



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 8 期



艾舍尔作品：两个相交平面（木刻，1952）

《上海 HPM 通讯》编委会

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：韩 粟

编委（按姓氏字母序）：

纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 邵爱娣 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯 岳增

成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

研究美英早期教科书的意义

汪晓勤

数学教科书是数学教育改革的窗口，它既是特定历史时期教育理论或理念在数学学科上的反映，也蕴含着丰富的数学思想方法和编写者的智慧。近年来，由于 HPM 课例研究的迫切需要，笔者与研究生合作，对 20 世纪中叶以前的美英教科书进行了系统的研究。我们的研究并不是针对某一年出版的某一种或几种教科书，而是针对一个世纪、一个半世纪甚至两个世纪间的几十种、甚至百余种教科书；并不关心教科书的形式（如栏目、插图、篇幅等等），而是聚焦于教科书中的数学内容，其目的是为今日教学提供素材（概念、公式、命题、问题、方法等）以及思想养料。“美英早期教科书研究”书系所呈现的研究结果对数学教学有着丰富的参考价值。

其一，从一个世纪或两个世纪的时间里，我们可以很清晰地看到教科书所呈现的数学概念从不完善到完善的演进过程，如无理数概念从“开不尽的根”到“无限不循环小数”再到戴德金分割的发展，函数概念从“解析式”到“变量对应”再到“对应法则”的扩张，棱柱概念从欧氏定义到改进的欧氏定义再到棱柱空间定义的变迁，这正是人们对有关概念认识过程的缩影，为今日教师预测学生认知、设计探究活动提供了重要参照。

其二，对于一个公式、定理或法则，不同时间出版的不同教科书往往给出不同的推导或证明，如几何中的圆面积公式、球体积公式、代数中的符号法则、数列求和公式、二项式定理等等，通过早期教科书的考察，可以对不同方法进行归类，并对方法的演变规律加以分析，为公式或命题的探究式教学提供参照，也为“古今对照”的评价方式提供依据。

其三，不同的教科书都有自己的逻辑体系，从整体上对其加以了解，可以帮助教师理解古今教科书的差异，从而更好地把握和分析现行教科书。例如，关于“等腰三角形底角相等”这一定理，不同教科书的证明方法互有不同，有的采用作顶角平分线的方法，有的采用作底边上的高线，有的则采用作中线的方法，不同方法的背后是逻辑体系的差异。

其四，对于早期教科书的研究，有助于教师建立不同知识点之间的联系，如三角形中位线定理与平行线分线段成比例定理、三角形一边平行线定理及其逆定理之间的联系，正弦定理、

余弦定理、和角公式、射影公式之间的联系等等。

其五,早期教科书(特别是 1910 年代之后出版的教科书)留下了丰富多彩的数学文化素材,如数学价值观、数学的应用、数学的历史等,这些素材是今日教学的有益资源,也有助于教师树立正确的数学观。

除了以上这些教育价值外,早期教科书研究对于促进作为研究者的职前教师的专业发展也具有重要的意义。

首先,聚焦某个主题、带着特定问题去研究系列早期教科书,研究者需要祛除心中的浮气,练好坐冷板凳的功夫。忽略一种教科书,或浮光掠影一目十行,可能意味着与一种独特的定义、巧妙的方法或精彩的问题失之交臂,唯有潜下心来一本一本地细读,才能获得客观全面的结果。

其次,文献研究是任何一项研究的第一步,早期教科书研究为文献研究提供了良好的机会,可以提升研究者的文献驾驭能力和分析、总结、归纳、提炼的能力,为未来的数学教育研究打下坚实的基础。

再次,尽管研究者受过大学数学教育,但由于大学和中学数学教育的脱节,他们对中学数学的认识往往停留在中学时代用过的数学教科书中,而中学时代以应试为目标的数学教学往往重程序性理解而轻关系性理解。超越刷题应试这个目标来研究一系列教科书,走进另一个时代、另一种文化的编写者的心灵之中,研究者必将能够跨越大学和中学数学知识之间的鸿沟,更加深刻地理解有关知识。

