上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 6 期

德摩根

(A. de Morgan, 1806-1871)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

德摩根（A. De Morgan, 1806-1871）于 1806 年 6 月出生于印度南部的马德拉斯，父亲是一位在印度任职的上校，母亲出身于数学世家。1823 年进剑桥大学三一学院。1827 年获文学士学位。1828 年，被伦敦大学聘为数学教授。先后出版《算术基础》（1831）、《数学学习与困难》(1831)、《球面三角基础》（1834）、《代数学基础》（1835，即汉译本《代数学》的底本）、《三角学与三角分析基础》（1837）、《概率论及其应用》（1838）、《微积分》（1842）等多种教科书。他为至少 15 种刊物撰写了大量的论文，仅论文目录就占好几页。他还为《便士百科全书》撰写了约 850 多个词条，约占全部词条的六分之一。1865 年 1 月，当选为伦敦数学会主席。 1871 年 3 月 18 日逝世。

德摩根不仅是一位大数学家，而且也是英国当时最重要的数学史家。在德摩根一生众多著述中，数学史与天文学史占了六分之一以上。德摩根的剑桥大学老师、英国著名数学家皮考克（G. Peacock, 1791～1858）曾称他是“所有现代数学史作者中最准确和最博学者”，而后来剑桥大学三一学院的鲍尔（W. W. R. Ball, 1850～1925）亦称：“在数学哲学和数学史方面，他或许比任何一个同代人都渊博。”

德摩根曾指出：“任何一门艺术或科学都算不上博雅艺术或博雅科学，除非人们将其与人类过去的思想联系起来学习。”他又说：“人类数学思想的早期历史引导我们指出自己的错误；从这个方面说，注意数学的历史是很有益的。” 这一个半世纪以前的观点并没有过时，相反，它对我们今天的HPM研究依然有着指导性的意义。

目　录

CONTENT

课堂中的若干数学文化案例

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

早在半个多世纪以前，数学家克莱因（M. Kline, 1908-1992）即提出数学课程的文化原理：“知识是一个整体，数学是这个整体的一部分。每一个时代的数学都是这个时代更广阔的文化运动的一部分。我们必须将数学与历史、科学、哲学、社会科学、艺术、音乐、文学、逻辑学以及与所讲主题相关的别的学科联系起来。我们必须尽可能地组织材料，使数学的发展与我们的文明和文化的发展联系起来。”[1]今天，我国《普通高中数学课程标准》将“体现数学的文化价值”作为课程的基本理念之一，数学文化日益受到人们的关注。师范院校数学文化课程建设如火如荼，中学数学文化校本课程悄然诞生。然而，数学文化的主要载体是数学课程，而非数学文化课程；数学文化传播的主阵地是数学课堂，而非数学文化课堂。因此，人们最关注的还是如何在数学课堂教学中融入数学文化知识的问题。

图 1 给出了“数学文化融入数学教学的一般过程”[2]，从中可见，数学文化材料的搜集是数学文化传播的基础，没有足够的素材，就会陷入“巧妇难为无米之炊”的境地，数学文化融入数学教学也就成了一句空话。本文通过几个具体的案例，展示数学文化素材的来源。

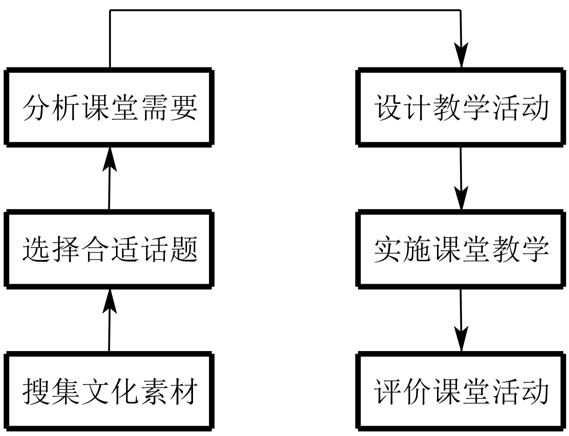


图 1 数学文化融入数学教学的一般过程

1 跨越鸿沟

数学和文学之间有着千丝万缕的联系。历史上，许多文学作品中包含了数学主题，卡洛儿的《爱丽丝漫游奇境记》是其中之一。美国 Prentice Hall 数学教材《几何》“推理与证明”一章利用该书中爱丽丝和帽子匠、兔子之间的对话[3]来引导学生思考原命题与逆命题之间的关系。

爱丽丝：“至少——至少我说的就是我心里想的——反正是一码事，你知道了吧！”

帽子匠：“你还不如说：‘凡我吃的，我都看得见’跟‘凡我看得见的，我都吃’也是一码事呢！”

兔子：“你也不如说：‘凡我得到的，我都喜欢’和‘凡我喜欢的，我都得到’也是一码事！”

这里，为什么帽子匠和兔子说得不对呢？如果我们把帽子匠和兔子的说法表达成命题，那么帽子匠将原命题“如果我吃一样东西，那么我就看得见它”和逆命题“如果我看得见一样东西，那么我就会吃它”等价起来；兔子则将原命题“如果我得到一样东西，那么我就喜欢它”和逆命题“如果我喜欢一样东西，那么我就得到它”等价起来。原命题和逆命题不一定同时成立，帽子匠和兔子的话成了有趣的反例。

在斯威夫特的《格列佛游记》中，也有许多数学例子。勒皮他的仆人们把面包切成圆锥体、圆柱体、平行四边形和其他几何图形；勒皮他人的思想永远跟线和圆相联系，他们赞美女性，总爱使用菱形、圆、平行四边形、椭圆以及其他几何术语[4]，我们可以让学生思考：作者的图形分类是否合理呢？

科幻小说之父凡尔纳（J. Verne, 1828-1905）在《神秘岛》中则巧妙地使用了等比数列，当哈伯在衣服夹层里找到一颗麦粒时，工程师史密斯如是说：“如果我们种下这粒麦子，那么第一次我们将收获八百粒麦子；种下这八百粒麦子，第二次将收获六十四万粒；第三次是五亿一千二百万粒；第四次将是四千多亿了。比例就是这样。……这就是大自然繁殖力的算术级数。……算他十三万粒一斗，就是三百万斗以上。”[5]这里，作者误将几何级数说成算数级数。无疑，这是数列课堂上很好的素材。

历史上许多文学家曾为数学教育做出过贡献。19 世纪苏格兰文学家和历史学家卡莱尔（Thomas Carlyle, 1795-1881）在数学上因翻译勒让德《几何基础》而著称，学生时代的他酷爱数学，“多年来，几何学作为所有科学中最崇高的学科在我面前熠熠生辉，在所有最佳时光里和最佳心情下，我学的都是这门学科。”[6]卡莱尔大学时代所给出的一元二次方程的

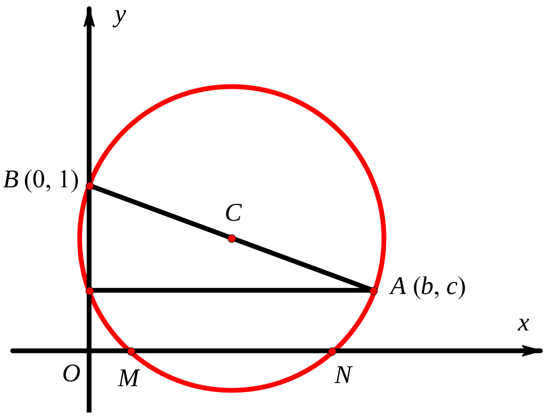


图 2 一元二次方程的几何解法

新颖解法是我们今天解析几何教学的理想素材：已知一元二次方程 x^2-bx+c=0，在直角坐标系中作出点 $A(b, c)$和点 $B(0, 1)$，连接 AB，以 AB 为直径作圆 C（图 2），则 C 与 x 轴的交点横坐标即为方程的根。我们可以设计如下问题：(1) 求圆 C 的方程；(2) 当 x^2-bx+c=0 有两个不同实根、两个重根、没有实根时，分别判定圆 C 和 x 轴的位置关系；(3) 若 C 和 x 轴相交，求交点坐标。这样，卡莱尔的方法在初、高中数学知识之间架起了桥梁。

2 海岛奇迹

数学与人类文明进步息息相关，科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）甚至断言，数学史乃是整个人类文化史的核心。古希腊历史学家希罗多德（Herodotus, 前 5 世纪）描述了毕达哥拉斯的故乡、萨莫斯岛上的一条约建于公元前 530 年、用于从爱琴海引水的穿山隧道，设计者为工程师欧帕里诺斯（Eupalinos）。这个隧道后来被人遗忘，直到 19 世纪末，它才被考古工作者重新发现。20 世纪 70 年代，考古工作者对隧道进行了全面的发掘。隧道全长 1036 米，宽 1.8 米，高 1.8 米。两个工程队从山的南北两侧同时往里挖掘，最后在山底某处会合，考古发现，会合处误差极小。欧帕里诺斯到底是用什么方法来确保两个工程队在彼此看不见的情况下沿同一条直线向里挖的？

在欧帕里诺斯 600 年后，希腊数学家海伦在一本介绍测量方法的小书《Dioptra》中给出一种在山两侧的两个已知出口之间挖掘直线隧道的方法，人们相信：这正是欧帕里诺斯当年用过的方法[7]。

如图 3 所示，要在两侧山脚的两个入口 A 和 B 之间挖一条直线隧道。从 B 处出发任作一直线段 BC，过 C 作 BC 的垂线 CD，然后，依次作垂线 DE、EF、FG、GH，直到接近 A 点。在每一条线段的一个端点处能看到另一个端点。在最后一条垂线段 GH 上选取点 J，使得 JA 垂直于 GH。设 AK 为 CB 的垂线，K 为垂足，则 $AK = CD - EF - GJ$；$BK = DE + FG – BC - AJ$。现在 BC 和 AJ 上分别取点 L 和 N，过点 L 和 N 分别作 BC 和 AJ 之垂线，在两垂线上

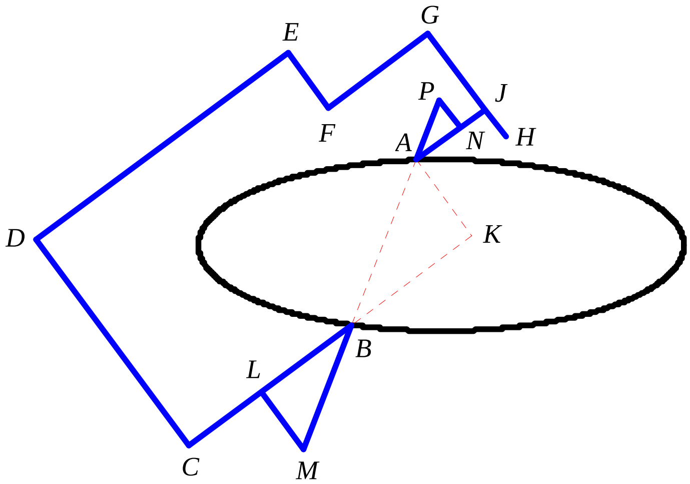


图 3 海伦所介绍的隧道挖掘法

分别取点 M 和 P，使得 $\dfrac{LM}{BL}=\dfrac{PN}{AN}=\dfrac{AK}{BK}$，于是，RT$\Delta BLM$、RT$\Delta BKA$、RT$\Delta ANP$ 为相似三角形。因此，点 P、A、B、M 共线。故只需保证在隧道挖掘过程中，工人始终能看见 P、M 处的标志即可。在古希腊水利工程奇迹的背后，几何学扮演了关键的角色。

3 古堡探幽

建筑与数学的关系可以上溯到古埃及时代，建筑需要美，美需要和谐，而和谐需要通过数学来实现。意大利南部 Apulia 山城（约建于 1240 年，图 4）被建筑史家誉为中世纪“建筑上无与伦比的纪念碑”[8]，其内外墙均为正八棱柱，外墙边长是内墙边长的 2 倍。各角上

图 4 阿皮里亚山城

分别建有一个小正八棱柱。内八边形相应八角星的每个顶点恰好位于角八边形的中心；而角八边形朝内的顶点恰为外八边形的一个顶点（图 5）。美国 Prentice Hall 数学教材《几何》“面积”一章中，即用该建筑来设题。我们可以设计如下问题：

（1）给出城堡设计方法；

（2）求内八边形和角八边形边长之比；

（3）已知内八边形半径为 16 米，求内八边形面积、角八边形的边长和面积 。

（4）按同样的方法在角八边形外作更小的八边形，记内八边形面积为 S_0，以后每次所作的每一个八边形面积分别为 S_1，S_2，…，求 $\lim_{n\to\infty}\left(S_0+S_1+\cdots+S_{n-1}\right)$。

这些问题涉及几何、三角、数列与极限知识，建筑中的数学真切地展现在我们面前。

4 天外来客

仰望星空，时有流星划过天际，令我们感叹生命的短暂；而那璀璨夺目的流星雨，又深深震撼着我们凡俗的心灵。流星是什么？从古到今，人们作过无数种猜测。古希腊哲学家亚里士多德说，那是地球上的蒸发物；近代有人进一步认为，那是地球上的磷火升空后的燃烧现象。10 世纪阿拉伯著名数学家阿尔·库希（al-Kuhi）设计出一种方案，通过两个观测者异地同时观测同一颗流星，来测定其发射点的高度。18-19 世纪之交，德国天文学家本森伯格（J. Benzenberg, 1777-1846）和布兰蒂斯（H. W. Brandes, 1777-1834）独立采用了同样的方法。[9][10]

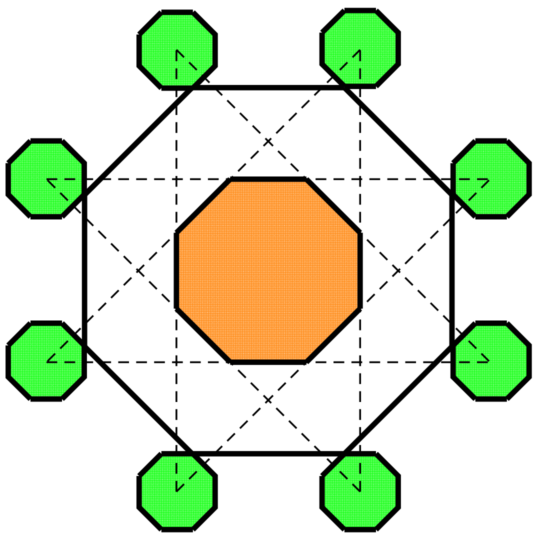


图 5 阿皮拉山城的设计

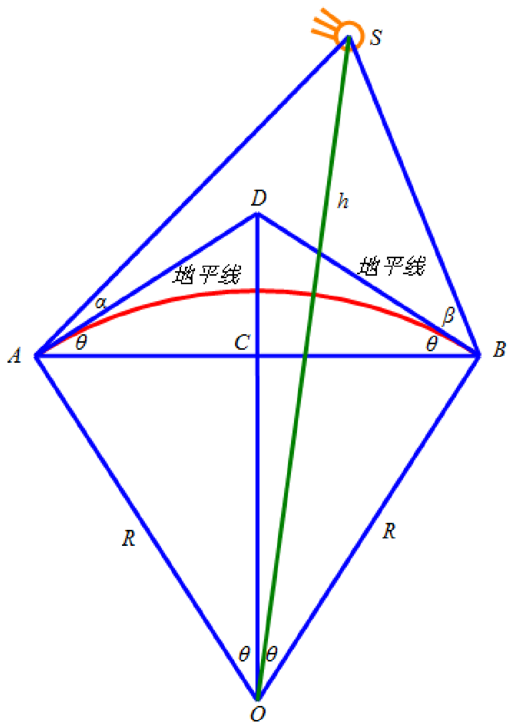


图 6 流星高度的测量

如图 6，设有两个观测者在地球上 A、B 两地同时观察到一颗流星，$\overset{\frown}{AB}=500\,km$，因地球半径 $R=6371\,km$，故得 $\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{500}{2\pi R}\times 360°\approx 2.248°$, 从而得 $AB=499.872\,km.$

