上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2014 年第 3 卷第 6 期

卡尔·弗里德里希·高斯

（C.F.Gauss, 1777-1855）

目 录

Content

刊首语

本期封面人物是德国著名数学家高斯。

1777 年 4 月 30 日高斯生于德国布伦兹维克，逝世于 1855 年 2 月 23 日。作为近现代数学的奠基者，高斯在纯粹数学、应用数学的各个领域，在物理学、天文学等许多学科的研究中，都取得了一系列丰硕的成果。他的成就、思想及方法，对直到今天的数学发展仍具有重要的意义。

1796 年，高斯解决了 17 边形的尺规作图问题，为伽罗华理论的建立打下了坚实的基础。当年他还证明了数论中重要的二次互反律，并由此相继引出了双二次互反律和三次互反律，进而又发展出复整数（高斯整数）和复整数数论。他在数论方面开创了同余式理论、二次互反律和代数数论的研究，因而开辟了数论史上的新纪元。1801 年出版的《算术研究》是高斯数论方面的代表著作，标志着数论研究新时代的开始。

1799 年，高斯在其博士论文中给出了代数基本定理的第一个证明，这对于方程论的研究，乃至整个数学的研究方法都具有不同寻常的意义。在博士论文以及其它一些论文中，高斯引入了复数的几何表示，引进了有关复变函数的一些基本概念，并得到了复变函数的不少重要结论，为复数被人们接受、复变函数理论的建立奠定了基础。

在微分方程方面，高斯对位势方程进行了探讨，并于 1839 年完成了《与距离平方成反比而作用的吸引力和排斥力的普遍定理》一文。1812 年，他提出了超几何函数，进而开创了特殊函数的研究。在分析领域，高斯仔细研究了超几何级数等一系列级数的收敛性问题，为 19 世纪的分析严密化开了先河。

高斯开辟了许多新的数学领域，从最抽象的代数数论到内蕴几何学，都留下了他的足迹。从研究风格、方法乃至所取得的具体成就方面，他都是 18-19 世纪之交的中坚人物。如果我们把 18 世纪的数学家想象为一系列的高山峻岭，那么最后一个令人肃然起敬的巅峰就是高斯；如果把 19 世纪的数学家想象为一条条江河，那么其源头就是高斯。

高斯的数学才华、对数学的热爱以及深刻的数学思想，都值得我们学习。

教材研究

美国百年几何教材中的棱柱定义

洪燕君，汪晓勤

（ 华东师范大学数学系，上海 200241）

摘　要：1829-1929 年出版的 70 种美国中学几何教材先后给出了棱柱的六种定义，即欧几里得的定义、改进的欧氏定义、基于棱锥的定义、基于棱的定义、基于棱柱面的定义和基于棱柱空间的定义。尽管欧几里得的定义存在缺陷，但由于《几何原本》的深刻影响，该定义在很长时间里一直为教材所广泛采用；直到 19 世纪末，才出现多种定义并存的现象，最终，棱柱面定义和改进的欧氏定义逐渐取代了旧定义。棱柱定义的百年演变反映了人们对棱柱概念由直观到严谨的认识过程，为今日教材编写和课堂教学提供了一面镜子。

关键词：几何教材；棱柱；欧几里得定义；棱柱面定义

棱柱是高中立体几何的重要概念之一，现行各版高中数学教材所给出的棱柱定义互有不同。人教 A 版、沪教版、北师大版和湘教版给出了静态的定义，除了两个底面平行、全等外，关注棱柱侧面的属性；苏教版则给出动态定义，关注棱柱的形成过程。

教学实践表明，学生很容易形成“两个底面平行，侧面都是平行四边形的多面体叫棱柱”这一错误认识。那么，棱柱定义在历史上经历了怎样的演变过程？学生的错误认识是否具有历史相似性？棱柱定义的历史对我们有何启示？在人教版高中数学教材即将修订之际，我们希望对上述问题作出回答。为此，我们选取 1829−1929 年间出版的 70 种美国几何教材进行考察。对于同一作者再版的教材，若内容无变化，则选取最早的版本；但若内容有变化，则将其视为不同教材。

1 1829 年以前的棱柱定义

在历史上，最早给出棱柱定义的是古希腊数学家是欧几里得（公元前 3 世纪）。他在《几何原本》第 11 卷中定义棱柱如下：“一个棱柱是一个立体图形，它是由一些平面构成的，其中有两个面是相对的、相等的、相似的且平行的，其它各面均为平行四边形”[1]。虽然

这个静态定义比较直观，但存在缺陷，因为存在满足定义条件、但并非棱柱的多面体。

18 世纪，法国数学家瓦里格农（P. Varignon, 1654-1722）在其《数学基础》（1731）中摒弃了欧几里得的定义而采用了新的动态定义：“若平面直线形（如 *ABF*）按照平行于自身的方向从点 *A* 移动到点 *C*，则该直线形画出一个界于两个相似且全等的图形 *ECD* 和 *ABF* 以及所有以图形 *ABF* 的边为一边的平行四边形之间的立体 CB。则该立体称为棱柱”[2]，如图 1 所示。

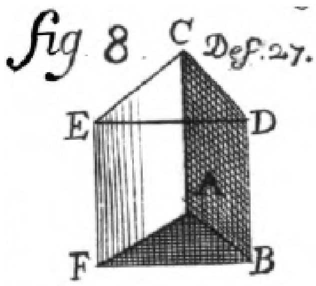


图 1 瓦里格农的棱柱动态定义

之后，克莱罗（A. Clairaut, 1713-1765）在其《几何基础》（1741）中又回到欧氏定义上来：“两个底面为全等多边形，其余各个面均为平行四边形的立体”[3]。而勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）在《几何基础》（1794）中则对欧氏定义稍加改动：“棱柱是一个由若干平行四边形所围、两端为全等且平行的多边形的立体”[4]。勒让德的《几何基础》于 1819 年由哈佛大学数学教授法拉（J. Farrar, 1779-1853）译成英文，成为当时的美国大学几何教材（在美国，直到 1821 年才出现今天意义上的中学）。1829 年，英国数学家普雷菲尔（J. Playfair, 1748-1819）的英文版《几何原本》删节本在美国出版，书中完全照搬了欧氏定义。[5]

在棱柱定义上，除了瓦里格农的教材外，1829 年以前的绝大多数教材都打上了《几何原本》的烙印，也对美国早期教科书产生了深刻的影响。

2 百年几何教材中的棱柱定义

70 种几何教材共计给出了 71 种棱柱定义，其中 Baker(1893)的教材给出了两种定义。根据详尽的统计和分析，这些定义可分成“欧几里得的定义”、“改进的欧氏定义”、 “基于棱锥的定义”、“基于棱的定义”、“基于棱柱面的定义”和“基于棱柱空间的定义”六类。没有出现瓦里格农的动态定义。

2.1 欧氏定义

我们将用底面和侧面来描述的不完善的静态棱柱定义归为“欧氏定义”，这类定义实质上与《几何原本》中的定义并无二致，其中，侧面只有“平行四边形”一个属性，而底面的属性互有不同，见表 1。

表 1 各种欧氏定义所涉及的底面属性

类别	底面的属性	教材
1	相对、全等、相似、平行	Perkins (1850)；Sharpless (1879)
2	相对、全等、平行	Hayward (1829)；Robbins (1907)；Robbins (1916)；
3	全等、平行、对应角相等	Robinson (1850)
4	全等、平行、对应边平行	Robinson (1868)；Wells (1886)；Milne (1899)；Wells (1908)
5	全等、平行	Walker (1829)；Peirce (1837)；Loomis (1849)；Perkins (1855)；Benjamin (1859)；Evans (1862)；Tappan (1864)；Wentworth (1880)；Wentworth (1881)；Newcomb (1884)；Bayma (1885)；Halsted (1885)；Tappan (1885)；Newcomb (1889)；Bowser (1890)；Velzer & Shutts (1894)；Hull (1897)；Gore (1899)；Wentworth（1899）；Shutts (1905)；Failor (1906)；Schultze & Sevenoak (1908)；Keller (1908)；Wentworth & Smith (1911)；Ford & Ammerman (1913)；Bruce & Cody (1914)；Williams & Williams (1916)；Newell & Harper (1918)
6	全等、对应边平行	Macnie (1895)
7	对应边相等且平行	Stewart (1891)
8	全等	Davies (1841)
9	平行	Bush & Clarke (1905)

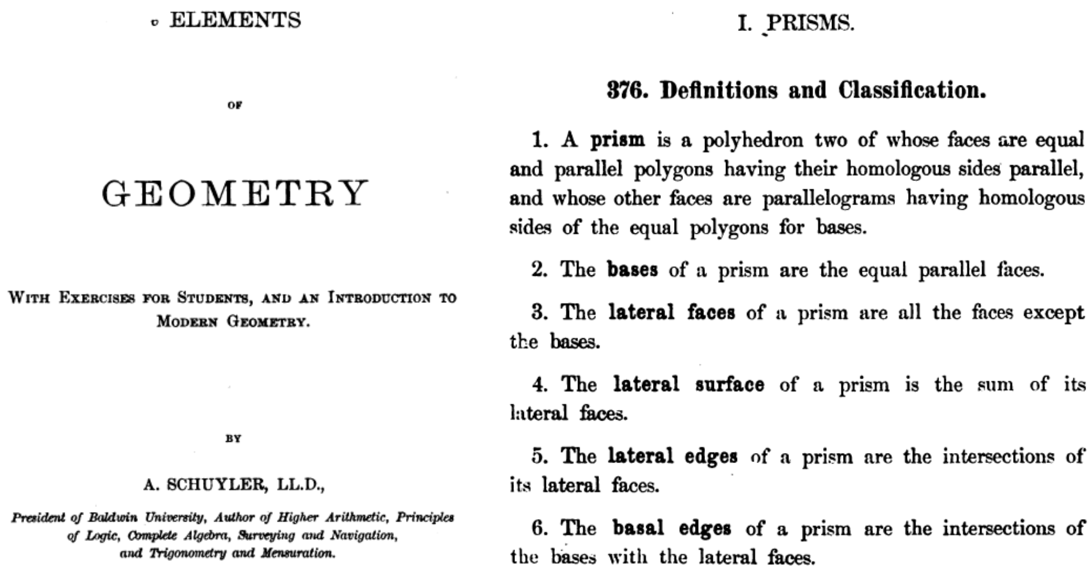
70 种教材中，只有两种教材照搬了欧几里得的四个属性，见类型 1；其他 68 种教材都摒弃了“相似”这一多余属性。在这 68 种教材中，只有三种明确保留了“相对”这一属性，

见类型 2；其他教材都默认“相对”这一属性而不再提及，见类型 3-9。

在侧面为平行四边形且具有平行公共边的条件下，对于底面属性的 9 种不同刻画本质上都是一致的。但在“侧面均平行四边形”的条件下，无论哪种刻画，都未能排除满足条件的反例。

2.2 改进的欧氏定义

“改进的欧氏定义”在欧氏定义的基础上，增加了平行四边形侧面的其他属性。所增加的属性有两类，一是平行四边形侧面有一组对边为两个底面的对应边。1876 年，舒伊勒（A. Schuyler, 1828-1913）最早给出这类定义：“棱柱是一个多面体，它有两个面为全等、平行的多边形且对应边平行，其余各面均为以全等多边形对应边为底的平行四边形。”（Schuyler, 1876，图 2）。


ELEMENTS

OF

GEOMETRY

WITH EXERCISES FOR STUDENTS, AND AN INTRODUCTION TO MODERN GEOMETRY.

BY

A. SCHUYLER, LL.D.,

President of Baldwin University, Author of Higher Arithmetic, Principles of Logic, Complete Algebra, Surveying and Navigation, and Trigonometry and Mensuration.

I. PRISMS.

376. Definitions and Classification.

1. A **prism** is a polyhedron two of whose faces are equal and parallel polygons having their homologous sides parallel, and whose other faces are parallelograms having homologous sides of the equal polygons for bases.