最后,只有走进历史的长河中,一名未来的教师才能感悟,他所熟悉的某种数学教科书,和历史上任何一种教科书一样,都不可能是教科书的顶点和终点,都只不过是匆匆过客,随着时间的推移,旧教科书会被新教科书取代,而新教科书很快又会成为被取代的旧教科书。对早期教科书的系统研究,有助于增加研究者的历史感、开阔研究者的学术视野。

早期教科书研究,让未来教师更优秀!

目 录

刊首新语

研究美英早期教科书的意义 汪晓勤 I

历史研究

美英早期代数教科书中的排列知识 韩 粟 1

美英早期教科书中的三角形中位线定理 秦语真 14

19 世纪至 20 世纪中叶英美教科书中的球体积公式 刘叶青 23

美英早期几何教科书中的二面角概念 刘梦哲 37

英美早期几何教科书中的相似三角形判定 孔雯晴 52

教学实践

HPM 视角下的“二面角概念”教学 高振严, 韩嘉业 65

活动讯息

首期 HPM 高中教师网络研修班结业仪式举行 雷沛瑶 78

CONTENT

FOREWORD	I
-----------------------	----------

HISTORICAL STUDY

The Permutation in Early American & British Textbooks on Algebra ... Han Su	1
The Theorem on the Midsegment of a Triangle in Early American & British Textbooks	Qin Yuzhen 14
The Formula for the Volume of a Sphere in Early British & American Textbooks on Geometry	Liu Yeqing 23
The Concept of Dihedral Angle in Early American & British Textbooks on Geometry	Liu Mengzhe 37
The Judgement of Similar Triangles in Early British & American Textbooks on Geometry	Kong Wenqing 52

TEACHING PRACTICE

Teaching of the Concept of Dihedral Angle from the Perspective of HPM	Gao Zhenyan, Han Jiaye 65
--	----------------------------------

ACTIVITY INFORMATION

The Online Closing Ceremony of the First HPM Online Training Class for High School Mathematics Teachers	Lei Peiyao 78
--	----------------------

历史研究

美英早期代数教科书中的排列知识

韩 粟

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

计数问题是数学中的重要研究对象之一, 而排列是一类最基本的计数模型, 具有便利生产生活的实用意义, 如号码编排、赛事设计及电路布线等, 还体现着数学的文化及应用价值, 如刚刚结束的第十四届国际数学教育大会 (ICME-14) 的会标正是以阴、阳爻排列而成的卦象表示了开会年份 2021 (图 1) [1]。



图 1 ICME-14 会标

排列学习能够培养学生思维的有序性和思考逻辑的缜密性。小学阶段要求学生可以运用枚举、归纳等思想方法解决座位排列、书本排列等具体问题[2], 为高中阶段学习更为抽象的排列概念和一般的排列数公式奠定基础。《普通高中数学课程标准》要求“通过实例, 理解排列的概念, 能够利用计数原理推导排列数公式”[3], 而在一些教师的教学实践中, 却存在着题海战术重于原理、概念及公式教学的现象[4], 全然忽视了学生学习要熟能生巧, 其“巧”必须建立在做“熟”的地基之上[5]。此外, 尽管部分教师意识到排列的教学需要革新, 但也并未投入教学研究中[4], 究其原因, 可能是囿于现有的教科书资源, 如人教 A 版、沪教版及苏教版均采用填空法证明排列数公式, 再导出全排列数公式, 但排列数公式的推导远不止一种方法[6], 学生进行组合运算的难度顺序也是由全排列到排列[7], 而教材序却是由排列到全排列。可见, 挖掘适宜的教学

资源和素材，对改善排列的教学具有重要意义。

有鉴于此，本文聚焦排列内容，对 19 世纪初期至 20 世纪中期出版的美英代数教科书进行考察，尝试回答以下问题：早期教科书如何引入并定义排列的概念？书中有哪些推导排列数公式的方法？对今日教学有何启示？