设两个观测者的仰角分别为 $\angle SAD=\alpha=23.2°$，$\angle SBD=\beta=44.3°$，则

$$\angle ASB = \gamma = 180° - (\alpha + \theta) - (\beta + \theta) = 108.004°.$$

由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\gamma} = \dfrac{AS}{\sin(\beta+\theta)}$，故得 $AS = 381.566\,km$。再由余弦定理得

$$OS = \sqrt{(AS)^2 + R^2 - 2AS \times R\cos(90° + \alpha)} = 6530.74\,km,$$

最后得到流星发射点的高度为 $h = 159.74\,km$。须知，云层最高不超过 15km，因此可以断定，流星不是地球蒸发物，它一定是天外来客！正是三角学上的两个定理帮助人类迈出正确认识流星的第一步！

5 牛刀小试

公元 1 世纪左右，古希腊数学家海伦已经发现光的反射定律。当光从一种介质进入另一种介质发生折射，入射角和折射角之间的关系又如何？天文学家托勒密（C. Ptolemy, 85-165）分别就空气和水、水和玻璃、玻璃和空气，对光的入射角和折射角进行测量，得出入射角与折射角成正比的错误结论。阿拉伯数学家阿尔·海赛姆（Al-Haitham, 965-1038）制作仪器，测量入射角和折射角，发现托勒密的结论是错误的，但他自己未能发现折射定律。之后，波兰物理学家、自然哲学家和数学家维特罗维特罗（Witelo, 1230?-1300?）在阿尔·海赛姆的基础上进一步研究折射现象，同样未能发现折射定律。

1611 年，德国天文学家开普勒（J. Kepler, 1571-1630）在《折光》中给出：对于两种固定的媒质，当入射角（i）较小时，入射角和折射角（r）之间的关系是 $i = nr$（n 为常数）。当光线从空气进入玻璃时，$n = 3/2$。英国数学家哈里奥特哈里奥特（T. Harriot, 1560-1621）和荷兰数学家斯内尔（W. Snell, 1591-1626）相继通过实验得出折射定律，但未能给出理论推导。

1637 年，法国哲学家和数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）在《折光》(《方法论》之附录)中发表了折射定律，但遗憾的是，他的证明却是错误的！同时代数学家费马（P. Fermat, 1601-1665）因此对笛卡儿的折射定律进行了攻击。直到 24 年后的 1661 年，费马才利用他的最小时间原理才导出了折射定律。

1684 年，微积分发明者莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）在他的第一篇微积分论文中，小试牛刀，给出了微分的一个应用：在两种媒质中分别有点 P 和 Q，光从 P 出发到达 Q，界面上入射点 O 位于何处，光用时最短？

如图 7，建立直角坐标系，设光在两种媒质中的传播速度分别为 v_1 和 v_2，光从 P 到 Q

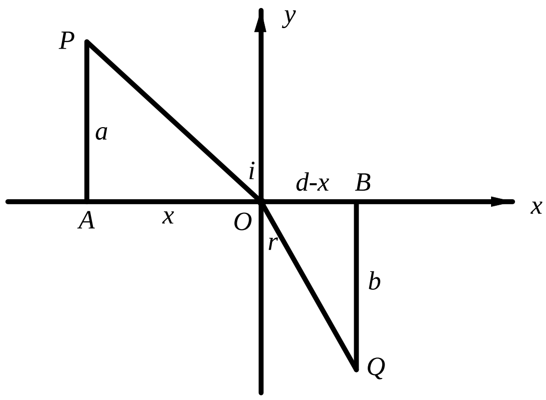


图 7　折射定律的推导

所需时间为 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{b^2+\left(d-x\right)^2}}{v_2}$，令

$$f'\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\frac{1}{v_1}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+\left(d-x\right)^2}}\frac{1}{v_2}=0$$

即得

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\dfrac{d-x}{\sqrt{b^2+\left(d-x\right)^2}}}=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}$$

有了微积分，一个具有 1500 年漫长历史的古老光学问题，轻而易举得到了解决。莱布尼茨获此结果后惊叹道：“熟悉微积分的人能够如此魔术般地处理的一些问题，曾使其他高明的学者百思而不得其解！”[11]

以上数学文化案例分别来自文学史和科学史（水利工程史、建筑史、天文学史和物理学史），它们都揭示了数学与人类其他知识领域之间的密切联系，将数学从“孤岛”中解放出来，充分体现了新课程的理念。我们有理由相信，文学史和科学史是数学文化的宝藏，其中更多适合于课堂教学的案例有待于我们去挖掘、整理和改造。

参考文献

[1] Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418-427

[2] Furinghetti, F. The long tradition of history in mathematics teaching: an old Italian case. In V. Katz（Ed.）, *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. 49-58

[3] 卡洛尔. 爱丽丝漫游奇境记. 北京: 燕山出版社, 2001

[4] 斯威夫特. 格列佛游记. 北京: 人民文学出版社, 1979

[5] 凡尔纳. 神秘岛. 南京: 译林出版社, 2008

[6] Wursthorn, P. A. The Position of Thomas Carlyle in the History of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 1966, **70**: 755-770.

[7] Fauvel, J. & van Maanen, J. 2000. *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

[8] Gotze, H. Friederich II and the love of geometry. *Mathematical Intelligencer*, 1995, 17(4): 48-57

[9] Loomis, E. On shooting stars. *American Journal of Science*, 1835, 28 (1): 95-104

[10] van Brummelen, G.. Catching a falling star: Meteors in 10th century Persia. *Mathematics in School*, 2003, 32: 7-9

[11] 爱德华, C. H. 微积分发展史（张鸿林译）. 北京: 北京出版社, 1987

中、美、日、新四国高中教材中的数学归纳法比较研究[①]

王　科

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘　要：本文研究聚焦在中国、日本、新加坡、美国四国高中数学教材中数学归纳法内容的比较研究，从内容呈现方式、结构特征和教学期望三方面建立分析框架，从宏观和微观层面上对比分析数学归纳法的内容组织和概念化的方法，并对问题难度作出分析，目的是为了揭示出各教材呈现数学归纳法内容的方法。

关键词：数学归纳法；国际教材对比；分析框架

数学教材是关于一系列数学内容的说明、期望、内容展示和组织的综合体[1]，在教学过程中，教材是师生的教学内容的资料，也是教学活动流程的指导，因此，可以通过对教材的研究，来了解学生的学习经历以及对学生的数学期望。在国际大型成绩测量研究中，教材研究也被列入其中，可见其重要性，正如 Robitaille 所说："在每一个国家，数学教材在数学教学中发挥着相当大的影响力，所以理解各国教材中的内容和方法上的变化是一个重要的研究领域。"[2]

数学教材的研究领域较为广泛，包括全部课程教材内容、教材的教学特点、数学内容的课程处理、练习题等。然而，大多数研究是从宏观层面上去分析一本教材或一章教学内容，而少有研究者去研究一个特定数学内容概念化、结构化的呈现方式。简单的对比并不能揭示出一个特定内容的数学本质及其与其他内容的关联，只有从微观层面上去分析，才可以获得其概念化、结构化的特征。

本文从宏观和微观两个层面去分析不同数学教材中"数学归纳法"这一内容。

1　研究问题

推理和证明是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式[3]。而

① 国家社科基金"十一五"规划重点课题（ADA100009）部分研究成果之一。

数学归纳法（以下简称 MI）作为一种重要的演绎推理证明方法，在我国高中数学课程标准中有明确的要求：了解 MI 的原理，能用 MI 证明一些简单的数学命题。NCTM (2000) 要求学生学习应用 MI 的方法去证明特殊的命题，因为反复演算和递推方法的应用很广泛[4]。

然而，无论对教师和学生，还是对教材编写者和研究者来说，MI 都是一个复杂的课题。教师在教学过程中，常使用了错误的表征去解释 MI 原理的二个步骤[5]；而对于学生来说，学习和使用 MI“程序化的两个步骤”并不困难，但要求他们联系其他数学知识去解决不同表征的问题，以及对 MI 的概念作一个有意义的解释，却是很困难的。同时，已有的研究表明，学生学习 MI 常出现以下错误[6, 7]：

● 混淆 MI 与归纳法；

● 认为 MI 只用于解决有限数列问题；

● 对于由 P(k)推出 P(k+1)的含义不理解，对应用这种假设推理的形式心存疑虑；

● 把 MI 理解成从单个例子得到一般结论的技术性操作；

● 不理解从 P(1)跳跃到 P(k)推出 P(k+1)，认为基本步骤不是必要的，常常在证明中遗漏这一步；

● 不明白为什么需要两个步骤，认为递推步骤本身可确保所有表述的真值，且真值远大于一个具体的自然数；

● 在代数操作用 k+1 代替 k 时，有很多问题和困难。

对学生学习 MI 的各种困难的具体原因有：缺乏相关数学知识、不完全形式化的数学问题背景、忽视对 MI 概念的理解[8]。

同时，对 MI 教材内容的编排也有批评之声：荷兰著名数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）在《作为教学任务的数学》中提到，教材常常将二项式定理作为 MI 原理的推论，在数学创造过程中，这是一个恶性循环，……如果从皮亚诺（G. Peano, 1858-1932）公理体系，这一自然数的形式理论推出 MI，那也是教学中一个类似的恶性循环……可是通常的演绎过程却以皮亚诺公理为基础，导出 MI 原理作为一个定理，以后再用于各种例子，这是违反教学法的一个显著的颠倒的例子 [9]。Harel（2001）研究中提到，标准教材的缺点[10]：

● 引入 MI 原理太突然，学生并不知道 MI 是因解决问题的需要而产生的，而非因先前的基本经验；

● 教材中的问题类型和顺序编排不当。标准课本只是关注在证明公式问题，不等式问题，整除性问题。这些问题很少要求理解 MI 原理，而仅需要学生机械式按照二个步骤来解

决问题即可。

由于各国教材对 MI 在表征、内容深度、概念化等方面采用了不同的处理方法，这为教材研究者们了解不同教材的编排处理方法提供了很好的机会，从而可以更好地帮助教师分析、理解和创造性地运用教材，提高教师的课堂教学效果。

本文拟针对以下问题对中、美、日、新四国数学教材进行分析：

(1) 不同国家的教材中，MI 内容呈现特征是什么？

(2) 不同国家的教材中，MI 内容结构特征是什么？

(3) 不同国家的教材中，关于 MI 内容的数学期望如何？

2 研究方法

2.1 研究材料

本研究选取的中国教材由人民教育出版社出版的数学（A 版）（编码为 CTB），本研究选取人教版教材中的 MI 所在章节数学选修 2-2 作为研究对象[17]。日本教材选取的是本数研出版社出版的新编数学教材数学 B（编码为 JTB）[18]，新加坡的高中教材并没有统一的编制，由各个出版社或学校根据教学大纲自行编制，本研究选取的是维多利亚初级学院所使用的 H2 系列数学教材，由于 MI 内容在 H2(1)中，因此选取 H2(1)教材[19]（编码为 STB）。美国没有全国性的教材评审机构，联邦政府教育部没有对中小学教材进行审定的责任与义务，教材的评估和选用根据各州的情况而定。本研究选用的是美国 Glencoe McGraw-Hill 出版社出版的 Algebra 2（以下简称美国教材，编码为 UTB）[20]。

2.2 分析框架

本文参考 Li， Chen， Song(2009)， Ernest(1984)，汪晓勤(2011)，沈春辉(2012)，赵纪诺(2012)，Yan Zhu ，Lianghuo Fan(2006)，鲍建生(2002)[6，11，12，13，14，15，16]关于教材分析的框架，为考查教材如何在教学中概念化和结构化 MI，笔者从宏观和微观两个层面去分析了教材的内容呈现特征、内容结构特征以及对学生的数学期望，而建立了本文的分析框架：详见表 1。

因此，从宏观和微观两个层面对各国 MI 教材内容进行分析，尤其是分析内容编排上是否作了规避学生犯常规性错误的考虑，可以更好地揭示出各国教材间的异同点。

表 1 教材内容之分析框架

内容呈现特征		
宏观层面	项目	解释
内容表面特征	前一章节	在 MI 之前学了什么？
	使用的页码	MI 内容的页数以及占章节和全书的比例？
	例题数	有关 MI 证明的例题有多少？
	习题数	练习题有多少？通过练习题让学生学会应用 MI。
微观层面		
信息技术特征	种类	计算器，计算机，动态几何软件，
	使用方式	使用信息技术解释概念，探索内容，解决问题。
运用数学史的方式	点缀式	孤立的图片，如数学家画像、数学图案。
	附加式	文字阅读材料，包括数学家生平、数学概念、符号、思想的起源、历史上的数学问题、思想方法等。
	复制式	直接采用历史上的数学问题、问题解法、定理证法等
	顺应式	对历史数学题进行改编，使之适合课堂教学情境或要求。
数学与现实生活、科学技术、人文艺术的运用方式	外在型	文化内容的介绍，不涉及数学内容 。
	内在可分离型	文化用以掩饰数学问题，仅仅运用数学知识解决数学问题，文化与数学可以分离。
	内在不可分离型	文化内容成为数学问题的一个有机的组成部分，运用数学知识解决具体的文化问题，两者不可分离。

