

## 数学日记读后感言

——致可爱的高数弟子们

因为琐事的纷纷扰扰，因为班车的匆匆忙忙，因为一个加强排研究生的嗷嗷待哺，还因为教学= $o$ (科研) ( $o$  这个符号大家学过的，不足为外人道也) 这个公式的威逼利诱，对于手头那些规定作为作业上交的可爱的、精彩纷呈的数学日记，我竟没能在某一个时间闭区间上构造出阅读连续函数，最后，退而求其次，用了个分段函数，段数  $n \geq 4$ 。

在拥有自己的时间的时候，总是会仔细地翻阅那些数学日记，在静夜的书房里、在颠簸的校车上。仿佛倾听每一位弟子的诉说，诉说自己的数学故事、回溯自己的心路历程、流露自己的数学情感、评述自己的学习得失、表达自己的困惑与迷茫、憧憬自己的数学未来。苦乐相伴、悲喜共存、爱恨交加，忧惧与期待并行，无奈共憧憬同在。利用不完全归纳法，得到以下关于高数学习之不等式：

苦  $\geq$  乐；悲  $\geq$  喜；恨  $\geq$  爱；忧惧  $\geq$  期待；无奈  $\geq$  憧憬。

说到苦处，高数恰似美军之牢狱，我老人家恰似虐囚之士兵；说到恨时，高数直似恐怖大亨拉登，主人公自比美国总统布什；说到忧惧时，战战惶惶，汗出如浆；说到无奈时，与高数执手相看泪眼，竟无语凝噎；说到悲情处，风潇潇兮易水寒！在每一个阅读日记的时间闭区间上，至少有一点  $\xi$ ，使得我在该点处的阅读函数值为“先昏过去再说”。

但我的阅读函数值中更有一些感动和一些震动。感谢诸位愿意与我作真心的交流，如果以 A、B、C、D 四级制来评定诸位所撰数学日记之成绩（主要以数学情感之真实性为依据），则四级人数之比约为  $A : B : C : D = 75 : 20 : 5 : 0$ 。这就使我可以真实、深入地了解大家，并据此对自己的教学进行深入的反思。我也看到，大家对高数之教学方式基本持肯定看法，使我依然可以从容、自信地面对大家。但高数带给部分同学的痛苦、恐惧、忧虑和无奈亦深深震撼我的心灵。在大学，由于师生关系之疏远、师生交流之贫乏、对学生认知研究之不足，讲台上的教师往往自作多情、滔滔不绝、唾沫飞溅、满黑板定理与证明、大有讲不足舞之、舞不足蹈之之势，殊不知台下已然危机四伏：或如身堕五里云雾、或似眼观天外之书、或睡眠朦胧、或鼾声暗起、或窃窃私语、或置身局外、或冷眼旁观。纵有若干记笔者，亦不过为抗拒瞌睡虫之猖獗不得已而为之。悲夫！密密麻麻的数字、符号、定理、公式，不过推销无果、供自我欣赏的廉价产品而已。而今，诸位的数学日记使我明白，我所爱者未必人人爱之，我所善者未必人人善之，我所感觉容易者未必人人易之，我

所刻意讲授者未必人人乐于接受之。数学上不同函数有增、减、凹、凸之不同性态，人世间不同生命岂能没有不同旨趣？是故酸甜苦辣、爱恨情仇，稀松平常，不足为怪。

诸位多在数学日记中表达自己之迷茫、困惑和疑难，今特一并解答如次。

**疑难之一：**大学数学之教学方式与中学有天壤之别，一次高数课猛讲数节内容，旧的未掌握，新的又来了，如何应对？

关于这一点，高数课伊始我已经提醒过大家。在中学，数学教师在一节课中围绕一个概念，小心引入、反复讲解、不断练习、去争取胜利；而在大学，厚厚一本教材，难度激增、进度催人、时不我待，短短一节课往往概念繁多、定理成串、埋头疾行、去追赶火车。何也？因为诸位已经从众多同龄人中脱颖而出，走过独木桥，来到象牙塔，岂有仍需老师扶着手走路之理？歌曰：“走吧，走吧，人总要自己学会长大！”一些同学因为无人牵手，竟不会走路。事实上，大学数学课默认学生具备相当强的自主学习能力。无庸讳言：谁能在短短两节课中消化那么多高深的数学内容呢？课前预习、课后复习，这是学好数学必不可少的环节。尽管大学里属于自己的课外时间比高中增加许多，但各种名目的课外活动就像垃圾电子邮件那样源源不绝，充满诱惑的干扰因素就像黎曼博士的零点那样层出不穷。因此，如何安排时间来预习和复习，每个人心中都应该有一杆秤。此时不锻炼自己的学习能力，更待何时？