2 研究方法

本文以相关数据库中 1810-1949 年出版的 61 本美、英早期代数教科书为研究对象，若以 20 年为一个时间段，则它们的出版时间分布如图 2 所示。对于出自同一作者且内容无明显差异的教科书，视为同一种，并以出版最早的版本为准。

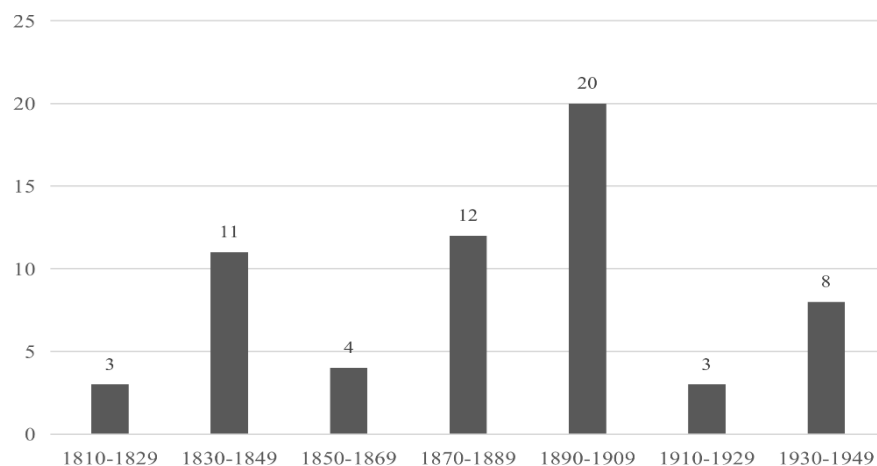


图 2 61 本美英早期代数教科书的出版时间分布

为回答研究问题 1 和 2，按年份依次检索上述 61 本早期教科书，从中分别摘录出排列概念的引入，定义，排列数公式及推导方法共四个知识点的原始文本，再经内容分析，确定每一知识点的分类标准，将原始文本按标准归于不同类别，最后统计并分析每一知识点下不同类别的数量、时间分布及演变规律。结合现行教科书以及排列教学的相关文献，回答研究问题 3。

3 排列的引入

由于 61 种教科书中，排列和组合的内容均出现在同一章，所以此处讨论的引入实则多为对排列和组合的整体引入。除直接呈现概念外，早期教科书中排列的引入方式可分成“字母排序

引入”、“二项式定理系数引入”、“计数问题引入”及“计数原理引入”4 类。

3.1 字母排序引入

大多数早期教科书以简单的英文字母排序引入排列概念，如 3 个字母 a, b, c 可以以 $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ 这 6 种方式排列，而从 3 个字母中选择 2 个字母进行排列的方式则有 ab, ba, ac, ca, bc, cb 共 6 种^[8]。这可以上溯到公元 8 世纪，伊斯兰词典编纂者计算了排列阿拉伯字母可组成单词的个数^[9]，而进入 19 至 20 世纪，Wilczynski 等（1913）指出：排列组合中，不同字母具有表示不同数，人，动物乃至任意类元素等更广泛的符号代数意义^[10]。

3.2 二项式定理系数引入

大数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《初等代数》中提出：组合理论可以用于确定二项式定理中的系数，从中导出一个单独的组合数公式是有益的。紧接着欧拉辨析了排列和组合的区别。^[11]Sestini（1855）则是在指出二项式系数可以表示若干个不同量组合的个数后，引入并讨论了排列及组合。^[12]

3.3 计数问题引入

一部分教科书以数学内外部的计数问题引入排列组合，如 Fisher & Schwatt（1899）以“4, 5, 6 三个数字能组成哪些两位数”和“A, B, C 三个人能组成哪些二人委员会”引入考虑顺序的排列概念和不考虑顺序的组合概念，引入的问题也起到了概念辨析之用。^[13]