内容呈现结构		
宏观层面	项目	解释
结构特征	MI 内容的具体结构	结合了数列的内容，归纳，猜想，证明？作为独立的章节来呈现 MI？作为一章中的一部分来呈现 MI？
	包含 MI 内容的章节结构	章或节包括了呈现 MI 的内容。 一章/节的组织结构
微观层面		
MI 概念化	内容是如何介绍的？	1.直接给出 MI 原理。 2.引入问题情境，逐步体验归纳总结，导入 MI
	解释原理时所用表征	1.通过例题的类比，2.通过多米诺骨牌。
	明确的 MI 形式	是否将 MI 明确形式化且给出明确的名称“MI”。
规避错误点	归纳法与 MI	一般归纳推理与 MI 演绎证明的区别，特别是后者是用来证明前者归纳出来的结果的方法。
	基础步骤	N 并不是总以 n=1 开始。
	缊涵关系	关于这种缊涵关系含义的讨论，特别是应用缊涵关系去证明缊涵表述的命题。
	二个步骤的关系	MI 的说明，MI 证明的基础步骤为 P(1)，重复递推到 P(2)，P(3)…一直下去，二步骤缺一不可。
	解决题型	MI 是证明涉及自然数 N 的命题的一种方法。
	反例	找出命题不成立的反例。

MI 内容的期望		
宏观层面	项目	解释
问题特征	问题的类型	证明题，解答题，论述题。
	问题的表征	图表与文字表征，数值表征。
微观层面		
习题综合难度	探究	分为知识记忆，理解和探究。
	背景	分为无实际背景，现实生活，公共常识，科学情境。
	运算	分为无运算，数值计算，简单符号运算，复杂符号运算。
	推理	分为无推理，简单推理，复杂推理。
	知识含量	分为单个知识点，两个知识点，两个以上知识点。

3 结果与分析

所有选出的教材用他们原始的语言来分析，根据需要再翻译成中文。数据分析过程：整合并反复阅读教材，再制定编码，然后按照上述分析框架去编码对比分析，得出三个研究问题的结果。

3.1 MI 内容的呈现特征

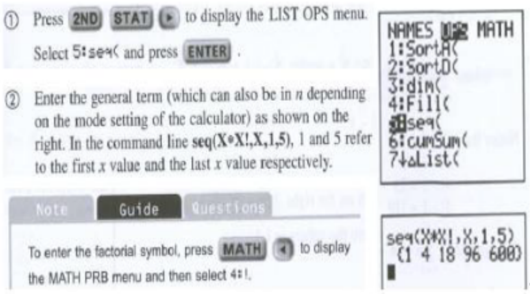
首先是宏观层面上的内容表明特征，日新美三国的 MI 内容都是在数列章节，中国是推理与证明章节。内容所占的页数方面，四国教材相差无几，章节所占比例中日新相近，美国所占比例较小，原因是美国习题很多，还附有参考答案。题目数中日新差不多，分别是 16，11，15，而美国则有 50 道。详见表 2.

表 2 宏观层面——MI 内容呈现之表面特征

教材	所在章节	所占页数	所占比例	例题数	习题数
CTB	推理与证明	5 页黑白 32 开	全章 15.6%，全书 4.1%	5	11
JTB	数列	5 页黑白 32 开	全章 13.2%，全书 2.7%	3	8
STB	数列与级数	12 页黑白 16 开	全章 23.5%，全书 2.9%	4	11
UTB	数列与级数	4 页彩色 32 开	全章 7.5%，全书 0.5%	4	46

说明：例题数和习题数包括章节的复习题。

其次，关于微观层面上内容的信息技术特征，美新两国都有涉及，美国强调使用互联网资源，新加坡则是强调使用图形计算器（如图 1）。而中日两国没有涉及信息技术内容。

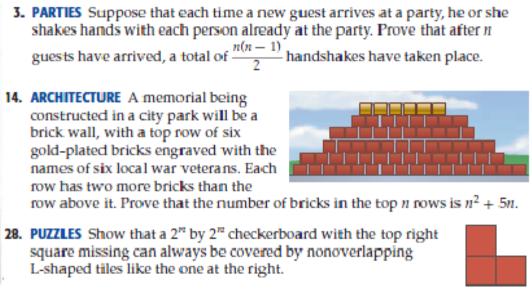

① Press 2ND STAT ▶ to display the LIST OPS menu. Select 5:seq(and press ENTER .

② Enter the general term (which can also be in n depending on the mode setting of the calculator) as shown on the right. In the command line seq(X∗X!,X,1,5), 1 and 5 refer to the first x value and the last x value respectively.

Note Guide Questions

To enter the factorial symbol, press MATH ◀ to display the MATH PRB menu and then select 4:!.

图 1　图形计算器使用


3. **PARTIES** Suppose that each time a new guest arrives at a party, he or she shakes hands with each person already at the party. Prove that after n guests have arrived, a total of $\frac{n(n-1)}{2}$ handshakes have taken place.

14. **ARCHITECTURE** A memorial being constructed in a city park will be a brick wall, with a top row of six gold-plated bricks engraved with the names of six local war veterans. Each row has two more bricks than the row above it. Prove that the number of bricks in the top n rows is $n^2 + 5n$.

28. **PUZZLES** Show that a 2^n by 2^n checkerboard with the top right square missing can always be covered by nonoverlapping L-shaped tiles like the one at the right.

图 2 生活有关的题目

再次，关于微观层面上的内容中使用数学史与数学文化的特征：在数学史方面，美国和新加波的教材中应用了复制式的方式，设置一道有关斐波纳契数列的习题，而中日则没有设置；在数学文化方面，中国教材有一道思考题即多米诺骨牌倒下的条件是什么？美国教材中有三道与生活有关的题目，分别是生活中握手题、建筑题、L 型棋盘覆盖游戏题（如图 2 所示）。日本和新加波教材中则没有涉及。

3.2 MI 内容的结构特征

首先，宏观层面上 MI 所在章节结构（详见表 3），值得一提的是中国教材 MI 内容被编排在推理与证明章节，因此强调了 MI 是一种证明方法的重要性，以及与推理的关系等。其他三国设置在数列章节，体现了与数列关系的密切性。

表 3　宏观层面——MI 内容结构特征之章节结构

CTB	JTB	STB	UTB
2.1　合情推理与演绎推理	第 1 节.等差数列与等比数列	2.1　数列	11.1 等差数列
		2.2 ∑符号的使用	11.2 等差级数
2.2　直接证明与间接证明	第 2 节.各种各样的数列	2.3　数学归纳法	11.3 等比数列
		2.4　二项展开式	11.4 等比级数
2.3　数学归纳法	第 3 节.数学归纳法		11.5 无穷等比级数
			11.6 递推和特殊数列
			11.7　二项式定理
			11.8　证明与 MI

其次，关于 MI 内容结构方面（详见表 4），四国教材编排的顺序基本相似，都是引入 MI 原理、例题、习题，不同的是微观层面上即如何概念化 MI 方面（详见表 5），中日比较形似，中国教材在这个方面篇幅较多，首先提出猜想是需要证明的，再设置问题情境，通过

三个思考题，反思总结多米诺骨牌倒下条件，类比得到方法，通过所得方法去解决问题，从而总结归纳出 MI 原理，并用框图解释该原理，即从问题解决中得到 MI 原理。与其他教材相比，MI 引入过程更能够让学生理解 MI 的本质。日本教材则是通过“递推式”一节来铺垫，之后提出猜想需证明，并直接提出 MI 原理，并用皮亚诺公理体系的第 5 公设来解释原理（如图 3），得到数学归纳法，而弗赖登塔尔对此持反对态度，他在《作为教学任务的数学》中提到“通常的演绎过程却以皮亚诺公理为基础，导出 MI 原理作为一个定理，以后再用于各种例子，这是违反教学法的颠倒的一个显著例子”[9]。相应地，新、美两国教材较相似，美国教材先提出天梯问题（如图 4），之后直接提出 MI 原理，并没有对其作出解释，新加波教材则是直接提出 MI，接着就是习题讲解。这正如 Harel（2001）研究中提到的标准教材的缺点：①引入 MI 原理太突然；②教材中的问题类型和顺序编排不当[10]。

表 4 宏观层面——MI 内容结构

CTB	JTB	STB	UTB
猜想需证明	猜想需证明	提出 MI 原理	天梯问题
设置问题情境	提出 MI 原理	例题讲解	提出 MI 原理
引入 MI 原理	解释原理	图形计算器计算演示	例题
例题讲解	例题	练习题	练习题
练习题	练习题		

表 5 微观层面——MI 内容结构之 MI 概念化过程

教材	概念内容如何介绍	使用表征解释 MI 原理	MI 明确形式
CTB	问题情境解决归纳得出	多米诺骨牌详细分析	2 步骤，配框图表示
JTB	为证明猜想需要提出 MI	数值解释	2 步骤
STB	直接提出	无	2 步骤
UTB	直接提出	无	3 步骤形式

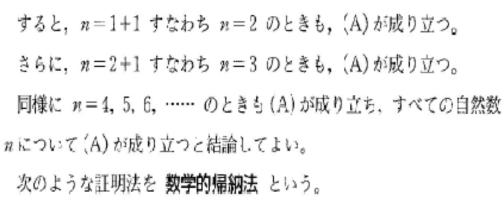

すると，$n=1+1$ すなわち $n=2$ のときも，(A)が成り立つ。
さらに，$n=2+1$ すなわち $n=3$ のときも，(A)が成り立つ。
同様に $n=4, 5, 6,$ …… のときも(A)が成り立ち，すべての自然数 n について(A)が成り立つと結論してよい。
次のような証明法を **数学的帰納法** という。

图 3 原理解释

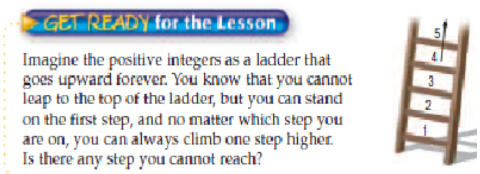


图 4 天梯问题

再次，关于微观层面上例题的特征，四国各不相同：中国教材有 2 道例题，一是求和公式的证明，一是归纳、猜想、证明问题；日本教材有 3 道例题，分别是求和公式的证明、不等式的证明和整除性证明；新加波教材有 4 道例题，一是复杂的求和公式的证明，另三个是

归纳、猜想、证明问题；美国教材有 3 个例题，分别是求和公式证明，整除和找反例。另外，中国教材对例题没有说明，其他三国教材对例题或多或少有一些说明，其中美国教材最详细（如图 5），每一证明步骤都有说明，日、新教材对例题的说明比较相似，说明较少。

Prove that $7^n - 1$ is divisible by 6 for all positive integers n.

Step 1 When $n = 1$, $7^n - 1 = 7^1 - 1$ or 6. Since 6 is divisible by 6, the statement is true for $n = 1$.

Step 2 Assume that $7^k - 1$ is divisible by 6 for some positive integer k. This means that there is a whole number r such that $7^k - 1 = 6r$.

Step 3 Show that the statement is true for $n = k + 1$.

$7^k - 1 = 6r$	Inductive hypothesis
$7^k = 6r + 1$	Add 1 to each side.
$7(7^k) = 7(6r + 1)$	Multiply each side by 7.
$7^{k+1} = 42r + 7$	Simplify.
$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$	Subtract 1 from each side.
$7^{k+1} - 1 = 6(7r + 1)$	Factor.

图 5 例题的文字说明

再次，微观层面上关于规避错误点的分析，中国教材与其他三国有很大的差异，对归纳法与 MI 的区别、基础步骤、蕴涵关系、二步骤关系、解决题型都有说明解释，这与中国教材重视 MI 原理的引入有关（如图 6）。日、新两国教材相似，只是指出 MI 是证明有关自然数 n 的命题的一种方法。美国教材很特别，特别编制了反例，即找出等式中不成立的反例，且提到基础步骤不一定是 n=1。

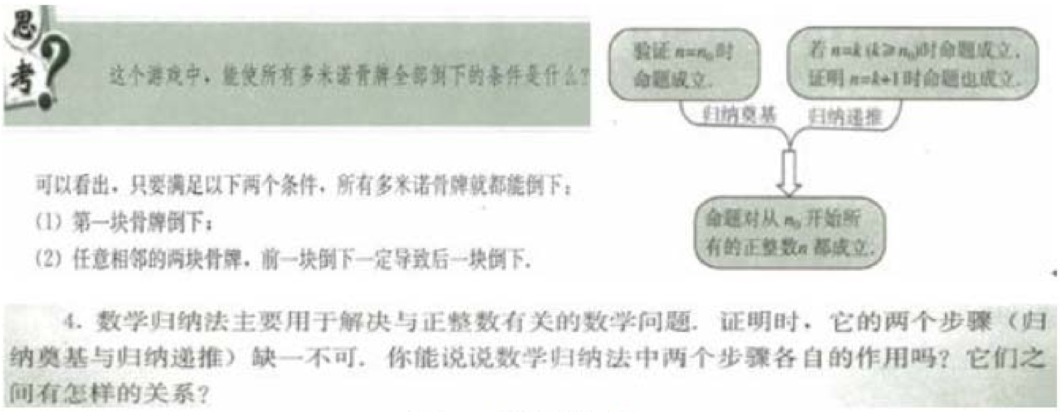


图 6 规避错误点

3.3 MI 内容的数学期望

我们通过对例题、习题的分析来揭示 MI 的数学期望。首先，从宏观层面上看问题的类型（如图 7）。日、新教材都采用数值型题，中国教材中有 5 道图片加文字题，其他均属数值型，美国教材也有 5 道图片加文字题，其余为数值型题。总的来说，四国教材主要采用的主要是数值型题。

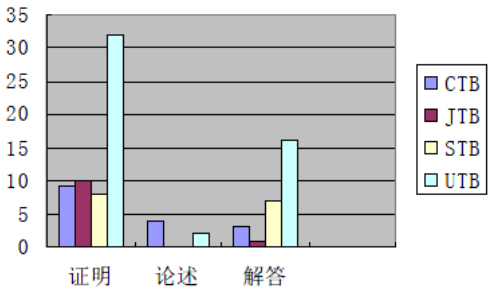


图 7　问题分类

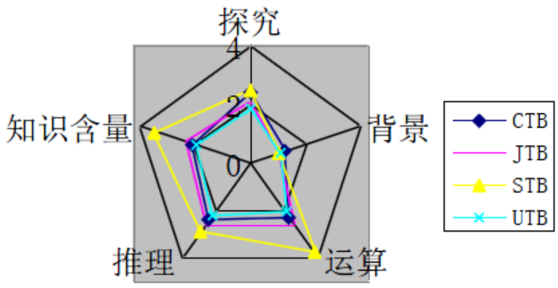


图 8 问题综合难度

表 5 微观层面——MI 内容数学期望之问题综合难度

教材	探究水平	背景	运算水平	推理水平	知识含量
CTB	2.44	1.25	2.31	2.44	2.06
JTB	2.09	1	2.64	2.64	2.36
STB	2.47	1	3.73	2.87	3.47
UTB	1.84	1.12	2.1	2.24	1.94