2. The **bases** of a prism are the equal parallel faces.

3. The **lateral faces** of a prism are all the faces except the bases.

4. The **lateral surface** of a prism is the sum of its lateral faces.

5. The **lateral edges** of a prism are the intersections of its lateral faces.

6. The **basal edges** of a prism are the intersections of the bases with the lateral faces.

图 2 舒伊勒《几何基础》书影

在 Schuyler 之后，Dodd & Chace (1898)、Sanders (1903)和 Stone & Millis (1916)相继也给出了改进的欧氏定义。其中，Stone & Millis (1916)的定义是：“棱柱是这样的多面体，它的两个面为平行平面上的全等多边形，其余各面均为平行四边形、且有一组对边分别为这两个全等多边形的对应边”，书中首次给出欧氏定义的反例，如图 3 所示。

改进的欧氏定义所增加的第二类侧面属性是“交线平行”，如 Baker（1893）给出的定义是：“有两个相对的面为平行多边形，其余各面相交于平行线的多面体，称为棱柱”。Hawkes，Luby & Touton (1922)的定义是：“棱柱是一个多面体，有两个面位于两个平行平面上，其余各面均为平行四边形，且其交线平行”，这个定义与今日我国人教版和北师大版高

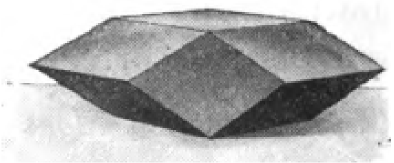


图 3 Stone & Millis 的欧氏定义反例

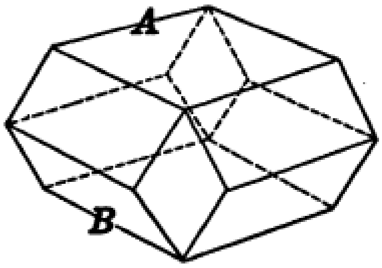


图 4 Hawkes 等的欧氏定义反例

中数学教材中的定义一致。书中也给出了欧氏定义的反例，如图 4 所示。Thompson(1896)、Wells & Hart (1916)、Hawkes (1922)和 Nyberg(1929)也给出了同类定义。

2.3 基于棱锥的定义

只有两种教材将棱柱视为特殊的棱锥。Dupuis(1893)给出的定义是：“当棱锥顶点沿垂直于底面的方向移动到无限远处，侧棱变成平行线，所得图形的平截体成了具有全等底面的封闭图形，称为棱柱”。Baker(1893)给出的另一个定义是：“棱柱是一种特殊的棱锥，其顶点位于无限远处、侧棱相互平行”。

虽然，将“棱柱”视为特殊的棱锥，不易为中学生所接受，但将两类几何体统一起来，对启发学生的思维、揭示不同数学对象之间的联系却是十分有意义的。这与将抛物线视为特殊的椭圆（有一个焦点位于无穷远处）是类似的。

2.4 基于棱的定义

教材 Bartol(1893)仅根据棱的特点来定义棱柱：“除了两个平行面截其余各面所得的棱以外，其他各棱都互相平行的多面体称为棱柱”，这个定义是正确的，且有所创新。但根据欧拉公式，棱数等于面数与顶点数之和减去 2，一个多面体的棱数一般比面数和顶点数多，故仅从棱的角度来看一个多面体，似乎增加了理解的难度。

2.5 基于棱柱面的定义

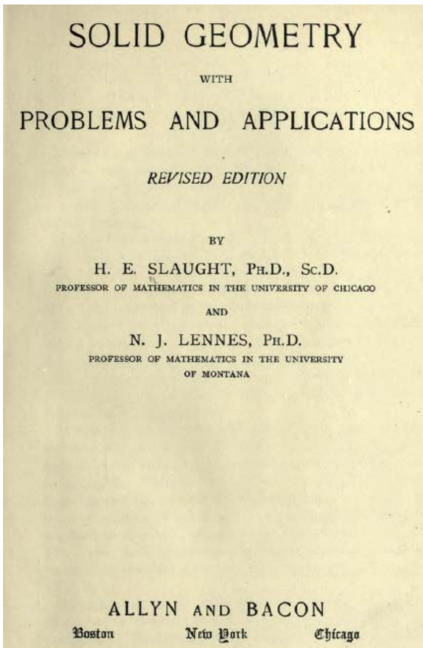
改进的欧氏定义需要罗列底面和侧面的各种属性，表述起来不简洁。因此，一些教材编写者开始探讨新的更简洁的定义，于是，“基于棱柱面的定义”应运而生。这类定义又可分成四种情形。

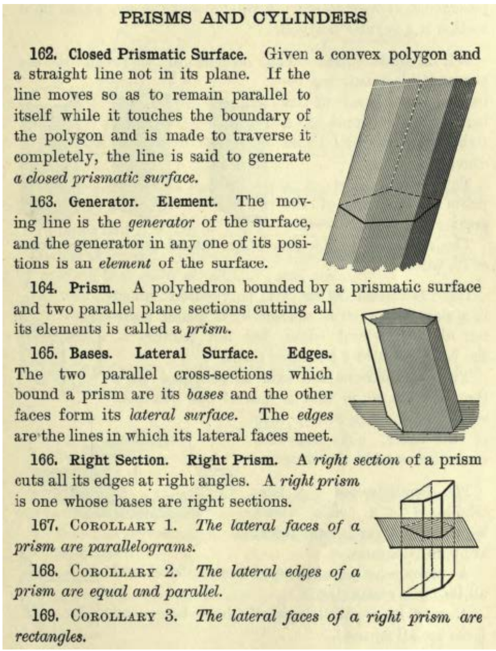
第一种情形是采用一般棱柱面来定义棱柱。如：Keigwin（1897）给出的定义是：“棱柱

是由棱柱面与两个平行截面所围成的多面体”，这是最早的“基于棱柱面的定义”。作者将棱柱面定义为“由相交于平行线的平面所构成的图形”，并没有考虑棱柱面的封闭性，而用两个平行平面去截不封闭的棱柱面，并不能得到棱柱，因而相应的棱柱定义不够严谨。Phillips & Fisher（1898）和 Hart & Feldman（1912）也采用了类似的定义，前者将棱柱面定义为“由依次过一组平行线中的两条平行线的平面构成的面”，后者将棱柱面定义为“始终与一条固定折线相交，且保持与一条固定直线（与折线不共面）平行的动直线所形成的面”，两者都没有考虑棱柱面的封闭性。我们看到，棱柱面的定义也经历了从静态到动态的过程。

第二种情形是不定义棱柱面，而直接用“相交于平行线的一组平面”来代替棱柱面。如 Durell（1909）、Shutts（1912）和 Durell & Arnold（1917）都将棱柱定义为“由两个平行平面和一组相交于平行线的平面所围成的多面体”。这种定义与第一种情形等价。

第三种情形是采用封闭棱柱面来定义棱柱。Slaught & Lennes（1911）先定义“封闭棱柱面”:“给定一个凸多边形和一条与该多边形不共面的直线。若直线沿多边形运动一周，直线始终与自身平行且与多边形的边界相交，则称直线所生成的面为封闭棱柱面”，再定义棱柱:“封闭棱柱面界于两个平行横截面之间的部分，连同两个横截面，称为棱柱”。这个定义关注棱柱的表面，无法定义棱柱体积，因而有些瑕疵。事实上，该教材的修订版（Slaught & Lennes，1919，图 5）对棱柱定义进行了明显的改进:“由棱柱面和两个与所有母线都相交的平行横截面所围成的多面体称为棱柱。”


SOLID GEOMETRY
WITH
PROBLEMS AND APPLICATIONS
REVISED EDITION
BY
H. E. SLAUGHT, PH.D., SC.D.
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CHICAGO
AND
N. J. LENNES, PH.D.
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF MONTANA
ALLYN AND BACON
Boston New York Chicago


PRISMS AND CYLINDERS

162. Closed Prismatic Surface. Given a convex polygon and a straight line not in its plane. If the line moves so as to remain parallel to itself while it touches the boundary of the polygon and is made to traverse it completely, the line is said to generate *a closed prismatic surface.*

163. Generator. Element. The moving line is the *generator* of the surface, and the generator in any one of its positions is an *element* of the surface.

164. Prism. A polyhedron bounded by a prismatic surface and two parallel plane sections cutting all its elements is called a *prism.*

165. Bases. Lateral Surface. Edges. The two parallel cross-sections which bound a prism are its *bases* and the other faces form its *lateral surface.* The *edges* are the lines in which its lateral faces meet.

166. Right Section. Right Prism. A *right section* of a prism cuts all its edges at right angles. A *right prism* is one whose bases are right sections.

167. COROLLARY 1. *The lateral faces of a prism are parallelograms.*

168. COROLLARY 2. *The lateral edges of a prism are equal and parallel.*

169. COROLLARY 3. *The lateral faces of a right prism are rectangles.*

图 5 Slaught & Lennes《立体几何》书影

Betz & Webb（1916）、Palmer & Taylor（1918）和 Sykes & Comstock （1922）都给出

了类似的定义：“一个封闭棱柱面被两个平行平面所截，所形成的立体称为棱柱。”

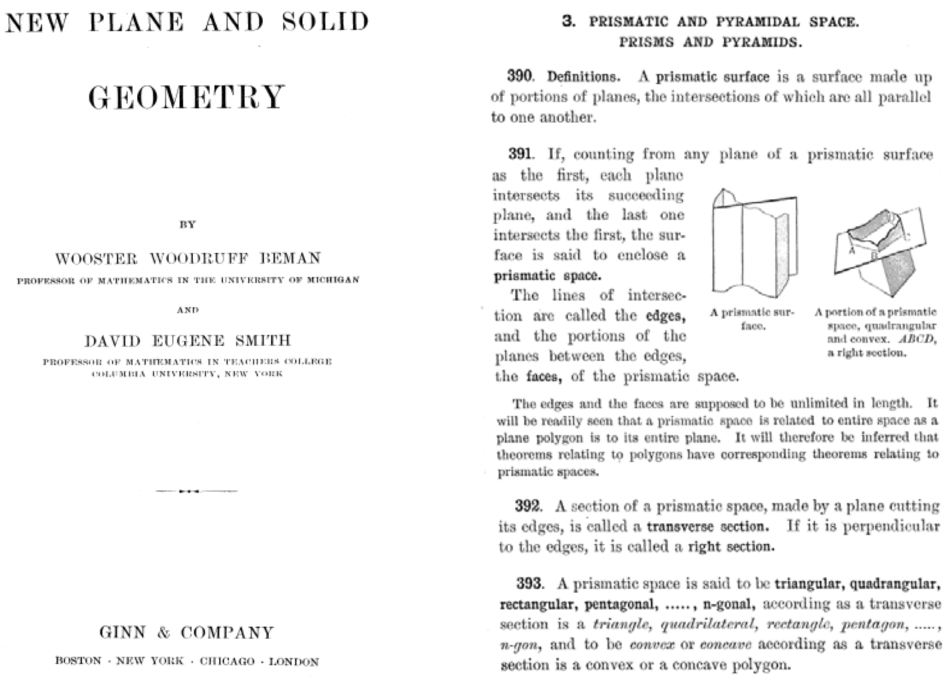
第四种情形是缩小棱柱面概念的外延，将其等同于封闭棱柱面。Schultze & Sevenoak（1922）将棱柱面定义为：“始终与给定多边形的边界相交、且平行于不在多边形所在平面上的固定直线的一条动直线所形成的面称为棱柱面。”相应地，将棱柱定义为“由棱柱面与两个平行平面所围成的多面体”。

引入“封闭棱柱面”概念，或将棱柱面概念特殊化（准线为多边形），都完善了基于一般棱柱面的棱柱定义。

2.6 基于棱柱空间的定义

Edwards（1895）最早将棱柱定义为“任意多个相交于平行线的平面与两个平行平面所围的部分空间”，但并没有给出“棱柱空间”概念。

Beman & Smith（1900）最早给出棱柱空间的定义。他们先定义棱柱面：“由相交于平行线的部分平面所构成的面称为棱柱面”，再定义棱柱空间：“若从棱柱面的某一平面开始，每一个平面与下一个平面相交，最后一个平面与第一个平面相交，则称棱柱面围成一个棱柱空间。”（图 6）最后再定义棱柱：“棱柱空间界于两个平行横截面之间的部分称为棱柱。”


NEW PLANE AND SOLID

GEOMETRY

BY

WOOSTER WOODRUFF BEMAN

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF MICHIGAN

AND

DAVID EUGENE SMITH

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN TEACHERS COLLEGE COLUMBIA UNIVERSITY, NEW YORK

GINN & COMPANY

BOSTON · NEW YORK · CHICAGO · LONDON

3. PRISMATIC AND PYRAMIDAL SPACE.
PRISMS AND PYRAMIDS.

390. **Definitions.** A **prismatic surface** is a surface made up of portions of planes, the intersections of which are all parallel to one another.

391. If, counting from any plane of a prismatic surface as the first, each plane intersects its succeeding plane, and the last one intersects the first, the surface is said to enclose a **prismatic space.**

The lines of intersection are called the **edges,** and the portions of the planes between the edges, the **faces,** of the prismatic space.

A prismatic surface.

A portion of a prismatic space, quadrangular and convex. *ABCD*, a right section.

The edges and the faces are supposed to be unlimited in length. It will be readily seen that a prismatic space is related to entire space as a plane polygon is to its entire plane. It will therefore be inferred that theorems relating to polygons have corresponding theorems relating to prismatic spaces.

392. A section of a prismatic space, made by a plane cutting its edges, is called a **transverse section.** If it is perpendicular to the edges, it is called a **right section.**

393. A prismatic space is said to be **triangular, quadrangular, rectangular, pentagonal, ..., n-gonal,** according as a transverse section is a *triangle, quadrilateral, rectangle, pentagon, ...*, *n-gon*, and to be *convex* or *concave* according as a transverse section is a convex or a concave polygon.