3.4 计数原理引入

与今日教科书无一例外地以两类计数原理为排列组合的前一节内容不同，在所考察的早期教科书中，最早提出乘法原理的是 Wentworth（1881）^[14]。所有教科书均未提到加法原理，所以乘法原理又被称为基本原理，这一现象与我国人教版教科书中计数原理内容设置之变迁大致相符^[15]，说明无论中外，计数原理，尤其是加法原理，它们的明确提出都晚于排列组合。计数原理可以看作是教科书编写者从计数问题中提炼出的不证自明的前提，他们意识到：若以这一前提为基础，学生可以更条理分明地进行组合推理。这也与我国当前课程标准的教学要求相符。

早期教科书中乘法原理的陈述多为“如果做第 1 件事有 m 种方式，做第 2 件事有 n 种方式，则一起做两件事便有 mn 种方式”，很少推广到更一般的情况，而直观的图示（图 3）有助

于学生形象地理解乘法原理，同时也能很好地引入排列内容，如启发学生借助树状图，枚举具体的排列等。



图 3 早期教科书中乘法原理的直观图示

4 排列的定义

对早期教科书中排列定义的讨论，可以分三类情况展开：仅定义排列；先定义全排列，再定义排列；先定义组合与全排列，再定义排列。

4.1 仅定义排列

Loomis (1846) 定义“量被排列的不同顺序称为它们的排列 (Permutations)”^[16]，而同时期 Bridge 等 (1848) 定义“排列是指当任意个量 2 个 2 个一起，3 个 3 个一起……时，它们的顺序所能发生变化 (changes) 的数量”^[17]。前者比较简洁，但偏口语化；后者尽管详细，但却混淆了排列和排列数，也忽略了取出量为 1 的情形。尔后，Docharty (1852) 进一步给出如下排列定义：“任意个量的排列是指这些量相对于它们的顺序所发生的变化”，并通过简单例证，指出这些量既可以是全部的量，也可以是部分的量。^[18]

此外，Hill (1857) 从字母书写顺序的角度，给出排列定义如下：“排列是指从 n 个字母中分别选取 1, 2, 3, ..., n 个字母书写得到的结果，每一种情况内，字母书写的顺序都彼此不同。如对 3 个字母 a, b, c 的排列，当选取 1 个字母并按顺序书写时，排列为 a, b, c ；当选取 2 个字母时，排列为 ab, ac, ba, bc, ca, cb ；当选取 3 个字母时，排列为 $abc, acb, bac, bca, cba, cab$ 。”^[19]

4.2 先定义全排列，再定义排列

Clarke (1881) 从名称和符号上区分了全排列 (Permutations) 和排列 (Arrangements)，先定义全排列是“一些物体按所有可能的顺序放置的结果，每一件物体能且仅能在每个结果中出

现一次”，并记“ n 件物体全排列的个数为 P_n ”。接着，定义排列是“将一些物体分成 1 个 1 个，2 个 2 个，3 个 3 个，……， m 个 m 个，再将它们分别按所有可能的顺序放置的结果”，并记“ n 件物体中取 m 件的排列数为 A_n^m ”。^[20]Newcomb (1881) 在全排列的基础上，定义了由部分元素构成集合的排列 (Permutations of Sets)：“当全排列仅由 n 中的 m 个组成时，称为 n 中取 m 个的排列。”^[21]这与人教版在 1954 年编译本中定义“选排列”的做法不谋而合^[15]。

4.3 先定义组合与全排列，再定义排列

Olney (1873) 另辟蹊径，先定义组合 (Combinations) 是“由 n 件物体取 m 件 ($m \in n$) 所组成的不同的组”，而全排列是“物体间一个接一个的不同顺序”，由此定义“排列是组合的全排列” (Arrangements are permutations of combinations)。^[22]这一定义体现出解排列组合问题中“先选后排”的思路。

