中，数学泥版约有 300 块，其上载有各种数学表和数学问题。这些泥版主要集中在两个时期——古巴比伦时期（约公元前 2000-1600 年）和塞琉古帝国时期（约公元前 330-127 年）。

那么，古代巴比伦人为我们留下了哪些今天仍然有用的数学遗产？

1 原始的配方法

一元二次方程是古巴比伦泥版上常见的内容之一，巴比伦祭司对于我们今天的求根公式可谓耳熟能详，尽管他们并没有我们今天的代数符号。泥版 BM 13901（图 3）上载有以下问题：“正方形面积与边长之和为[0； 45]，求边长。”这里，[0； 45]是用 60 进制表达的数

图 3　数学泥版 BM 13901

字，在十进制中，它等于$\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$。用我们今天的字母符号来表达，这个问题相当于求解一元二次方程

$$x^2+x=\frac{3}{4} \tag{1}$$

祭司给出的解法是："写下系数 1。将 1 折半。将[0；30]自乘，得[0；15]。将[0；15]与[0；45]相加，得 1 的平方。从 1 中减去[0；30]，得[0；30]，即正方形边长。"（Fauvel & Gray, 1987）此即

$$x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{2}$$

那么，在修辞代数时代，祭司是如何获得解法（2）的？没有代数符号，岂能有纯粹代数意义上的配方？从方程（1）的几何表达，我们可以推断，祭司在面对一元二次方程时，他的头脑中一定有一个十分直观的几何模型。

如图 4 所示，边长未知的正方形与长为 1 的矩形合成一个大长方形，其面积为$\frac{3}{4}$；从长为 1 的长方形中割去一半，并移置于正方形下方，得一矩尺形；补上一个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形，矩尺形就变成了大正方形，其面积为$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，边长为$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$。因此所求正方形边长为$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$。这个配方过程用今天的代数符号表示，就是

$$x^2+x=\frac{3}{4}$$

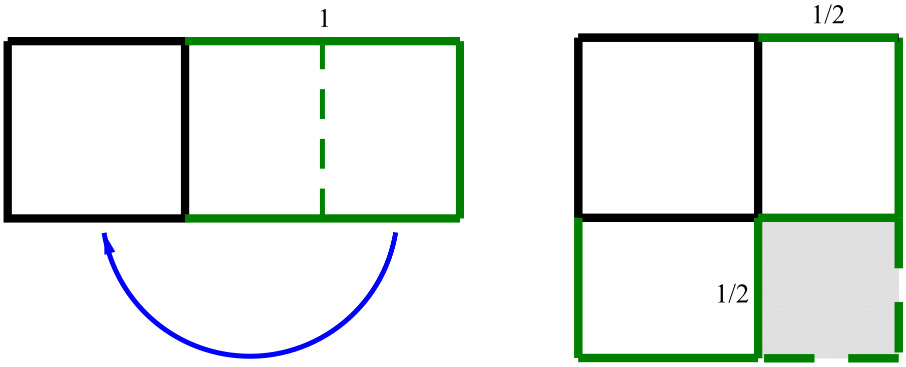


图 4　配方法的几何模型

$$\Rightarrow x^2+2\times\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x^2+2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\text{。}$$

祭司的配方法也可以从数学泥版 YBC 6967 中得到印证。该泥版上的问题是：“一个数比它的倒数大 7，求该数。”对于古巴比伦祭司来说，若两数乘积为 60 的幂，则它们互为倒数。本问题相当于已知 $xy=60$， $x-y=7$，求 x 和 y。泥版上给出的解法是：“将所超过的数 7 折半，得[3； 30]。[3； 30]自乘，得[12； 15]。加[1,0]，得[1, 12； 15]。[1, 12； 15]的平方根是多少？[8； 30]。置[8； 30]，分别减去、加上[3； 30]，得 12 和 5。12 为所求数，5 为它的倒数。”（Neugebauer & Sachs, 1945； Fauvel & Gray, 1987； Robson, 2001）此

图 5　数学泥版 YBC 6967

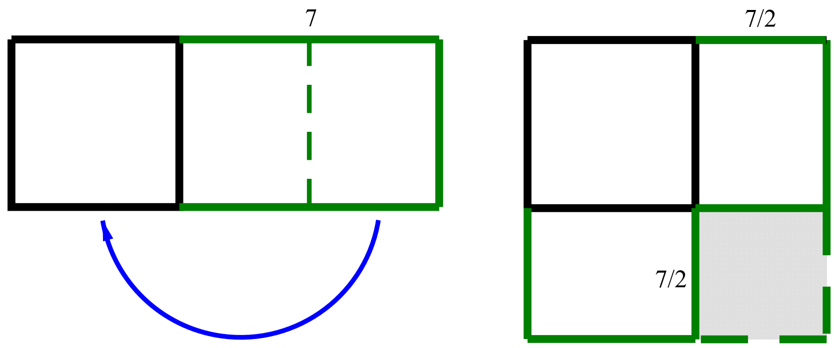


图 6 倒数问题的几何模型

即

$$x=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+60}+\frac{7}{2}=12,\quad y=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+60}-\frac{7}{2}=5。$$

根据丹麦学者 Høryup 的研究，祭司是根据图 6 所示的几何模型得到方程组的两个解的。（Robson, 2001）

公元 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米（al-Khwarizmi, 780?-850?)）利用同样的几何方法来求解一元二次方程。莫道君行早，更有早行人！

2 巧妙的和差术

在古巴比伦数学泥版上，含有大量的二元问题

$$\begin{cases} x\pm y=a \\ f(x,y)=b \end{cases} \tag{3}$$

其中 $f(x,y)$ 具有 $px+qy$（$p^2\neq q^2$），xy，x^2+y^2 等形式。

数学泥版 VAT 8389 载有如下问题："第一块地每 sar 产粮 $\frac{2}{3}$ sila，第二块地每 sar 产粮 $\frac{1}{2}$ sila。已知第一块地的产量比第二块地多 500 sila，两块地共 1800 sar。问：两块地的面积各为多少？"（1 sila ≈1 l；1 sar ≈ 36 m^2）问题相当于求解二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=1800 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=500 \end{cases}$$

祭司给出的解法相当于

$$x=900+t,\ y=900-t$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(900+t)-\frac{1}{2}(900-t)=500$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)t=350$$

$$\Rightarrow \frac{7}{6}t=350$$

$$\Rightarrow t=300$$

$$\Rightarrow x=1200, y=600$$

图 7　数学泥版 YBC 4663

可见，与我们今天的消元法不同，巴比伦祭司实际上采用了换元法：已知两数之和，那么这两个数分别等于半和与一个未知数的和与差，这就是所谓的“和差术”（van der Waerden, 1983）。

那么，“和差术”在巴比伦数学里是否通法呢？我们来看更多的泥版数学问题。

数学泥版 YBC 4663 涉及以下方程组的求解（Neugebauer & Sachs, 1945）：

$$\begin{cases} x+y=6\dfrac{1}{2} \\ xy=7\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

祭司给出的解法是：

[1] $\dfrac{x+y}{2}=3\dfrac{1}{4}$；

[2] $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=10\dfrac{9}{16}$；

[3] $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-xy=3\dfrac{1}{16}$；

[4] $\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 1\frac{3}{4}$；

[5] $\frac{x-y}{2} = 1\frac{3}{4}$；

[6] $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 5$；

[7] $x = 5$；

[8] $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 1\frac{1}{2}$；

[9] $y = 1\frac{1}{2}$。

数学泥版 BM 13901 上载有如下问题："两正方形面积之和为[21,40]，边长之和为[50]，求边长。"相当于解方程组

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x^2 + y^2 = 1300 \end{cases}$$

泥版上给出的解法是：

[1] $\frac{x^2+y^2}{2} = 650$；

[2] $\frac{x+y}{2} = 25$；

[3] $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 625$；

[4] $\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 25$；

[5] $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = 5$；

[6] $\frac{x-y}{2} = 5$；

[7] $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 30$；

[8] $x = 30$；

[9] $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 20$；

[10] $y = 20$。

数学泥版 BM 13901 上又有："两正方形面积之和为[21,40]，边长之差为[10]，求边长。"相当于解方程组

$$\begin{cases} x-y=10 \\ x^2+y^2=1300 \end{cases}$$

泥版上给出的解法是：

[1] $\dfrac{x^2+y^2}{2}=650$；

[2] $\dfrac{x-y}{2}=5$；

[3] $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2=25$；

[4] $\dfrac{x^2+y^2}{2}-\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2=625$；

[5] $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}-\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2}=25$；

[6] $\dfrac{x+y}{2}=25$；

[7] $\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}=30$；

[8] $x=30$；

[9] $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}=20$；

[10] $y=20$。

上述三题的解法表明，在处理方程组（3）时，祭司充分利用了以下恒等式

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x \tag{4}$$

$$\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y \tag{5}$$

进行换元。已知 $x+y=a$，$xy=b$ 时，利用（4）和（5），将问题转换为求新的未知数 $t=\dfrac{x-y}{2}$，再根据恒等式

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy \tag{6}$$

得

$$\frac{a^2}{4} - t^2 = b$$

从而得$t = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$。于是

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

已知$x + y = a$，$x^2 + y^2 = b$时，利用（4）和（5），将问题转换为求新的未知数$t = \frac{x-y}{2}$，再根据恒等式

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2} \tag{7}$$

得$\frac{a^2}{4} + t^2 = \frac{b}{2}$，从而得$t = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b}{2}}$。于是

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b}{2}}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b}{2}}$$

已知$x - y = a$，$x^2 + y^2 = b$时，利用（4）和（5），将问题转换为求新的未知数$t = \frac{x+y}{2}$，再根据恒等式（7）求得 t。

公元 3 世纪，古希腊代数学鼻祖丢番图（Diophantus）在其《算术》中就是用上述和差术来解二元二次方程组的。（van der Waerden, 1983； Fauvel & Gray, 1987； 汪晓勤等, 2010）17 世纪末，法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）利用和差术来推导椭圆和双曲线方程。（汪晓勤等，2011；王芳等，2012）巧妙的和差术，是数学学科无法割裂历史的明证！

3 先进的开方术

数学泥版 VAT 6598 和 BM 96957 是同一块泥版的两个碎块（图 8）。反面有如下问题："[一扇门] 宽[0； 10] NINDAN，高[0；40] NINDAN。问对角线长几何？" 解法如下：

将[0； 10]平方，得[0； 01 40]。取[0； 40]的倒数，乘以[0； 01 40]，得[0； 02 30]。将[0； 02 30]折半，得[0； 01 15]。加上[0； 40]，得[0； 41 15]。故对角线长为[0； 41 15]。（Robson, 1997）

设直角三角形三边为 a，b 和 c，则由解法可知，祭司运用了以下近似公式：

$$c = b + \frac{a^2}{2b}$$

图 8　数学泥版 VAT 6598 + BM 96957（反面）

图 9　数学泥版 YBC 7289

但从同一块泥版上的其他问题的解法可知，祭司知道勾股定理；因此祭司实际上运用了近似公式：

$$\sqrt{a^2+b^2} = b + \frac{a^2}{2b} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a^2+b^2}{b}\right)(a<b) \tag{8}$$

从上述公式可以推知，巴比伦人已经发现了一种程序化的开平方方法：

要求 $\sqrt{A}$。

设第 1 个近似值为 a_1，则

第 2 个近似值为 $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$；

第 3 个近似值为 $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{A}{a_2}\right)$；

…………………………………………

第 n 个近似值为 $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right)$。

数学泥版 YBC 7289（图 9）进一步证明，祭司对于上述程序确实是运用自如的。该泥版上载有以下数学问题：“正方形边长为 30，求对角线。”泥版上给出 $\sqrt{2}$ 的六十进制近似值为[1；　24, 51,10]，化成十进制，就是

$$\sqrt{2} \doteq 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.4142155$$

设 $\sqrt{2}$ 的第一个近似值为

$$a_1=1,$$

则精度更高的近似值依次为

$$a_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right)=[1;30];$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(1;30+\frac{2}{1;30}\right)=[1;25];$$

$$a_4=\frac{1}{2}\left(1;25+\frac{2}{1;25}\right)=[1;24,51,10].$$

祭司给出的就是最后的第 4 个近似值。

古希腊数学家海伦（Heron, 公元 1 世纪）在《测量》一书中提出了同样的算法。（Heath, 1921）今称“海伦法”。14 世纪拜占庭数学家拉伯达（N. Rhabdas, ?～1350）和 15 世纪意大利数学家帕西沃里（L. Pacioli, 1445?～1509）也都用该法来求平方根。

宋人陆九渊（1139-1193）云：“东海有圣人出焉，此心同也，此理同也；西海有圣人出焉，此心同也，此理同也；南海北海有圣人出焉，此心同也，此理同也；千百世之上有圣人出焉，此心同也，此理同也；千百世之下有圣人出焉，此心同也，此理同也。”此话用于评价数学史，再也合适不过！

4 精彩的几何题

在数学泥版 BM 15285（残缺不全）上，我们看到很多圆弧或圆弧与线段所围图形的面积问题，这些问题很可能是当时祭司编制的学校数学练习题。图 10 给出泥版的一小部分。所有问题涉及的图形都是在一个由 16 个方格构成的正方形中作出的，许多图形都有自己的名称。如图 11 所示的由一个等腰三角形和半圆面所构成的图形被称为“风筝”；可以想像，“儿童散学归来早，忙趁东风放纸鸢”的情景在春日的美索不达米亚也是随处可见的。如图 12，两个四分之一圆弧所围图形称为“小舟”。我们同样可以想像，“君看一叶舟，出没风波里”也是巴比伦人的母亲河——底格里斯河和幼发拉底河的写照。四个共点圆所形成的四叶小舟显然是祭司们很喜欢的图形，如图 13 所示。在两河流域，它有着十分悠久的历史，公