其次，从微观上来看问题的综合难度（详见表 5，图 8）。总的来说，在探究水平上，新、中教材相近，高于美、日教材。背景水平上，美、中教材相近，日、新教材完全不含背景。在运算水平上，新加坡最高，因为其中的问题以复杂的符号运算居多，日、中、美教材逐次递减，但却相近。在推理水平上，四国教材没有太大差异。知识含量上，新加波教材最高，其中的问题都含有∑符号，且不少是先归纳猜想后证明。其他三国教材差别不大。

4 结语

纵观整个分析过程，中日教材在概念化和结构化内容方面是相似的，中国教材特别强调 MI 概念化过程，是为证明猜想而出现的，通过设置三个思考题，让学生对其本质有深层次的理解，预先让学生认识到 MI 的常见错误，从而达到规避错误的目的。日本教材在 MI 之前设置了递推式一节，而递推是 MI 的核心部分，这样的设置是有助于更好地理解 MI 原理。而美国和新加波教材编排比较相似，美国教材设置了一个天梯问题，之后直接提出 MI 原理，反复练习同一类题目以达到熟练运用的目的，美国教材的习题量是其他三国教材的 3-5 倍，并且题目重复率很高，问题综合难度较低。新加坡教材，直接提出 MI 原理，例题和习题的难度较大，强调图形计算器的使用和∑符号的使用，问题综合难度较高，因此对学生的要求也较高。

虽然关于 MI 历史和数学文化的材料很丰富，但四种教材都很少采用。教材中如何融入这些材料，值得教材编写者思考。教材是课程标准与实际课堂教学课程之间的一座桥梁，对课堂教学中教学内容的组织和呈现有一定的影响，因此在课堂教学设计过程中，可以根据具体学情，汲取不同教育体系之精华。即通过不同教育体系在教材组织与呈现上的对比分析，为我们实际课堂教学，提供一个不同的教学视角。

必须指出，中、日、新三国学生在国际成绩比较研究中，成绩是处于高水平的，他们拥有相同的教育系统结构和文化根底，不同于美国。事实上，中、日、新三国教师有更多时间去研究教材，去开展有关教材的解释和表征的拓展课。而美国的多数教师需要教授很多班级，这可能迫使他们更多地依靠教材，直接地使用教材。

同时，本研究并非评价哪本教材好与坏。事实上，一本教材再完美，也不可能适用于所有学生。教材对教学的影响程度，是由教师对教材的加工和组织以及他们所采用的实际教学方法来确定的。教材是课堂教学不可分割的一部分，教师使用教材的不同方式，并没有排除教材对数学教学的潜在影响的可能性。本文建立了关于 MI 的分析框架，揭示了研究教材中一个特定内容呈现的重要性，尤其是教材在数学内容概念化和规避错误点方面，为教师创造性使用教材提供一种新的视角。

参考文献

[1] Valverde et al. 2002. *According to the book：Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice in the world of textbooks* [J]. Dordrecht: Kluwer. 1-3

[2] Howson, G.. 1995. *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts* [M]. Vancouver: Pacific Educational Press. 5-6

[3] 中华人民共和国教育部 2003. 普通高中数学课程标准（实验）[S]. 北京: 人民教育出版社. 40

[4] NCTM, 2000. *Principles and Standards for School Mathematics* [S]. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. 345

[5] Ron, G., Dreyfus, T. 2004. *The use of models in teaching proof by mathematical induction* [A]. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4: 113-120

[6] Ernest, P. 1984. Mathematical induction: A pedagogical discussion [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 15: 173-189

[7] Avital, S., Libeskind, S. 1978. Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 9: 429-438

[8] Dubinsky, E. 1989. Teaching mathematical induction II [J]. *Journal of Mathematical Behavior*, 8: 285-304

[9] Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task* [M]. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. 121-123

[10] Harel, G. 2001. Development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction [J]. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory*, New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 185-212

[11] Li, Y. et al. 2009. Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division [J]. *ZDM Mathematics Education*, 41: 809-826

[12] 汪晓勤, 2011. 主要国家高中数学教材中的数学文化[J]. 中学数学月刊, 5: 4

[13] 沈春晖, 2012. 中法高中数学教材中的数学文化比较研究[D]. 华东师范大学硕士论文

[14] 赵纪诺, 2012. 中国、日本、新加波和美国高中数学教科书数列内容的比较研究[D]. 华东师范大学硕士论文

[15] Zhu, Y. & Fan, L. 2006. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States [J]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (4): 609–626

[16] 鲍建生 2002. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较研究[D]. 华东师范大学博士论文.

[17] 中学数学课程教材研究开发中心, 2005. 普通高中课程标准实验教科书: 数学（选修2-2）[M] 北京: 人民教育出版社. 92-98

[18] 新编数学 B（改订版）[M]. 数研出版社, 2008. 95-101

[19] Federick Ho et al., 2008. *Mathematics H2* [M]. Singapore: EPB Pan Pacific, 2008: 115-126

[20] Holliday et al., 2008. *Algebra 2* [M]. Columbus, OH: The McGraw-Hill Company, Inc., 670-681

超级画板支持三角形内角和定理：从历史走向课堂

汪文[1] 徐章韬[2]

（湖北汉川一中， 汉川， 431600； 2. 华中师范大学数学与统计学院， 武汉， 430079）

教育取向的数学史（HPM）具有很高的教育价值，以历史内涵为底蕴， 以经验直观为载体， 历史和逻辑结合得丝丝入扣。在汪晓勤教授及其研究团队的大力推动之下，HPM的理论价值和实践价值逐渐引起了人们的注意。信息技术能否与HPM有机融合呢？能否借信息技术之力，使HPM更好更深入地走进课堂教学呢？这一个新的研究取向，有大量的工作要做。我们想先做一些经验性的工作。文[1]详述了三角形内角和定理的历史发展脉络，本文在文[1]的基础之上，将文中的5种教学设计借用信息技术予以实现，使之熠熠生辉。

1 帕斯卡方案的实现

活动一：先探究矩形性质：如图 1，教师可以拖动四个点中的任意一个点发现长方形的四个角都是直角，长方形的四个角的和一定是 360°

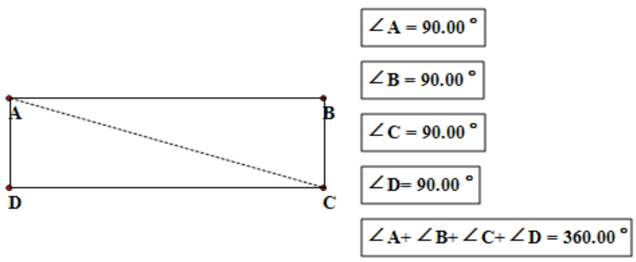


图 1

活动二：再探究直角三角形情况：如图 2，把长方形沿对角线一分为二，就变成两个直角三角形，每个直角三角形的内角和就是 360°除以 2 等于 180°。

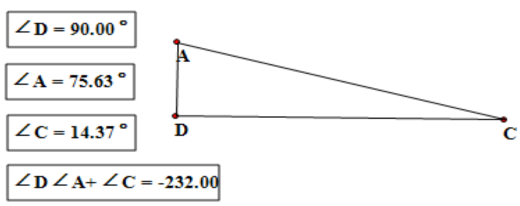


图 2

活动三：探究一般三角形情况：如图 3，过其中一点作另外一边的高线，于是任何一个锐角或三角形都可以通过作底边上的高将其分为两个直角三角形，两个直角三角形的和 $180^\circ+180^\circ=360^\circ$，而其中有两个直角拼在一起成了一条直线，所以真正作为锐角三角形的三个内角的和就是 $360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$。教师拖动点 A 将锐角三角形变成钝角三角形，也得到三角形内角和为 180 度

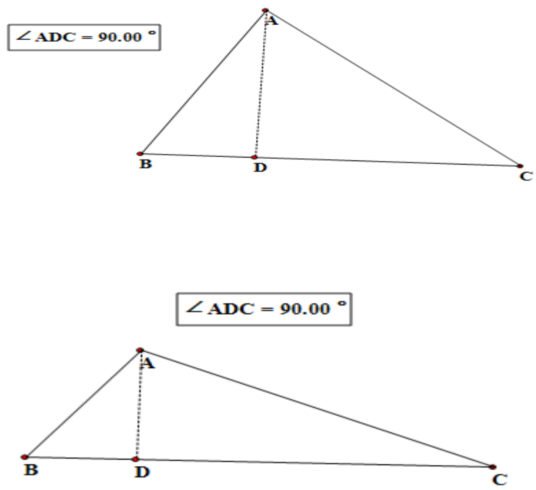


图 3

2 普罗克拉斯方案的实现

如图 4，过点 A 作 AD⊥BC 于 D，过 B 作 BE⊥BC，过 C 作 CF⊥BC，教师拖动 A 点运动，使学生观察三角形内角和的变化，发现内角和始终为 180°

教师证明：因为 $BE//AD//CF$，利用平行线内错角性质可得 $\angle BAD=\angle ABE, \angle CAD=\angle ACF$，所以三角形的三内角和转化为 $\angle FBC+\angle ECB$，再利用平行线的同旁内角性质即可求证，

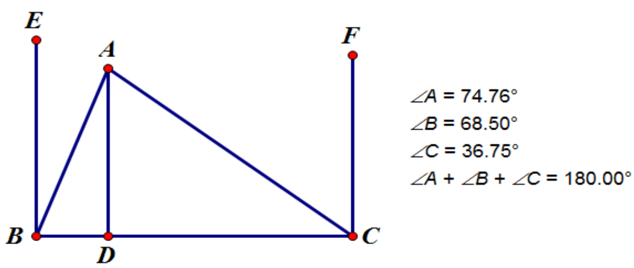


图 4

教师对该做法进行拓展，将 D 点变为线段 BC 上任意一点，拖动 A 点和 D，仍然有三内角和为 180 度，这时候教师只需要将 BE 改为过点 B 与 AD 平行的直线，CF 改为过点 C 与 AD 平行的直线，这样仍然利用内错角性质将三角形的内角和转化为$\angle FBC+\angle ECB$，再利用平行线的同旁内角性质即可求证，证法同上。

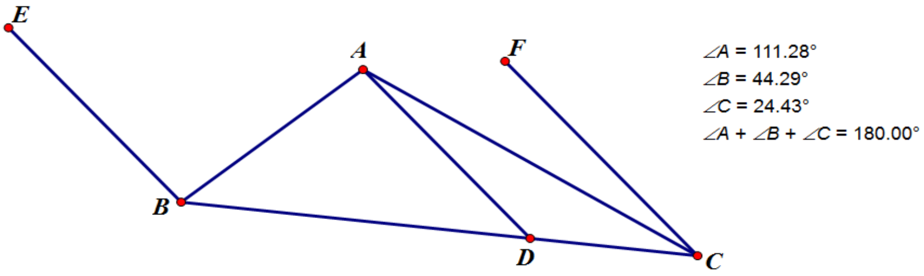


图 5

3 希思方案的实现

探究思路采取从特殊到一般来进行，首先探究一下正三角形的内角和，如图6，作正三角形的高，将其分成两个全等的直角三角形，然后将其中一个以其中位线为对称轴对称过去，然后再将对称后的三角形进行平移，从而两个直角三角形拼凑成一个矩形．由于矩形的四个

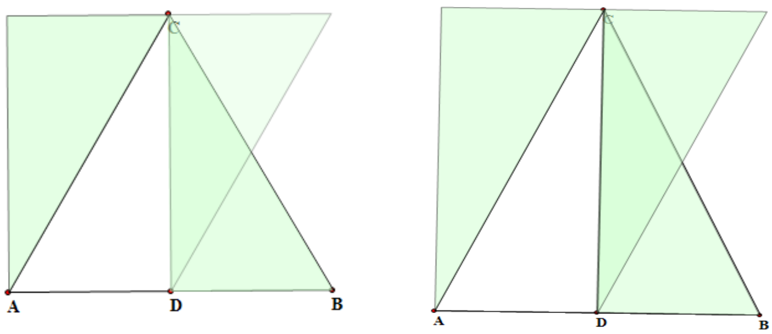


图 6

内角均为直角，故一个直角三角形的内角和等于两直角．因此，原来的等边三角形的内角和等于四个直角减去两个直角，仍为两直角，即其内角和为180°。接着再探究一般的等腰三角形的情况，其方法与等边三角形一样，证法也是一样的。

最后探究一般三角形的情况，如图7，只需要作其一条高，将其分成两个直角三角形，然后分别以两个直角三角形斜边中点为中心旋转180°即可得到两个矩形，教师还可以做一个动画展示其变化过程，证法同上。

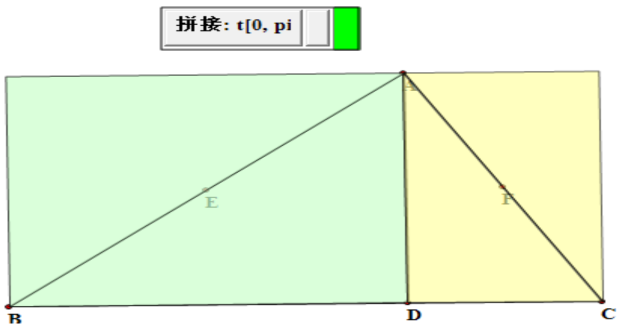


图 7

4 克莱罗方案的实现

如图 8，在三角形 ABC 边 AC 的延长线上取一点 C1，连 BC1，通过测量∠ACB 与∠AC1B 的变化情况和∠ABC 与∠ABC1 的变化情况比较，可以发现在∠A 不变的情况下，∠C 的减小部分与∠B 的增大部分相同，因此三角形内角和的值是恒定不变的，拖动 C1，当 C1 运动到无限远处时，∠C 的大小变为 0，此时 BC1 与ＡＣ 平行，三角形ＡＢＣ 三内角变成了两个同旁内角，其和为 180°

5 泰勒斯方案的实现

活动一：采用正三角形进行探究：如图 9，利用超级画板，分别以等边三角形的的两边中点和第三边所对的点为中心将等边三角形进行旋转，将得到的另外两个图形再以第三边所

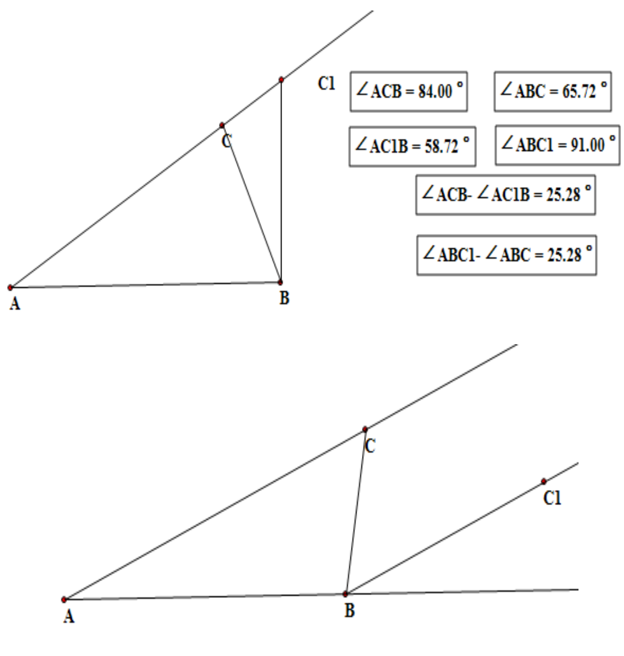


图 8

对的点为中心进行旋转，即可完成将 6 个等边三角形拼接成一个正六边形，教师可以做一个动画展示其变化过程，证明：由于六个同样的正三角形顶点置于同一点，恰好填满该点周围区域，因而六个内角之和等于一个周角，故三个内角之和 180 度。