**疑难之二：**大学数学的概念过于抽象深奥，尤其是描述极限定义的 $\varepsilon - \delta$ 语言，不知所云、令人望而生畏，成为我心中永远的痛。

贵班级尚无哪位真心英雄、牛顿第二在数学日记中立下豪言壮语，称自己已经征服那该死的、曾经夺走无数人幸福快乐的 $\varepsilon - \delta$ 。在微积分课本上，大家一不小心就会撞见一个希腊字母，像 $\varepsilon$ 啊， $\delta$ 啊， $\xi$ 啊， $\varphi$ 啊， $\psi$ 啊，等等。难道大家耳熟能详的26个英文字母不够用、非要用这些写起来很费劲的玩意吗？非也。希腊字母的使用不过沿习历史上数学家的做法而已，所谓约定俗成、习惯成自然。美国著名数学家、《古今数学思想》的作者M·克莱因（M. Kline, 1908~1992）认为，数学家在数学论文中喜欢用希腊字母，因为较之英文字母，希腊字母显得更神秘，因而更会让外行觉得数学高深莫测。瞧，数学家竟如此虚伪！

$\varepsilon - \delta$ 语言难懂，在数学上已是人尽皆知之事实。苏轼诗云：“人生识字忧患始”。同样我们可以说，学数学者遇 $\varepsilon - \delta$ 忧患始。但我在课上已经多次强调，千万不必为不理解 $\varepsilon - \delta$ 而担心，而忧患，而丧失信心，而怀疑自己的数学能力。何以言之？原来，“极限”这个概念有其漫长的历史。在古希腊，数学家人人皆患有“无穷恐惧症”，“极限”不啻洪水猛兽，

孰敢直面？于是乎，小心翼翼，拐弯抹角，退避三舍，无奈之下，发明了麻烦得令人难以容忍的“穷竭法”。17世纪，聪明绝世如牛顿和莱布尼茨者，因为没有建立严格的极限概念而使得他们所发明的微积分漏洞百出、摇摇欲坠、惨遭攻击。两位天才之后，尽管有不少数学家试图给出严密的极限定义，但直到19世纪，今天的 $\varepsilon - \delta$ 定义才由一位大器晚成的德国数学家魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass, 1815~1897）给出。极限概念的完善和严密化，历史上的数学家花了两千余年，难道作为微积分老师的我，竟会愚蠢、残暴到让大家在一星期、一个月、一学期、一个学年里豁然开朗、了然于心、运用自如吗？历史是一面镜子。M·克莱因云：“历史上数学家所遇到的困难正是今天的学生也会遇到的学习障碍。”这样说吧：四十年后，当你功成名就、荣休家中、回首当年、灵光闪现、终于对 $\varepsilon - \delta$ 大彻大悟时，你已经完全对得起我老人家了。

故不必为两个希腊字母而失眠，不必为那个德国佬的定义而烦恼，纵然与它形同陌路，纵然对它徒叹奈何，明天，地球照样转，太阳照样从东方升起，华师大照样通过教育部本科教学工作评估，而你，照样拥有如歌的岁月、似锦的前程。事实上，期中考试应该已经能够打消诸位的忧虑，缓解诸位的痛苦了。

**疑难之三：**令人匪夷所思者，一个显然正确的结论，比如 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$ 之类，竟然还要证明，用 $x = 2$ 直接代入不就OK了？郁闷啊！

这是一个普遍得像食堂里的青菜一样、但又算得上十分高级的错误。首先请大家回顾一下函数在一点处连续的定义，当一个函数在某一点连续时，自然，极限值等于函数值，也就是像你所说的，“直接代入即可”。但对于那些不连续的函数，情形又如何？譬如，要求

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(e^{x-2} - 1)}{x - 2}$ ，虽然你的直截了当、干脆利落的处事风格令人顿生后生可畏之印象，但结

果又如何呢？ $\frac{0}{0}$ ，这个虚无缥缈的结果，曾经是牛顿他老人家心中永远的痛，是年轻时期微积分身上的硬伤，是贝克莱（G. Berkeley, 1685~1753）大主教攻击微积分的唯一理由，是无数数学家痛苦和迷茫的渊藪。

看来微积分早期历史上，数学家无不犯“直接代入”之错误，而你只不过重蹈覆辙，再一次经历前人遭遇过的微积分之认知障碍而已。是故，你的错误无可厚非，你的质疑情有可原，你的困惑是人类认知的必经阶段，就像每一个人在成长过程中都得掉一次门牙一样；而你的郁闷——自然纯属多余了。

一个函数在一点有极限，与它在这一点有定义，两者之间到底有怎样的关系？这正是

问题的关键所在。现在大家一定不会怀疑这样的事实：即使一个函数在一点存在极限，这个函数在这一点依然可以没有定义，如函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  在  $x=0$  处；反过来，即使一个

函数在一点有定义，这个函数在这一点依然可以没有极限，如函数  $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in Q) \\ 0 & (x \in \overline{Q}) \end{cases}$  在

任何一点处。可见，函数在某一点的极限与函数在该点的值是两个完全不同的概念。由于书本上的例题和练习里给出的都是简单的连续函数，极限值和函数值碰巧相等，大家便雾里看花、以偏概全，误以为世界上一切函数，其极限值和函数值都是一回事，从而对诸如  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$  这样的证明题心存芥蒂、嗤之以鼻。