图 6 Beman & Smith《新平面与立体几何》书影

Smith(1913)和 Richardson(1914)沿用了这个定义。但后者对棱柱面和空间给出了更清晰的数学表述：

“n 个平面 m_1，m_2，…m_n（其中任何三个不共线）依次相交于平行线，则这 n 个平面位于平行线之间的各部分构成棱柱面。若最后一个平面 m_n 又与第一个平面 m_1 相交，则称棱柱面围成了一个棱柱空间。”

3 棱柱定义的演变

我们可以用时间轴来表示棱柱定义的历史发展进程，如图 4 所示。

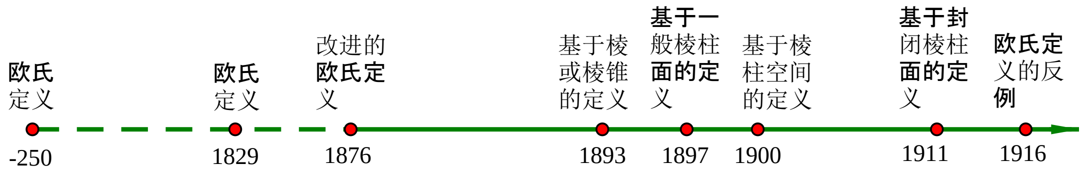


图 4 棱柱定义的演进

从图中可见，从欧几里得到舒伊勒，棱柱的静态定义从不完善到完善，走过了两千一百多年的漫长岁月；而从欧氏完善定义的诞生，到该定义的反例的出现，匆匆又过了四十年！由于《几何原本》的影响、欧几里得的权威性以及欧氏定义的直观性，后世教材编写者采取了全盘照搬的方式，丝毫不曾怀疑棱柱定义存在缺陷，因而使得该定义谬种流传，甚至在出版于 1948 年的美国几何教材中，我们仍能看到欧氏定义。在基于一般棱柱面的定义和基于封闭棱柱面的定义之间，也间隔了整整 14 年。

图 5 给出了六种定义的频数分布情况，从中可见，欧氏定义出现的频数遥遥领先，而基于棱柱面的定义位居第二。

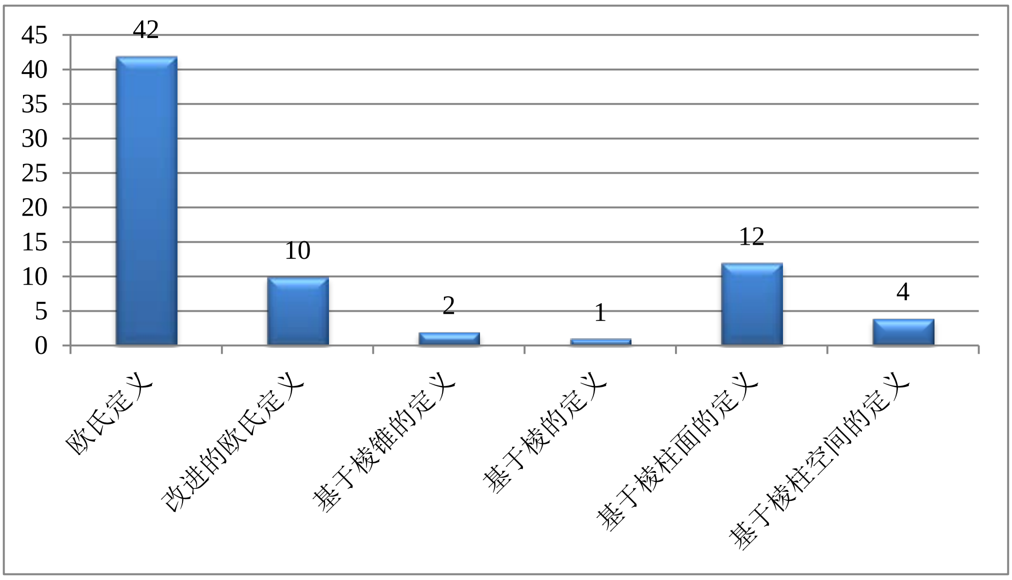


图 5 各类定义的总体频数分布

我们将一百年时间分成 5 段，各类定义在各段时间的分布如图 6。从图 6 可见，前 60 年，欧氏定义一统天下。到了后 40 年，才出现多元化的局面，直到最后 20 年，欧氏定义一枝独秀的局面才发生了彻底改变。

改进的欧氏棱柱定义于 1876 年诞生之后，完善的定义与不完善的定义依然交替出现，这一方面说明，由于舒伊勒没有给出欧氏定义的反例，导致后来的教材编写者未能意识到欧氏定义与改进的欧氏定义之间的区别；另一方面也说明，要动摇欧氏的权威、改变人们心中根深蒂固的概念意象是多么地艰难。无疑，棱柱定义的完善过程中，能否找到欧氏定义的反例至关重要。1916 年，Stone 和 Millis 在其教材中给出反例之后，欧氏定义的权威被彻底颠覆，于是，我们才看到了棱柱面定义后来居上的局面。随着棱柱面定义的出现，棱柱的正确定义在数量和形式上都逐步显呈上升态势。

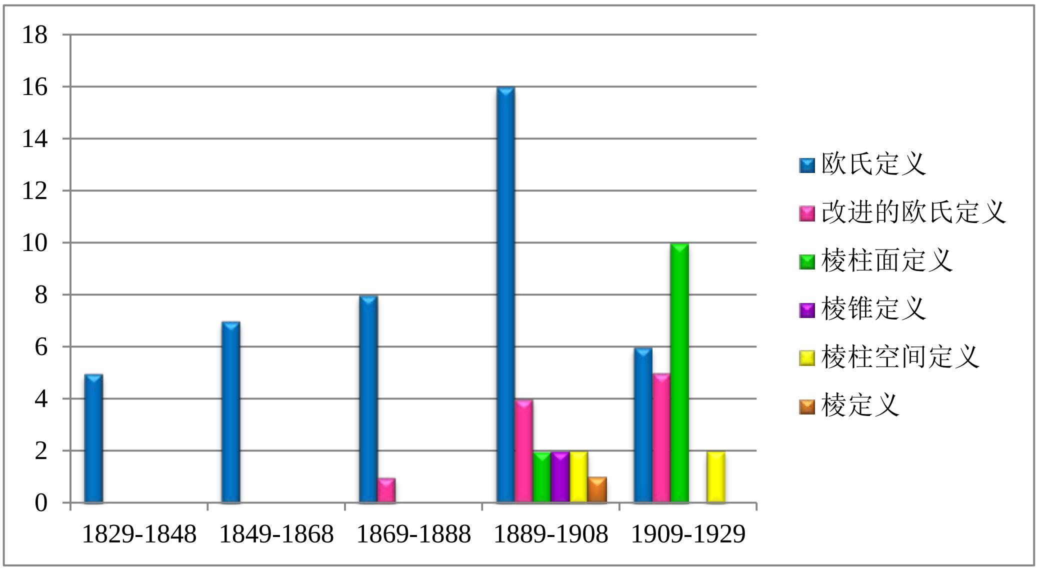


图 6 各类定义在不同时间段的分布情况

4 结论与教学启示

跨越百年的 70 种美国早期几何教材清晰地展现了棱柱定义的历史发展脉络。在半个多世纪里，欧几里得的不完善定义占有绝对统治地位，《几何原本》的权威性以及人的直觉导致新定义的姗姗来迟。而在改进的欧氏定义诞生之初，并没有伴随旧定义的反例的出现，人们因此忽视新旧定义之间的差异，使得欧氏定义在相当长的时间内依然扮演主角。只有当反例出现之后，人们才逐渐摒弃欧氏定义，棱柱定义趋于多元化，最终，基于棱柱面的定义占据上风。而基于棱柱面的定义又经历了从一般棱柱面到封闭棱柱面的过程，最终才臻于完善。此外，从棱柱面定义又衍生出棱柱空间的定义，这种定义同样经历从不完善到完善的过程。

棱柱定义的历史为今日课堂教学和教材编写带来了诸多启示。

（1）对教材编写者的启示

18 世纪，瓦里格农已经给出了正确的动态定义。但由于瓦氏的《数学基础》没有传入美国，因而在我们所考察的美国百年教材中，没有一种教材采用这种定义，棱柱的错误定义不断被重复。因此，教材编写者首先需要有国际视野，广泛阅读、深入研究国外同类教材，扬长避短，为自己的教材服务。其次，他们也需要有批判的精神，不能盲目地迷信权威、全盘照搬。再次，教材编写者也需要有历史感。棱柱定义的历史表明，静态定义绵延不绝而动态定义则无人问津，基于棱柱面的定义后来居上，而基于棱或棱锥的定义则昙花一现。据此可以做出最佳选择。

（2）对课堂教学的启示

首先，我们可以借鉴棱柱定义从不完善到完善的演变过程，运用重构历史的方式来设计棱柱概念的教学。让学生从实物中归纳棱柱的共同特征，在此基础上给棱柱下定义；通过反例来修正、完善定义，让学生经历棱柱概念的形成过程 ，加深让学生对棱柱概念的理解。同时，运用附加历史的方式，在课堂上向学生介绍欧氏定义，让他们了解历史上的数学家也犯过错误，从而正确认识数学活动的本质，树立数学学习的自信心。

其次，可以将棱柱的历史加工为教学素材。在教学中，可以通过复制或顺应的方式，将改进的欧氏定义或其他定义在历史上的不同表述形式呈现给学生，让他们运用立体几何知识来辨析正误、论证异同，加速知识点的完备化进程。

参考文献

[1] 欧几里得. 几何原本(兰纪正, 朱恩宽译)[M]. 西安: 陕西科技出版社. 2003: 505-506.

[2] P. Varignon. *Elémens de Mathématique* [M]. Amsterdam: Francois Changuion, 1731: 83.

[3] A. *Clairaut. Elémens de Géometrie* [M]. Paris: Durand, 1741: 162-163.

[4] A. M. Legendre. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge, N. E.: The University Press, 1794: 123.

[5] J. Playfair. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. Walker, 1829:157.

[6] T. walker. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson & Lord, 1829: 58.

[7] J. Hayward. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829: 86.

[8] B. Peirce. *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: James Munroe & Company, 1837: 113.

[9] C. Davies. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841:126.

[10] E. Loomis. *Elements of Geometry and Conic Sections Geometry* [M]. New York: Harper & Brothers, 1849: 127.

[11] H. N. Robinson. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry* [M]. Cincinnati: Jacob Ernst, 1850: 118.

[12] G. R. Perkins. *Elements of Geometry* [M]. New York: D. Appleton & Company. 1850: 202.

[13] G. R. Perkins. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. Appleton & Company, 1855: 152.

[14] G. Benjamin. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Robert S. Davis & Company. 1859: 184.

[15] E. W. Evans. *Primary Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1862: 83.

[16] E. T. Tappan. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 226.

[17] H. N. Robinson. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry* [M]. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Company, 1868: 172.

[18] A. Schuyler. *Elements of Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1876.

[19] I. Sharpless. *The Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Philadelphia: Porter & Coates, 1879: 171.

[20] G. A. Wentworth. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1880: 286.

[21] G. A. Wentworth. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1881: 286.

[22] S. Newcomb. *Elements of Geometry* [M]. New York: Henr y Holt & Company, 1884:317.

[23] J. Bayma. *Elements of Geometry* [M]. San Francisco: A. Waldteufel, 1885: 86.

[24] G. B. Halsted. *The Elements of Geometry* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1885: 290.

[25] E. T. Tappan. *Elements of Geometry* [M]. New York: D. Appleton & Company. 1885: 189.

[26] W. Wells. *The Elements of Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886: 261.

[27] S. Newcomb. *Elements of Geometry* [M]. New York: Henry Holt & Company. 1889: 317.

[28] E. A. Bowser. *The Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. van Nostrand Company, 1890: 287.

[29] S. T. Stewart. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1891:

328.

[30] N. F. Dupuis. *Elements of Synthetic Solid Geometry* [M]. New York: Macmillan & Company, 1893: 54.

[31] W. C. Bartol. *The Elements of Solid Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell, and Sanborn, 1893: 17.

[32] A. L. Baker. *Elements of Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn and Company, 1893: 29-34.

[33] C. A. van Velzer & G. C. Shutts. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Atkinson, Mentzer & Grover, 1894: 288.

[34] G. C. Edwards. *Elements of Geometry* [M]. New York: Macmillan & Company, 1895: 210.

[35] J. Macnie. *Elements of Geometry* [M]. New York: American Book Company. 1895: 262.

[36] H. D. Thompson. *Elementary Solid Geometry and Mensuration Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1896: 76.

[37] H. W. Keigwin. *The Elements of Geometry* [M]. New York: Henry Holt & Company, 1897: 177.

[38] G. W. Hull. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: Butler, Sheldon & Company, 1897:270.

[39] A. W. Phillips, I. Fisher. *Elements of Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1898: 288.

[40] A. A. Dodd & B. T. Chace. *Plane and Solid Geometry* [M]. Kansas City: Hudson-Kimberly Publishing Company, 1898: 274.

[41] J. H. Gore. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: Longmans, Green and Company, 1899: 164.

[42] W. J. Milne. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1899:273.

[43] G. A. Wentworth, *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1899: 290.

[44] W. W. Beman & D. E. Smith. *New Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 291-292.

[45] A. Sanders. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1903: 285.

[46] W. N. Bush & J. B. Clarke. *The Elements of Geometry* [M]. New York: Silver, Burdett & Company, 1905: 266.