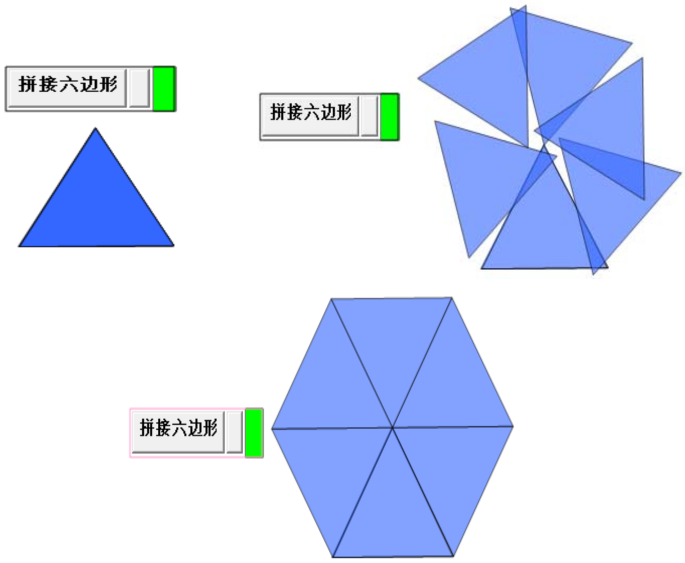


图 9

活动二：采用等腰三角形进行探究：如图，作法同正三角形，证法也同上。

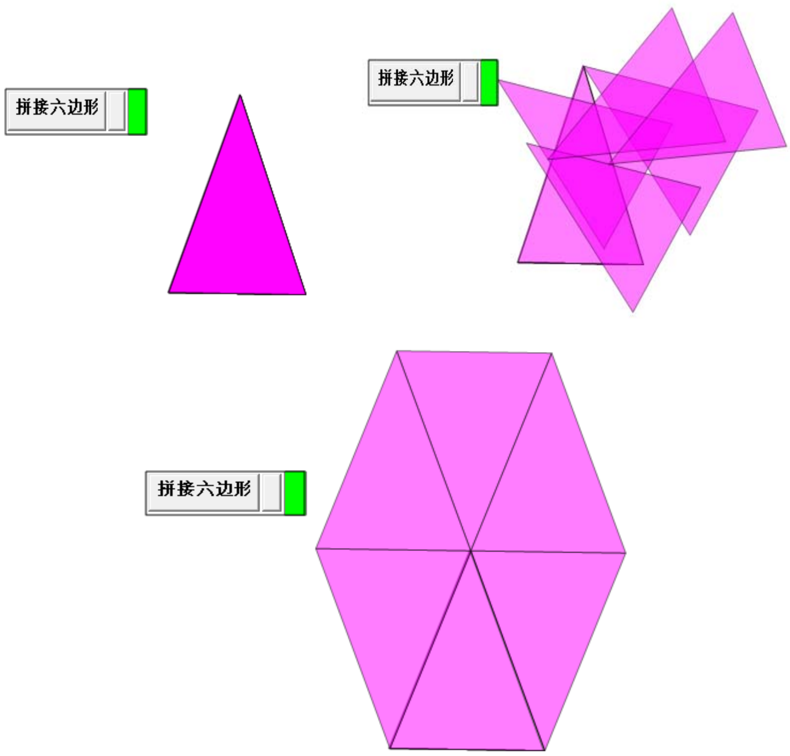


图 10

活动三：采用一般三角形进行探究：如图，作法同上，证法也同上。

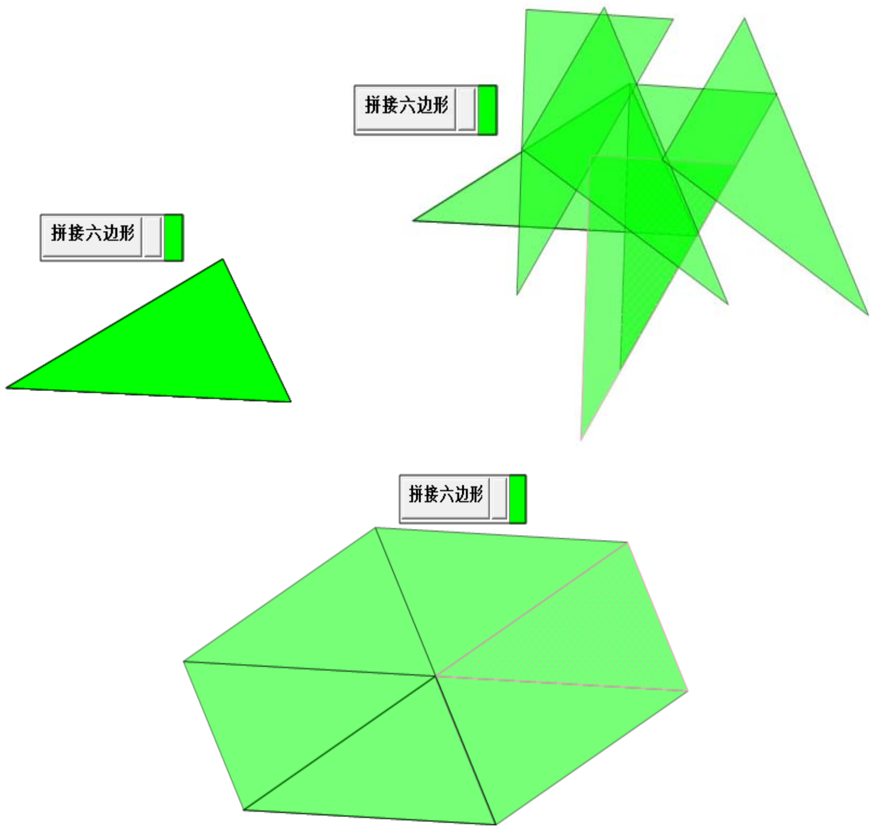


图 11

将数学历史引入课堂，既让学生获得数学发现的成功体验，又极大地拉近了学生与古代数学家之间的“心理距离”；同时借助信息技术将古代的数学家的数学思想予以实现，在动画的吸引下，学生学习数学的兴趣和求知的欲望大大的增强，从而提高了数学课堂的学习效率。这是我们开发的系列案例中的一个，这项工作还可以继续做下去。

参考文献

[1] 汪晓勤, 2012. 三角形内角和定理: 从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 6

[1] 张景中, 彭翕成 2006. 动态几何教程[M]. 北京: 科学出版社

浪漫-数学-往事

刘攀

（华东师范大学数学系）

Question 1. 设在平面上有 5 个点，其中每 3 点不在一条直线上.求证：这 5 点中必有某四个点可构成一凸四边形。

Question 2. 在随意六个人的集会上，必有三个人以前彼此相识，或者以前彼此不相识。

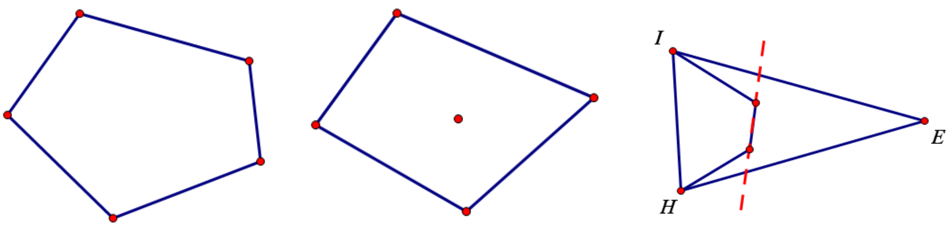
Question 3. 试证明：若把自然数集任意拆分成 2-部分后，其中必有一部分含有任意长度的等差数列。

这一期的文章或可经由上面的 3 个问题说起。对于我而言，它们装载着这些年的记忆。

1 数学往事

在上次的给我们系低年级同学布置的寒假作业中，曾把 Question 1 作为其中的一个问题。在其后我们收到的 2011 年级同学的作业回答中，约有 60 人次回答了这个问题。这些回答的措辞各有千秋，但呈现在其间的思路都差别不大：选择其中的三点作出一三角形，然后对余下的两点就如下的三种情形分别讨论：（1）一个在三角形的外面，一个在里面；（2）两个都在三角形的外面；（3）都在三角形内。其详情比较繁琐。

一则简洁的证明是，关注这 5 个点的凸包——覆盖这 5 点的最小凸集。其可以是如下的三种情形：



前两种情形的结论是显然的。而后一种的情形…比如设此三点形为$\triangle HEI$，其内有 2 点 D, E：则直线 DE 必相交于三点形$\triangle HEI$ 的两个边—比若直线 DE 与 HE，EI 有交点；则 $HIDE$ 这四点可构成一个凸四边形。

这个问题背后有一个浪漫的数学故事； 正是它绘出数学家乔治·塞凯赖什和爱丝特·克莱恩间的一曲爱的传奇。

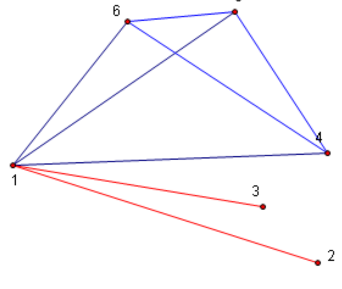
让时间回归 1933 年，匈牙利数学家乔治·塞凯赖什（George Szekeres）还只有 22 岁。那时，他常常和朋友们在匈牙利的首都布达佩斯讨论数学……这群人里面还有数学传奇人物保尔·爱尔多希（Paul Erdős）大神。当是时，爱尔多希只有 20 岁。

话说在一次数学聚会上，一位叫爱丝特·克莱因（Esther Klein）的美女同学提出了这么一个问题：在平面上随便画五个点（其中任意三点不共线），那么一定有四个点，它们构成一个凸四边形（Question 1）。两位数学天才想了好一会儿，不知当如何证明。于是，美女同学得意地宣布了她的证明:这五个点的凸包只可能是五边形、四边形和三角形。前两种情形显而易见，而对于第三种情形，若把三角形内的两个点连成一直线，则三角形的三个顶点中一定有两个顶点在这条直线的同一侧，于是相应的这四个点便构成了一个凸四边形。

众人大呼精彩。之后爱尔多希和塞凯赖什仍然对这个问题念念不忘，于是尝试对其进行推广。其后他们于 1935 年发表一篇论文，证明了如下的结论：对于任意一个正整数 $n\geq 3$，存在有一个正整数 m，使得对平面上的 m 个点（**其中任意三点不共线**），必可从中找到一个凸 n 边形。爱尔多希天真的把之命名为“幸福结局问题”（Happy Ending problem）。

一个问题造就一段姻缘， 或许有几分传奇。Question 1 让乔治·塞凯赖什和爱丝特·克莱恩之间迸出了爱的火花，两人越走越近，最终在 1937 年 6 月 13 日结了婚。在结婚后的近 70 年里，他们先后到过上海和阿德莱德，最终在悉尼定居，期间从未分开过。 2005 年 8 月 28 日，乔治和爱丝特相继离开人世，相差不到一个小时。

Question 2 有一个很响亮的雅名 – “ 6 人集会问题’，印象中这是一个非常经典的问题， 经典到偶尔翻翻每一本课外的趣味数学读物或者竞赛书籍 都会不经意间碰到它。在 myself 的记忆里，撞见这个数学之问至少有数十次之多……然而直到前几天，才知道这个问题原来颇有来头，它最早曾出现在 1958 年 6/7 月号的《美国数学月刊》上（Question E1321）。



让我们暂且驻步，看看这个问题的证明的步履：如图，给这六个人标以代号 1，2，3，4，5，6；我们不妨任选其中的一个——比如 1 号者作为题解之“源”，然后关注其与其他 5 人的关系：他们之间要么认识（图中以红线记），要么不认识（图中以蓝色记）。经由抽屉原理，其间必有 3 个人和 1 号者要么认识，要么不认识。假设有 3 人——比如

4，5，6 号和 1 号不认识。进而考察 4，5，6 间的关系， 如若这 3 个人间都相互认识——456 是一个三边都为红色的三角形，则我们得到所要的结论——其间有三人相互认识。否则，比如 4 号和 6 号相互不认识，则 146 是一个三边都为蓝色的三角形 – 他们间相互不认识。在上假设中把“不认识”和“认识”互换，完全对称地可以证明所要的结论。

Question 3 步入 myself 记忆的天空，或许在许多年前……依稀记得在大学的二三年级，无意间曾看到苏联著名数学家辛钦的一本经典的数学小书《数论中的三颗明珠》，如在海边拾贝……范德瓦尔登定理是三颗明珠中的一颗，而 Question 3 恰是范氏定理的一个特例。那时刻对数论故事有所偏爱，数学大师辛钦的开篇是这样的：

1928 年夏天，我在哥廷根度过了几个星期。象往常一样，许多获得奖学金的外国学生到这里来学习。他们中有许多人我早已认识，有一些还成了我的朋友。我到那里时，那儿的数学家们讨论的主题是年轻的荷兰人范德瓦尔登的绝妙的结果……

话说哥廷根的一个数学家在自己的研究工作中碰到一个问题:这问题看似简单，许多人认为它的证明是不证自明的。但真的要去证明时，却突然发现其困难重重；这个困难而迷人的问题，很快成为大家津津乐道的话题。从年高望重的数学大师到低年级的大学生，大家都在研究它。经过几个星期的奋战之后，荷兰青年范德瓦尔登终于收获其证明……我认识他并亲耳听到他从容不迫的解答。这个解答是初等的，但远不是简单的，问题的内容很深刻，表面上的简单仅是惑人的外衣。（辛钦, 1952）

2 漫步 Ramsey 理论

开篇中的三个问题来自不同的数学领域：Question 1 是一个几何问题，Question 2 是一个组合问题，Question 3 则是一个数论问题。然经由现代数学的语言，它们都汇聚在 Ramsey 理论的长河里。这一数学的长河源自弗朗克-拉姆塞在 1928 年所证明的一个定理。

拉姆塞定理：对于给定的正整数 $p,q\geq 2$， 则存在 $r=r(p,q)\in\mathbb{N}$， 使得在完全 r-边形 K_r 的每一边任意染上红色或者蓝色后， 其中一定有如下的情形之一发生: (1) 含有全是红边的 K_p (2) 含有全是蓝边的 K_q。（Ramsey, 1930）