**疑难之四：**一套一套又一套，两套三套四五套，六套七套八九套，题海战术有实效。中学老师惯用此伎俩，而大学老师根本不来这一套。于是乎，到了大学，手感骤然变差，思路找不着家，明明上课听懂，一看题目还傻。是否应该有一本配套练习供训练之用？应该有多大的训练量，方可确保考试无忧？

这是很多同学的迷茫所在。期中考试已经让大家明白：若仅仅满足于通过考试，恐怕根本不需要重操旧业，再入题海。因为我们有活页作业、课本练习、课堂笔记，练习量已初具规模，足以应付考试。但学习高等数学并不仅仅为了拿到学分，它还是后面专业课的基础，也是考研的重要科目。故高等数学之成败优劣，实关乎后续学习、关乎前程大计。况很多同学立有鸿鹄之志，岂能以 60 分与 5 学分为其最终目标耶？奖学金、优秀毕业生荣誉、高薪单位、硕士学位、国外名校……均在招手示意。我以为，鉴于研究生入学考试依然没有摆脱应试教育之樊篱，鉴于未来用人单位之斤斤计较于名次，鉴于奖学金评定以分数论英雄，鉴于……优秀的高数成绩乃是一种资本，我们无法否定其重要战略意义。是故，若为远大前程计，诸位当奋力提高自己对高数成绩之定位。如此，尽管我不提倡题海大战，但一定的习题训练依然是十分必要的。信不信由你，已故著名数学家苏步青先生年轻时做过六千道微积分题！而在国内高校数学系的教师中，学生时代没做过吉米多维奇《数学分析习题集》的一定为数不多。不妨买一本质量好一点的高数解题用书，这类书多如牛毛，尽量选名校出版的，如同济大学的。一本足矣，毕竟大家日后不做数学家。

除了以上疑难，不少同学对高数的教学提出了一些很好的意见或建议，如多介绍解题思路、对课本内容做适当拓展、选择书后练习中之重点难点给予讲授等等。我在未来的教学中会有适度的体现。

从数学日记中可以明显感觉到，初来乍到，不少同学不适应大学学习生活，彷徨、苦

闷、无所适从。怎样获取优异成绩？今年夏天，来自哈尔滨市的中国学生王沛在新加坡南洋理工大学毕业典礼上荣获新加坡政府颁发给大学应届毕业生的最高奖项——“李光耀金牌奖”和南洋理工大学颁发的“全优毕业生金牌奖”。王沛在博客日记中如是说：“我不比别人聪明，但我知道学习要下苦功夫。”天道酬勤，这是在任何时候、任何地方，对任何专业的任何学生都是普遍成立的。事实雄辩地证明：纵然你有阿基米德的天才、牛顿的禀赋和高斯的智慧，如果只是以此为炫耀之资本而将高数功课束之高阁，那么，等待你的依然是失败。那将是一种无法挽回的、令人扼腕而叹的失败，是你美丽人生之幸福函数的不可导点。

最后谈谈个别同学所郑重提出之严峻问题——高数之学习是否导致大学生寿命单调递减。目前尚无统计数据支持“递减”说，此说不过杞人忧天、无稽之谈而已，无异于说“多喝牛奶会减少寿命”、“古巴甜酒越贵、美国牧师的薪水越高”。偏有若干没有主见、人云亦云、捕风捉影者信了，有诗为证：

生命诚可贵，高数无所谓。若能考六十，天天抱头睡。

试问：你在华师大睡四年懒觉就能延年益寿了？别恶心了。学习本应该是令人充实的，数学思维本应该是令人舒畅的，完成一道艰难的中值定理证明题、求出一道诡异的不定积分题本应该是令人快乐的。尽管部分同学对于数学持有消极的情感，尽管对一门学科的好恶一如人们对臭豆腐的好恶一样自然而然，但作为一名数学教师，我的心中依隐藏着一个理想（拟或幻想？），即：高水准的高数教学应该能使高数的学习一如乡间旅行一般，一路风光，一路欣赏：

一去二三里，烟村四五家，亭台六七座，八九十支花。

在美国著名数学家斯特洛伊克（D. J. Struik, 1894~2000）百岁华诞之际，在一份礼物的外壳上，写着如下公式：

$$M + M + M = 100$$

第一个 M 代表数学（Mathematics），第二个 M 代表婚姻（Marriage），第三个 M 代表马克思主义（Marxism）。数学思维带来的精神愉悦构成了斯特洛伊克长寿的三大因素之一。尽管诸位不是数学家，但数学思维的愉悦是人人可以享受的。

退一万步说，即使数学思维带给你痛苦，但你总可以体验通过考试带给你的满足感；即使连这种满足感也荡然无存，我们也仍有理由相信，短短一年的痛苦不过是你生命无穷数列的前几项，能对整个数列的敛散性产生什么影响呢？

汪晓勤 2006 年 11 月草于华师大