4.4 讨论

人教 A 版及苏教版教科书对排列的定义均为：“一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \in n$) 个元素，并按照一定的顺序排成一行，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列”，苏教版还补充了“如无特殊说明，取出的 m 个元素都是不重复的”，而沪教版中未有“按照一定的顺序”这一表述。三版现行教科书都在排列的基础上定义了全排列是“ n 个不同元素全部取出的一个排列。”

比较可得，美英早期教科书中对排列的定义与现行乃至新中国成立以来的数学教科书都不尽相同。首先，前者中多数在定义中强调“所有的不同的顺序”，而后者的提法多为“按照一定顺序的一个”。然后，前者很少在定义中明确总体 (n) 和取出部分 (m) 中元素的互异性，仅个别教科书在定义后补充表示：“在没有特别说明的情况下，排列或组合中的物体都应被理解为不同的物体”^[23]，这是因为许多早期教科书研究了重复排列和物有相同时的排列问题，而我国自 1978 年教学大纲起便彻底删去了物有相同时的排列，到 1985 年大纲又彻底删去了重复排列。以使用最广泛的人教版为例，1951 年本备注说明了“字母 $a, b, \dots, k$ 各不相同，而任何字母之重复在组合及排列中皆不允许”，1964 年本起“不同”开始作为排列定义中“元素”一词的定语，并沿用至今。^[15]

最后, 对于一些早期教科书作者将 *Permutations* 一词限制在取出全部元素的情况, 而将取出部分元素的情况以 *Arrangements* 表示, Venable (1872) 认为这些区别并不总是存在的, 两种情况都可以兼用 *Permutations* 一词^[24]; 而我国现行教科书中, 除沪教版基于 *Permutation* 的首字母 P, 将排列数用 P_n^m 表示外, 其余版本均用 A_n^m 表示排列数。

5 排列数公式推导

统一记从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数为 A_n^m , 则 61 种教科书中的排列数公式为

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \quad (1)$$

引入阶乘 (factorial) 后, 上式还可以改写成

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (2)$$

早期教科书中呈现了丰富的公式推导方法, 可以分为“递推法”、“迭代法”、“热尔松证明法”、“插空法”、“填空法”及归纳法共 6 类, 各类方法的数目如图 4 所示。其中 1 种教科书用两种方法分别推导了全排列数公式 (即 n 的阶乘) 和排列数公式, 1 种不加推导地给出了排列数公式。

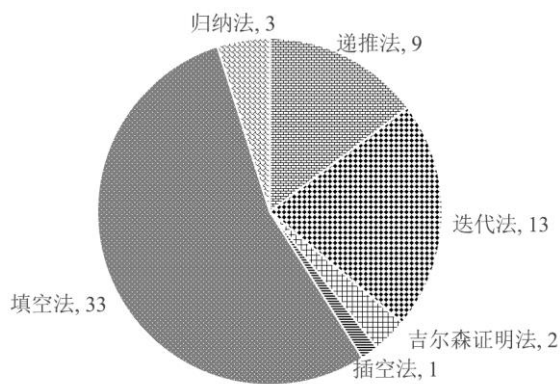


图 4 排列数公式推导方法的数目

5.1 递推法

9 种教科书采用了递推法。如 Boyd (1901) 先将从 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 共 n 个元素中分别取 1

个, 2 个, 3 个元素的所有的排列对应构成 1 行 n 列, n 行 $n-1$ 列, $n(n-1)$ 行 $n-2$ 列的矩阵 (图 5), 易得:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 a_{n-1} & a_1 a_n \\
 a_2 a_1 & a_2 a_3 & a_2 a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 a_{n-1} & a_2 a_n \\
 a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3 a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_3 a_{n-1} & a_3 a_n \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_n a_1 & a_n a_2 & a_n a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n a_{n-2} & a_n a_{n-1}
 \end{array}$$