[47] G. C. Shutts. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Atkinson, Mentzer & Grover, 1905:

263.

[48] I. N. Failor. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: The Century Company, 1906: 304.

[49] E. R. Robbins. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1907: 292.

[50] A. Schultze & F. L. Sevenoak. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1908: 271.

[51] W. Wells. *New Solid Geometry* [M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1908: 209.

[52] S. S. Keller. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. van Nostrand Company, 1908: 152.

[53] F. Durell. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1909: 361.

[54] G. A. Wentworth & D. E. Smith, *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1911: 317.

[55] H. E. Slaught & N. J. Lennes. *Solid Geometry* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1911: 33.

[56] C. A. Hart & D. D. Feldman. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company. 1912: 345.

[57] G. C. Shutts. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Atkinson, Mentzer & Company, 1912: 271.

[58] W. B. Ford & C. Ammerman. *Solid Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 238.

[59] S. F. Richardson. *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1914: 60-61.

[60] W. H. Bruce & C. C. Cody. *Elements of Solid Geometry* [M]. Dallas: The Southern Publishing Company, 1914: 32.

[61] E. R. Robbins. *Robbins' New Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company. 1916: 314.

[62] W. Wells & W. W. Hart, *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1916: 348-349.

[63] J. H. Williams & K. P. Williams. *Solid Geometry* [M]. Chicago: Lyons & Carnahan, 1916: 296.

[64] W. Betz & H. E. Webb. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1916:376.

[65] J. C. Stone & J. F. Millis. *Solid Geometry* [M]. Chicago: B. H. Sanborn & Company, 1916:

322-324.

[66] F. Durell & E. E. Arnold. *Solid Geometry* [M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1917: 361.

[67] M. J. Newell & G. A. Harper. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Row, Peterson & Company, 1918: 280.

[68] C. I. Palmer & D. P. Taylor. *Solid Geometry* [M]. Chicago: Scott, Forsman & Company, 1918: 314-315.

[69] E. R. Smith. *Solid Geometry* [M] *Developed by the Syllabus Method*. New York: American Book Company, 1918: 280-283.

[70] H. E. Slaught & N. J. Lennes. *Solid Geometry* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1919:53.

[71] H. E. Hawkes, W. A. Luby & F. C. Touton. *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1922: 358-359.

[72] A. Schultze & F. L. Sevenoak. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1922: 341-342.

[73] M. Sykes & C. E. Comstock. *Solid Geometry* [M]. Chicago: Rank Mcnally & Company, 1922: 51.

[74] J. C. Stone & J. F. Millis. *Solid Geometry* [M]. Chicago: B. H. Sanborn & Company, 1925: 322-324.

[75] J. A. Nyberg. *Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1929: 329.

美国早期初等代数教材中的函数概念 *

关嘉欣 汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引言

德国数学家 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）曾将函数称为数学的“灵魂”[1]，并认为函数概念应该成为中学数学的“基石”[2]。20 世纪 60 年代，我国高中数学课程已经开始体现了 F·克莱因的上述思想，提倡“以函数为基”。然而，从历史上看，函数概念经历了十分漫长的演变过程。美国数学家和数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）在抨击新数运动时曾说：“从伽利略到狄利克雷，数学家一直绞尽脑汁去理解函数的概念，但现在却由定义域、值域和有序对来玩弄把戏。”[3]函数概念的历史对函数教学而言就是一面镜子。

历史上数学教材中的函数概念反映了当时人们对该概念的认识，因而是函数概念历史的一部分。本文针对这一主题，对 19 世纪末至 20 世纪 20 年代的 12 种美国初等代数教材[4-15]进行考察（教材的具体信息见表 1），试图回答以下问题：围绕“函数概念”这一主题，12 种教材呈现了哪些内容？与今天的教材有何异同？

表 1 12 种美国早期初等代数教材

编号	教材名称	编者	函数所在章	出版年份
1	代数基础	G. E. Fisher, I. J. Schwatt	变量与极限	1899
2	代数基础	W. W. Beman, D. E. Smith	初等代数函数	1900
3	初等代数	J. A. Gillet	因式分解	1901
4	大学初等代数	C. Smith, I. Stringham	极限与不定式	1904
5	初等代数	W. R. Marsh	比、比例与相关变量	1905
6	初等代数	H. E. Slaught, N. J. Lennes	变量与函数	1915
7	初等代数	G. W. Myers, G. E. Atwood	作函数的图像、用图像解一元方程	1916
8	初等代数	F. Cajori, L. R. Odell	比例、相关变量与函数	1916

*人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）、华东师大数学系国家理科人才培养基地“能力提高项目”子课题“数学文化与数学教育”系列论文之一。

9	初等代数	G.H.Hallett, R.F.Anderson	图像	1917
10	代数基础	A.　Schultze	函数与方程的图像	1918
11	初等代数	J.W.Hopkins,P.H. Underwood	一次方程	1924
12	初、中等代数	A.Schultze,W.E.Breckenridge	函数与方程的图像	1925

2 12 种教材中的函数概念

我们将 12 种教材中有关函数的内容分为“函数的引入”、“函数的定义”、“函数的分类”、“函数的性质”、“函数的图像”和“函数的应用”六个主题，图 1 给出了各主题的出现频数。

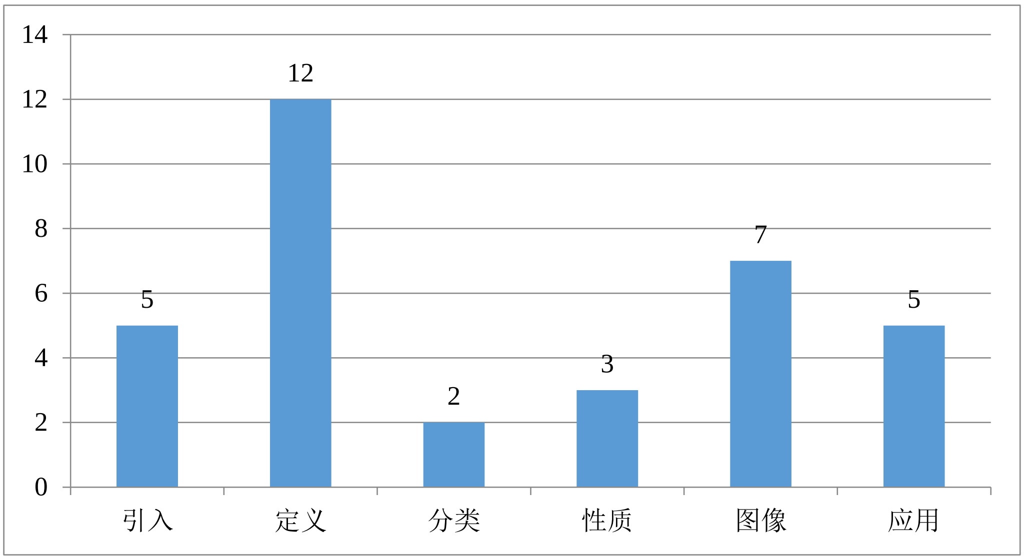


图 1　六个主题的频数统计

以下我们对各个主题分别作一考察。

2.1　函数概念的引入

在 12 种早期教材中，只有 5 种通过一些具体实例和情境来引入函数概念。引入方式主要有三类：一是通过一些生活实例或者物理公式来引入；二是利用方程来引入；三是通过一次函数图像来引入。

教材 1、7 和 9 采用第一类方式，所用情境有自由落体运动距离公式 $s=16t^2$ 和儿童体重与年龄之间的关系。这类引入方式与今天的教材类似，只是今天的教材会渗透函数的三种表示法：　解析式、图像和表格，而早期教材只用了解析式。

教材 11 采用了第二类方式。让学生用代入消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x-7y=1 & (1) \\ 4x+9y=1 & (2) \end{cases}$$

由方程(1)得 $x=\dfrac{7y+1}{3}$， 该式子中，x可表示成关于y的解析式，教材指出，类似于这样用一个变量来表示另外一个变量的解析式就称为函数。教材 6 通过一次函数图像来引入变量和函数概念。

2.2 函数的定义

表 2 给出了 12 种教材中的函数定义。

表 2 12 本教材的函数定义

教材	函数的定义
1	若一个变量对应于另一个变量的一个值具有确定的一个或一组值，则称该变量为另一个变量的函数。
2	（1）若一个量依赖于另一个量取值，则称这个量为另一个量的函数。 （2）包含几个变量的最简代数式称为这些变量的函数。
3	当一个量的值依赖于另一个量的值并随之变化，则称该量为另一个量的函数。
4	任何包含 x 且其值随x的变化而变化的表达式称为x的函数。
5	若一个量的值依赖于另一个量的值，则称第一个量为第二个量的函数。
6	若两个变量之间存在一种固定的关系，使得其中一个变量的值依赖另一个变量的值，则称该变量为另一个变量的函数。
7	函数是依赖于另一个量取值的量。
8	若一个变量的值依赖于另一变量的每一个值，则称该变量为另一变量的函数。
9	若一个变量随另一个变量而变化，给定其中一个变量的值，就确定了另一个变量的相应值，则称第二个变量为第一个变量的函数。
10	包含一个或几个字母的表达式称为这些字母的函数。
11	若一个变量依赖另一变量取值，则称该变量为另一个变量的函数。
12	包含一个或几个字母的表达式称为这些字母的函数。

从表 2 可见，12 种教材都明确地给出了函数的定义，但这些定义互有不同，大致可分成两类：第 1 类是欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》（1748）中提出的函数定义："一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。"[16]教材 2、4、

10 和 12 采用这类定义。第 2 类是欧拉于 1755 年提出的函数定义：“函数是这样一个变量，它以一定规律依赖于另一个变量，当另一个变量的值发生改变时，它的值也会相应发生改变。”[17]教材 1-3、5、6-9、11 采用了这类定义。其中，教材 2 针对一元函数采用了第 2 类定义，针对多元函数，采用了定义 1。“变量说”是那个时代的教材所采用函数定义，其中，“变量依赖关系”比“解析式”说更普遍。

12 种教材都讨论了变量之间的特殊依赖关系——正比例函数和反比例函数，但不以函数命名，而是称之为“协变”（variation）。教材 2 指出：“协变”关系就是特殊的函数，教材 6 首次将其作为函数来处理，而其他教材则将其作为独立的知识点来处理。

12 种教材都一致指出，函数都有具体的表达式，如 $y=3x+1$，$A=\pi r^2$ 等等。这与教材中的函数定义相呼应。正因为函数是依赖于或包含其他变量的变量，所以必定能写出关于其他变量的解析式。

2.3 函数的分类

欧拉在《无穷分析引论》中将给出的函数分类如下[18]：

$$\text{函数}\begin{cases}\text{代数函数}\begin{cases}\text{有理函数}\begin{cases}\text{整函数}\\ \text{分式函数}\end{cases}\\ \text{无理函数}\end{cases}\\ \text{超越函数}\end{cases}$$

在 12 种教材中，只有 2 和 4 讨论了代数函数的分类，但没有明确涉及超越函数。其中教材 4 还提到了指数函数以及函数$y=e^x$、$y=ln(1+x)$的泰勒展开式。

而教材 8 虽并未提到函数的分类，但是它把指数函数和对数函数作为函数的一个特例进行了简单的讨论。教材中关于这两个函数讨论得并不多，只是举了一个具体例子加以说明，并通过其图像让学习者有初步的感悟。关于指数函数，教材并没有给出具体的定义和表达式，只是举了“养老保险金的金额与年龄之间的关系”这个例子并画出其图像。而关于对数函数，教材举了一个具体的函数表达式：$N=10^L$并画出其图像，但教材中只是提到了对数，并未提到对数函数。

剩下的 9 种教材虽然都有指数、对数等内容，但都没有涉及相应的函数。教材 4 在说明函数的定义时，举了“利息与时间之间的依赖关系”，但没有给出具体的函数表达式。

2.4 函数的性质

3 种教教材涉及函数的性质，但内容较为单一。

教材 4 着重介绍了函数的连续性：当 x 以任意小的值发生变化时，函数值 $f\left(x\right)$ 相应产生足够小的变化；换句话说，当 h 足够小时，$f(x+h)-f(x)$ 也足够小，则称 $f\left(x\right)$ 连续。在今天看来，函数定义才刚刚给出就直接讲连续性而忽略函数的其他性质，未免操之过急。教材之所以这么处理，目的是为后面的极限内容作铺垫；但先讲连续再讲极限，是本末倒置的做法。

教材 6 着重介绍了函数的单调性，给出了增函数与减函数的定义：

●增函数：$f\left(x\right)$ 随着 x 的增加而增加的函数。如 $f(x)=2x$；

●减函数：$f\left(x\right)$ 随着 x 的增加而减少的函数。如 $f(x)=1-x$.