时至当今，这个定理已有许多种证明，下面的方法缘自爱尔多希和塞克尔斯在 1935 年的一篇论文。

证明：我们把满足上述结论的最小的 r 记作 $R(p,q)$（这个数被叫做拉姆塞数）。其证明的关键在于证明如下的关于拉姆塞数的不等式：

$$R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1)$$

令 $n := R(p-1,q) + R(p,q-1)$，任取 K_n 中的一点 V_0，则在 K_n 中共有 $n-1$ 条边与 V_0 相连。经由抽屉原理，如下的结论(i) ，(ii) 中至少有一个成立：

(i) 这 n-1 条边中有 $R(p-1,q)$ 条红边；

(ii) 这 n-1 条边中有 $R(p,q-1)$ 条蓝边。

若情形 (i) 成立，则通过这 $n_1 = R(p-1,q)$ 条红边与 V_0 相连的 n_1 个点所构成的完全图 K_{n_1} 中， 由拉姆塞数的定义，或者有全是蓝边的 K_q；或者有全是红边的 K_{p-1}-- 在此基础上添加点 V_0 以及与 V_0 相连的 $p-1$ 条红边即可得一全是红边的 K_p。情形(ii) 类似可证。

弗朗克-P-拉姆塞无疑是那个时代的天才，在其短暂的一生中做出了许多开创性的工作— 其范围涉及数学，逻辑学，哲学，经济学等许多领域。拉姆塞于 1903 年 2 月 22 日出生于剑桥；其父亲也是数学家，曾是麦格达伦学院的校长。话说在他很小的时候就对经济学发生了浓厚的兴趣。后来进入剑桥大学三一学院学习数学……其一生只发表了三篇经济学论文，但却对现代经济学产生了重大的影响， 他有着“经济学的伽罗华”的美誉。拉姆塞是剑桥大学永恒的骄傲。

在数学上拉姆塞的热情或在于数学基础的研究上。罗素和维特根斯坦给予他早期研究形而上学，逻辑学和数学哲学的原动力。在那个时代的浮雕里，数学家们身处第三次数学危机的漩涡中：数学大厦的基石上悖论众生，这些悖论不仅影响着经典数学，还呈现着逻辑上的矛盾。数学家们渴望回到在矛盾出现之前的那段短暂而幸福的时光—有如杜布依-雷蒙所言，那是“我们仍住在天堂里”的时候（Kline, 1982）。于是时拉姆塞想拨开逻辑的迷雾，在 1928 年的一篇题目叫“论形式逻辑中的一个问题”的论文中，他证明了上面的定理。一个看似与逻辑毫无关系的无所用的引理，却孕育有一个无比广阔的数学天地— Ramsey 理论。

这里有拉姆塞定理的更一般的模式：让我们先说说一个集合的 k -染色的概念。

集合 S 的 k -染色可理解为 S 到集合 $\{1,2,...,k\}$ 的一个映射 $\chi : S \to \{1,2,...,k\}$，若记 $S_i = \chi^{-1}(i)$ 为 i 在映射 χ 下的原像--- S 中的 i -色元的子集，则我们有集合 S 的 k -染色的拆分 $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$。

记号 $S^{(l)}$ 表示集合 S 中的所有 l -个元素构成的子集的集，而 $[n] := \{1,2,...n\}$。则我们有如下的断言：

对于任意给定的 $r,k \in \mathbb{N}$ 和数 $q_1,q_2,...,q_k \ge r$， 存在有 $n_0 \in \mathbb{N}$， 使得当

$n \ge n_0$ 以及 $[n]^{(r)}$ 的任一 k-染色，一定有 $i \in [k]$ 以及相应的 q_i-元集 $[n]_i \subseteq [n]$，使得 $[n]_i^{(r)}$ 是 i-染色的。（李乔等, 2011; Graham et al., 1900）

注释：满足上定理中最小的那个 n_0 记作 $R^{(r)}(q_1, q_2, \ldots, q_k)$。

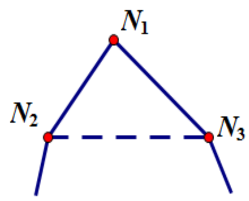
让我们再回到爱尔多希的著名的

Happy Ending problem：对于任意一个正整数 $n \ge 3$，总存在一个正整数 m，使得只要平面上的点有 m 个（其中任意三点不共线），那么一定能从中找到一个凸 n 边形。

这一定理的证明若借助于拉姆塞定理将变得很简单：我们只需取 $m = R^{(4)}(n,5)$ 即可。可证如下：构作 $[m]^{(4)}$ 到 $[2]$ 的一个映射 $\chi : [m]^{(4)} \to [2]$，其间 $\chi^{-1}(1) =$ 4 个点是某一凸四边形的 4 个顶点，否则为 $\chi^{-1}(2)$ 中的点。

经由拉姆塞数的定义，在这 m 个点中或者有 n 个点-它们的任意 4 个点都是某一凸 4 边形的顶点，或者有 5 个点–它们中的任何 4 个点都不是凸 4 边形的顶点。由爱丝特-克莱因的解答：第 2 种情形不会发生。因而我们只需证如下的断言：

设在平面上有 n 点 – 其间任何 3 点都不共线，任何 4 点都可构作一凸的 4 边形，则这 n 个点可构成一凸的 n 边形。



往证其上的断言：对 n 用数学归纳法。$n = 4$ 的情形显然。注意到这 n 个点必有三点 –比如 N_1, N_2, N_3 使得其余 n -3 点都在 $\angle N_3 N_1 N_2$ 的内部。已知如是说，在三角形 $\triangle N_3 N_1 N_2$ 里没有其它的点，关注除点 N_1 之外的 n-1 点，由归纳假设，它们可构成一凸的 n-1 边形，把其中的边 $N_2 N_3$ 代之以边 $N_2 N_1$ 和边 $N_3 N_1$，如此得到一凸的 n 边形。

舒尔定理的问世当比拉姆塞定理早十多年，**somehow it is one Ramsey theory before Ramsey.** 这个定理是德国数学家舒尔（I. Schur, 1875−1944）在 1916 年发表的一篇研究有限域上的费马大定理的论文–论同余式 $x^n + y^n \equiv z^n (\bmod p)$ 中证明的，说的是

舒尔定理：对任意给定的 $k \in \mathbb{N}$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对 $[n]$ 的任一 k-染色，均存在 $x + y = z$ 的同色解。（Schur, 1995）

经由拉姆塞定理，它的证明可以很简洁：在拉姆塞定理中取 $n = R\left(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k}\right)$，则对 K_n 的任意 k-染色，存在一个同色 K_3。设此 K_3 中顶点的记号为 $a < b < c$，则

$\chi(b-a)=\chi(c-b)=\chi(c-a)$，$b-a,c-b,c-a\in[1,n-1]$ 且 $(b-a)+(c-b)=c-a$，得证。

其下呈现的是舒尔定理的无限形式–其联系着舒尔的一个很著名的猜想（Question3）

舒尔定理（无限形式） 对任一给定的 $k\in\mathbb{N}$ 以及 $\mathbb{N}$ 的任一 k -染色， 一定有同色的 $x,y,z\in\mathbb{N}$ 满足 $x+y=z$ 。

Question 3. 若把自然数集任意拆分成 2-部分后，其中必有一部分含有任意长度的等差数列。

舒尔在 1920 年提出的这个猜想 6 年后（1926 年）被荷兰的天才数学家 范德瓦尔登所证明。在辛钦的经典之作《数论中的三颗明珠》里如是说，范德瓦尔登证明了如下更一般的结果：

对任意给定的 $l,k\in\mathbb{N}$，存在 $W=W(l,k)\in\mathbb{N}$，使得把 $[W]$ 任意拆分成 k-部分后，其中必有一部分含有 k 项等差数列。

若你无意间阅读至此，不妨选择一个闲暇的时刻，相约同学几人去那里一游：闪烁在《数论的三颗明珠》中的范德瓦尔登定理的初等证明，或许对今日的我们来说，依然是一个很不错的娱乐数学的“登高处”。

3 注释与随想

有哲人如是说， 真理是时间的女儿。每一个好的数学真理，经由时间的步履，都会焕发其生命的七彩……时间神奇的手让舒尔理论延续着诸多的数学传奇。

（1）爱尔多希和托兰 曾在 1936 年提出如下的猜想：

如果 $\mathbb{N}$ 的子集 T 具有正的“上密度”–此即 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{|T\cap[n]|}{n}>0$， 则 T 中含有任一给定项数的等差数列。

爱尔多希-托兰猜想具有比范德瓦尔登定理更强大的力量–由前者可推出后者。经由数学家罗斯， 塞梅雷迪（E. Szemeredi）等人的努力， 这一猜想在 1974 年梦想成真，这段数学故事被誉为组合论证的一大杰作。（Szemeredi, 1975）然后又有新的遐想步入数学家们的视野：

如果 $\mathbb{N}$ 的子集 T 具有性质 $\sum_{a\in T}\dfrac{1}{a}=\infty$，则 T 中含有任一给定项数的等差数列。

格林和陶哲轩在 2008 年的一篇论文里证明了如下的非常漂亮的定理：素数集中含有任意长度的算术级数。（Green & Tao, 2008）此或可理解为上面的这一猜想的冰山一角。陶哲轩在 2006 年获得菲尔兹奖很大程度上缘于这一非凡的工作。

（2）在舒尔之后，他的一个博士生拉多（R.Rado）在 1933 年以及随后的一系列更进一步的研究工作中，证明了一个深刻的定理，这个定理说的是

拉多定理：整系数方程 $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ 是正则的 $\Leftrightarrow$ 其某些系数之和 $=0$。

其中我们说某一方程组是正则的，如若对 $\mathbb{N}$ 的任一有限 k-染色，这一方程组必有同色的解。

舒尔定理是这一定理的一个特例：$n=3, a_1 = a_2 = 1, a_3 = -1$ 的情形。

（3）在舒尔理论的续篇中，还有哈尔斯-朱厄特定理 → 格雷厄姆-罗斯切特定理……有数学家如是说，“从某种程度上，格雷厄姆–罗斯切特定理（这是关于参数的一个拉姆塞定理）可以看成是现代拉姆塞理论的起点……”这里是数学的一阕“福地洞天”。

从另一个侧面看，伴随时间的步伐，现代拉姆塞理论的研究变得越来越精致。比如关于拉姆塞数的研究是其中的一部分。无论是拉姆塞本人还是爱尔多希-塞克尔斯，都无法给出拉姆塞数的确切值。

$R(p,p) \le p!$ ---拉姆塞的一上界。

$R(p,q) \le \begin{pmatrix} p+q-2 \\ p-1 \end{pmatrix}$ ---爱尔多希-塞克尔斯上界。

Indeed，即使是一些小拉姆塞数的确定，也和许多经典的数学难题一样：看似简单但其内涵深不可测。以下的这段文字告诉我们说：于此我们知道得太少太少 ~

$R(p, q) = R(q, p)$

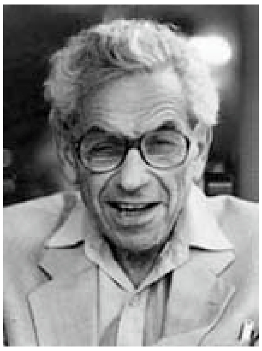
$R(2,q) = q$, ---抽屉原理的情形是拉姆塞理论的一个简单特例。

R(3,3) = 6, R(3,4) = 9, R(3,5) = 14, R(3,6) = 18, R(3,7) = 23, R(3,8) = 28,
R(4,4) = 25； R(5,5) = ？； R(6,6) = ? …

这里有一个数学大神爱尔多希很喜欢讲的故事：

“如果有一个远比我们强大的外星人对我们说:“告诉我 $R(5,5)$ 的值，否则我要毁灭人类。“也许我们最好的策略是集中所有的计算机和数学家来求这个值。但如果外星人要问的是 $R(6,6)$，我们最好的选择 恐怕是和它拼命 …“

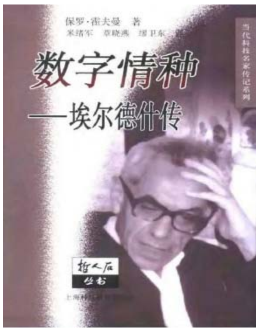
保尔·爱尔多希（Paul Erdos, 1913-1996）是 20 世纪最具传奇色彩的数学家之一；他被誉为 20 世纪的欧拉 --综其一生发表有一千多篇论文， 其中很多具有里程碑的意义。话说在爱尔多希的论文中有不少是和其他人联合发表的，因而在数学界流传着一个很有趣的概念：爱尔多希数。爱尔多希本人具有爱尔多希数 0；那些直接与爱尔多希合作者，人们称其“爱尔多希数”为 1。与爱尔多希数为 1 的人合写论文的人爱尔多希数为 2，依此类推……据说最大的爱尔多希数是 7，比如爱因斯坦的爱尔多希数是 7。象我们这种与爱尔多希挨不上边的，也可以获得一个“爱尔多希数”：∞ 。

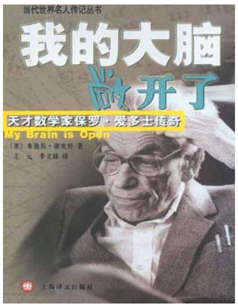


爱尔多希布可谓是制造数学定理的魔术师。恰如他的经典名言：“数学家是将咖啡转换成定理的机器”。他以一种最最简单的方式生活， 他把一生都奉献给了一项专一的事业，那就是发现数学真理。数学是他的依靠。其生活的全部目的就在于证明和猜想。

他唯一牵挂的财产是他的数学笔记本。他一生写满了 10 本数学笔记，并总是随身带着一本，以便随时记下他的数学灵感。在 60 多年的数学生涯中，他带着两件旧行囊，不停地奔波于各大洲的大学数学系和研究中心之间……

爱尔多希大约是 20 世纪旅行最多的数学家。他没有固定住所，是一位巡回访问学者，很多时间花在路上。在 60 多年的数学生涯中，不停地奔波在各大洲的大学数学系和研究中心之间。在永无休止的寻求数学妙题和数学知已的过程中，爱尔多希以疯狂的速度一所大学接着一个数学中心地走遍了各大洲。他通常会在一个数学同事的门阶上出现，宣布“我的大脑敞开了”，然后就和这位数学家工作一两天，直到厌烦了或者他的东道主疲惫不堪为止。这时，他又会去拜访另一家。他在 25 个以上的不同国家研究过数学。他的座右铭是“另一个屋檐，另一个证明”。