元前 7 世纪的皇宫觐见室门槛上，还装饰着花瓣形，有四瓣的情形，也有六瓣的情形（图 14）。

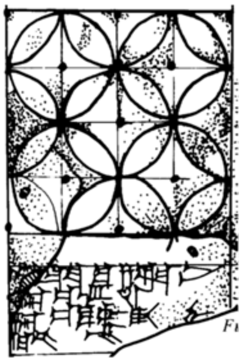


图 10 泥版 BM 15285

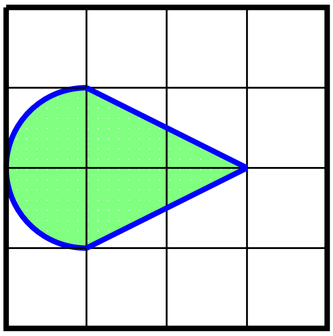


图 11 风筝

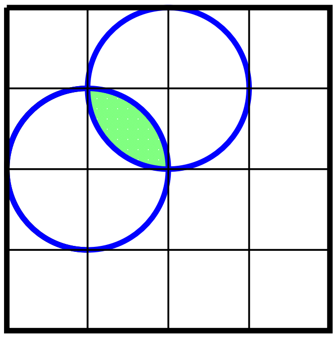


图 12 小舟形

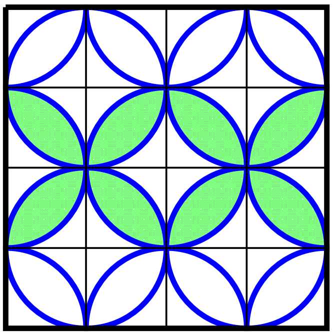


图 13 花瓣形

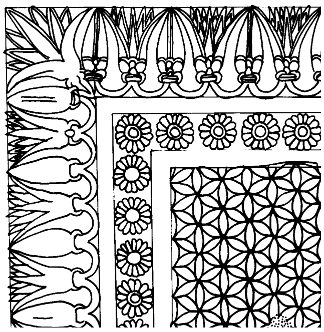


图 14 皇宫觐见室门槛上的图案

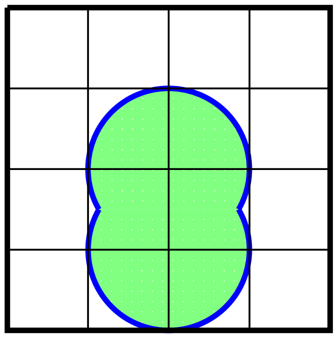


图 15 弓形之一

由两个 120 度弧及直径所在直线所围成的图形称为"弓形",图 15 是由两个弓形所构成,即两相交圆构成的图形。图 16 所示三个相交圆所构成的图形也出现在同一泥版上，形状像花生。

在 BM 15285 上,有一个基本的图形,即每一个小方格中挖去四分之一圆后余下的部分,被称为"楔形"。个数不等的楔形可构成许多不同的图案。如图 17，四个楔形构成的"凹四边形"被称为"牛鼻子"，它由四个两两相切的四分之一圆弧所围成。

虽然在泥版 BM 15285 上，我们没有见到圆弧所围其它图形的面积问题，但毕竟这只是一块偶然被发掘出来的孤立的泥版而已。对于一个失落的古代文明的数学，通过已发掘的三百块泥版，我们到底了解多少呢？那些埋藏在地下数千年、至今尚未发掘的数学泥版上又会有多少数学奇迹呢？无论如何，我们有理由相信，巴比伦祭司是决不会仅仅满足于上述图形的。不同个数、不同位置的楔形，楔形与半圆或四分之一圆，都可以构成种种不同的图形，图 18-22 乃是其中的一部分，这些图形几乎不会逃过祭司们的眼睛。（汪晓勤, 2009a）或许，古巴比伦的学校数学比今天的学校数学更有趣，古巴比伦的学生也比今天的学生更喜欢数学！

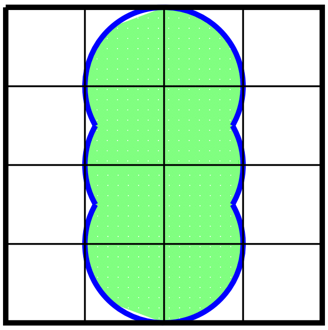


图 16　弓形之二

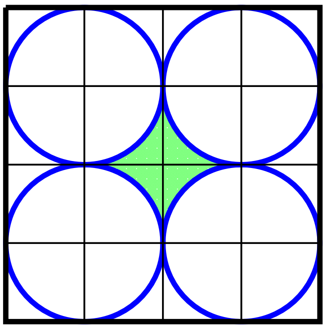


图 17　牛鼻子形

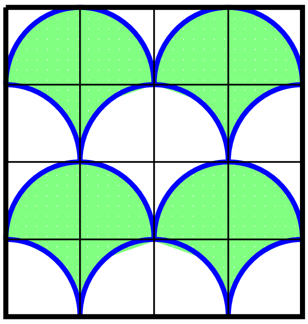


图 18　银杏叶

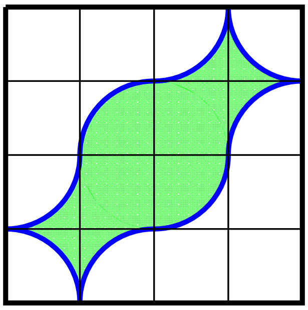


图 19 花瓶

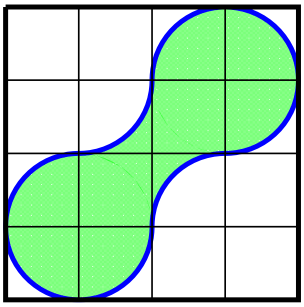


图 20 哑铃

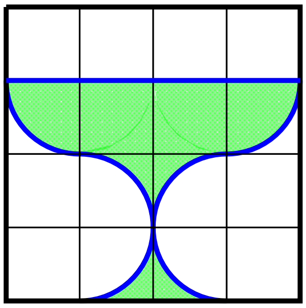


图 21 酒杯

5 普遍的相似比

在古巴比伦时期的数学泥版上，有许多图形分割问题，祭司在解决这些问题时，惊人地运用了相似三角形的性质。

数学泥版 YBC 4675 （图 23）如下问题：“梯形上底为 7，下底为 17，两腰分别为[5,10]和[4,50]，面积为[60,0]。将梯形分成面积相等的两部分，问：中分线多长？”如图 24 所示，设梯形上、下底分别为 a_1 和 a_2，两腰分别为 l_1 和 l_2，中分线长为 d，l_1 被分割成 p、q 两段，l_2 被分割成 u、v 两段。祭司所使用的梯形面积公式为

$$A=\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right) \tag{9}$$

显然，这是一个错误的公式。根据三角形的相似性，

$$\frac{p}{l_1}=\frac{u}{l_2}=\frac{a_2-d}{a_2-a_1} \tag{10}$$

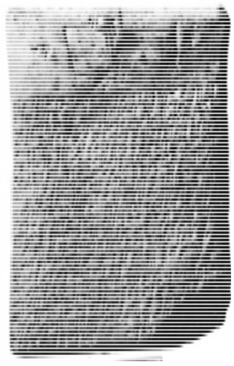


图 23 数学泥版 YBC 4675

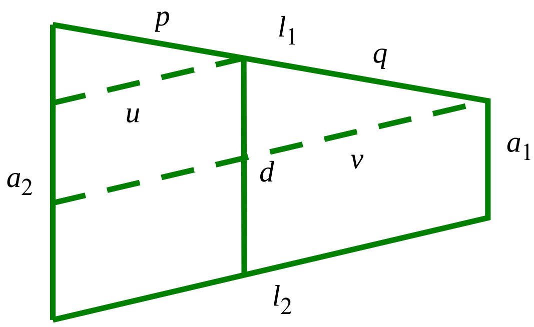


图 24 梯形分割问题

$$\frac{q}{l_1}=\frac{v}{l_2}=\frac{d-a_1}{a_2-a_1} \tag{11}$$

于是

$$p=\left(\frac{a_2-d}{a_2-a_1}\right)l_1\ ,\ u=\left(\frac{a_2-d}{a_2-a_1}\right)l_2;\ q=\left(\frac{d-a_1}{a_2-a_1}\right)l_1\ ,\ v=\left(\frac{d-a_1}{a_2-a_1}\right)l_2。$$

故有

$$p+u=\left(\frac{a_2-d}{a_2-a_1}\right)(l_1+l_2) \tag{12}$$

$$q+v=\left(\frac{d-a_1}{a_2-a_1}\right)(l_1+l_2) \tag{13}$$

又因两个梯形面积相等得

$$\frac{a_1+d}{2}\cdot\frac{q+v}{2}=\frac{a_2+d}{2}\cdot\frac{p+u}{2}$$

即

$$(a_1+d)\cdot(q+v)=(a_2+d)\cdot(p+u) \tag{14}$$

将（12）和（13）代入（14）得

$$d^2-a_1^2=a_2^2-d^2$$

因此所求梯形中分线为

$$d=\sqrt{\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2\right)} \tag{15}$$

这就是泥版 YBC 4675 上给出的解法。

数学泥版 IM 55357（图 25）上载有如下直角三角形分割问题：“直角三角形 *ABC* 中，

图 25 数学泥版 IM 55357

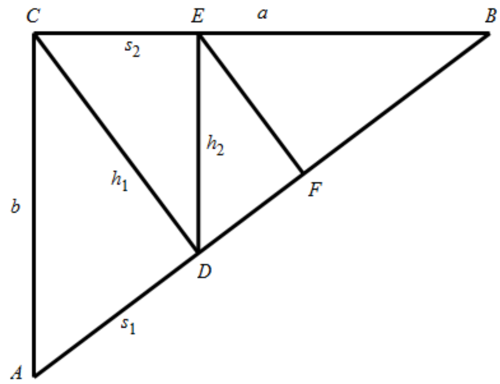


图 26 直角三角形分割问题

$BC = [1,0]$，$AC = 45$，$AB = [1,15]$。小直角三角形面积分别为：$\Delta ADC = [8, 6]$；$\Delta CED = [5, 11;\ 2, 24]$；$\Delta DFE = [3, 19;\quad 3, 56, 9, 36]$；$\Delta EFB = [5, 53;\quad 53, 39, 50, 24]$。求 AD、CD、DB、CE、DE。”如图 9 所示，祭司的解法是：

$$\frac{s_1}{h_1} = \frac{b}{a}$$

$$S = \frac{1}{2} s_1 h_1$$

$$\Rightarrow \left(s_1\right)^2 = 2S \cdot \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow s_1 = \sqrt{2S \cdot \frac{b}{a}}$$

由上述解法可见，巴比伦祭司对相似直角三角形对应边成比例的性质确已了然于心。

另一块数学泥版 Strasbourg 364 上载有以下问题（Archibald, 1936）：

如图 27，（1）已知 $A_1 = [18,20]$，$A_2 = [15,0]$，$b_4 = [40]$，$b_1\text{-}b_2 = b_2\text{-}b_3 = [13;\ 20]$，求 l_1，l_2，l_3，b_1，b_2，b_3；（2）已知 $A_1 = [18,20]$，$A_2 = [15,0]$，$A_6 = [1,40]$，$b_4 = [40]$，$l_4 + l_5 = [30]$，求 b_1，b_2，b_3，b_6，l_1，l_2，l_3，l_6；（3）已知 $A_1 = [18,20]$，$A_2 = [15,0]$，$A_4 + A_5 = [13,20]$，$b_1\text{-}b_2 = b_2\text{-}b_3 = [13;\ 20]$，求 b_1，b_2，b_4，b_6，l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6。

相似三角形性质再一次扮演着重要角色！

通常，我们都认为公元前 6 世纪古希腊数学家泰勒斯最先发现相似三角形的性质，并将其运用于金字塔的测量。但实际上泰勒斯不过运用了前人已有的知识而已。

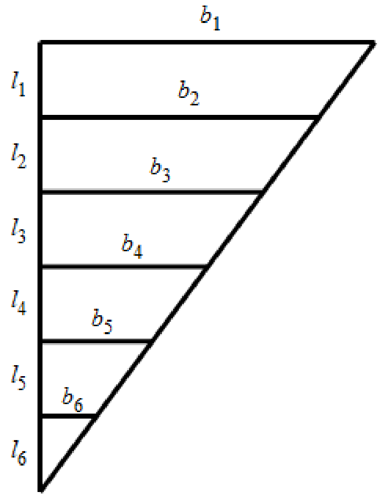


图 27　数学泥版 Strasbourg 364 上的直角三角形分割问题

6 神奇的勾股数

数学泥版 Plimpton 322（图 28）是古巴比伦数学泥版中最引人注目者之一，含有 15 组勾股数——构成直角三角形三边长度的整数（西方称"毕达哥拉斯数"）。原表中含四处错误，数学史家诺伊格鲍尔予以纠正（Neugebauer, 1969）。这五组勾股数用十进制写出来，见表 1

图 28　数学泥版 Plimpton 322

第 4-6 列，其中第 5 列为我们所加。我们无法想像，如果巴比伦人没有勾股数一般公式，又怎能求出如此众多的勾股数组呢？更进一步，我们不禁要问：巴比伦祭司是如何获得勾股数公式的呢？

设直角三角形的勾、股、弦分别为 a、b 和 c，则利用平方差公式

$$c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$$

表 1　Plimpton 322 号泥版上的勾股数

序号	p	q	$a=p^2-q^2$	$b=2pq$	$c=p^2+q^2$
1	12	5	119	120	169
2	64	27	3367	3456	4825
3	75	32	4601	4800	6649
4	125	54	12709	13500	18541
5	9	4	65	72	97
6	20	9	319	360	481
7	54	25	2291	2700	3541
8	32	15	799	960	1249
9	25	12	481	600	769
10	81	40	4961	6480	8161
11	—	—	45	60	75
12	48	25	1679	2400	2929
13	15	8	161	240	289
14	50	27	1771	2700	3229
15	9	5	56	90	106

若$c+a=2p^2$，$c-a=2q^2$，其中 p，q 为互素的正整数，$p>q$，则得勾股数公式

$$a=p^2-q^2,\quad b=2pq,\quad c=p^2+q^2$$

Plimpton 322 号泥版上除了第 11 组勾股数（45，60，75）由（3，4，5）的倍数得出外，其他各组均可按上述公式获得。

古希腊毕达哥拉斯学派（前 6 世纪）已知勾股数公式（Heath, 1921）

$$a=m,\quad b=\frac{m^2-1}{2},\quad c=\frac{m^2+1}{2}\ \text{（其中 } m \text{ 为奇数）}$$