图 5 n 个取 2 个的所有排列构成的矩阵

每个矩阵中的元素总数即为对应的排列数 $A_n^1 = n$, $A_n^2 = n(n-1)$, $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$, 假设已经从 n 个中取出 $r-1$ 个元素进行了排列, 则剩下的 $n - (r-1) = n-r+1$ 个元素都可以依次放在上述每个排列后充当第 m 个取出的元素, 故每个“旧”排列都可以对应产生 $n-r+1$ 个“新”排列, 即有

$$A_n^r = (n-r+1)A_n^{r-1} \quad (3)$$

对(3)中 r 连续地赋值 $2, 3, \dots, m$, 得到 $A_n^2 = (n-1)A_n^1$, $A_n^3 = (n-2)A_n^2$, $\dots$, $A_n^m = (n-m+1)A_n^{m-1}$,

将它们累乘得到

$$A_n^2 A_n^3 A_n^4 \cdots A_n^m = A_n^1 A_n^2 A_n^3 \cdots A_n^{m-1} (n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \quad (4)$$

除去两边相同的因子, 再由 $A_n^1 = n$ 便可以得到排列数公式 (1)。[25]

5.2 迭代法

13 种教科书采用了迭代法, 推导过程如下:

(1) 当 n 个元素 1 个 1 个取时, 显然排列数就等于 n ;

(2) 当 n 个元素 2 个 2 个取时, 考虑 a_1 可以被接连地放在 $a_2, a_3, \dots, a_n$ 之前, 形成 $n-1$ 个排列; 同理, a_2 可以被接连地放在 $a_1, a_3, \dots, a_n$ 之前, 形成 $n-1$ 个与前面不同的排列。因此, $a_3, a_4, \dots, a_n$ 都可以被接连地放在其他元素之前, 各自形成 $n-1$ 个新的排列。

所以, 当 n 个元素 2 个 2 个取时, 排列数等于 $n(n-1)$;

(3) 当 n 个元素 3 个 3 个取时, 若先取出 a_1 放在首位, 则将 (2) 中的 n 用 $n-1$ 代替, 得到剩下 $n-1$ 个元素 2 个 2 个取的排列数等于 $(n-1)(n-2)$; 同理, $a_2, a_3, \dots, a_n$ 都可以被先取出放在首位, 相应剩下的 $n-1$ 个元素 2 个 2 个取的排列数仍等于 $(n-1)(n-2)$ 。所以, 当 n 个元素 3 个 3 个取时, 排列数等于 $n(n-1)(n-2)$ 。

由上述过程, 可以归纳出: 当 n 个元素 m 个 m 个取时, 即 n 个元素中取 m 个的排列数等于 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 。继续下去, 当 n 个元素全部取出时, 排列数等于所有自然数的乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ 。

由迭代法推导排列数公式的关键在于: 要求 n 个元素中取 r 个的排列数, 则用 $n-1$ 代替上一步的 n , 得到 $n-1$ 个元素中取 $r-1$ 个的排列数, 然后乘以元素总数 n 。不难发现, 这正是排列数的性质之一

$$A_n^r = nA_{n-1}^{r-1} \quad (5)$$

5.3 热尔松证明法

2 种教科书采用了 14 世纪法国犹太数学家本·热尔松 (Levi ben Gerson, 1288-1344) 在《数之书》中的证明方法^[26], 用今天常用的数学语言复述如下:

(1) 证明命题 1 “ n 个不同元素的排列数等于 $n-1$ 个不同元素的排列数与 n 的乘积 (即 $A_n^n = nA_{n-1}^{n-1}$)” 成立, 累乘或者赋值、迭代, 都可得到全排列数公式

$$A_n^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n = n! \quad (6)$$

(2) 依次证明命题 2 “ n 个不同元素中取 2 个的排列数等于 $n(n-1)$ ” 和命题 3 “ n 个不同元素中取 m 个的排列数等于 n 个不同元素中取 $(m-1)$ 个的排列数与 $(n-m+1)$ 的乘积”, 即 $A_n^2 = n(n-1)$ 和 $A_n^m = (n-m+1)A_n^{m-1}$, 累乘或者赋值、迭代, 即得排列数公式 (1)。