爱尔多希可谓是教授中的教授……关于他有太多的故事传奇：他可以在一个知之甚少的数学领域里魔术般的获得一个难题的解答；他或许会在一个演讲的大部分时间里打瞌睡，然后在演讲结束的时刻宣布那个问题解决了；或在听别的教授上课时，他推门而入，侃侃而谈他正在想的一个问题，然后再黑板上留下他特有的童真般的字体……

回眸间，让我们再次阅读“幸福结局问题”的数学画片：

Happy Ending problem：对于任意一个正整数 $n \geq 3$，总存在一个正整数 m，使得只要平面上的点有 m 个（其中任意三点不共线），那么一定能从中找到一个凸 n 边形。

若对于一个给定的 n，把最少需要的点数记作 $E(n)$。则

The hope of mathematics：$E(n) = ?$ 或许也是一个不小的挑战。回眸处，

（i） $E(3) = 3$ 。

（ii）爱丝特·克莱恩的结论则可以简单地表示为 $E(4) = 5$ 。

（iii）数学说，我们可以证明 $E(5) = 9$ 。

2006 年，经由计算机的力量，我们有 E(6) = 17。

然对于更大的 n，$E(n)$ 的值分别是多少？或者问 $E(n)$ 有没有一个准确的表达式呢？这是数学中悬而未解的难题之一。许多年过去了，幸福结局问题依旧活跃在数学的江湖中。

在 Ramsey 理论中我们可阅读到数学模式的魅力：不管你对一个集合如何拆分，你都在不经意间邂逅数学有序的和谐与美。这样的 style 其实也掩映在数学的许多的庭落：无论是哥德巴赫猜想，还是费马大定理，都或可理解为集合拆分和重组的一类模式。

参考文献

[1] 辛钦 1952. 数论中的三颗明珠(中译本). 北京: 科学出版社

[2] Ramsey, F. 1930. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 30: 264-286

[3] Kline, M. 1982. *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press

[4] 李乔, 李雨生 2011. 拉姆塞理论. 大连: 大连理工大学出版社

[5] Graham, R., Rothschild, B., Spencer, J. 1900. *Ramsey Theory*. New York: John Wiley and Sons

[6] Schur, I. 1995. Ramsey theory before Ramsey. *Geombinatorics*, 5(1): 6-23

[7] Szemeredi, E. 1975. On sets of integers containing no *k* elements in arithmetic progression. *Acta Arith*. 27: 199-245

[8] Green, B., Tao, T. 2008. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Annals of Mathematics*, 167: 481-547

ICME-12 中的 HPM 及其研究趋势分析

黄友初

（华东师范大学，上海，200241）

摘 要：本文对 ICME12 中有关 HPM 的会议安排进行介绍，对和 HPM 相关的 24 篇论文进行简单介绍和并将其归为五类，最后结合 ICME 中的 HPM 论文的内容，就 HPM 的研究趋势提出了关注教师教育中的数学史课程、注重 HPM 研究的教育倾向、关注如何在课堂教学中融入数学史等三点看法。

关键词：ICME12，HPM，研究趋势

第 12 届国际数学教育大会(简称 ICME-12)于 2012 年 7 月 8 日～15 日在韩国首尔的会展中心举行。这是四年一度的国际数学教育盛会，吸引了全球数学教育工作者的参与，包括研究数学史与数学教育（简称 HPM）的专家和学者。本文根据 ICME-12 的文本，对与 HPM 有关的部分做一个简单论述。

1 和 HPM 有关的会议安排

本次会议安排了各种形式的报告和讨论，下面分别就这些会议安排中和HPM有关内容做简单介绍。

1.1 大会报告（Plenary Activities）

本次会议的大会报告部分安排了八个报告，没有和HPM有关的内容。

1.2 调查小组（Survey Teams）

调查小组部分安排了五个报告，其中一个报告和HPM有关，就是：

ST3，“数学史支持数学教育中的跨学科研究（The history of mathematics for supporting an interdisciplinary approach to mathematics education）”。

不过不知何种原因，该报告被取消了。

1.3 国家展示（National Presentations）

国家展示部分安排了五个韩国、新加坡、美国、印度和西班牙这五个国家的展示，基本都是介绍本国的教育特别是数学教育体系和数学教育研究情况，只有NP4印度在“历史和文化根源（Historical And Cultural Roots）”部分展示了一些印度的数学发展史。

1.4 常规报告（Regular Lectures）

常规报告共安排了六组72个报告，其中和HPM有关的是三个报告，分别是：

RL4-10，丹麦 Roskilde 大学 Uffe Thomas Jankvist 的“数学教育中的历史、应用和哲学：获取和评估学生的概述和评价（History, Application, And Philosophy Of Mathematics In Mathematics Education: Accessing And Assessing Students’ Overview & Judgment）”；

RL5-9，意大利罗马 La Sapienza 大学 Marta Menghini 的“从实用几何到实验室方法：在几何学的教学历史中寻找欧几里得的替代品（From Practical Geometry To The Laboratory Method: The Search For An Alternative To Euclid In The History Of Teaching Geometry）”；

RL5-10，巴西 Minas Gerais 联邦大学 Michel Spira 的“关于黄金比（On The Golden Ratio）”。

1.5 小组报告（Topic Study Group）

小组报告（Topic Study Group）共分为37个小组，其中的第20小组的主题是“数学教育中的数学史（TSG20：The role of history of mathematics in mathematics education）”，是专为HPM设置的专题。TSG20里面安排了10个报告，分别是：

TSG20-1，土耳其Ahi Evran大学Mustafa Alpaslan等人的“职前数学教师的“数学史”课程：一个研究案例（“History Of Mathematics” Course For Pre-Service Mathematics Teachers: A Case Study）”；

TSG-2，秘鲁数学教育研究会María del Carmen Bonilla的“使用可视化的阿基米德机械

演示,求三维动态几何球体的体积（Visualization Of The Archimedes Mechanical Demonstration To Find The Volume Of The Sphere Using 3d Dynamic Geometry）”；

TSG20-3，法国Bordeaux第一大学Andre Cauty的“如何将阿兹特克人的*xihuitl*(一年18个月)转化成阳历（How to transform an Aztec *xihuitl* (an 18 period year) into a solar calendar?）”；

TSG20-4，丹麦Roskilde大学Uffe Thomas Jankvist等人的“数学教育中数学教学知识和数学史的联系（Mathematical Knowledge For Teaching In Relation To History In Mathematics Education）”；

TSG20-5，丹麦Roskilde大学Tinne Hoff Kjeldsen等人的“历史和学习数学：诊断学生的元话语的规则（History And The Learning Of Mathematics: Detecting Students’ Meta-Discursive Rules）”；

TSG20-6，美国New Mexico州立大学Jerry Lodder的“课堂教学的基本历史来源：以离散数学为例（Primary Historical Sources In The Classroom: Discrete Mathematics）”；

TSG20-7，法国巴黎Denis-Diderot大学Anne Michel-Pajus的“算法的历史在教师培训课堂教学中的使用（Historical Algorithms In The Classroom And In Teacher-Training）”；

TSG20-8，挪威Oslo and Akershus大学Bjørn Smestad的“不要仅仅对师范生讲历史故事–数学史课程应该怎么上？（Not just “telling stories”. History of mathematics for teacher students-what is it and how to teach it?）”；

TSG20-9，澳门大学孙旭花等人的“《九章算术》中‘率’的系统方法及其在分数教学中的应用（The Systematic Model Lǜ（率） Of Jiu Zhang Suan Shu And Its Educational Implication In Fractional Computation）”；

TSG20-10，美国Miami大学Jeffrey J. Wanko 的“通过数学表征了解数学历史文化（Understanding Historical Culture Through Mathematical Representations）”。

1.6 讨论小组（Discussion Group）

讨论小组共分为17个主题，其中和HPM相关的主题主要一个，就是：

DG5，数学史在学校（6–13岁学生）教学中的使用（Discussion Group On Uses Of History Of Mathematics In School (Pupils Aged 6 - 13) 。

参加成员主要有：

挪威Oslo and Akershus大学Bjørn Smestad；

美国Michigan州立大学的Funda Gonulates；

伊朗Isfahan数学工作室的Narges Assarzadegan；

美国Florida州立大学的Kathleen Clark；

希腊Western Macedonia大学的Konstantinos Nikolantonakis。

小组主要讨论如何在低年级的课堂教学中使用数学史，包括怎么融入，什么标准，怎么组织高质量的材料等等。

1.7 工作坊和分享小组（workshop & sharing group）

工作坊和分享小组一共设置了40个主题，和没有和HPM有关的主题。

1.8 海报（Posters）

大会为张贴的海报设置了38个主题，和小组报告一样，第20个主题就是“数学教育中的数学史（Poster20：The role of history of mathematics in mathematics education）”，该主题下张贴了11份和HPM相关的论文，分别是：

PS20-1，美国New Mexico州立大学Patricia Baggett等人的“数学史和数学教育：一门数学研究生的课程（History And Theories Of Mathematics Education: A Graduate Mathematics Course）”；

PS20-2，美国Central Michigan大学Donna Ericksen等人的“日期和历史地点作为激励研究历史的数学思想：世界末日和玛雅数学（Dates And Historical Places As Motivators For Studying Historical Aspects Of Mathematical Ideas: The End Of The World And Maya Mathematics）”;

PS20-3，巴西UNIBAN，Maria Elisa E. L. Galvão等人的“课堂教学好教师培训中的历史经典问题：从起源到答案（History Of Classical Problems In Classroom Or Teacher Training: From Origins To Answers）”；

PS20-4，日本Rikkyo大学Osamu Kota的“（职前）教师数学史课程计划（A Plan Of The Course “History Of Mathematics For (Prospective) Teachers）”；

PS20-5，韩国Kosin大学Young Hee Kye的“数学和艺术史中的范式和泛范式（Paradigm And Pan-Paradigm In Math And Art History）”；

PS20-6，杭州师范大学李国强等人的“基于SOLO分类理论探讨教师的数学史水平（The Discussion On Level Of Qhm Of Mathematics Teachers Based On The Evaluation Theory Of Solo Classification）”；

PS20-7，加拿大Western Ontario大学Immaculate K. Namukasa的“数学史：根据修改教师教育课程的反馈（Historical Mathematics: A Reflection On Modification Of A Teacher Education Course）”；

PS20-8，美国Philippines Diliman大学Carlene P.C. Pilar-Arceo,的“回顾和期待：数学本科生教学和面临的挑战（Looking Back To Look Forward Undergraduate Perceptions & The Subsequent Challenge To Math Educators）”；

PS20-9，上海师范大学陆新生等人的“数学教学材料的历史分析（Historical Analysis Of Mathematics Teaching Materials）”；

PS20-10，日本Fukuyama City大学MIYAMOTO Toshimitsu的“算术和数学教育教学实践给数学文化的历史带来丰富的类型（Arithmetic And Mathematics Education And Teaching Practice To Bring Up History Of Mathematics Culture Richlytype）”；

PS20-11，西南大学姚依玲的“整合数学史的探索和启示—以小学数学教科书为例（The exploration and enlightenment of the mathematics history’s integrating ----Taking the mathematics textbook of primary school as an example）”。

1.9 附属机构（Affiliated Organizations）

本次会议有10个附属机构安排了活动，HPM占据了一个，就是：

AO-1 HPM (International Group for the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics)。

活动是由现任HPM主席，法国Nantes大学的Evelyne Barbin负责，活动安排了韩国时间7月11日下午5:00-6:30和7月12日下午5:00-6:30两个时间。

1.10 ICME 研究和 Klein 项目

该内容安排了ICMI18-ICMI21四个主题的活动，和HPM都没有关系。

2 有关 HPM 研究的内容简介

由于 ST3 被取消，NP4 只提到了古代印度的数学成就，DG5 和 AO-1 所讨论的内容无法获取，因此在本节，我们就 RL、TSG20、PS20 这三部分里的 HPM 论文内容进行简单论述。其中，RL 的 3 篇有关 HPM 的论文篇幅都较多，都在 16-20 页之间；TSG20 的 10 篇论文的篇幅居中，都在 6-10 页之间；PS20 的 11 篇论文篇幅最少，都只有 1 页，基本上就只介绍论文的大概思路。这 24 篇论文的研究内容大致可以分为以下 5 个方面：

2.1 有关数学史料教育取向的挖掘

数学有悠久的历史，大量的研究已表明数学史对数学教育具有重要的促进作用，但是很多教师在课堂教学中还鲜有使用数学史，究其原因主要有两个，一是教师所了解的可供使用的数学史素材不足，另一个就是不知在教学中该如何使用才合适？对于第一个原因，我们除了向教师介绍相关可供教育教学的数学史料以外，还要将更多史料形态的数学转化为可供教育的数学史。在这 24 篇论文中，有 5 篇涉及这方面的研究工作，分别是：

常规报告中的：

Marta Menghini：从实用几何到实验室方法：在几何学的教学历史中寻找欧几里得的替代品；

Minas Gerais：关于黄金比例。

小组报告中的：

María del Carmen Bonilla：使用可视化的阿基米德机械演示，求三维动态几何球体的体积；

Andre Cauty：如何将阿兹特克人的 *xihuitl*（一年 18 个月）转化成阳历；

孙旭花等人：《九章算术》中‘率’的系统方法及其在分数教学中的应用。

Marta Menghini（2012）认为尽管教学中的几何都会受到欧几里得《几何原本》的影响，但是不同的时代的人们对几何有不同的需求，本文从Fibonacci的《Practica geometriae》(1223)

开始，相继介绍了Petrus Ramus的《Geometriae libri》(1569)、Alexis Clairaut的《Elements de Géometrie》(1741)、Franz Ritter von Mocnik的《Anfangsgründe der Geometrie》(≈1860)等9部几何作品，最后提到了1970年代的School Mathematics Project。作者认为不同阶段几何的特点应该写入教科书中，数学教育中也应该提及。

Minas Gerais（2012）就艺术和生物中的黄金比进行了论述，体现了数学的广泛性，数学与和自然的和谐性。从内容上说本文更属于数学文化范畴，但是该文中引用了《几何原本》等一些数学史素材，因此作者也将其归入HPM范畴。

María del Carmen Bonilla（2012）论述了用机械演示来证明阿基米德求的球体积的过程，并认为这些历史过程可以用现代技术来还原，将其有效融入现代教学中。

Andre Cauty（2012）论述了Aztec人一年18个月，每个月20天应该如何计算才能转化成日历的。

Xuhua Sun&Yuwanjun Sun (2012)就《九章算术》中的“率”和分数的四则运算之间的联系进行了论述，并认为它反映了高度概括中国古代数学的整合多种算法。

2.2 数学史课程的研究

要在教学中普及数学史知识的重要渠道就是在职前和职后的教师教育中开设数学史课程，很多国家对职前教师开设了数学史课程，本次会议部分论文就这方面的经验和研究进行了交流，涉及的论文有6篇，分别是：