之后，柏拉图（Plato, 427-347 B.C.）得到另一组公式

$$a=2m,\quad b=m^2-1,\quad c=m^2+1\ \text{（其中 } m \text{ 为正整数）}$$

而欧几里得（Euclid，公元前 3 世纪）则获得了更一般的勾股数公式：

$$a=\frac{p^2-q^2}{2},\quad b=pq,\quad c=\frac{p^2+q^2}{2}$$

其中 p、q 同为奇数或偶数， $p>q$。古巴比伦人又一次捷足先登！

泥版上还有大量的勾股定理应用问题。胡晓娟等（2012）已经作了介绍，这里不再赘述。

7 朴素的假设法

数学泥版 YBC 9856（图 29）载有如下财产分割问题："五兄弟分银 1 迈纳（60 gin），按年龄从小到大的次序，每个兄弟均比相邻的弟弟多得若干，老二至老五四人所得共占 $\frac{2}{3}$。问：各得多少？"

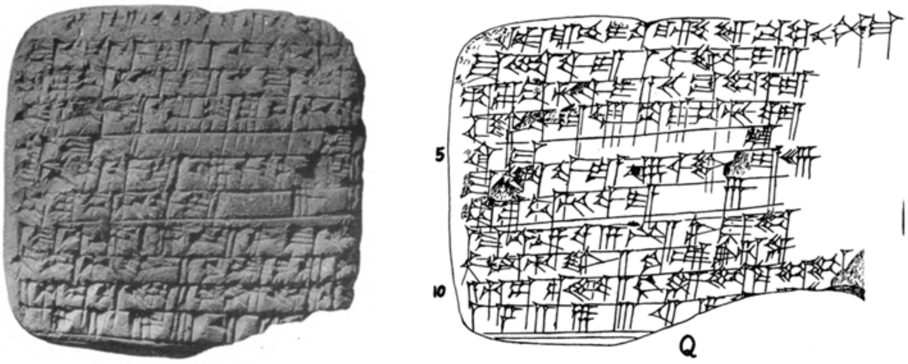


图 29 数学泥版 YBC 9856

由于泥版毁损，无法详知解法。Friberg 作了如下复原：假设最小的兄弟得 1，则后面依次得 $1+d$，$1+2d$，$1+3d$，$1+4d$。于是，

$$4+6d=\frac{2}{3}(5+10d),$$

解得 $d=1$。故五份依次为 1、2、3、4、5，和为 15。但实际的和为 60，故各份乘以 4，即得所求。（Frieberg, 2005； 2007）

中国汉代的《九章算术》也用假设法来处理某些数列问题，（汪晓勤, 1992）而斐波那契在《计算之书》中更是频频使用它。

8 惊人的一般化

数学泥版 Strasbourg 362：十兄弟分银 $1\frac{2}{3}$ mana，每个兄弟均比相邻的弟弟多得若干，已知老八分得 6 gin（1 mana = 60 gin）。问：各兄弟比相邻的弟弟多得几何？

祭司给出的解法是：取十兄弟所得平均数 10 斤，倍之，得 20 斤；减去老八所得的两

倍即 12 斤，得 8 斤。于是，公差为$\frac{8}{5}$斤。用今天的符号表示，上述解法就是

$$d=\frac{1}{5}\left(\frac{2S_{10}}{10}-2a_3\right)$$

如果不知道等差数列性质

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$$

$$a_n-a_m=(n-m)d$$

以及求和公式

$$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\times n$$

祭司又怎么能得出上述解法？我们甚至完全可以想像，祭司已经知道一般公式（汪晓勤, 2009b）：

$$\frac{S_n}{n}-a_m=\frac{n-2m+1}{2}d$$

或

$$S_n=na_m+\frac{1}{2}n(n-2m+1)d \tag{16}$$

9 结 语

以上我们看到，古巴比伦人为我们留下了丰厚的数学遗产。许多数学思想方法或数学问题都可以在巴比伦数学中找到源头。

配方法、开方术、和差术是今天教学中常用的方法；图形分割问题与圆弧构图问题丰富了有关相似形与扇形知识的数学问题；作为古巴比伦数学代表性成就的勾股数与勾股定理的应用，虽说颠覆了我们对勾股定理优先权的误解（如“中国人最早发现勾股定理”），却是多元数学文化的典型例子，具有重要的教育价值；等差数列问题的假设法、等差数列求和公式的一般化则拓宽了我们的思维，若运用于课堂，则为学生提供了探究的机会。可见，古代数学在今天的数学课堂上依然可以大放异彩。荷兰 HPM 学者 van Maanen (1998) 说得好：Old mathematics never dies!

参考文献

[1] Archibald, R. C., 1936. Babylonian mathematics. *Isis*, 26(1): 63-81

[2] Fauvel, J. & Gray, J., 1987. *The History of Mathematics*: *A Reader*. Hampshire: Macmillan Education

[3] Friberg, J., 2005. *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

[4] Friberg, J., 2007. *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

[5] Heath, T. L., 1921. *A History of Greek Mathematics*. London, Oxford University Press

[6] Hoyrup, H. 1994. Babylonian mathematics. In I. Grattan-Guinness (Ed.). *Companion Encyclopaedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*, London: Routledge, 21-29

[7] Høyrup, J., 1999. Pythagorean 'Rule' and 'Theorem'-Mirror of the relation between Babylonian and Greek mathematics. In: J. Renger (Ed.), *Babylon: Focus Mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne*. Saarbrücken: Saarbrücker Druckerei und Verlag. 393-407

[8] 胡晓娟, 汪晓勤, 2012. 古代数学文献中的勾股问题. 上海 HPM 通讯, 1(1): 41-48

[9] van Maanen, J., 1998. Old maths never dies. *Mathematics in School*, 27 (4): 52-54

[10] Neugebauer, O. & Sachs, A., 1945. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: American Oriental Society

[11] Neugebauer, O., 1969. *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover Publications

[12] Robson, E., 1997. Three old Babylonian methods for dealing with 'Pythagorean triangles'. *Journal of Cuneiform Studies*, 49: 51-72

[13] Robson, E., 2000. The uses of mathematics in ancient Iraq, 6000-600 BC. In: H. Selin (Ed.), *Mathematics Across Cultures: the History of Non-Western Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 93–113

[14] Robson, E., 2001. Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica*, 28: 167–206

[15] Robson, E., 2007. The long career of a favourite figure: the *apsamikku* in Neo-Babylonian mathematics', in M. Ross (ed.), *From the Banks of the Euphrates: Studies in Honor of Alice Louise Slotsky*, Winona Lake: Eisenbrauns. 209-224

[16] van der Waerden, B. L., 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag, 62-63

[17] 王芳, 汪晓勤, 2012. 和差术: 从历史到课堂. 上海 HPM 通讯, 1(2): 16-26

[18] 汪晓勤, 1995. 《九章算术》等差数列问题研究. 浙江师范大学学报(自然科学版), **18** (1): 19-23

[19] 汪晓勤, 2009a. 从巴比伦祭司到达·芬奇. 中学数学教学参考, (1-2): 131-133

[20] 汪晓勤, 2009b. 泥版上的数列问题. 数学教学, (12): 0-2； 445

[21] 汪晓勤, 2010. 平方差公式的历史. 中学数学教学参考(初中版), (11): 64-66

[22] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨, 2010. HPM 视角下的数学教学: 以椭圆为例. 数学教育学报, 20 (5): 20-23

附录　本文所涉及的古巴比伦泥版目录

编　号	收藏者
BM	British Museum
IM	Iraq Museum, Baghdad
Plimpton	George A. Plimpton Collection, Columbia University
Strassburg	Bibliothèque Nationale et Universitaire de Strasbourg
VAT	Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museen, Berlin
YBC	Yale Babylonian Collection

三角形内角和定理：从历史到课堂

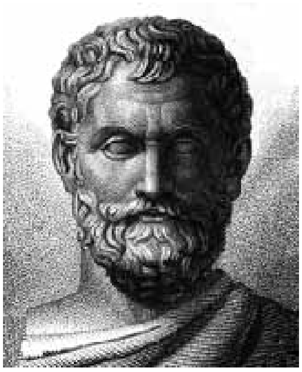
汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

HPM 视角下的数学教学设计正在引起越来越多中学数学教师的兴趣，但这种教学设计是建立在有关历史研究基础之上的。最近，一位初中数学教师希望开发一个有关三角形的HPM 案例，希望笔者能够提供有关的历史材料，这促成了本文的撰写。

三角形内角和定理是平面几何学中最重要的三个定理之一（另两个定理是勾股定理和相似三角形性质定理）。[1]和其他许多几何定理一样，它有着十分悠久的历史。

古希腊七贤之一、哲学家泰勒斯（Thales, 公元前 6 世纪）很可能已经知道这个定理。公元 3 世纪初，古希腊哲学家的传记作者 Diogenes Laertius 曾引用古希腊学者 Pamphile（公元 1 世纪）的话说："他（泰勒斯）从埃及人那里学习几何知识，第一个作出圆内接直角三角形，并宰杀一头牛作为祭品。" [2]由此可知，泰勒斯最早发现"半圆上的圆周角为直角"这个定理。但众所周知，该定理的证明需要用到三角形内角和定理：如图 1，AB 为半圆直径，C 为圆上一点。因 $\angle A=\angle ACO$，$\angle B=\angle BCO$，故 $\angle A+\angle B+\angle C=2\angle ACB=180^\circ$。于是得 $\angle ACB=90^\circ$。



泰勒斯

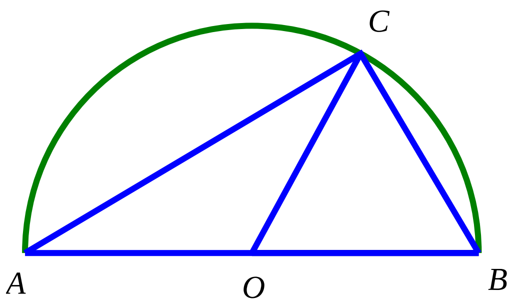


图 1　半圆上的周角

那么，泰勒斯是如何知道三角形内角和的？公元 6 世纪，数学家欧多修斯（Eutocius）在关于阿波罗尼斯《论圆锥曲线》的评注中告诉我们，古希腊学者 Geminus（公元前 1 世纪）如是说：

"古人针对各类三角形，对两直角定理作了研究，先是等边三角形，再是等腰三角形 ，最后是不等边三角形。但后世几何学家证明了一般定理——任意三角形三个内角和等于两直

角。”[1][2]

这里的“古人”指的应该就是泰勒斯和他的同代人，“两直角定理”就是三角形内角和定理。英国数学史家希思（T. L. Heath, 1861-1940）曾作过这样的推测：如图 2，泰勒斯作等边三角形或等腰三角形顶角的平分线，将正三角形或等腰三角形分成两个同样的直角三角

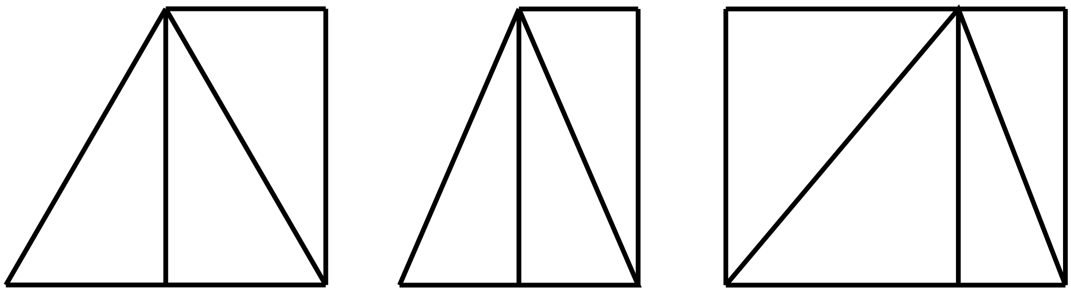


图 2 直角三角形内角和等于相应矩形内角和之半

形，将它们拼成矩形。由于矩形的四个内角均为直角，故一个直角三角形的内角和等于两直角。因此，原来的等边或等腰三角形的内角和等于四个直角减去两个直角，仍为两直角。对于一般三角形，只要作底边上的高线，将三角形分成两个直角三角形，即得同样结论。但上述方法中，不等边三角形的情形并不比等边三角形、等腰三角形情形难，泰勒斯似乎没有必要对每一种情形分别作出探究。希思本人也觉得这种推测不太可能符合史实。

我们认为，泰勒斯是通过拼图方法发现三角形内角和定理的。毕达哥拉斯学派已经知道，只有三种正多边形（正三角形、正方形和正六边形）能镶嵌整个平面。可以推测，他们的前辈泰勒斯已经利用正三角形拼图进行数学探究。泰勒斯已经知道等腰三角形底角相等，因而知道等边三角形三个内角相等。他先是发现，将六个同样的正三角形顶点置于同一点，恰好填满该点周围区域，因而六个内角之和等于四直角，三个内角之和等于二直角，如图 3 所示。

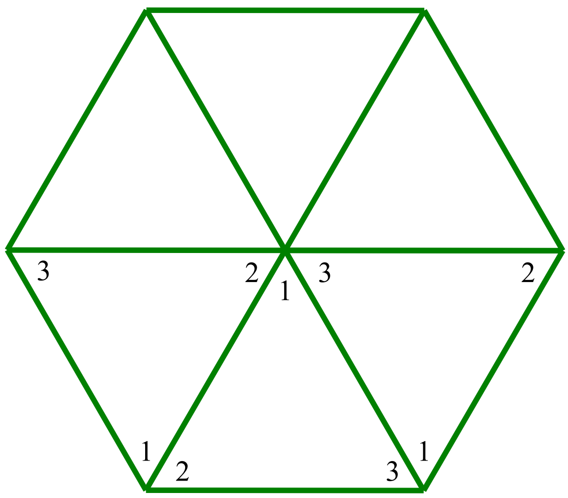


图 3 等边三角形的拼图

接下来，将六个同样的等腰三角形的不同顶点置于同一点，其中的每一个顶点出现两次，结果也恰好填满该点周围区域，没有缝隙。因而六个内角之和等于四直角，三个内角之和等于二直角，如图 4 所示。最后，用三个同样的不等边三角形来拼图，发现同样的结论，如图 5 所示。