教材 12 虽然在正文中并没有提到函数的单调性和最值问题，但在练习题中却设置了如下问题：观察图像（图 1），回答问题：哪个时刻气温达到最高点？最高气温是多少？在哪个时间段气温是上升的？在哪个时间段气温是下降的？

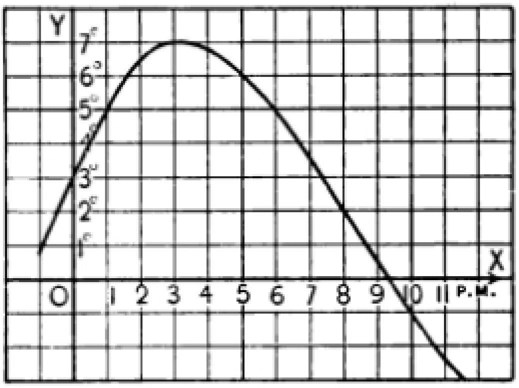


图 1 教材 12 练习 122 的图像：气温变化图

2.5 函数的图像

从表 1 可见，关于函数的图像，教材 6-12 都有所涉及。但是，其讲解的内容和深度有所不同，具体见表 2。

从表 2 可见，一次函数的图像在这 7 种教材中都有所涉及。相对而言，二次函数和其他更一般的函数图像出现的频率并不高。此外，也并非每一种教材都把函数图像与方程结合在一起来研究。下面，笔者选取教材 7 和 12 进行详细分析。

表 2 教材 6-12 有关函数图像的内容分布

类别	6	7	8	9	10	11	12
一次函数图像	√	√	√	√	√	√	√
二次函数图像		√	√		√		√
其他函数（三次函数、对数函数等）			√				√
一般函数图像（气温图等）			√		√		√
涉及方程与函数思想		√		√	√		√
涉及数形结合思想		√		√	√		√

教材 7 着重介绍一次函数、二次函数以及方程与函数之间的关系。先通过描点，画出一次函数$f(x)=3x+5$和二次函数$f(n)=n^2-2n-8$的图像，然后分析其特征：前者为一条直线，后者为一条抛物线。然后要求解两个方程：$3x+5=8$和$n^2-2n-8=7$。它把这两个方程与前面提到的函数建立起联系，通过函数的图像求得该方程的解。

教材 12 则先从简单的一次函数和二次函数的图像入手，通过一系列的问题引导学生从函数图像中找到方程与函数的关系。例如：

- 求解方程$3+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2=0$的根；
- 求解方程$3+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2=2$的根；
- 方程$3+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2=6$有实根吗？

通过一系列练习，当学生建立起函数与方程之间的关系后，给出任意一个多项式函数、分式函数甚至写不出表达式的函数的图像，让学生根据图像回答有关求根、求正值、找变化趋势等问题。

虽然 7 种教材所涉及的内容不尽相同，但它们所提到的描绘函数图像的方法却是一致的：选点计算、列表、描点、连线。

2.6 函数的应用

教材 6、8、10-12 给出了为数不多的具有实际背景的应用题，总共有 20 题。这些问题大体可分为四类：

第 1 类：判断式子中的常数、变量以及判断哪个变量是另一变量的函数。

教材 8 口头练习：如果一个人的月工资为\$125，他的收入能用以下公式表示：$E=125n$，

其中n表示月数，E代表收入，单位是美金。请说出式子中的常数、变量以及判断哪个变量是另一变量函数。

第 2 类：写出函数的表达式。

教材 6 口头练习：一个人以 3 米每小时的速度行走，用字母d代表行走距离，t代表行走时间。用d来表示成关于t的函数。这个函数是增函数还是减函数呢？

第 3 类：画函数图像。

教材 10 练习：一个人以每秒 3 码的速度移动，用字母d代表移动距离，t代表移动时间。则有函数式：$d = 3t$。请画出该函数的图像。

第 4 类：解函数应用题。

教材 11 练习：一个水箱，当它满水时重 7 吨，当它装三分之一水时重 3 吨。那么当它半满时多重？

这四类实际问题在今天的教材中也很常见，只是今天的教材还会考察函数的定义域，这与所给出的函数定义有着密切关系：今天的教材中，定义域作为函数三要素之一，在函数定义中扮演着重要的角色。

3 结语

从以上考察可见，在 19 世纪末至 20 世纪前四分之一时期的美国，函数还远远没有成为中学代数的核心概念；与今天的教材相比，早期教材中有关函数的内容较为散乱，并无系统性可言。但围绕函数这一主题，12 种美国初等代数教材还是呈现了较为丰富的内容，涉及函数的引入、定义、分类、性质、图像、应用等。与今天的教材相比，早期教材呈现了很多不同点：

（1）关于函数的定义，由于时代的局限性，只采用“变量说”，包括“依赖关系说”和“解析式说”，而没有出现“对应说”，没有涉及函数的定义域和值域。

（2）关于函数的性质，只涉及函数的连续性、单调性和最值，未涉及奇偶性；也没有出现求函数最值的方法。

（3）所涉及的函数类型较为单一，以幂函数和多项式函数为主，绝大多数教材没有涉及对数函数、指数函数、三角函数等常见的超越函数。

（4）十分注重函数与方程之间的联系，函数图像的主要用途是方程（主要局限于一次和二次方程）。

在函数应用方面，早期教材与今日教材（以人教版初、高中数学教材为例）比较接近，所选问题大体相同，既有现实生活问题（早期教材中有行程问题、气温问题，今日教材则有“离家距离与时间关系”问题、灌水问题）和面积问题（早期教材以圆面积为例；今日教材以矩形面积为例），也有一些物理问题（早期教材以自由落体运动为例，今日教材以斜抛运动为例）。在这方面，今日教材与早期教材是一脉相承的。

今日初中数学教材中的“变量说”定义正是早期教材中的函数定义发展而来的。英国教育家斯宾塞（H. Spenser, 1820-1903）认为“个体知识的发生必须遵循人类知识的发生过程”[18]，并指出：历史上的教育方法，有助于为今天的教育提供指南。美国学者因为新数运动中函数教学的失误而提出忠告：“我们可以将函数说成是法则、机器，但决不能把它说成是序偶的集合！”[19]有关实证研究也表明，中学生对函数概念的理解表现出一定的历史相似性[20]。在今天看来，早期教材中的函数定义不尽完善，但对初学者来说却易于理解。函数概念在教材中的缓慢演变历史，为今日数学教学和教材编写都提供了借鉴。

参考文献

[1] Cooney, T. J., Wilson, M. R. 1993. Teachers’ thinking about functions: historical and research perspectives [C]. In: T. A. Romberg, et. al. (eds.). *Integrating Research on the Graphical Representation of Function*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Association Publishers, 131-158.

[2] Ponte, J. P. The history of concept of function and some educational implications [J]. *Mathematics Educator*, 1993, **3**(2). http://jwilson.coe.uga.edu/DEPT/ TME /issues

[3] Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books [J]. *Mathematics Teacher*, 1958, **51**(6): 418-427.

[4] Fisher, G. E., Schwatt, I. J. *Elements of algebra* [M]. New York: Macmillan, 1899. 418-419

[5] Beman, W. W., Smith, D. E. *Elements of algebra* [M]. Boston: Ginn & company, 1900. 69-76

[6] Gillet, J, A. *Elementary algebra* [M]. New York: Henry Holt and Co., 1901. 147-150

[7] Smith, C., Stringham, I. *Elementary Algebra* for *the Use of Schools* and *Colleges* [M]. New York: The Macmillan Co., 1904. 417-419

[8] Marsh, W. R. *Elementary algebra* [M]. New York: C. Scribner's Sons, 1905. 337-339

[9] Slaught, H, E. *Elementary algebra* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1915. 314-316

[10] Myers, G. W. *Elementary algebra* [M]. Chicago: Foresman and company, 1916. 51-58

[11] Cajori, F., Odell, L. *Elementary Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1916. 87-106

[12] Hallett, G. H. *Elementary algebra* [M]. Boston: Burdett and company, 1917. 255-261

[13] Schultze, A. *Elements of algebra* [M]. New York: The Macmillan company, 1918. 154-159

[14] Hopkins, J. W. *Elementary algebra* [M]. New York: Macmillan, 1924. 132-137

[15] Schultze, A. *Elementary and Intermediate Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1925. 274-287

[16] Euler, L. *Institutiones calculi differentialis* [M]. Ticini: typographeo Petri Galeatii, 1787. 3

[17] 欧拉. 无穷分析引论(张延伦译) [M]. 太原: 山西教育出版社, 1997. 3-5

[18] Spencer H. *Education: Intellectual*, *Moral & Physical* [M]. New York: Hurst & Company, 1862

[19] Cooney, T. J., Wilson, M. R. Teachers' thinking about functions: historical and research perspectives [C]. In: T. A. Romberg, et al. (Eds.). *Integrating Research on the Graphical Representation of Function*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Association Publishers, 1993. 131-158.

[20] 任明俊, 汪晓勤. 高中生对函数概念的理解: 历史相似性初探 [J]. 数学教育学报, 2007, 16(4): 84-87

高中生对负数大小关系的理解 *

林佳乐

(华东师范大学数学系，上海， 200241)

1 问题的提出

历史上，数学家对负数大小关系的理解，经历了一个漫长、曲折的过程。希腊学者 Thomaidis 和 Tzanakis 曾对此作了考察[1]，表 1 总结了数学家的一些错误观点。

表 1 历史上数学家对数轴上数的大小关系的理解

数学家	结果	比较策略
笛卡儿	$-4>-1$	两个负整数各加上一个最小正整数，使其变为正数，通过所加之数的大小来比较负数的大小。
牛顿	$-4>-1$	通过与原点的距离来比较大小，离原点越远，有理数越大。
欧拉	$m<0,n<0,$ $\lvert m\rvert<\lvert n\rvert\Rightarrow m<n$	在数轴上，原点左侧的数往左依次增大。
波尔查诺	$\lvert e\rvert\ge 1\Leftrightarrow e\ge\pm1$； $\lvert e\rvert\le 1\Leftrightarrow e\le\pm1$	设 $a>0$，若 $x\in(0,a)$，则 $x<a$；若 $x\in(-a,0)$，则 $x<-a$。
阿贝尔	$\lvert x\rvert<1\Leftrightarrow x<\pm1$	同上。

Thomaidis 和 Tzanakis 就数轴上有理数的大小关系，对 16 岁希腊中学生进行了测试，以此检验数学概念的历史发展过程与今天学生的理解过程之间是否存在一定的相似性。研究发现，学生在面对新问题情境时会像历史上数学家一样加以处理，尚未学过该知识的学生所表现出来的历史相似性更为明显。尽管历史上数学演进过程与今天的课堂教学过程截然不同，但两个世界中存在某种程度的相似性，这种相似性为今天的教学提供了借鉴。

我们不禁要问：中国学生是如何认识数轴上数的大小关系的？与希腊学生有何异同？本

* 本文发表于《数学通报》2014 年第 11 期。

研究就是针对上述问题展开的。一方面，希望本研究为教学提供参考，另一方面，也希望在已有历史相似性研究案例[2][3][4][5]基础上，积累更多的案例。

2 研究方法

2.1 被试

我们采用 Thomaidis 和 Tzanakis 的测试工具[1]，选取贵州某学校高一、高三部分学生进行测试，测试时间为 15-20 分钟。表 2 给出了被试的基本信息。

表 2 测试对象信息

年级（班级）	回收问卷数	备注
高一（15）	50	理科平行班
高一（16）	52	理科平行班
高一（26）	47	理科实验班
高三（8）	54	理科平行班
总计	203	

被试所在学校在当地同类学校中属于中等水平，学生在晚自习时间完成测试卷，监考老师是任教本班级的数学教师。高一学生在本学期初已学过有关不等式知识。教材的重点内容是“不等关系与不等式”、“一元二次不等式解法”，高三学生已全部学完本知识点。

2.2 研究工具

测试卷由三个问题组成。

（1） 求不等式 $x^2>9$ 和 $x^2<9\left(x\in R\right)$ 的解集。

（2）如果 $x^2<y^2$ 和 $x^2>y^2\left(x,y\in R\right)$，关于 x,y 我们可以分别得出什么结论？

（3）如果 a,b,c 是三个负整数，存在一个最小的整数，使得 a,b,c 加上这个整数后均为正数，请问这个最小的整数是什么？

对 203 名学生依次进行编号，按学生所用的策略对学生的解答进行分类整理、统计和分析。

3 研究结果

3.1 总体测试结果

表 3 给出两个年级的总体测试结果。

表 3 总体测试结果（百分比）

题次	问题	正确		部分正确		错误		空白	
		高一	高三	高一	高三	高一	高三	高一	高三
1	$x^2>9$	51.0	90.7	0	0	49.0	9.3	0	0
	$x^2<9$	58.3	85.2	0	0	38.9	14.9	2.7	0
2	$x^2<y^2$	36.9	42.6	22.1	20.4	36.2	33.3	4.7	3.7
	$x^2>y^2$	38.9	33.3	20.8	22.2	34.9	35.2	5.4	9.3
3	最小整数问题	9.4	18.5	5.4	3.7	66.4	57.4	18.8	20.4

从表中可见，在第 1 题上，高一学生正确率接近 50%，而高三学生的正确率明显高于高一学生，达到 90%和 85%。第 2 题的正确率明显低于第 1 题，两个年级学生的正确率、错误率以及部分正确的百分比也都相差不大，相比于第 1 题，本题正确率明显偏低。第 3 题的正确率急剧下降，但高三学生的正确率更高一些。整体上看，学生对于有理数的大小关系比较掌握并不理想。