小组报告中的：

Mustafa Alpaslan等人：职前数学教师的“数学史”课程：一个研究案例；

Bjørn Smestad：不要仅仅对师范生讲历史故事–数学史课程应该怎么上？

Jeffrey J. Wanko：通过数学表征了解数学历史文化。

海报中的：

Patricia Baggett等人：“数学史和数学教育：一门数学研究生的课程；

Osamu Kota：（职前）教师数学史课程计划；

Immaculate K. Namukasa：数学史：根据修改教师教育课程的反馈。

Mustafa Alpaslan & Cigdem Haser (2012)在论文中根据 Jankvist 关于数学史在数学教育中的“目标”还是“工具”的思想，对小学职前教师在数学史课程中的表现进行了数据分析，认为职前教师更多的是将数学史作为目标，在他们的教学中对数学史进行说明是唯一的途径，并说明了数学史课程的必要性。

Bjørn Smestad（2012）论述了在职前教师中进行了连续六个小时的数学史内容的教学，通过调查发现学生对数学史的了解还很少，很难将其与将来的数学教学进行联系，但是他们对数学史都还有正面的态度，作者认为这和职前教师数学史知识储备较少有关。

Jeffrey J. Wanko（2012）介绍了自己在大学里开设的有关数学史的通识课程，并认为通过学习可以让学生从历史的视角来理解数学概念，文化可以为不同背景的学生学习数学概念提供有益帮助。

Patricia Baggett & Andrzej Ehrenfeucht (2012)则简单介绍了他们开设的《数学教育的历史和理论》做法和效果；Osamu Kota（2012）则简单介绍在职前教师中开设数学史课程的必要性和大致做法。Immaculate K. Namukasa（2012）介绍了2007年开始在数学教育课程中开设了数学史课程，经过实施根据反馈对课程进行了修改，限于篇幅没有介绍具体的研究和调整。

2.3 数学史教育价值探索和实践

尽管已经有很多文献对数学史的教育价值进行了阐述，但是从不同视角对其进行论述还是必要的，大致说来对数学史教育价值的论述可以从两个方面展开：一是从教育的本原、宏观的视角阐述数学史的价值；另一个就是通过具体的案例，在实际教学中展示数学史的教育价值。本次会议的论文就包括了这两方面，因此涉及的论文数目也相对较多，有8篇：

常规报告中：

Uffe Thomas Jankvist：数学教育中的历史、应用和哲学：获取和评估学生的概述和评价。

小组报告中的：

Uffe Thomas Jankvist等人：数学教育中数学教学知识和数学史的联系；

Tinne Hoff Kjeldsen等人：历史和学习数学：诊断学生的元话语的规则；

Jerry Lodder：课堂教学的基本历史来源：以离散数学为例；

Anne Michel-Pajus：算法的历史在教师培训课堂教学中的使用；

海报中的：

Donna Ericksen等人：日期和历史地点作为激励研究历史的数学思想：世界末日和玛雅数学；

Maria Elisa E. L. Galvão等人：课堂教学好教师培训中的历史经典问题：从起源到答案；

Carlene P.C. Pilar-Arceo：回顾和期待：数学本科生教学和面临的挑战。

Uffe Thomas Jankvist（2012）对数学教育中数学的历史、数学的应用和数学哲学这三个维度进行了阐述，介绍了 KOM 项目所列出的三种能力也就是“概述和评价”中的三种类型，这三种类型分别与应用、历史和哲学这三个维度相对应。在论述了数学中的信念以后，作者设计了历史、应用和哲学模式下的数学教学，并以欧拉回路、最短路径和最小生成树等问题为例；最后以高中教师的教学活动为数据分析来源，举例说明了如何获取学生的概述和评价，如何评估学生的概述和评价。

Uffe Thomas Jankvist, Reidar Mosvold, Janne Fauskanger & Arne Jakobsen (2012) 根据Ball等人的数学教学知识（MKT）模型，以负数和数系为例，认为MKT应该成为HPM研究的一个重要方向，数学史可以促进教师MKT的发展。

Tinne Hoff Kjeldsen & Pernille Hviid Petersen (2012)建立了一个矩阵模型，使用在函数概念历史的教学中，该模型的理论框架是一个多角度的历史视角，一种基于能力的理解数学教育和Sfard的理论作为交流的思考。该模型能通过函数历史的发展来诊断学生元话语的规则。

Jerry Lodder (2012)通过在《离散数学》课程中融入数学史，让学生了解现代数学是怎样发展过来的，“if…then…”的逻辑是从古希腊就开始发展到现代的。

Anne Michel-Pajus（2012）通过中国和印度迭代算法求平方根、海伦通过逼近求平方根等6个例子说明了，可以在教师培训中使用历史来源题目。

Donna Ericksen & Tibor Marcinek (2012)介绍了有20位学生参加了“数学和世界尽头”的课程，主要介绍玛雅人2012预言和玛雅历史古迹，作者关心的是这是否促进他们学习数学的

动机，但是限于篇幅作者没有给出具体的研究结果。Maria Elisa E. L. Galvão & Vera H. G. de Souza (2012)认为在基于历史视角中进行几何、三角、不定方程、复数教学的时候，有两个问题可以提供帮助，一个是Hippocrates of Chios的月牙，另一个是可构造的内接正多边形，限于篇幅作者也没有具体介绍怎么研究。Carlene P.C. Pilar-Arceo（2012）介绍了根据自己的教学经历，学生在学习数学时候会碰到困难，但是很多学生对他们将来的职业不重要，为了改变这个困难，作者认为可以有两种方式，其中一个就是在教学中根据历史发展顺序向学生展示数学。

2.4 数学史和数学教材

教材中如何体现数学史一直是HPM研究的一个课题，在本次会议中有关这个主题的论文有2篇，都是来自中国大陆，也都是在海报里出现，因此论文都十分的简短，分别是：

陆新生等人：数学教学材料的历史分析；

姚依玲：整合数学史的探索和启示—以小学数学教科书为例。

Xinsheng Lu & Shan Liu (2012)认为新课程改革背景下，我们应该丰富我们的数学教材，从历史视角来审视我们的教材，将有助于数学教材建设。Yao Yiling (2012)也持同样的观点，并小学数学教科书为例，但是限于篇幅，并没有给出具体的研究。

2.5 其他研究

除了以上分类以外，本次会议中还有3篇和HPM有关的论文，都是在海报里，所以篇幅都很短，分别是：

Young Hee Kye：数学和艺术史中的范式和泛范式；

李国强等人：基于SOLO分类理论探讨教师的数学史水平；

MIYAMOTO Toshimitsu：算术和数学教育教学实践给数学文化的历史带来丰富的类型。

Young Hee Kye (2012)认为数学和艺术的方法、历史都受到范式的影响，并且东西方艺术和数学发展的范式是不同。Guoqiang Li & Lihua Xu (2012)将 SOLO 的分类理论用来划分

教师的数学史水平。MIYAMOTO Toshimitsu (2012)认为太阳能时钟可以作为初级中学数学教育的一个例子，里面蕴含了丰富的历史和文化知识。但是，限于篇幅以上论文都没有详细介绍。

3 HPM 的研究趋势分析

本节根据本次 ICME 会议中有关 HPM 的会议安排，以及所提交的 24 篇 HPM 论文的内容进行分析，HPM 目前的研究趋势有以下三个方面：

3.1 关注教师教育中的数学史课程

数学史要为数学教育注入新的活力，就必须在数学教学中融入数学史，而要完成这一工作的关键就是数学教师，因此通过职前职后的教师提高教师的数学史素养就显得尤为重要。目前在很多国家的高等院校都有对职前教师开设数学史课程，但是该课程具体要怎么上，比如内容应该包括哪些？课堂形式可以有哪些？如何通过数学史课程有效的促进教师的数学史素养？如何通过数学史课程促进教师数学教学知识的提高？这些都是 HPM 将来研究值得关注的方面。

本次会议有较多的论文都是探讨数学史课程（或者类似性质的课程）该怎么上，有介绍自己数学史课程的教学内容和教学方式，有介绍自己数学史课程的教学效果，在这种会议中进行这种交流是相当重要和有效的。但是我们也应该看到，不同的地方，学生的背景不同，学生的基础也不同，因此数学史课程的教学也应该有区别，但是无论如何应该通过研究，摸索出最适合自己院校开设数学史课程的方式。而且 HPM 在这方面的研究应该从质性研究和量化研究两方面同时入手，能通过较为有效的方式获取有价值的数据，来说明数学史课程对职前教师将来的教学是有促进的。

3.2 注重 HPM 研究的教育倾向

HPM 是数学史和数学教育的结合体，以往的大部分有关 HPM 研究文献的内容大致可以分为说明数学史的教育价值、数学史教学案例的开发和使用和分析数学史料，显然这方面的研究是十分必要的，但是作为教育体系下的 HPM 如果缺乏从教育特别是大教育的视角来研究 HPM 是不完整的，这会使得 HPM 的研究在研究框架、理论建构和研究方法上显得薄弱。Jankvist&Kjeldsen(2011)指出如果 HPM 要在一般的数学教育中变得更有影响，就要在一

般的数学教育研究中建立一个更大的理论框架。

本次会议中一些论文，和 AO-1 组织的活动内容中，有一些涉及这方面的研究，特别是在小组报告中 Uffe Thomas Jankvist, Reidar Mosvold, Janne Fauskanger & Arne Jakobsen (2012) 提出 Ball 等人所提出的 MKT 理论可以和 HPM 的研究有效结合，在教师教育中提升 HPM 的影响力和发挥更大的作用。文章认为在一般的数学教育中建立理论框架，可以为 HPM 研究提供了一种“语言”，使用这种语言可以让我们更容易和和其他的研究分支进行交流，而不再局限于原来狭小的自我空间中“孤芳自赏”。因此，从本次会议可以看出，将 HPM 研究和一般的数学教育研究靠拢，从中借鉴我们需要的研究理论和研究方法是将来 HPM 研究的一起趋势。

3.3 关注如何在课堂教学中融入数学史

目前很多的一线教师也认同了数学史的教育价值，但是对如何在课堂教学中融入数学史还不是很清楚，也没有一个比较认可的模式。对不同教学内容，不同年龄层次的学生在具体教学中应该如何区别对待？如何将数学史和课堂教学完美结合？这些都需要深入摸索，这也是 HPM 落到教学实处的一个关键环节。

在本次会议中 DG5 就对这个问题进行了讨论，虽然讨论内容还不得而知，但是从会议的安排可以看出 HPM 对这个方面十分重视。由于这种国际会议，很多一线教师限于条件很难参加，所以这方面的论文看到不多，但是有些论文是有关大学课堂教学中融入数学史的研究，因此，我们从中可看出，关注如何在课堂教学中融入数学史也应该是 HPM 研究的一个重要方面，要做好这方面的研究需要 HPM 的研究者和一线教师紧密合作，形成 HPM 研究共同体，才能在实践中结出硕果。

参考文献

Andre Cauty (2012). How to transform an Aztec *xihuitl* (an 18 period year) into a solar calendar? *12th International Congress on Mathematical Education*, 4200-4209.

Anne Michel-Pajus (2012). Historical Algorithms In The Classroom And In Teacher-Training. *12th International Congress on Mathematical Education*, 4237-4246.

Bjørn Smestad (2012). Not just “telling stories”. History of mathematics for teacher students-what is it and how to teach it? *12th International Congress on Mathematical Education*, 4247-4255.

Carlene P.C. Pilar-Arceo (2012). Looking Back To Look Forward Undergraduate Perceptions & The Subsequent Challenge To Math Educators. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7733.

Donna Ericksen & Tibor Marcinek (2012). Dates And Historical Places As Motivators For Studying Historical Aspects Of Mathematical Ideas: The End Of The World And Maya Mathematics. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7727.

Guoqiang Li & Lihua Xu (2012). The Discussion On Level Of Qhm Of Mathematics Teachers Based On The Evaluation Theory Of Solo Classification. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7731.

Immaculate K. Namukasa (2012). Historical Mathematics: A Reflection On Modification Of A Teacher Education Course. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7732.

Jankvist, U. T. & Kjeldsen, T. H. (2011). New avenues for history in mathematics education – mathematical competencies and anchoring. Science & Education, 20(9), 831-862.

Jeffrey J. Wanko(2012). Understanding Historical Culture Through Mathematical Representations. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4264-4269.

Jerry Lodder (2012). Primary Historical Sources In The Classroom: Discrete Mathematics. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4228-4236.

María del Carmen Bonilla (2012). Visualization Of The Archimedes Mechanical Demonstration To Find The Volume Of The Sphere Using 3d Dynamic Geometry. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4190-4199.

Maria Elisa E. L. Galvão & Vera H. G. de Souza (2012). History Of Classical Problems In Classroom Or Teacher Training: From Origins To Answers. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7728.

Marta Menghini (2012). From Practical Geometry To The Laboratory Method: The Search For An Alternative To Euclid In The History Of Teaching Geometry. *12th International Congress on Mathematical Education*, 1110-1127

Michel Spira (2012). On The Golden Ratio. *12th International Congress on Mathematical Education*, 1128-1143.

MIYAMOTO Toshimitsu (2012). Arithmetic And Mathematics Education And Teaching

Practice To Bring Up History Of Mathematics Culture Richlytype. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7735.

Mustafa Alpaslan & Cigdem Haser (2012). “History Of Mathematics” Course For Pre-Service Mathematics Teachers: A Case Study. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4180-4189.

Osamu Kota (2012). A Plan Of The Course “History Of Mathematics For (Prospective) Teachers. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7729.

Patricia Baggett & Andrzej Ehrenfeucht (2012). History And Theories Of Mathematics Education: A Graduate Mathematics Course. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7726.

Tinne Hoff Kjeldsen & Pernille Hviid Petersen (2012). History And The Learning Of Mathematics: Detecting Students' Meta-Discursive Rules. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4218-4227.

Uffe Thomas Jankvist (2012). History, Application, And Philosophy Of Mathematics In Mathematics Education: Accessing And Assessing Students' Overview & Judgment. *12th International Congress on Mathematical Education*, 1010-1029.

Uffe Thomas Jankvist, Reidar Mosvold, Janne Fauskanger & Arne Jakobsen (2012) . Mathematical Knowledge For Teaching In Relation To History In Mathematics Education. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4210-4217.

Xinsheng Lu & Shan Liu (2012). Historical Analysis Of Mathematics Teaching Materials. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7734.

Xuhua Sun&Yuwanjun Sun (2012). The Systematic Model Lǜ（率）Of Jiu Zhang Suan Shu And Its Educational Implication In Fractional Computation. *12th International Congress on Mathematical Education,* 4256-4263.

Yao Yiling (2012). The exploration and enlightenment of the mathematics history's integrating ----Taking the mathematics textbook of primary school as an example. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7736-7737.

Young Hee Kye (2012). Paradigm And Pan-Paradigm In Math And Art History. *12th International Congress on Mathematical Education,* 7730.