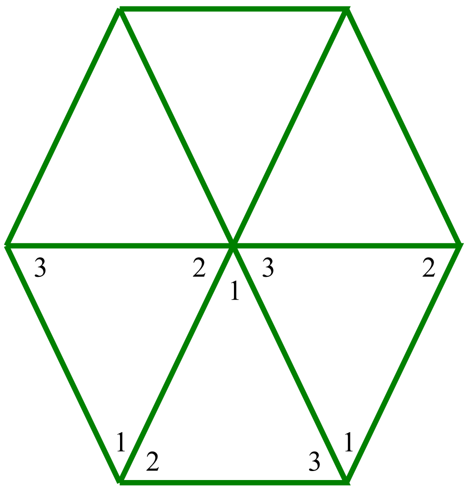


图 4 等腰三角形的拼图

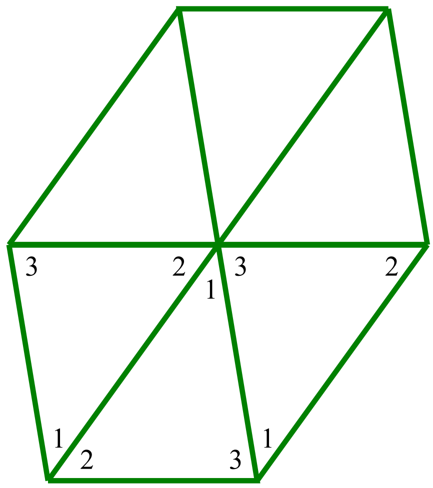


图 5 不等边三角形的拼图

美国数学史家和数学教育家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）认为，从等边三角形到等腰三角形，再到不等边三角形，这是三角形内角和定理的自然发现顺序。[1] 美国数学史家和数学教育家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）曾经指出：数学史是数学教学的指南。上述历史顺序为我们今天的教学提供了重要借鉴。

Geminus 所说的“后世几何学家”指的就是泰勒斯之后的毕达哥拉斯学派。泰勒斯从拼图的实践中发现了三角形内角和，但这种发现完全是经验性的，实际上，他并未证明该定理。显然，毕达哥拉斯学派在泰勒斯的基础上发现了更多的几何定理，如：“两直线平行，内错角相等”及其逆定理。知道了平行线的上述性质，再根据泰勒斯的拼图 3-5，毕达哥拉斯证明内角和定理，已是水到渠成的事了。如图 6 所示，过三角形 *ABC* 的顶点 *A* 作 *BC* 的平行

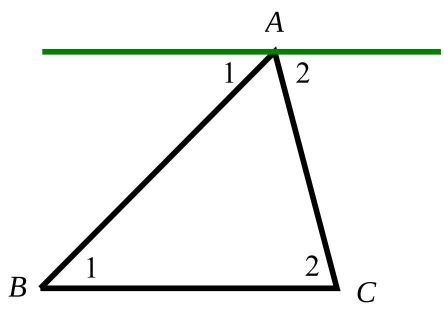


图 6 毕达哥拉斯的证明

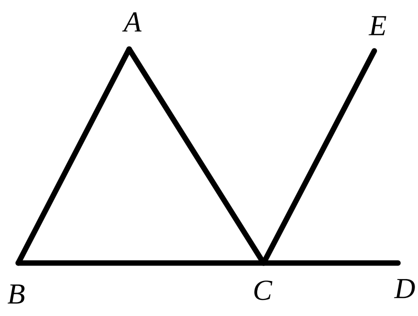
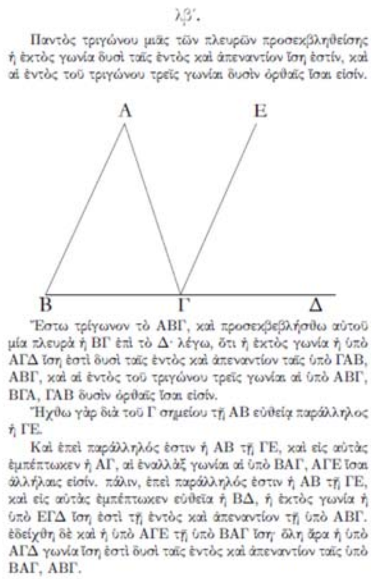


图 7 欧几里得的证明

线，利用两对内错角相等，即得 $\angle BAC+\angle B+\angle C=\angle BAC+\angle 1+\angle 2=180^{\circ}$。今天的教材即采用了这个方法。

公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》中用图 7 所示方法证明了内角和定理：过点 *C* 作 *BA* 的平行线 *CE*，则$\angle ACE=\angle A$，$\angle ECD=\angle B$。故得$\angle A+\angle B+\angle ACB$为一平角。图 8 是希腊文《几何原本》的书影。


λβʹ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

图 8 希腊文《几何原本》（海伯格注释版）书影

古希腊评注家普罗克拉斯（Proclus, 410-485）试图用下面的方法来证明三角形内角和定理：如图 9，设 *AD* 和 *BE* 是 *AB* 的两条垂线。让 *AD* 和 *BE* 分别绕点 *A* 和 *B* 旋转，使得端点

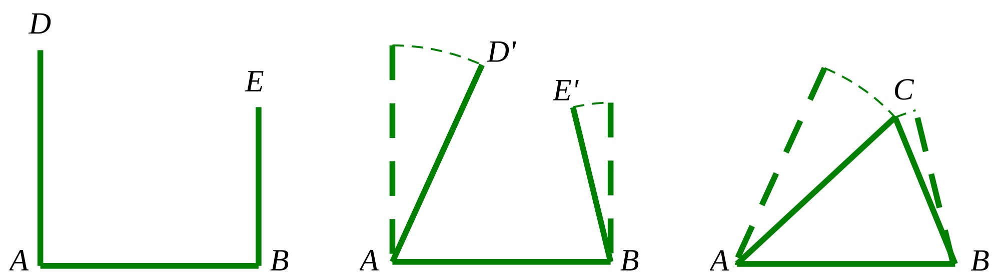


图 9 普罗克拉斯的方案

D 和 *E* 重合于点 *C*，即 *AD*、*BE* 和 *AB* 构成三角形。原来的两个直角 *A* 和 *B* 所减小的部分相加，恰为顶角 *C* 的大小。因此，三角形 *ABC* 的三个内角之和仍为两直角。

普罗克拉斯试图避开毕达哥拉斯和欧几里得所用过的平行线方法，但实际上并非如此。他的方法可以用另一种形式来表达。如图 10，过三角形 *ABC* 的三个顶点 *A*、*B* 和 *C*，分别作底边 *BC* 的垂线。则$\angle BAD=\angle EBA$，$\angle CAD=\angle ACF$。因此，$\angle BAC=\angle ABE+\angle ACF$。

因此$\angle A+\angle B+\angle C=\angle EBC+\angle FCB=180°$。上述方法无需局限于垂线情形。如图 11，在 BC 上任取一点 D，连接 AD，分别作 BE、CF 与 AD 平行，于是三角形内角和即可转化为一对同旁内角之和了。

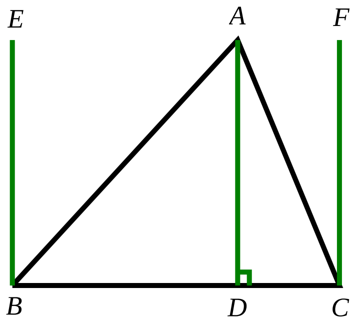


图 10 普罗克拉斯方案的改进

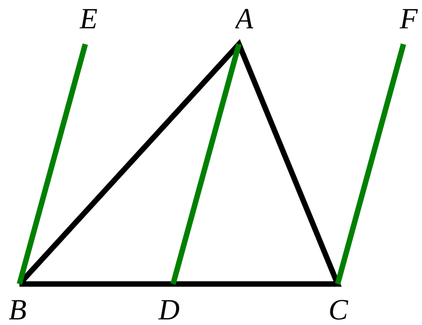
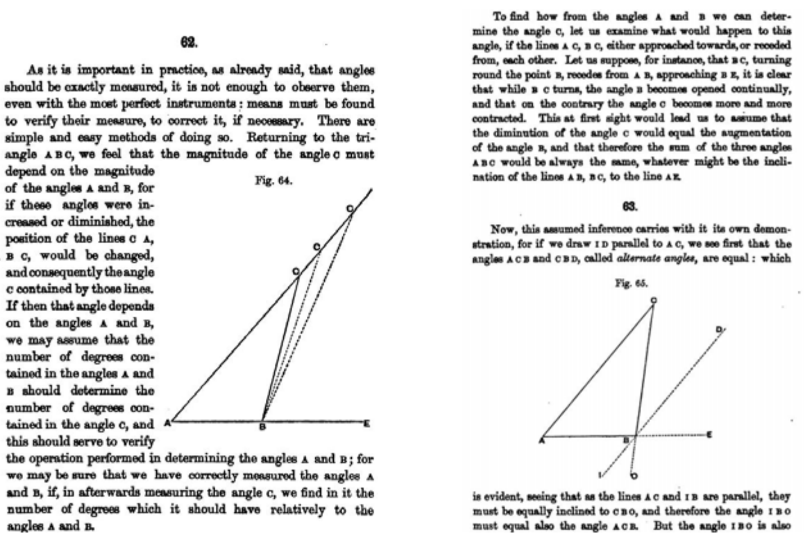


图 11 普罗克拉斯方案的一般情形

或许受古人的启发，18 世纪法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut , 1713-1765）在其《几何基础》（图 12）中给出三角形内角和的一种发现方法[3]。



62.

As it is important in practice, as already said, that angles should be exactly measured, it is not enough to observe them, even with the most perfect instruments: means must be found to verify their measure, to correct it, if necessary. There are simple and easy methods of doing so. Returning to the triangle A B C, we feel that the magnitude of the angle C must depend on the magnitude of the angles A and B, for if these angles were increased or diminished, the position of the lines C A, B C, would be changed, and consequently the angle C contained by those lines. If then that angle depends on the angles A and B, we may assume that the number of degrees contained in the angles A and B should determine the number of degrees contained in the angle C, and this should serve to verify the operation performed in determining the angles A and B; for we may be sure that we have correctly measured the angles A and B, if, in afterwards measuring the angle C, we find in it the number of degrees which it should have relatively to the angles A and B.

To find how from the angles A and B we can determine the angle C, let us examine what would happen to this angle, if the lines A C, B C, either approached towards, or receded from, each other. Let us suppose, for instance, that B C, turning round the point B, recedes from A B, approaching B E, it is clear that while B C turns, the angle B becomes opened continually, and that on the contrary the angle C becomes more and more contracted. This at first sight would lead us to assume that the diminution of the angle C would equal the augmentation of the angle B, and that therefore the sum of the three angles A B C would be always the same, whatever might be the inclination of the lines A B, B C, to the line A E.

63.

Now, this assumed inference carries with it its own demonstration, for if we draw I D parallel to A C, we see first that the angles A C B and C B D, called *alternate angles*, are equal: which is evident, seeing that as the lines A C and I B are parallel, they must be equally inclined to C B O, and therefore the angle I B O must equal also the angle A C B. But the angle I B O is also

图 12 克莱罗《几何基础》书影

如图 13，设三角形 ABC 的顶点 C 沿 AC 运动到 C'，C''，C'''，等等。在这个过程中，$\angle A$ 保持不变，而$\angle C$ 越来越小，$\angle B$ 越来越大。猜想：$\angle C$ 减少部分与$\angle B$ 增大部分相等， 也就是说$\angle C$ 和$\angle B$ 之和保持不变。由此可以猜测：任何一个三角形的三个内角之和是恒定不变的。当 C 运动到无限远处，BC 与 AC 平行，三角形 ABC 三内角变成了两个同旁内角，其和为 180 度。欧几里得的证明宛若从天而降，而克莱罗则为其提供了一种自然的思考过程，正如他在《几何基础》前言中所说的那样，他要用定理的最初发现者的方法来引入几何定理。

法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）12 岁时，独立发现了三角形内角和定理，他

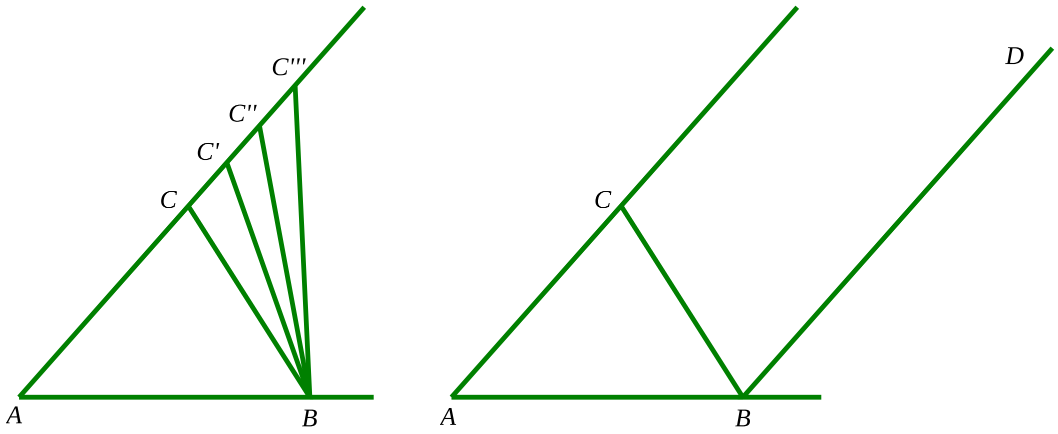


图 13 克莱罗的方案

所用的方法即是类似于今天课本上所给出的折纸法。

1809 年，德国数学家提波特（Thibaut, 1775-1832）利用旋转的方法证明了三角形内角和定理。[1]如图 14，将 *BC* 所在的直线 *XY* 绕 *B* 沿逆时针方向旋转角度 *B*，到 *AB* 所在直线 *X’Y’*；将 *X’Y’*绕点 *A* 沿逆时针方向旋转角度 *A*，到 *AC* 所在直线 *X’’Y’’*。最后 *X’’Y’’*绕 *C* 沿逆时针