3.2 对测试结果的分析

3.2.1 第 1 题测试结果分析

本题是一道比较简单且常规的不等式问题，无论是高一学生还是高三学生，学生的求解策略比较单一，具体见表 4。从表中可见，大部分被试均采用直接开方法，其次是因式分解法，而这两种方法也是课本中的常用方法。采用开方法的被试，正确率不高，仅为 57.0%；采用因式分解法的被试，正确率为 100%；另外极少数同学使用的求根法正确率也为 100%。给出错误答案的被试中，很大一部分由 $x^2>9$ 直接得出 $x>\pm3$，这种错误与历史上数学家波尔查诺、阿贝尔的策略类似。

表 4 被试对第 1 题的回答（百分比）

类别	策略	代表性回答		百分比	正确率
		正确	错误		
1	开方法	$x^2>9\Rightarrow x>3或x<-3$	$x^2>9\Rightarrow x>\pm3$	84.7	57.0
2	因式分解法	$x^2>9\Rightarrow(x-3)(x+3)>0$ $\Rightarrow x>3或x<-3$	--	10.3	100
3	求根法	$x^2=9\Rightarrow x=\pm3$ $\Rightarrow 解为x>3或x<-3$	--	3.0	100
4	无逻辑	--	--	2.0	--

3.2.2 第 2 题测试结果分析

本题属于非常规题，笔者从学生的任课教师那里了解到，学生刚刚学完不等式，一般只是解比较简单的不等式，类似于第 1 题。学生很少接触两边均有字母的不等式，操作起来有困难。学生的正确率不高，且高一和高三并没有很大差异。

表 5 给出了学生的回答情况。从表中可见，绝对值、分类讨论、开方法三种策略用得较多。采用绝对值策略的正确率高达 97%，采用分类讨论策略的正确率仅为 23.3%，而采用开方法或因式分解法的被试几乎都没有得出正确结果。

学生对 x,y 进行分类讨论时，只考虑 x,y 同时大于 0 或同时小于 0 的情形，而忽略了 x,y 位于 0 两侧的情形。因此，采用分类讨论策略的学生大多只获得了部分正确的结果。利用开方策略的被试，仅考虑正半轴情形，忽略负半轴及其他情形，这与希腊的部分学生类似；采用因式分解策略的被试仅将 y 当作正数来处理。

表 5 被试对第 2 题的回答

类别	策略	代表性回答		百分比	正确率
		正确	错误		
1	绝对值法	$x^2<y^2\Rightarrow\lvert x\rvert<\lvert y\rvert$	$x^2<y^2\Rightarrow\lvert x\rvert>\lvert y\rvert$	32.5	97.0

2	因式分解法	--	$x^2<y^2$ $\Rightarrow(x+y)(x-y)<0$ $\Rightarrow -y<x<y$	5.4	0
3	开方法	--	$x^2<y^2\Rightarrow x<y$或 $x^2<y^2\Rightarrow -y<x<y$	22.2	0
4	分类讨论法	当$x,y<0$时，$x>y$; 当$x,y>0$时，$x<y$; 当$x>0,y<0$时，$x<\|y\|$; 当$x<0,y>0$时,$\|x\|<y$	当$x,y<0$时，$x>y$ 当$x,y>0$时，$x<y$	30.0	23.3
5	无逻辑	0	0	5.9	0
6	空白	0	0	4.4	0

3.2.3 第 3 题测试结果分析

本题属于非常规题目，具有一定的探索性，题中含有三个字母，没有确定的大小关系，学生的回答具体见表 6。

表 6 被试对第 3 题的回答分布情况

类别	回答形式	高一（百分比）	高三（百分比）
正确	当 a 最小时，这个最小整数是 $-a+1$；当 b 最小时，这个最小整数为 $-b+1$；当 c 最小时，这个最小整数为 $-c+1$	7.4	14.9
	a,b,c 中最小者的相反数再加 1	1.3	3.7
	$\|a\|+1$ 或 $\|b\|+1$ 或 $\|c\|+1$	0.7	0
部分正确	最小整数一定比 $-a,-b,-c$ 大	2.7	1.9
	特殊值法，如当 a,b,c 分别为-1,-2,-3 时，最小整数为 4	2.7	1.9
错误	若 a 最小，则这个最小整数为 $\|a\|$	6.7	0
	最小整数是 $a+1$ 或 $b+1$ 或 $c+1$	1.3	0

	最小整数为a,b,c中最小者	1.3	0
	最小整数大于或等于$-a-b-c$或$\left\|a+b+c\right\|$或$a+b+c$	20.1	14.8
	最小整数大于a,b,c	1.3	0
	无逻辑	35.6	42.6
空白		28	11

由表 6 可见，被试基本上都直接给出描述性答案，只有小部分被试采用了分类讨论策略。给出部分正确答案的被试并没有给出具体的最小整数，而仅仅给出一个范围，认为所求数比$-a,-b,-$c 都要大。学生可能不习惯用字母来表示具体的答案。出现最多的错误是$-a-b-c$或$\left|a+b+c\right|$。错误的主要原因是学生不善于处理不确定的量，分类讨论时对各种情形考虑不周全。这类问题对高三学生来说仍是一个障碍。

3.3 与希腊学生测试结果的比较

Thomaidis 和 Tzanakis 的测试对象为两个班级的 16 岁学生，他们都修读传统高中课程，每周上 3 小时的代数课程，内容涉及二次方程解法、二次方程根的性质和二次函数图像。被试分两组，均学过基本不等式知识，第 1 组被试（G1）即将学习一元二次函数的知识，第 2 组被试（G2）刚学完一元二次函数的知识，其测试时间为 40 分钟。表 7 为希腊学生的测试结果。

表 7　希腊学生总体测试结果（百分比）

类别	第 1 题		第 2 题		第 3 题	
	G1（$x^2>9$）	G2（$x^2<9$）	G1（$x^2<y^2$）	G2（$x^2>y^2$）	G1	G2
正确	27	32	7	11	23	11
部分正确	0	0	20	7	20	20
错误	73	68	63	71	30	32
空白	0	0	10	11	27	36

中国学生在第 1-2 题上的正确率相对较高，而在第 3 题上的正确率并没有比希腊学生高，

说明学生在数轴上数的大小关系的理解上还存在较大的困难。

在第 1 题上，两国学生采用开方法和因式分解法都较多。利用开方法，两国学生由 $x^2 < 9$ 直接得出 $x < \pm 3$，由 $x^2 > 9$ 得出 $x > \pm 3$，与历史上波尔查诺、阿贝尔等数学家的观点类似；中国学生的比率稍高于希腊学生。希腊学生中，部分被试采用了文字叙述策略，而中国学生并没有采用该策略。

对于第 2 题，部分中国学生将 y 看成是正数来处理，或者只考虑正半轴情形，忽略负半轴情形，这与部分希腊学生答案类似。

对于第 3 题，希腊学生容易混淆 a,b,c 三个数中的最大、最小数，其错误与历史上牛顿等数学家的错误类似，而中国学生则几乎无此错误。很多学生并没有给出题中所求的最小整数，而是相当于给出一个范围，认为所求数比 $-a,-b,-c$ 都要大，出现最多的错误是 $-a-b-c$ 或 $|a+b+c|$。本题中，希腊学生 G1 组的正确率是 G2 组正确率的两倍，但中国学生的表现刚好相反，高三组正确率是高一组正确率的两倍。

4 研究结论与启示

本研究表明，高中生在负数的大小关系上存在一定障碍，特别是当题中给出的是大小关系不确定的字母表示的量，而非确切的数字时，学生遇到很大困难。即便是分情况讨论，往往也会考虑不周全，出现漏解现象。究其原因，是教师在教学中对于确定数字的不等式介绍得比较多，而带有字母的不确定量的大小关系比较相对少。所以，建议教学过程中适当加入含有字母的不等式，从学生所用策略中，分析困错误成因，为教学服务，从而加深学生对这部分知识的理解。

从历史相似性观点来看，中国学生与希腊学生表现类似。对于刚学习这部分知识的学生来说，历史相似性较为明显，而对于已学习过这部分知识的学生来说，历史相似性几乎不存在。希腊学生在第 3 题上的回答反映出他们在比较负数大小时的困难，Thomaidis 和 Tzanakiss 认为，一些学生的想法与牛顿、笛卡儿或欧拉相似。而中国学生在本题上并没有显示出历史相似性。对于第 1-2 题，学生的错误答案大多反映了历史相似性，这一点与希腊学生不同。Thomaidis 和 Tzanakis 认为，过多的教学因素限制了学生对问题的解决，但中国学生并未表现出这一点。

参考文献

[1] Thomaidis, Y., Tzanakis, C. The notion of “parallelism” revisited: historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 66: 165-183

[2] 汪晓勤, 方匡雕, 王朝和. 从一次测试看关于学生认知的历史发生原理[J]. 数学教育学报, 2005,3: 30-33

[3] 汪晓勤, 周保良. 高中生对实无穷的理解[J]. 数学教育学报, 2006,4: 90-93

[4] 任明俊, 汪晓勤. 中学生对函数概念的理解：历史相似性初探[J]. 数学教育学报, 2007,4: 84-87

[5] 蒲淑萍, 汪晓勤. 学生对字母的理解：历史相似性研究[J]. 数学教育学报,2002,3: 38-42

HPM 视角下的“任意角的三角函数”概念教学 *

刘石洋

（浙江省义乌市第三中学，义乌，322000）

人教版普通高中数学课程标准实验教科书《必修④》第一章“三角函数”第 1.2.1 节“任意角的三角函数”是全章承前启后的关键所在。教材直接把“锐角”置于直角坐标系的背景之中，先用“终边定义法”得出“锐角三角函数”的定义，再利用相似三角形优化至“单位圆定义法”。通过类比，最终引出“任意角的三角函数”的定义。这种编排方式逻辑清晰、逐层递进，有助于学生顺利理解教材的编写意图。

但在实际教学中，我们还需要解决以下几个问题：为什么要将锐角三角函数推广到任意角的三角函数？如何从锐角三角函数自然过渡到任意角的三角函数？为什么要在直角坐标系内讨论任意角的三角函数？单位圆定义法与终边定义法中，哪一种更有利于学生对三角函数概念的理解？

要解决上述问题，就需要我们从数学史中寻找解决方案。

1 教学设计

三角学一开始并不是一门独立的学科，它只是作为天文学研究的工具而存在。公元 2 世纪，古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy）将圆周分成 360 度，将圆的直径分成 120 等分，用几何方法来计算一个锐角所对应的弦长（用半径的 1/60 作为度量单位），编制出一张弦表，为天文计算服务。

16 世纪以前，并没有“三角比”的概念，所有六种三角函数都只不过是线段而已，德国数学家雷提库斯（G. Rheticus, 1514-1574）首先使用了三角比[1]，因此，三角函数概念从“线段”演进为“比值”，经历了漫长的过程。18 世纪以前，三角函数仅仅局限于锐角，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中定义了任意角的三角函数，三角函数概念

*本文是课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）的 HPM 案例之一，由浙江省义乌市王芳数学教育工作室设计和实施。

从锐角演进为任意角，同样经历了漫长的过程。

17 世纪，费马和笛卡儿通过建立坐标系，用代数方法来研究曲线，从而发明解析几何。但直到 18 世纪，解析几何的思想才被运用于三角学。

以史为鉴，我们重构“从特殊角到单位圆”、“从单位圆到坐标系”、“从单位圆定义法到终边定义法”三个关键环节来设计教学。其中，前两个环节借助生活中常见的“曲柄连杆”模型（如图 1）来完成。

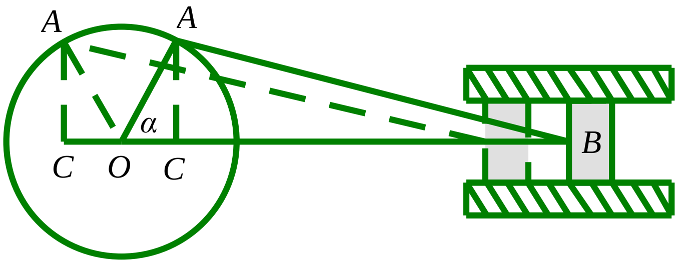


图 1

环节一：借鉴托勒密求弦长的数学思想，引出“单位圆”。在不预先给出坐标系的情形下，从学生熟悉的“特殊角”的三角函数值出发，考察若干具体的“非特殊角”的三角函数值，逐步推广至“一般角”，在不断改良过程中体现“单位圆”的独特优势（如图 2）。

环节二：通过刻画“曲柄连杆”四个阶段的运动状态，使之与直角坐标系的四个象限相对应（如图 3），使学生自然而然地想到引入 x 轴和 y 轴，进而感悟坐标系在表达三角函数值中的作用与意义。

通过这两个环节的探究，着力突显数学家们在解决这些问题时所显示的智慧和勇气。以下是上述两个环节的课堂教学实录。

2 课堂实录

2.1 从“特殊角”到“单位圆”

师：同学们，初中时利用直角三角形定义了锐角的三个三角函数：

$$\sin\alpha=\frac{对边}{斜边},\quad \cos\alpha=\frac{邻边}{斜边},\quad \tan\alpha=\frac{对边}{邻边}。$$

根据勾股定理，可以得到某些特殊角的三角函数值。请问 $\sin 60^\circ=?$

生：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

师：能不能用几何图形“画”出 $\sin 60^\circ$ 的大小呢？

生 1：在一个角为 60°的直角三角形中，取斜边长为 2，则对边长为$\sqrt{3}$，两边之比是$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

生 2：我也是，不过我取的斜边长为 1，它的对边长是$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

生 3：我画的是一个边长为 2 的等边三角形，它的高是$\sqrt{3}$，高与边长之比是$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

生 4：我觉得生 3 与生 1 的方案其实是一样的。

师：再“画”$\sin 45°$的大小，你们会选择哪个方案？

生 5：我坚持取直角三角形的斜边长为 2，这样对边长为$\sqrt{2}$，这些数字比较“好看”。

师：似乎生 2 的方案不太受欢迎。

生 2：(辩解)我这样做有它的好处！斜边=1 时对边长=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，不必用比例就能直接“看”出$\sin 60°$的大小。

师：有道理，看来这个方案有它的合理之处。其实现实世界中不只有这些特殊的锐角，还有其它锐角，比如$\sin 3.5°$。现在你们觉得哪个方案更好些？

众生：生 2 的方案。

师：为什么？

生 6：当直角三角形的斜边为 1 个长度单位时，只要“量”出对边的长度，就能直接得到$\sin 3.5°$的值。

师：对。当我们取遍所有的锐角（如图 2），顶点 A 的轨迹是？

众生：一段圆弧。

师：若我们取任意角，则终边上的点 A 的轨迹是？

众生：一个圆。

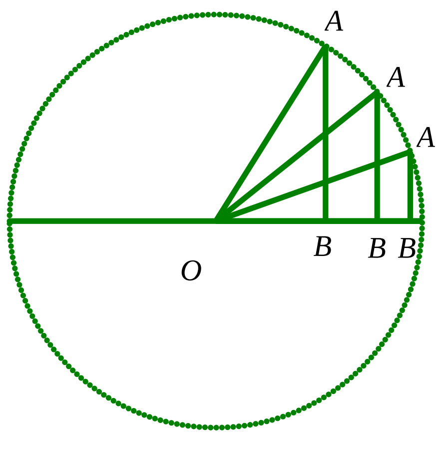


图 2

师：对，而且该圆半径为 1，我们称之为“单位圆”。利用单位圆，可以直接得到三角函数值。

1800 多年前，古希腊数学家托勒密正是采用类似的想法，算出了 7°对应的弦长（即 2sin3.5°），换算成十进制，即 sin3.5°=0.06104859，与用计算机得到的值 0.06104854 非常接近。他制作了从 0.5°到 180°间隔 0.5°的完整的弦长表，相当于求出了从 0.25°到 90°每隔 0.25°的正弦值。

2.2 从“单位圆”到“坐标系”

师：汽车是我们生活中的一种常见交通工具。汽车发动机中有一个重要的装置——曲柄连杆（如图 1）。主动杆 *OA* 绕固定点 *O* 转动，牵引杆 *AB* 带动活塞（点 *B*）作直线运动。从图中可见，线段 *OB* 的长度随着转动角 α 的变化而变化。根据刚才得到的经验，不妨取 *OA*=1。若已知牵引杆 *AB* 的长度为 *m*。请同学们用 α 表示图 3 中线段 *OB* 的长。

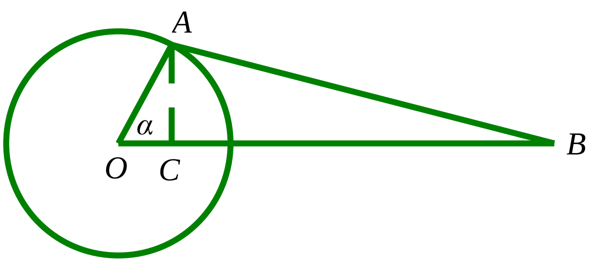


图 3

生 7： $OB = OC + CB = \cos\alpha + \sqrt{m^2 - \sin^2\alpha}$ 。

师：这时 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$。当 *A* 绕固定点 *O* 继续作圆周运动至图 4 时，该如何表示线段 *OB* 的长？

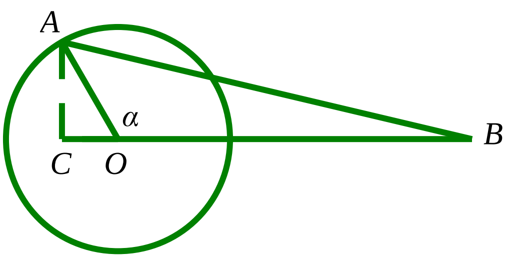


图 4

生 8：记 $\angle AOC = \alpha$ ，这时 α 是一个锐角，则 $OB = -OC + CB = -\cos\alpha + \sqrt{m^2 - \sin^2\alpha}$ 。

生 9：我仍然记 $\angle AOB = \alpha$ ，这时 α 是一个钝角，则

$$OB = -OC + CB = -\cos(\pi - \alpha) + \sqrt{m^2 - \sin^2(\pi - \alpha)}$$ 。

师：两位同学的 α 含义不同，你们觉得采用哪种比较合理？

生 10：我们已经把角推广到了任意角，没必要总是依赖锐角。记 $\angle AOB=\alpha$ 较好，可以与图 4 统一起来。

师：大家觉得呢？（稍顿，发现学生一致认同）我也赞同记 $\angle AOB=\alpha$，这样至少两个图的自变量 α 是一致的，即以 OB 为始边、OA 为终边。

师：再比较一下这两个方案中 OB 的表达形式，哪个更好？

生 11：我认为生 8 的结论更简洁。与点 A 在右边时的情形只相差一个“负号”。其实生 9 还是依赖了锐角，因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时 $\pi-\alpha$ 是锐角。

师：看来我们既喜欢生 9 的 α，也喜欢生 8 的表达形式。能否各取所长，改进为“记 $\angle AOB=\alpha$，当 α 是一个钝角时，$OB=-OC+CB=-\cos\alpha+\sqrt{m^2-\sin^2\alpha}$”？

众生：但是我们没学过“钝角”的三角函数啊！

师：（反问）锐角的三角函数也不是天上掉下来的啊！古人怎么办呢？

生 12：自己“造”出来的！

师：准确地说是作“定义”。看来我们需要定义“钝角”的三角函数。你们认为该怎样定义比较好呢？

生 13：按照刚才所说，可以这样定义：当点 A 在左边时 $\cos\alpha=OC$，并且必须得在前面加“$-$”号。

师：在谁的“左边”？

生 13：过点 O 且与 OB 垂直的那条直线（记作直线 l）的左边。

师：其他同学有什么不同看法?

生 14：这样定义太啰嗦了。可不可以直接让 $\cos\alpha=-OC$？这样就不需要提什么“$-$”号了。

师：作为一种定义，只要合理的就可以。你能说说这样定义还有什么好处吗？

生 14：如果这样，那么就可以在 α 为钝角时也写成 $OB=-OC+CB=-\cos\alpha+\sqrt{m^2-\sin^2\alpha}$。

师：照你这样说，那么这个式子的前面也可以改成 $OB=OC+CB$，只要让这时的 OC 表示一个“负数”。这样做的另一个好处是，无论 α 是钝角还是锐角，都能表示成 $OB=OC+CB$。

师：梳理一下刚才的探讨。当点 C 位于直线 l 的右边时 $OC>0$、左边时 $OC<0$。右边为正、左边为负（不断重复），这种感觉就像……

众生：（忽然顿悟）数轴。

师：准确地说是？

众生：x 轴。

师：那么直线 l 就是？

众生：y 轴（此时坐标系的引入水到渠成，见图 5）。

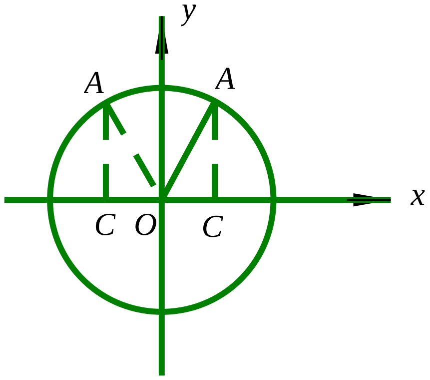


图 5

师：从图 5 得知 $\cos\alpha$ 的值可以用点 A 的横坐标表示，即 $\cos\alpha = x$。

教师引导学生继续探讨 α 终边位于第三、第四象限时，若同样采用 $\cos\alpha = x$，均有 $OB = OC + CB$。通过对 OB 表达形式不断的统一，领会坐标法定义的科学性。再通过类比得出 $\sin\alpha = y$。至此完成“单位圆定义法”的建构。

2.3 从“单位圆定义法”到“终边定义法”

师：我们回想一下求三角函数值的过程，你对单位圆定义法有什么想法？

生 15：图 5 中的 OA 也可以取其他值，比如“2”。

生 16：OA 是可以取其他值，但定义中要具有一般性，取 r 好。所以，定义

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}，\ \sin\alpha = \frac{y}{r}，\ \tan\alpha = \frac{y}{x}\ （r = \sqrt{x^2 + y^2}）。$$

师：很好。如果我们把圆去掉，实际上就是在角 α 终边上取一个点 $A(x, y)$，定义 $\cos\alpha = \frac{x}{r}$，$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \tan\alpha = \frac{y}{x}$（其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$）。这就是原教材的定义，称为终边定义法。

师：单位圆定义法和终边定义法你喜欢哪种？理由是什么？

生 17：我喜欢单位圆定义法。因为余弦值就是角 α 终边与单位圆交点的横坐标，正弦值是纵坐标。而且从单位圆中可以看出 $|\cos\alpha| \le 1$，$|\sin\alpha| \le 1$。

生 18：我喜欢终边定义法。因为他具有一般性，角 α 终边上任意取一点根据定义就可以求出它的三角函数值。

生 19：我认为单位圆定义法和终边定义法本质是一样的，只是圆的半径长短差异罢了。

师：这两种定义法本质上是一样的，没有优劣之分。在不同的国家不同的时期，两种定义法都被采用过。

从数学史上看，单位圆定义法比较符合历史的发展，也有利于以后作三角函数图像。从计算角度看，如果给出角α终边上一点的坐标，求角α的三角函数值，终边定义法方便一些。

3 学生反馈

课后，我们采用问卷和访谈两种方式，就单位圆的引入、坐标系的使用以及任意角的三角函数概念的理解对学生进行了调查。

（1）单位圆的引入。95.6%的学生认为单位圆的引入水到渠成，易理解，印象深刻。77.8%的学生赞叹托勒密弦表的精细。

（2）坐标系的理解。在证明$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$中，有 37.8%的学生用了曲柄连杆中第二象限的图，利用左边负，右边正来证明；33.3%的学生用单位圆的对称性来证明；28.9%的学生利用诱导公式来证明。说明左边负，右边正坐标轴的形象给学生留下深刻印象。

（3）任意角的三角函数定义的理解。86.7%的学生认为任意角的三角函数的定义是在分析曲柄连杆运动规律需要时产生的，易接受，体现了数学的应用价值。93.3%的学生认为任意角的三角函数是锐角三角函数的引申。在证明$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$中，与其他班级相比较，证明的方法多样。66.7%的学生在单位圆中，根据定义利用$x^2+y^2=1$来证明；22.2%的学生在直角三角形中，根据锐角三角函数定义用勾股定理证明；11.1%的学生根据终边定义法，利用$x^2+y^2=r^2$来证明。说明学生对任意角的三角函数定义的理解较全面深刻，而初中的锐角三角函数概念是学生的认知起点，在学生的认知结构中留下了难以抹去的烙印。

4 结语

波利亚（G. Pólya, 1887-1985）在提到将“发生原理”运用于教学时指出：“在教一门科学分支（理论、概念）时，我们应该让儿童重演人类心理演进的重大步骤。当然，我们不应该让他重复过去一千零一个错误，而只是重复重大步骤。……只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的儿童应如何获得这样的知识作出更好的判断。”[2]

本节课中，教师通过重构任意角的三角函数概念的关键历史环节，引导学生像数学家那

样去“想数学”，经历知识发生、发展的整个过程，最终深刻理解这一概念，这正是发生原理的应用，体现了 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）所倡导的“自然的真正科学的”教学法，而这种教学法正是 HPM 在所追求的目标之一。

参考文献

[1] D. E. Emith. *History of Mathematics* (Vol. 2).Boston: Ginn& Company, 1923. 610

[2] G. Pólya. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons, 1965. 132-133.