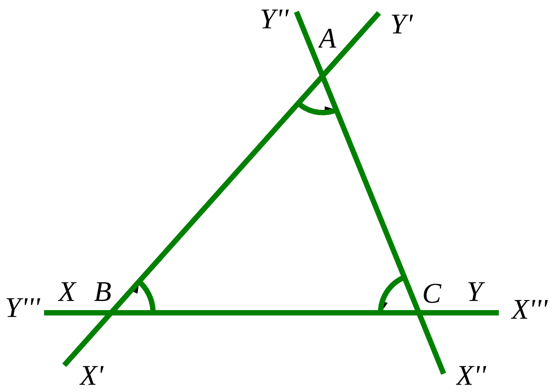


图 14 提波特的证明

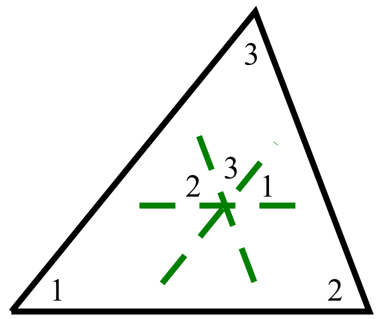


图 15 直线绕同一点旋转

方向旋转角度 *C*，到直 *BC* 所在直线 *Y’’’X’’’*。从 *XY* 到 *Y’’’X’’’*，总共转过 180 度。这是许多试图绕开平行线的证明之一。如果考虑顺时针方向旋转，即可证明三角形外角和定理。19 世纪西方平面几何教材大多采用毕达哥拉斯或欧几里得的方法来证明三角形内角和定理，但也有少数教材将毕氏和欧氏的方法推广到一般情形：不在某一顶点处作某一边的平行线，而在三角形内任一点处同时作三条边的平行线。（图 15）这也可看作是将提波特的三点旋转改成了一点旋转。用这种方法易于证明三角形外角和定理，并可用于任意多边形。

三角形内角和定理的历史为今天的教学提供了丰富的素材。运用不同的历史材料，我们可以作出不同的重构式教学设计。

● 设计一

采用帕斯卡的方案，引导学生发现内角和，再用毕达哥拉斯学派的方法加以证明。这实际上是课本上给出的方案，其缺点是证明方法与折纸活动完全脱节，显得不够自然。

● 设计二

采用普罗克拉斯的方案。该设计的缺点是需要作三角形底边上的高线。

● 设计三

采用希思的方案。先让学生发现直角三角形内角和与相应矩形内角和之间的关系，从而得出直角三角形内角和；然后通过分割，解决任意三角形的情形。这种设计的缺点与普罗克拉斯方案同。

● 设计四

采用克莱罗的方案，引导学生发现内角和，并用欧几里得的证明方法。

● 设计五

采用泰勒斯的方案。设计等边三角形（将三内角看作不同的角）、等腰三角形以及不等边三角形的拼图活动，引导学生作出发现。然后从拼图中引出平行线证明。

设计四和五中，内角和定理的发现过程与定理的证明衔接自然，比前三种更理想；而设计五还能凸显三角形内角和在现实生活中的运用（铺地砖），从而也可以有效地创造学生的学习动机。教师可以告诉学生：古希腊几何学鼻祖泰勒斯也通过类似的活动，发现了同样的结论；毕达哥拉斯就是用该方法证明同一定理的。这样，既让学生获得数学发现的成功体验，又大大地拉近了学生与古代数学家之间的“心理距离”，学生仿佛可以跨越时空，与先哲对话。这种散发人文气息、使数学充满亲和力的课堂，难道不值得我们去营造吗？

参考文献

[1] Smith, D. E. *The Teaching of Geometry*. Boston: Ginn and Company, 1911.184-188

[2] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics*. London: Oxford University Press, 1921.131-135

[3] Clairaut, A.C. *The Elements of Geometry*. Dublin: M. Goodwin & Co., 1836. 56-58

初中生对符号代数的理解：历史相似性初探*

张连芳

（上海市中国中学，上海，200031）

关于历史相似性的研究对数学教育具有重要意义。如果某一概念的历史相似性得到检验，那么，我们可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而有针对性地制订相关教学策略，最有效地让学生跨越学习障碍。因此，关于历史相似性的实证研究是 HPM 领域的重要工作之一。

Harper (1987) 曾利用丢番图《算术》中的问题，对英国两所文法学校的 1-6 年级各选 12 名学生（共 144 人）进行测试，发现学生对符号代数的认知发展过程与符号代数的历史发展过程具有相似性。四分之一世纪后的今天，这样的相似性是否仍然存在？作为对初中生代数符号理解的研究的一部分，我们试图通过对初中生的测试来回答这个问题。

1 历史分析

19 世纪德国数学史家内塞尔曼（G. H. Nezzelmann）在《希腊代数》（1842）中将代数学的发展过程分成三个阶段：修辞代数（rhetorical algebra）、缩略代数（syncopated algebra）和符号代数（symbolic algebra）。

在修辞代数阶段，人们只用文字来表达问题的求解过程，并不用任何字母符号来表示未知数或一类数。古代两河流域、中世纪阿拉伯的代数学均属于修辞代数。阿拉伯数学家将未知数称为“物”。

公元 3 世纪，被誉为古希腊代数学鼻祖的丢番图（Diophantus）在其《算术》中首次用字母“ς”来表示未知数，但未能用字母表示已知数。丢番图成为缩略代数最早的作者。

16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）在《分析引论》（1591）中使用字母来表示未知数以及已知数。韦达写道：“本书将辅以某种技巧，通过符号来区分未知量和已知量：用 A 或其他元音字母 I，O，V，Y 等来表示所求量，用 B，G，D 或其他辅音字母来表示已知量，始终如一，一目了然。”（Viète, 1646）韦达将这种新的代数称为“类的算术”，

---

* 本文根据作者的教育硕士学位论文的一部分内容整理、修改而成。

以别于旧的“数的算术”。这种“类的算术”就是我们所说的符号代数。

从修辞代数到符号代数，代数学经历了三千多年的漫长历程。美国数学家和数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908～1972）在批判“新数运动”时曾指出：“从古代埃及人和巴比伦人开始直到韦达和笛卡儿之前，没有一个数学家能意识到字母可用来代表一类数。”（Kline, 1958）

2 研究方法

为了检验历史相似性，我们采用问卷调查的研究方法。选取上海市某中学 6-9 年级共 526 名学生作为样本，具体信息见表 2。

表 1 样本信息

年级	男	女	合 计
六年级	51	56	107
七年级	52	66	118
八年级	84	74	158
九年级	70	73	143
总 计	257	269	526

研究工具采自丢番图《算术》第 1 卷中的两个问题。其中一题为：“已知两数的和与差，求这两个数。”该问题已为 Harper(1987)所采用，我们将其作为测试卷中的第 1 题。另一题为：“从同一个数中分别减去两个已知数，使两个差数之比等于给定比。”我们将该问题作了简化，并作为测试卷中的第 2 题：“从同一个数中分别减去两个已知数，使一个差数为另一个差数的若干倍。”两个问题对应于代数学三阶段的解法见表 2。

表 2 测试题的三种解法

代数三阶段	第 1 题	第 2 题
修辞代数	和的一半加上差的一半，得较大数；和的一般减去差的一半，得较小数。	将第二个减数乘以已知倍数，所得乘积减去第一个减数，将所得的差除以已知倍数与 1 的差，商为所求数。

缩略代数（丢番图的解法）	设和为 100，差为 40，较小数为 x，则较大数为 $x+40$。这样就有 $2x+40=100$，从而得 $x=30$。因此两数分别为 30、70。	假设两个已知数分别为 100 和 20，给定比为 3:1，所求数为 x，则 $x-20=3(x-100)$ ，故得 $x=140$ 。
符号代数（韦达的解法）	设 B 为两数之差，D 为两数之和，较小数为 A，则较大数为 $A+B$ ，故两数之和为 $2A+B$ 。于是 $2A+B=D$，故得 $A=D/2-B/2$。	设被减数为 A，所减的第一个数为 B，第二个数为 D，第一个差数是第二个差数的 R 倍，则$(A-B):(A-D)=R$，即 $RA-RD=A-B$，故 $A=(RD-B)/(R-1)$。

3 测试结果

学生对测试题的解答可分成 4 类，表 3 和表 4 分别给出了两个问题各类解答的分布情况。

表 3 第 1 题测试结果

类　别	六年级	七年级	八年级	九年级
修辞代数	6.5	2.5	8.2	3.5
缩略代数	7.5	3.4	5.1	9.1
符号代数	21.5	44.1	49.4	67.8
看不懂题意，不会做	64.5	50.0	37.3	19.6

表 4 第 2 题的测试结果

类　别	六年级	七年级	八年级	九年级
修辞代数	3.7	0.8	1.9	0.7
缩略代数	4.8	3.4	3.2	3.5
符号代数	21.5	24.6	40.5	65.0
看不懂题意，不会做	70.0	71.2	54.4	30.8

从表 3 和表 4 可以获得以下信息：

● 每一个年级都同时出现了三种方法，而随着年级的上升，采用修辞代数方法和缩略代数方法的被试并没有呈现明显减少的趋势。对于第 1 题，八年级被试中，采用修辞代数者的比率总体高于六年级和七年级；九年级被试中，采用缩略代数方法者的比率总体高于前三个年级。这表明，尽管学生已经受过符号代数的教育，并经过符号代数方法的训练，但部分学生仍会依赖修辞方法和缩略方法，对于这些被试来说，从修辞代数过渡到符号代数要经历一个缓慢过程，并非一蹴而就。

图 1-2 分别是被试给出的修辞代数和缩略代数方法。

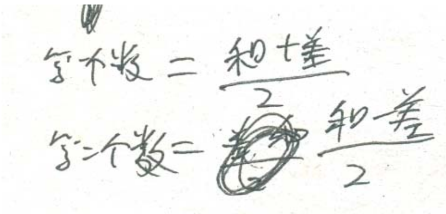


图 1 第 1 题的修辞代数解法

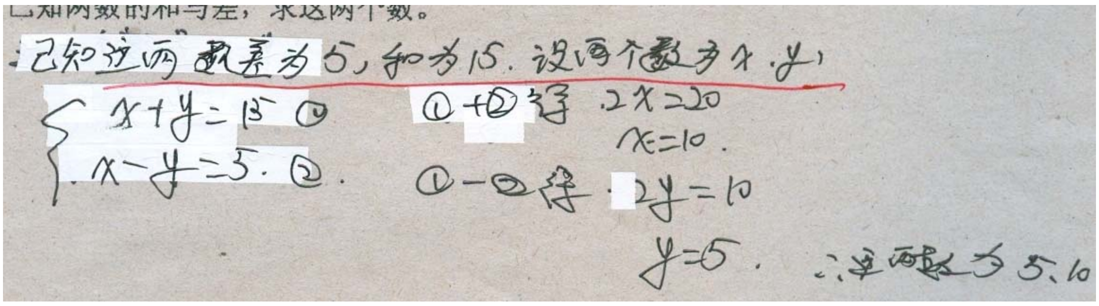


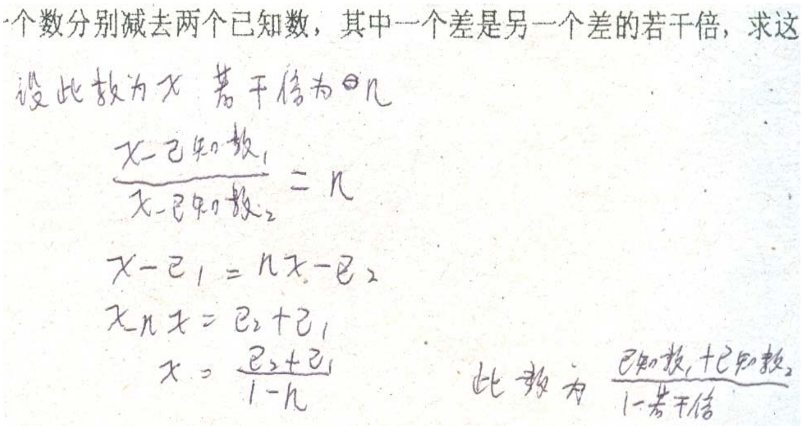
图 2 第 1 题的缩略代数解法

● 随着年级的上升，运用符号代数方法的被试比率逐渐上升。在第 1 题上，六年级被试中只有 21.5%采用了该方法，而九年级被试的比例高达 67.8%；在第 2 题上，六年级被试中只有 21.5%采用了该方法，而九年级被试的比例高达 65.0%。这表明，随着年龄的增长，初中生运用代数符号的能力逐渐提高。

● 由于测试题中没有给出具体的已知数，很多被试看不懂题意，未能解决问题。但随着年级的上升，这样的被试逐渐减少。在第 1 题上，六年级被试中有 64.5%不会解，而九年级被试中只有 19.6%不会解；在第 2 题上，六年级被试中有 70.0%不会解，而九年级被试中只有 30.8%不会解。这表明，随着年龄的增长，用字母表达已知数的意识逐渐增强。

● 由于第 2 题涉及多个已知数，被试的解答率明显不如第 1 题。

● 一些被试在第 2 题的解答中，尽管用字母表示所求的未知数，也用字母表示已知的倍数，按照我们的分类，他们达到了符号代数的水平，但两个减数仍用文字表示或用具体的数值代替，而最后的答案也用文字来表达，如图 3 和 4 所示。


个数分别减去两个已知数，其中一个差是另一个差的若干倍，求这

设此数为x 若干倍为n

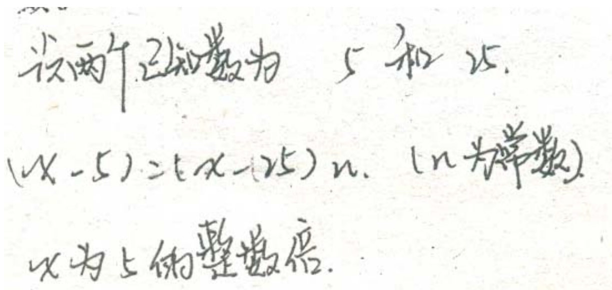
$$\frac{x-已知数_1}{x-已知数_2}=n$$

$$x-已_1=nx-已_2$$

$$x-nx=已_2+已_1$$

$$x=\frac{已_2+已_1}{1-n}$$ 此数为 $\frac{已知数_1+已知数_2}{1-若干倍}$

图 3 修辞代数与符号代数的混合解法


设两个已知数为 5 和 25.

$(x-5)=(x-25)n.$ （n为常数）

x为5的整数倍.

图 4 缩略代数与符号代数的混合解法

当问题中涉及的已知数不止一个时，学生不易想到同时采用多个不同的字母来表示它们，于是问题求解过程中出现了修辞代数方法与符号代数方法混合，或缩略代数方法与符号代数方法混合的情形。这就进一步说明，初中生对符号代数的认知是一个逐渐递进的过程，他们并不能在短期内快速摆脱对修辞代数方法和缩略代数方法的依赖。

4 结语

历史上，古代两河流域和埃及的代数均属于修辞代数，而中国、印度的代数最多只能算缩略代数。（汪晓勤等, 2012）公元 3 世纪古希腊数学家丢番图采用缩略代数后，代数学并没有我们所想象的那样一帆风顺地呈线性发展。相反，修辞代数继续主导着阿拉伯的代数学；13 世纪初，斐波纳契在《计算之书》中与缩略代数失之交臂；即使到了 16 世纪，意大利代

数学家们依然未能享受代数符号所带来的巨大便利。代数学经历了三千多年缓慢、曲折、艰辛的发展，最终才演进为成熟、完善的符号代数。

本研究表明，虽然今天的初中生已经接受过符号代数的教学与训练，但对应于代数学历史三阶段的三种方法仍然出现于不同年级的学生中；学生从修辞代数到符号代数的过渡需要经历缓慢的过程而非一蹴而就，只有随着年级的升高，才逐渐理解和接受符号代数。在一定程度上，学生对符号代数的认识过程与符号代数的历史发展确实是相似的。这让我们联想到清末数学家华蘅芳（1833-1902）对数学学习所做的比喻："譬如傍晚之星，初见一点，旋见数点，又见数十点、数百点，以致灿然布满天空。"（华蘅芳, 1897）

如果了解这样的历史相似性，那么我们还有什么理由去责怪学生在代数符号的理解与运用上所表现出的缓慢进步呢？我们还有什么理由去埋怨学生在字母符号理解上所经常表现出的含混不清呢？我们应该相信，学生所遇到的学习障碍是需要长时间来克服的，而并不能在短时间内完成跨越。深入了解符号代数的历史发展过程，有助于教师借鉴历史上数学家们克服困难的经验，预设性地为学生在学习过程中消除认知障碍，降低理解难度，也有助于教师更加宽容地看待学生所犯的错误，给学生有更多的时间来跨越历史障碍。

参考文献

[1] Fauvel, J. & Gray, J., 1987. *The History of Mathematics: A Reader*. Hampshire: Macmillan Education.

[2] Fibonacci, L., 2002. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation* (translated by L. E. Siegler). New York: Springer-Verlag. 559

[3] Harper, E., 1987. Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, **18**: 75-90

[4] 华蘅芳, 1897. 学算笔谈(卷五). 光绪 23 年味经刊书处刊本

[5] Kline, M.,1958. The ancients versus the moderns : a new battle of the books. *Mathematics Teacher*, **51** (6): 418- 427

[6] Viète, F., 1646. *Opera Mathematica*. Lugduni Batavorum: Officina Bonaventurae & Abrahami Elzevioiorum

[7] 汪晓勤等, 2011. 用字母表示数的历史. 数学教学, (9): 24-27

HPM 视角下的“导数应用”教学

王 芳[1,2] 汪晓勤[2]

（1. 浙江省萧山中学，杭州，311201；2. 华东师范大学数学系，上海，200241）

生活中的点点滴滴往往在不经意间激起智者思维的浪花，17 世纪那散发着红酒醇香的橡木桶，成为了开普勒思想的源泉，引发了他对几何体体积与最佳比例的探索。探寻古人的思想轨迹，再现他们的思想历程，我们在传授知识技能的同时，也使课堂闪烁着思维的火花，沐浴着人文的光芒。

1 开普勒与费马的思想

开普勒（J. Kepler, 1571～1630）于 1615 年发表了《新空间几何》，这本著作可能源于一个平凡的问题——求一个酒桶的最佳比例，他在著作中将锥和柱看作由无穷多个薄圆片组成，或看作由无限多个从轴引出的无限小楔形体所组成，或看作由具有其它形状的垂直截面或斜截面所组成，并应用这种观点计算其体积。酒桶的测量，对开普勒提出了决定最佳比例问题。该课题启发思考很多有关极大与极小值的问题。在《立体体积》一书中，他指出球内所有以正方形为底的内接平行六面体中，以立方体的体积最大，所有有公共对角线的正圆柱中，以直径和高的比等于 $\sqrt{2}$ 比 1 的圆柱体积最大。

费马（P. de Fermat, 1601～1665）是 17 世纪最伟大的数学家之一，他在 1638 年的一封信中详述了这样的事实，在一个一般有两解的问题中，极大或极小仅有一个解，从这个事实，费马得出了求极大、极小的十分巧妙和富有成效的公式。他将求极值的方法运用于求曲线切线、求抛物线的重心以及折射定律的证明。虽然费马在求极值问题中考虑的是方程和无限小，而不是函数与极限，理论上并不足够严密，但他提供了一种处理极值问题的通用方法。

2 导数应用的教学设计与反馈

2.1 导数应用课时一：几何体的最佳比例问题

第一环节：创设情境：在我们的生活中，易拉罐可谓无处不在，大部分的易拉罐，无论装载的是可乐还是啤酒，只要容量相同，其设计尺寸往往相同，这是巧合吗？

第二环节：探究原因

设计易拉罐的尺寸时，首先要考虑成本，即材料最省，材料与易拉罐的表面积相关，故可以提炼问题：体积相同的圆柱体，高与半径的比为何值时，表面积最小？

解：$V=\pi r^2 h$

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2$$

$$S'=-\frac{2V}{r^2}+4\pi r=0\Rightarrow V=2\pi r^3=\pi r^2 h\Rightarrow h=2r$$

测量结果：高约为半径的 4 倍，显然与计算结果不符？问题出在什么地方？易拉罐的侧面与底的厚度是不同的：侧面厚 0.011cm 顶厚 0.028cm 底厚 0.021cm。为了计算方便，可以将侧面厚近似为 0.01cm，底厚近似为 0.02cm，请学生计算高与半径的比为何值时，材料最省？此时计算结果与测量结果一致。

第三环节：拓展深化

例 1：如果圆柱的轴截面的对角线长度为定值，则高与半径的比为何值时，圆柱的体积最大？

例 2：高与半径的比为何值时，球内接圆柱的体积最大？

计算结果发现例 1 例 2 结果一致，请学生思考为什么？如图 1，球内接圆柱的轴截面为球的大圆的内接矩形，因此矩形的对角线为球的直径，长度为定值，例 2 便转化为例 1 的问题。

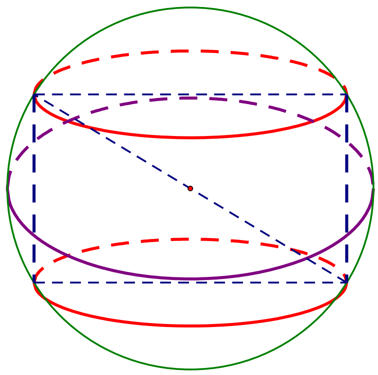


图 1 球内接圆柱

例 3：高与底面边长的比为何值时，球内接正四棱柱的体积最大？思考：例 2 与例 3 之间有什么联系？其本质又是什么？

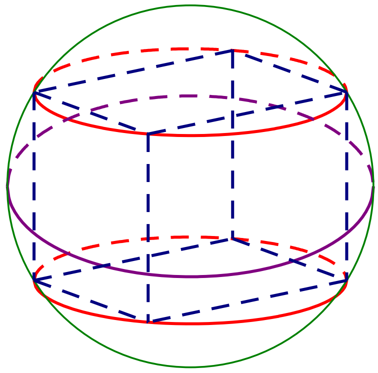


图 2 球内接正四棱柱

圆柱与其内接正四棱柱的体积比$\dfrac{V_{圆柱}}{V_{棱柱}}=\dfrac{S_{圆柱}}{S_{棱柱}}=\dfrac{\pi}{2}$（$S$ 表示底面积）为定值（图 2），因此球内接圆柱体积最大时，其内接正四棱柱的体积也最大。

第四环节：提炼思想

刀工很好的厨师能够将菜切得其薄如纸，所以无论什么几何体到了这些师傅的手中，都能切成一个个柱体，故原几何体的体积可以看作这些柱体的体积和，如果两个几何体，它们切出来的每个相对应的柱体的体积都相等，毫无疑问这两个几何体的体积相等，这里就蕴含了祖暅原理的思想。祖暅原理：夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平行平面的任何平面所截，如果截得两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等。其后再简单介绍卡瓦列利原理。正是借助于祖暅原理，我们得到所有等底等高的柱体体积相等，所有等底等高的锥体体积相等，等高的柱体体积比为底面积的比，同理，等高的锥体的体积比也为底面积的比。

例 4：高与底面半径的比为何值时，球内接圆锥体积最大？

例 5：高与底面边长的比为何值时，球内接正三棱锥体积最大？

圆锥与其内接正三棱锥的体积比$\dfrac{V_{圆锥}}{V_{正三棱锥}}=\dfrac{S_{圆锥}}{S_{正三棱锥}}$为定值，所以当球内接圆锥体积最大时，圆锥的内接正三棱锥为球的体积最大的内接正三棱锥。

一般化：高与底面边长的比为何值时，球的内接正n棱柱、正n棱锥体积最大？

$$\left.\begin{aligned}&\frac{h}{r}=\sqrt{2}\\&\frac{r}{a}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

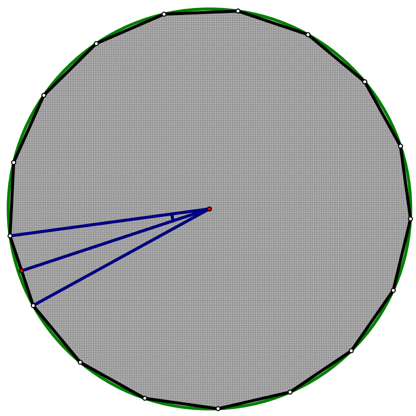


图 3 圆锥内接正n棱锥的底面

第五环节：小结与作业

作业：1、查阅有关开普勒、祖暅与卡瓦列利的资料，了解他们对数学的发展所作出的巨大的贡献。2、思考球外切正n棱柱、外切正n棱锥的最佳比例。

分析：开普勒从对酒桶最佳比例的思考开始，研究了几何体的计算方法，思考了许多求几何体最佳比例的问题，他对于几何体的体积与最佳比例的思考值得我们借鉴。本课时从研究易拉罐尺寸开始，探讨了共对角线圆柱、球内接圆柱、球内接正四棱柱、球内接圆锥、球

内接正三棱锥的最佳比例问题，并拓展到球内接正n棱柱、棱锥的最佳比例问题，并在课后让学生思考球外切正n棱柱、棱锥的最佳比例问题，层层递进，既让学生熟悉了导数知识，学以致用，又引导学生关注问题间的联系，从特殊中归纳出一般性的结论。此外对祖暅原理的介绍，让学生对微积分求几何体体积有了初步的了解，为今后进一步的学习奠定基础。

2.2 导数应用课时二：最佳线路铺设问题

第一环节：情境引入

情境一：现代化的交通：现代化的交通密如蛛网，为我们的生活带来了便利，从杭州到北京乘坐高铁只需要 6 个半小时，交通网络的设计涉及到大量的优化问题，我们需要科学有效地处理这些优化问题。

情境二：发达的通信网络：我国的航天事业蓬勃发展，嫦娥奔月，天宫神舟对接，我们离那浩渺的太空越来越近，而发达的通信技术是我们航天事业一项强有力的保障，怎样才能保证通信网络的稳定、快速与低成本，同样离不开优化问题！

第二环节：生活中的优化问题

例 1：如图，A、C位于宽度为$40\sqrt{3}\,\text{m}$的河的两岸，点B位于点C的正对岸，AB长为 100m，陆路AB上的运输速度为水路运输速度的两倍，为使从A到C的运输时间最短，在D点设立水陆转换码头，求$\angle BDC$与AD.

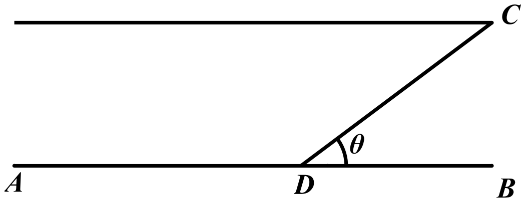


图 4 课时二例 1

解：设水运速度为 1，则陆运速度为 2，$\angle CDB=\theta$

$$t=\frac{100-\dfrac{40\sqrt{3}}{\tan\theta}}{2}+\frac{\dfrac{40\sqrt{3}}{\sin\theta}}{1}=50+20\sqrt{3}\cdot\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$$

一般化：A、C位于宽度为$40\sqrt{3}\,\text{m}$的河的两岸，点B位于点C的正对岸，AB长为 100m，陆路AB上的运输速度为水路运输速度的n（$n>\dfrac{\sqrt{111}}{6}$）倍，为使从A到C的运输时间最短，在D点设立水陆转换码头，求$\cos\angle BDC$.

例 2：如图，已知点$O(0,0)$、$A(3,3)$、$B(3,3)$为某公司的三个办公地点，现要在三个办公地点间构建通信网络，决定将交换器构建在x轴上的点C处，试确定C点使通信线路

最短.