“数学史视野：小学数学课程教学改革”研讨会报道

王 伟

（江苏教育报刊总社，南京，210036）

数学史对数学教育的重要作用早在 19 世纪就已经被一些西方数学家所认识。一直以来，许多著名的数学家、数学史家和数学教育家都提倡在数学教学中直接或间接地利用数学史。但是，很多教师对数学史教育价值性的认识还不够深入，尤其是对如何在数学教学中融入数学史了解不多。基于此背景，2014 年 11 月 21 日至 11 月 23 日，由江苏教育报刊总社主办的，课改地平线之“数学史视野：小学数学课程教学改革研讨会”暨江苏省“十二五”规划重点资助课题《数学史视野下的小学数学教学的案例研究》阶段成果展示会，在南京工业大学丁家桥校区大礼堂进行。

本次研讨会主要由三个部分组成：

第一部分是江苏省“十二五”规划重点资助课题《数学史视野下的小学数学教学的案例研究》研究团队的成果汇报。课题主持人、启东市中小学教师研修中心小学教研室主任蔡宏圣作了《历史告诉我们……》的主报告，阐述了数学史之于数学教育的价值，数学教育中运用数学史的方式与方法，介绍了课题研究的诸多成果，其新颖独到的智慧演讲给与会老师们打开小学数学课改的新视角。接着，“蔡宏圣名师工作室”成员江苏省特级教师季国栋老师、南通市学科带头人张范辉老师分别执教了《确定位置》、《小数意义》的研究课，用课例的方式展示了数学史融入课堂教学的理念、策略。

第二部分是邀请了全国著名小学特级教师进行教学展示，并做了报告，对自己的教学设计进行分析。这些特级教师中包括北京的吴正宪、浙江的俞正强、江苏的贲友林和张齐华，以及来自台湾的林美媛。全国著名特级教师、京派吴正宪老师执教《面积的意义》一课，其不着痕迹融入数学史的艺术令人啧啧称道，课后又向全体教师畅谈了关于数学教师五个境界的思考与期待。全国著名特级教师、浙派名师俞正强结合《用字母表示数》一课，从微观史的视角向与会代表诠释孩子的错误史，分析错误的根源与教师所应思考的视角。全国著名特级教师、苏派名师贲友林、张齐华分别执教了《年、月、日》和《认识百分数》，展示了学

为中心的课堂教学中融入数学史的方法，呈现了“没有数学史，不会怎么样；有了数学史，绝对不一样”的课堂效果。来自宝岛台湾的台北市中正国小林美媛老师执教研究课《数的对称与计算》，丰富的史料，独到的设计，展示了台湾老师们对小学 HPM 的思考。

会议的第三部分是邀请两岸高校专家对数学史与数学教育进行讲座。首先是台湾勤益科技大学刘柏宏教授，做了《创意解谜的拼图——数学史与数学教育》的报告。刘教授以解谜的形式，介绍了为什么数学教育需要数学史，并展示了数学在艺术中所发挥的神奇作用。此后，华东师范大学数学系汪晓勤教授做了《数学史与小学数学教育》的报告，从“源流与背景、概念与术语、公式与法则、问题与求解、情感与信念、实践与开发”等诸多方面，借助丰富的史料与案例阐释了数学史与小学数学教育的密切关系。

为增进交流，会议还设置了主题对话的环节。该环节由国家督学、原江苏省教科所所长成尚荣主持，以“数学史视野：机遇与挑战”为主题，组织了课题组成员、与会学者、作课教师代表、与会青年教师的沙龙对话。“数学史深深影响着教师的数学观，基于历史可以更准确地厘清数学的本质，更细腻地把握儿童思维的提升历程，是践行数学课程改革理念的独特视角”是这次活动带给大家的机遇；“如何更好地将数学的丰厚历史融入数学教育，真正实现以儿童为中心，彰显学科特质的数学教育境界”是对广大一线小学数学教师的一大挑战。

部分专家教师合影

（左起：季国栋、蔡宏圣、林美媛、刘柏宏、汪晓勤、张范辉）

本次学术活动从数学史的视角探讨小学数学教学，在我国数学教育史上尚属首次，必将对小学数学教育以及 HPM 的传播与实践产生深远的影响。

本次活动由江苏教育报刊总社主办，苏派教育研究中心、江苏现代教育培训中心联合承

办，也是“课改地平线”教师培训平台的首次亮相。江苏教育报刊总社社长孙其华、江苏省中小学教学研究室副书记何峰、《江苏教育》总编张俊平、《小学生数学报》总编沈本领、温州大学黄友初博士等嘉宾莅临了盛会，来自江苏、辽宁、浙江等省共 700 多教师参加了此次活动。

2014 年义乌 HPM 课例研讨活动纪要

杨懿荔

（华东师范大学数学系，上海，200241）

2014 年 12 月 4 日，华东师范大学汪晓勤教授及其 HPM 研究团队在浙江义乌与浙派名师王芳及其工作室的老师们一起，开展了 2014 年度的 HPM 课例研讨活动。

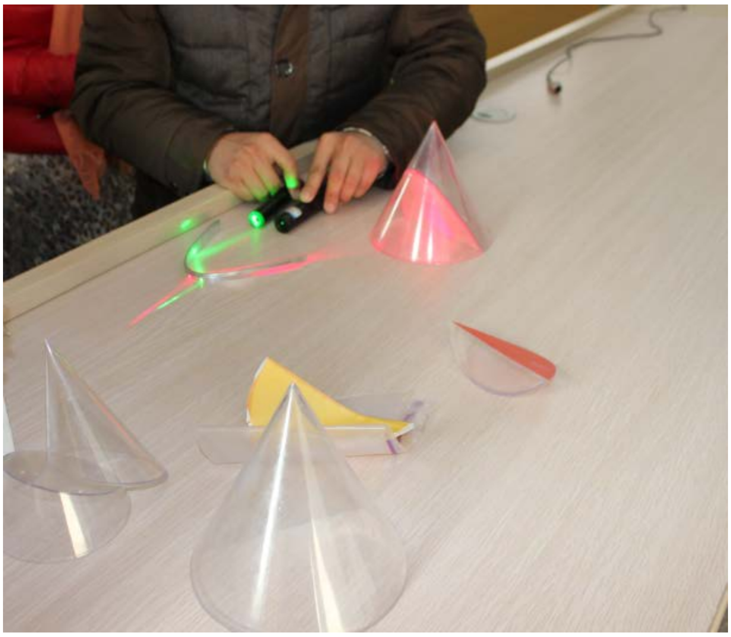
本次研讨活动主要分为两个部分。活动的第一部分是前往位于佛堂古镇的大成中学（省二级重点高中）观摩 HPM 视角下的高中数学课堂教学。

第一节课由大成中学的许超老师讲授，课题为：抛物线的概念与方程；第二节课是“数列的概念”，由义乌中学的龚艳辉老师授课。

课堂一：抛物线的概念与方程

抛物线的概念与方程是人教版高二上学期的学习内容，许超老师大胆尝试借班上课，选取了高一上学期的学生来讲授这节课，因为高一学生刚学习过“函数和方程”的知识，所以这节课衔接会非常紧密，同时也不禁让与会者感叹：“抛物线”原来可以这样上课！

首先许超老师请学生思考两个问题：我们前面研究过了哪些曲线？它们从何而来？这两个问题引起了学生积极的讨论。



许超老师所制作的“抛物线”

然后，许超老师通过物理中的光学实验提出：所有垂直于 x 轴的入射光通过抛物线反

射，所得到的反射光相交于同一点。

随后，许超老师播放了自己制作的这个反射过程的视频，学生们目不转睛的盯着屏幕，感受着其中的奥妙。为了上好这堂课，许超老师花费了大量的课外时间和精力来制作视频。他这种认真钻研教学的精神感动了现场听课的每一位老师。

接下来，凭借几何画板的功能，许超老师将上述交于一点的情况再次进行演示，并且定义了焦点的概念（光的反射汇聚到的点）；然后再利用“虚光源”的概念，不断平移入射光线，根据虚光源的轨迹定义了准线。

焦点和准线的概念对于抛物线而言是至关重要的，传统的教学中，老师通常会直接给出抛物线的定义：到一个定点与到一条定直线的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，而后将该定点称为焦点，该定直线称为准线。没有老师会向学生具体叙述什么是焦点？什么是准线？只是很突兀地给出一个定义，对于学生的认知而言，是有一定缺陷的。而许超老师设计的 HPM 课例很清晰地对这两个概念进行了讲解，帮助学生跨越了认知障碍。

许超老师的“抛物线的概念与方程”课堂

定义完抛物线后，许超老师又提出了新问题：求抛物线的方程应该建立何种直角坐标系？在学生的探讨中，得出了三种建立平面直角坐标系的方案，并让将学生分组计算对应直角坐标系下的抛物线方程。最后，选择一种学生认为最适合、最简便的答案来定义了抛物线的标准方程，即我们最常接触到的：$y^2 = 2px$。

课堂二：数列的概念

数列章节本应是人教版高二下半学期的内容，龚艳辉老师大胆尝试，选择了高二上学

期的一个班级进行授课，这也是一次跨学期的课堂演示。由于“数列的概念”是数列章节的起始课，对学生的认知结构影响不大。

龚艳辉老师首先从一个改编版的“约瑟夫问题”入手：如果一共有 10 个人排成一圈竞选班委，并按顺序进行标号，从 1 号竞选者开始，每隔两个人淘汰一位，请问最后是谁当选？学生们热烈的讨论后，将淘汰者的编号按照顺序排成一列数，由此教师引出了数列的定义，这个想法颇具创意。

龚艳辉老师的数列课堂

在给出了数列定义之后，龚老师又介绍了数列通项公式的概念，并写出一些数列让学生们求其通项公式（难度编排恰当，由简入难），正当学生渐入佳境时，龚老师突然提出了一个让人摸不着头脑的数列问题：已知数列 $0.387, 0.723, 1, 1.57, 5.203, 9.969$，请写出其通项公式。学生纷纷陷入了猜疑和沉思。

龚老师让学生进行了仔细的观察，然后引导学生进行解答。首先将此数列进行一个近似化简，得到：$0.4, 0.7, 1, 1.6, 5.2, 10$，并发现前 3 项的通项公式为 $a_n = 0.1 + 0.3n$。

	0.4	0.7	1	1.6	5.2	10
n	1	2	3	5	17	33
$n-1$	0	1	2	4	16	32

令 $n' = n-1$，得到新的通项公式：$a_{n'} = 0.3n' + 0.4$。观察 n'，发现每一项都是 2 的次幂，并且还发现 4 与 16 之间少了一个 2 的 3 次方，即为 8。将 8 代入通项得到：原来数列中还缺少了一项 2.8。这究竟是怎么回事呢？原来，一开始的那个数列是各个行星到太阳的平均距离（以天文单位为单位）。1800 年，意大利天文学家皮亚齐利用上述的算法，在平

均距离为 2.77 个天文单位处发现了一颗新的小行星：谷神星。龚老师利用 HPM 知识，帮助学生当了一回“小天文学家”，着实使课堂增添不少趣味。

龚艳辉老师讲解谷神星探究的过程

随后汪晓勤教授对两堂课进行点评，并且这两块内容所蕴含的数学史知识进行了梳理。

大约在公元前 4 世纪，Menaechmus 最早发现了锐角圆锥曲线（即现在的“椭圆”）以及直角圆锥曲线（即现在的“双曲线”），古希腊人利用纯几何描述了圆锥曲线的性质，当时并不关注焦点；公元前 3 世纪，欧几里得完成《圆锥曲线》与《面轨迹》两部大作，此时古人已经开始关心焦点、准线的概念；1646 年，在笛卡尔发明了直角坐标系后，法国数学家舒腾发表《圆锥曲线的作图》，发现了 3 种圆锥曲线的作图工具。此后，洛必达在课堂上，将此作图工具所涉及的原理作为圆锥曲线的定义使用，渐渐地人们就忽略了圆锥曲线的来源。我们现在所使用的定义只是原来 3 种圆锥曲线的性质而已。

关于数列，早在公元前 9000-6500 年，在刚果地区发现狼骨上有数字的刻痕；公元前 7 世纪，古巴比伦的月相表也是数列的起源之一；公元前 1 世纪，犹太人军事家约瑟夫在对抗罗马侵略的过程中，为了保存自己和同伴的性命，提出了颇有技巧性的“约瑟夫问题”；斐波那契数列更是创造了数列历史上又一新的高峰，意大利艺术家梅兹在 1994 年，将斐波那契数列作为装饰品，点缀在“烟囱”上。

活动的第二部分是华东师范大学 HPM 团队以及王芳工作室成员对这两个课例进行研讨交流，每一个与会者对课例进行点评，进一步修改 HPM 课例，弥补不足，精益求精。

课例研讨

汪晓勤教授对所有的意见进行整合，提出这是一个 HPM 与技术结合的时代，教师在掌握学科知识的同时，还要学会利用“几何画板”等高科技的软件加以辅助。汪老师还指出，我们要坚持这一份 HPM 的研究精神，保护好现在大学研究、中学课堂实践这样一种学习共同体，促进彼此进步。

大成中学校门集体合影留念

王芳老师进行了最后的总结。提出了 HPM 的三“宝”：HPM 是教学设计的宝藏，是教师发展的宝库，是学习探究的宝鉴。希望这三“宝”在未来能激励更多对 HPM 有兴趣的教师进行课例研究，给学生提供一个更好的学习知识的环境。