解：方法一：设点$C(x,0)$，$f(x)=x+2\sqrt{(x-3)^2+9}$

方法二：设$\angle ACD=\theta$，$f(\theta)=3-\dfrac{3}{\tan\theta}+\dfrac{6}{\sin\theta}=3+3\cdot\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$

例 3：如图，设有一条直线段的河道位于x轴上的区间$\left[0,3\sqrt{3}\right]$上，两家工厂位于点$A(0,2)$，$B\left(3\sqrt{3},3\right)$，为了净化这两家工厂所排出的污水，要在$H(x,y)$处建造一座污水处理厂，$x\in\left[0,3\sqrt{3}\right]$，$y\geq 0$，从$H$点把净化的水用管道通往河道$C(x,0)$处，问如何铺设管道及污水处理厂应建造在哪里可以使得铺设管道的长度最小？

解：$d=y+\sqrt{(2y-3-2)^2+27}=y+\sqrt{(2y-5)^2+27}$

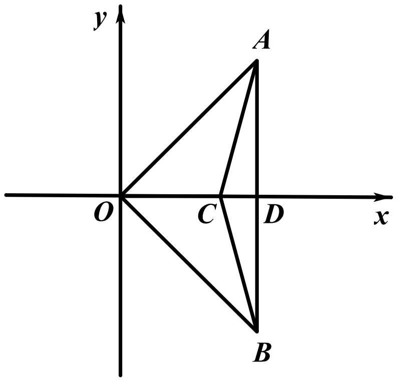


图 5 课时二例 2

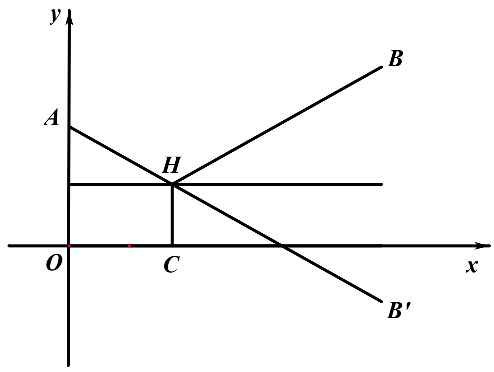


图 6 课时二例 3

第三环节：探索例题间的联系

思考：三个例题中涉及取到最值的角不是$\dfrac{\pi}{3}$就是$\dfrac{2\pi}{3}$，这是偶然吗？还是必然？这三个例题间又存在怎么样的联系？展示例 3 的几何方法。

如图 7，当$\angle AHC=\angle BHC=\angle AHB=\dfrac{2\pi}{3}$时，过点$A$、$B$分别作直线于$AH$、$BH$垂直，与$x$轴交得正三角形$DEF$，$|AH|+|BH|+|CH|$等于正三角形$DEF$的高$h$，在正三角形$DEF$内任取一点$H'$，分别作$DE$、$DF$、$EF$的垂线段$A'H'$、$B'H'$、$C'H'$，则$|A'H'|+|B'H'|+|C'H'|=h=|AH|+|BH|+|CH|$，因此$|AH'|+|BH'|+|C'H'|\geq|AH|+|BH|+|CH|$.

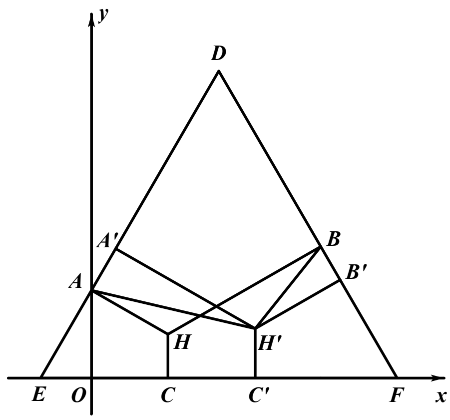


图 7 课时二例 2 的几何证明

例 3 的几何方法可以用来证明费马点，费马点就是到三角形三个顶点距离和最小的点，当ΔABC的最大角小于$\frac{2\pi}{3}$时，费马点H使

$$\angle AHB=\angle BHC=CHA=\frac{2\pi}{3},$$

例 2 其实就是费马点的特例。

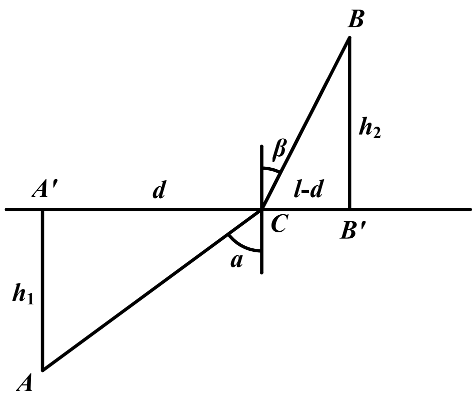


图 8 折射定律的证明

费马点在通信领域中具有极其广泛的运用，运用费马点的知识铺设通信网络不仅能使通信线路达到最短，铺设成本最低，更为重要的是以此方式铺设的通信网络信号更加稳定。费马一生为我们留下了许多重要的定理与猜想，为数学与自然科学的发展作出了重要的贡献，光学领域中的费马原理也是费马的一项重要成就。费马原理（最小光程原理）：光波在两点之间传递时，自动选取费时最少的路径。根据费马原理，通过导数，我们可以很容易地得到折射定律。

光在A、B两种介质中传播速度之比为n，则有

$$t=\frac{\sqrt{h_1^2+d^2}}{n}+\frac{\sqrt{h_2^2+(l-d)^2}}{1}$$

$$t'=\frac{d}{n\cdot\sqrt{h_1^2+d^2}}-\frac{l-d}{\sqrt{h_2^2+(l-d)^2}}=0\Rightarrow\frac{\frac{d}{\sqrt{h_1^2+d^2}}}{\frac{l-d}{\sqrt{h_2^2+(l-d)^2}}}=n\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$$

折射定律的证明经历了曲折的过程，折射定律最早是由斯涅尔（W. Snell, 1591～1626）发现的，但未发表，笛卡尔（R. Descartes, 1596～1650）于 1637 年在他的《折光》一书中给出了同样的定律，但他的证明是错误的，费马立即对定律及其证明进行攻击，两人开始了长达十年之久的争论，直到费马根据最小光程原理，借助于求极值的方法导出此定律，才承认它是正确的。当然费马的证明还不是现在我们所进行的证明，我们所进行的证明则是由莱

布尼兹（G. W. Leibniz, 1646～1716）给出的。

当入射角α为$\dfrac{\pi}{2}$时，我们根据折射定理$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$可得$\sin\beta=\dfrac{1}{n}$，与例 1 一般化中的结论恰好吻合，分析例 1 的本质，同样也是物体在两种介质中的两点间运动，保证用时最少的问题与最小光程原理一致，因此由最小光程原理得到的折射定律，在这一类问题中同样适用。

例 1 与例 2 的方法二涉及到的是同一个函数模型，它们之间又存在着什么样的联系？

例 2 中铺设的通信线路的长度$d=|OA|+2|AC|=\dfrac{|OA|}{1}+\dfrac{|AC|}{\frac{1}{2}}$，可以看作物体在$|OA|$上的运动速度为$|AC|$的 2 倍，确定$A$点使费时最短的问题，这样问题 2 就转化为了问题 1，也就是我们很巧妙地实现了一次费马点与费马光学原理间的转化。

第四环节：小结与作业

作业：1、查阅与费马有关的资料，走入费马的世界！2、尝试用我们所学的数学知识去处理生活中的一个优化问题，个人或小组都可，寻找问题，给出数学模型，并解决问题。

分析：费马思考费马点与证明折射定律时是否有关联，我们已经不可考，但这两类问题都涉及到求最值与极值，将它们放在一起进行探究是很自然的，更为惊讶的是它们之间可以相互转化。虽然我们现在所用的方法与当初费马求极值的方法已经有些区别，但寻找一种通用的方法解决极值问题这一点是共通的，本课时中利用折射定律模型，将交通与通信等领域中不同的问题联结成一个有机的整体，这样的教学设计有助于提高学生分析问题解决问题的能力，培养学生提炼问题背后数学模型的能力。

2.3 教学反馈

笔者于 2010 年 12 月 21 日至 2011 年 1 月 6 日实施了导数章节的教学，于 2011 年 1 月 7 日对任教的 104 位学生进行了关于导数教学效果的问卷调查，问卷涉及章节教学的六个教学案例，其中之一即为导数应用第一课时的易拉罐尺寸设计案例。问卷结果显示，有 91（81.7%）位学生认为这一案例能够让他们感受到数学知识在现实生活中的价值；问题 7 让学生选择给出的六个教学案例中哪些案例比较有意思，有 77（74.0%）位学生认为易拉罐案例有意思，位居六个案例之首；问题 8 让学生选择给出的六个教学案例中哪些案例给他们比较深刻的印象，有 68（65.4%）位学生对易拉罐案例印象比较深刻，同样位居六个案例第一。

此外，笔者于 2012 年 6 月 11 日召集任教的 21 位学生进行座谈，请学生回忆在导数教学中有哪些案例给他们留下了比较深刻的印象，易拉罐案例就是其中之一，学生喜欢这些能够将知识直接运用于生活中的教学案例。问卷调查与访谈的结果说明导数应用课时的教学设计学生是认同的，并且能给学生留下深刻的印象。

3 余论

新课程标准非常注重知识的运用与文化的渗透，标准中明确给定了数学建模与数学文化的教学建议与教学要求，相配套的人教 A 版的教材在每一章节的最后部分都安排了知识应用的课时，这些知识应用课时虽然给予了丰富的案例，但案例间缺乏相互关联，使得课时的教学比较松散，往往仅限于知识的运用而缺少了思想的提炼。时间是最苛刻的筛选者，经历了时间的筛选而留存下来的必然是精华，数学史中的许多案例往往蕴含着深刻的思想，包含着通用的方法，以这些思想方法为纽带串联知识应用的教学，为知识应用教学设计增添了新的视角。在导数应用的教学设计中，以开普勒与费马的思想为核心，选取编制教学案例，使得课时的教学呈现出形散而神不散的特点，教学的知识性、技能性、思想性都有所增强，对学生数学素养的培养更为全面，这是数学史为实现教学目标所作的贡献，笔者将之定义为数学史的教学功能。

微积分的发展经历了一个世纪的酝酿，开普勒与费马都是这一阶段作出杰出贡献的人物，开普勒求几何体体积的方法蕴含着深刻的极限思想，而费马寻找到一种通用的方法求函数的极值、曲线的切线及证明折射定律，他们的思想中所涉及到的极限思想与通用方法正是微积分的灵魂与价值，在教学中渗透开普勒与费马的思想，介绍祖暅原理与卡瓦列利原理，介绍折射定律的证明过程，让学生感受极限思想，体会微积分的意义在于为解决数学与自然科学中大量的问题提供了一种有效而通用的方法，同时也让学生明白科学定律发现证明过程的曲折与艰辛，激发他们克服困难探索真理的勇气，这是数学史在数学教学中不可替代的功能，笔者将之定义为数学史的史学功能。充分发挥数学史材料在教学中的教学功能与史学功能，使数学史成为教学中不可或缺的部分，对学生更全面深刻地理解数学具有重要的意义。

一位教师的教学生涯短短几十年，一个教师团队也只有区区几十人，数学的发展却经历几十个世纪，有千千万万的学者为之付出了毕生的心力，触摸数学发展的历程，感悟数学文化的恢宏，让数学课堂闪耀几十个世纪的精华，无数智者的智慧，那该是一位数学教师毕生的荣幸与追求吧！

寻找历史与教学的最佳融合

——国际 HPM 2012 会议纪实

蒲淑萍 [1,2]

（1. 淄博师专，山东淄博，255100；2. 华东师范大学，上海，200241）

HPM 2012 是第 12 届国际数学教育大会 ICME-12 (International Congress on Mathematics Education）的卫星会议，也是 HPM 组织举行的第八个四年一度的会议。会议于 2012 年 7 月 16-20 日在韩国大田国际会展中心（DCC（Daejoen Convention Center）, Daejoen Korea）召开。会议由韩国数学教育协会 KSME（Korean Society of Mathematics Education）和韩国数学史协会 KSHM（Korean Society for History of Mathematics）共同承办，其官方语言是英语与韩语。

HPM 是关于数学史与数学教学关系的国际研究组织(International group for the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics)的简称。连同其他五个与数学教育有关的国际组织：国际数学教育心理学组织 PME(International group for the Psychology of Mathematics Education)、数学建模与应用的国际教师团体 ICTMA(International Community of Teachers of Mathematics Modeling and Applications)、女性与数学教育的国际组织 IOWME(International Organization of Women and Mathematics Education)、数学创造力及资优教育国际组织 MCG(International group for Mathematical Creativity and Giftedness)、国家数学竞赛世界联盟 WFNMC(World Fedration of National Mathematics Competitions)一起，同是国际数学教育委员会 ICMI（International Commission on Mathematical Instrction）的附属组织（ICMI, 2012）。1972 年 HPM 组织于英国埃克塞特召开的第二届国际数学教育大会 ICME-2 上创立，并于 1976 年在德国卡尔斯鲁厄召开的第三届国际数学教育大会 ICME-3 上，与 PME 一起成为 ICMI 的附属组织。

HPM 2012 的口号及主题有两项：庆祝 HPM 组织成立 40 周年；聚焦东亚数学。主要议题包括 7 项：1)将数学史融入数学教育的理论和（或）概念框架（Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education）；2）历史与认识论在数学教育中的实施：课堂实验及教学素材（History and epistemology implemented in mathematics education: classroom experiments & teaching materials）；3）课堂中的原始文献及其教育效果（Original sources in the classroom, and their educational effects）；4）数学及与科学、技术和艺术的关系：数学史问题及其教育启示（Mathematics and its relation to science, technology and the arts:

historical issues and educational implications）；5）文化与数学（Cultures and mathematics）；6）数学教育史专题（Topics in the history of mathematics education）；7）东亚数学（Mathematics from Eastern Asia）。

HPM 2012 开幕式于韩国当地时间 7 月 16 日上午 9 点开始。会议由本届会议组委会副主席、韩国建国大学（Konkuk University）的 Sangki Choi 教授主持，国际 HPM 组织主席、法国南特大学（University of Nantes）的 Evelyne Barbin 教授及 HPM 2012 组委会主席、韩国崇实大学（Soongsil University）的 Sunwook Hwang 教授分别致欢迎词。其后，由韩国国立大学研究生院音乐系的 Seo-eun Wang 和她的同伴表演了韩国传统音乐后，HPM 2012 的学术盛宴正式开始。

1 大会报告

第一场大会报告的题目是：在高中课堂中使用数学史：来自台湾的经验。报告由香港中文大学萧文强教授主持。报告者是台湾台南一中的林仓亿老师。他从 HPM 在台湾的发展开始，介绍在台湾师范大学洪万生教授带领下开展的研究项目及台湾高中数学教师在数学课堂教学中使用数学史的经验。可以看到，从 1996 年洪万生教授接受承办“HPM 2000”台北会议的任务及为促进 HPM 在台湾的发展而随之发行的《HPM 台北通讯》开始，HPM 研究领域及其影响已经在台湾取得了长足的进展：从 2001 年至 2011 年有 1 篇博士学位论文和 32 篇硕士学位论文以 HPM 为研究主题，而在 2000 前以前，此类论文仅有 2 篇。台湾 HPM 的发展与洪万生教授领衔的 HPM 研究课题有着直接的关系：如，古代数学文本在课堂中的使用；论 HPM 视角的教师专业发展，等。洪教授的团队成员大多为中学教师，因此研究由实践经验和实际应用组成。报告中林仓亿介绍了苏意雯、苏俊宏和他本人开展 HPM 研究的主要成果，使得人们对台湾 HPM 教学研究状况有了大致的了解。本报告属主题 2：历史与认识论在数学教育中的实施：课堂实验及教学素材。

此外还有 6 场大会报告分属其它 6 个研究主题。

来自美国科罗拉多大学数理系的 Janet Barnett 介绍了课堂教学中使用数学史原始文献的个人经验，包括面临的挑战和收获等，该报告属主题 3；来自丹麦罗斯基勒大学(Roskilde University)的 Tinne Hoff Kjeldsen 的报告题目为“为数学及数学学习而使用数学史：融历史于教育的理论框架”，主要针对两个问题：怎样融数学史于数学教学更有利于学生的学习；怎样使用数学史元素帮助学生的数学学习，发展学生的历史意识。该报告呈现了一个分析、评价和引导教学设计与实施的理论框架，并用两个具体例子介绍了该理论框架的使用。（ICMI, 2012）Kjeldsen 的报告属于会议主题 1。该报告具有理论性与方向性的指引作用，引起与会者的极大关注。

分属主题 4 的大会报告是来自法国留尼汪大学（University of La Reunion）的 Dominique

Tournè，她介绍法国“19 世纪工程师的数学：方法与工具”．她的报告从“不同的数学实践”“不断增长的计算需要”“数学由工程师创造的一个例子：列线图解法（nomography）”“作为新理论发展资源的工程数学”五个方面阐述，揭示 19 世纪专业工程师团体自身的结构及对数学文化的深刻影响．

分属主题 5 的大会报告是法国巴黎狄德罗大学(University PARIS Denis Diderot)的 Anne Michel-Pajus 的“进入人文数学宇宙的航程（A Voyage Into The Literary Mathematical Universe”。该报告从现代视角勾勒了西方数学和文学的共同历史，在数学进步的过程中，应评价文学的进程以及文学艺术如何增加探索、理解和记忆数学概念的动力。该报告用“剧作”的形式展开，其新颖的报告形式及内容的全新视角引起与会者的广泛兴趣与阵阵掌声。分属主题 6 的大会报告是瑞典学者 Johan Prytz 的“数学教育中的社会结构：以教育社会学的理论与方法研究数学教育史”。最后一场大会报告是韩国西江大学（Sogang University）的 Sung Sa HONG 教授所作的“朝鲜数学史中的方程理论”，该报告属于本届会议主题 7：东亚数学。

各主题除大会报告外，各有数篇来自不同国家 HPM 研究者的常规报告。另外，会议还安排了数学教材展览及为数不少的海报展示、工作坊展示及大会讨论，内容亦丰富多彩。尤以着意安排的两场大会讨论及工作坊展示最为引发与会者的关注、相关讨论与思考。

2 大会讨论

大会讨论共设两场，讨论主题分别是：主题 1“为什么职前数学教师需要‘数学史’课程（这样的一门课程应该是什么样的）？”由土耳其、韩国、美国和法国的四位学者分别发言，主持人美国佛罗里达州立大学的 Kathleen Clark 教授就讨论主题给参与讨论者分发了一份问卷，包括四个问题：1）确认数学史课程的 1 或 2 个有价值的方面（无论你以前教过还是学过这样一门课程）；2）实施数学史课程可能会遇到的 1-2 个障碍，并阐述可解决此类障碍的方法；3）描述数学史课程对职前教师的益处（基于实际经验或你的认识）；4）对于这样一门课程潜在的内容与教学，所需的工作案例是什么？

主题 2“关于 HPM 的实证研究：当前和未来面临的挑战”，由丹麦罗斯基勒大学的 Uffe Thomas Jankvist 主持。发言者分别为 Uffe Thomas Jankvist，日本的 Isoda Masanmi，美国的 David Pengelley 及台湾的苏意雯。Uffe Thomas Jankvist 作为主持人首先介绍 HPM 领域开展实证研究的必要性：ICME 或者 PME 等的许多与会者都将或已经是数学教师、课程设计者或教材编写者，因此引发他们对数学教学中历史维度重要性的关注是非常必要的。实证研究是达成此目的的一种方式。而 Jankvist 本人于 2012 年所做的一项调查研究表明：迄今为止 HPM 领域的实证研究却很少（ICMI, 2012）（只有 100 项左右[①]）。其后，日本的 Masami Isoda 介

[①] 信息来自“大会讨论”中 Jankvist 给出的信息

绍了日本课例研究（Lesson Studies）中的 HPM 成分以及在开展 HPM 研究中技术的使用；美国的 David Pengelley 就数学史原始文献及其补充、改变和保留，发表了自身的见解；台湾的苏意雯就 HPM 与教师培训之间关系阐述实践经验及认识；而 Uffe Thomas Jankvist 本人则就 HPM 领域的数学教育研究框架与理论建构给出一些思考与建议。

在讨论环节，讨论组给所有与会者提出 5 个方面的问题，对与 HPM 实证研究相关的问题，从不同侧面引起各国学者的讨论与思考。这五个问题是：1）支撑教师致力于将数学史融入数学教学的合理的、实际可行的方式是什么？2）注入历史元素后，数学教师是失去了时间，还是赢得了时间？当数学史在数学教育中的价值濒临危境（遭受质疑）时，主要的或关键的因素是什么？应讨论谁的影响？3）以不同的方式融入数学史（原始数学史资源，历史剧，基于历史的学习任务或者历史上的工具，等等）就学生的学习结果来说，其相同与不同之处分别是什么？4）就学生的评估与评价而言，使用数学史的效果是怎样的？5）在数学教育中介绍数学史维度的有效性怎样让不同目标群体（其他研究者，数学教师，课程开发者，教材编写者等等）以信服的方式加以检验？

两个大会讨论的讨论环节，首先请与会者按照座位就近原则组成 3-5 人的讨论小组，随后邀请部分志愿小组发言，最后汇集所有回答。会场气氛热烈，达到了“交流、讨论、思考”的目的。

3 工作坊展示

HPM 2012 分别就主题 2 和 3 给出了工作坊展示。共有 7 场展示，其中涉及主题 2 的有 4 场：第一场报告是由科罗拉多州立大学的 Janet Heine Barnett 和新墨西哥州立大学的 Jerry Lodder 和 David Pengelley 的研究。通过分析学生的研究项目：欧几里得最大公约数的运算法则，让学生将数学史原始文献转化成现代数学公式，并验证其正确性，讨论了将原始文献直接用于教学，怎样达到特定的教学目标；第二场是法国巴黎的 Renaud Chorlay 的报告，主题是“证明的旅程：如果 f'为正数，则 f 是一个递增函数”；第三场由法国勃艮第大学（University of Burgundy）的 Frederic Metin 就“英语作为外语的数学教学中的文化路径和数学史原始文献的使用”作了探讨；第四场由英格兰巴斯温泉大学（Bath Spa University）的 Peter Ransom 给出。该工作坊展示了在过去四年时间里一群 12-14 岁的学生的学习成果。工作坊通过开展若干数学史相关主题的研究，向学生强调一个事实，即数学是一个综合学科，学生应明确各主题之间的相互联系。

涉及主题 3 的工作坊展示有三场。第一场是由挪威的奥斯陆和阿克斯胡斯大学应用科学学院（Oslo and Akershus University College of Applied Sciences）的 Bjφrn Smestad 给出的“向职前教师教授数学史的例子”，介绍他通过连续两年为职前教师开设的数学史课程，开发的教学案例；第二场是香港中文大学萧文强教授和陈业祥老师的工作坊展示，介绍了“英国传

教士眼里的中国算术和中国数学家眼里的计算：伟烈亚力与李善兰的合作”的诸多发现与思考；法国高中新课程突出算法的重要性，并明确要求在课堂上教学基本的、多样化的算法。在第三场工作坊展示中，巴黎狄德罗大学（University PARIS Denis Diderot）的 Anne Michel-Pajus 介绍了他们利用古代算法开展教学与教师培训的做法。展示中他们给出了具体的例子和评论。

4 东亚数学及 HPM 研究状况

分别由中国、日本、韩国代表发言，介绍三个国家各自的现状。我国的情况介绍有中国数学史学会理事长、西北大学的曲安京教授介绍。曲教授从我国数学史研究及数学教育中的数学史研究两个方面介绍我国的基本情况。

除笔者外，另外与会的我国代表有：中国社会科学研究院郭书春研究员、辽宁师大王青建教授、西北大学曲安京教授、陈镒文老师及北师大珠海分校的大二学生孙于婉君等。港、澳、台地区的与会代表有：香港中文大学的萧文强教授夫妇、陈业祥老师，香港教育学院的郑振初教授、香港特区政府教育局的邓美愉主任、澳门大学的孙旭花老师；台北市立教育大学的苏意雯老师、台北台南一中的林仓亿老师。各位华人与会者分别就课堂实践中的数学史融入、教材中的数学史、数学史料的发掘与阐释等多个层面开展 HPM 研究，为世界 HPM 研究领域东亚地区的研究状况给出了从面到点的描绘，使得与会者对东亚数学史及 HPM 研究有了基本的认识与了解。

5 会议其他相关信息

本届会议进行了国际 HPM 组织主席的换届，法国南特大学的 Evelyne Barbin①教授，圆满完成了 2008-2012 年期间 HPM 组织的主席任职，并在本届会议上将主席一职顺利移交加拿大劳伦森大学教育科学学院的 Luis Radford 教授。Luis Radford 教授获得了数学教育界 2011 年度的弗赖登塔尔奖章（Hans Freudenthal Medal for 2011），并于刚结束的 ICME-12 的开幕式上被正式授予奖章与证书。他的研究兴趣包括数学教与学思维的理论和实践两个方面。他目前的研究受 Lev Vygotsky（1896-1934）关于文化-历史的思想以及 Evald Ilyenkov（1924-1979）的认识论思想学派影响，同时受 Emmanuel Levinas（1906-1995）和 Mikhail Bakhtin(1895-1975)的概念框架影响，引向一种非功利的以及非工具主义的课堂教学与教育观念②。Radford 教授也是著名数学教育期刊“数学学习（For the learning of mathematics）”的编辑。

---

① 关于 Evelyne Barbin 教授更多的信息，可参看 http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89velyne_Barbin

② 关于 Luis Radford 教授更多的信息，可参看 http://en.wikipedia.org/wiki/Luis_Radford

自 2008 年起，国际 HPM 组织委员会决定每两年组织一次国际会议：HPM 卫星会议以及 ESU 大会，即数学教育的历史与认识论的欧洲暑期学校（European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education）①。下一届国际 HPM 会议，即“ESU 7 Spain”将于 2014 年西班牙的巴塞罗那举行。而继 2016 年德国第 13 届国际数学教育大会 ICME-13 之后的 HPM 2016 将于德国周边地区举行。

6 结语—HPM 2012 的启示

HPM 2012 已经结束了，但带给我们的思考与促动却还在继续。总结 HPM 2012，我们至少可以在以下三个方面受到启发：

其一是关于如何为职前教师开设数学史课程的问题，不仅为增加职前教师的数学史（HM，即 History of Mathematics）知识而开设，同时也应考量其将来的职业定位，在课程中渗透将数学史融入数学教学（HPM）的成分，如何融历史于数学教学，如何从历史视角设计教学等已成为世界各国师范院校或者以培养未来教师为目标的课程制定者与实施者普遍予以重视的方面；

其二是关于数学史融入数学教学的视角对于数学教师专业发展的作用，应予以充分的重视。比之逻辑的和心理的知识对于数学教师专业发展的重要性，数学史能从数学内部增强教师的学科及科学素养，对教师的专业成长也是不可或缺的重要方面；

其三是有关数学史融入数学教学的实证研究，建构 HPM 研究的理论框架。前者能使 HPM 研究领域更加契合实践教学，更好地为教学服务，后者则能使为 HPM 研究提供实证研究的方法论，使我们对 HPM 研究的认识与思考更加深刻。这需要更多的一线教师和研究人员投入其中。

参考文献

[1] ICMI, 2012. *Final Programme of The 12th International Congress on Mathematics Education*. 310

[2] Kjeldsen, T. H., 2012. Uses of history for the learning of and about mathematics: towards a theoretical framework for integrating history of mathematics in mathematics education. In *Proceding Book1 of HPM 2012*.1-22

[3] Jankvist U T., 2009. On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 12 (1): 67-101.

① 信息来自 HPM 2012 之 Evelyne Barbin 所作报告.