实际上, 由式 (3) 和 (5), 可以将热尔松证明法视作是迭代法和递推法的“组合”, 由

迭代法证明全排列数公式，由递推法证明排列数公式，而两种方法都可以独立地推导出全排列数公式和排列数公式，因此热尔松证明法稍显繁琐，很少被教科书作者采用。

5.4 插空法

Chase (1849) 用在元素间插空的方法推导了全排列数公式。

(1) 先确定 a_1 ，则 a_2 可放在 a_1 之后或之前，即 a_1a_2 或 a_2a_1 ，因此 2 个元素的全排列数为 $1 \times 2 = 2$ ；

(2) 引入 a_3 ，它在由 2 个元素 a_1 和 a_2 构成的全排列中，都有 3 个位置可放，因此 3 个元素的全排列数为 $1 \times 2 \times 3 = 6$ 。

依此类推，当引入第 n 个元素 a_n 时，它在由 $n-1$ 个元素构成的全排列中，都有 n 个位置可放。综上，得到 n 个元素的全排列数公式 (6)。^[27] 插空法也常用于解决元素不相邻的排列组合问题。

5.5 填空法

填空法是早期教科书中推导排列数公式运用最广泛的方法，也是我国现行教科书中的推导方法。Marsh (1905) 指出，求从 n 个不同元素中取出 r 个元素排列数的问题等价于用 n 个不同的物体填满 r 个不同位置的方法数。

第一个位置可以填 n 个中的任意 1 个，所以有 n 种填法；第二个位置可以填剩下 $n-1$ 个中的任意 1 个，所以有 $n-1$ 种填法；依此类推，见表 1，第 3, 4, ..., r 个位置分别有 $n-2$,

表 1 填空法

位置	第 1 个	第 2 个	第 3 个	第 4 个	...	第 r 个
填法	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	$n-(r-1)$

$n-3$, ..., $n-(r-1)$ 种填法。所以由乘法原理，填满 r 个不同位置的方法数为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ ，即证得排列数公式 (1)。^[23]

5.6 归纳法

在运用归纳法的 3 种教科书中，1 种为不完全归纳法，其余两种为数学归纳法。

Durell (1897) 从 4 个不同元素中取出 2 个的排列数为 $4 \times 3 = 12$ ，类比得到 n 个不同元素中取出 2 个的排列数为 $n(n-1)$ ，进一步又不完全归纳得到 n 个不同元素中取出 m 个的排列数为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 。^[28]

Hawkes (1905) 先由特殊的排列数计算式，猜想在一一般情况下， n 个不同元素中取出 m 个的排列数为 (1) 式，再用数学归纳法证明如下：

(1) 令 $m=1$ ，显然 n 个中取出 1 个的排列数为 n ；令 $m=2$ ，则取出 2 个来排列，第 1 个位置的填法有 n 种，第 2 个位置的填法有 $n-1$ 种，所以 n 个中取出 2 个的排列数为 $n(n-1)$ ；

(2) 假设式 (1) 对 $m=k$ 时成立，即 $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ ，则当 $m=k+1$ 时，由假设前 k 个位置的填法有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ 种，此时剩下 $n-k$ 个元素，所以第 $k+1$ 个位置就有 $n-k$ 种填法，所以由乘法原理， n 个不同元素中取 $k+1$ 个元素的排列数等于 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)$ ，即 A_n^{k+1} 。

由 (1) 和 (2)，排列数公式 (1) 得证。^[29]

5.7 推导方法的演变

1810-1949 年这 140 年间 6 种推导排列数公式（包括全排列数公式）的方法在各时期内的分布情况如图 6 所示，可以明显看到，早期教科书中排列数公式的推导方法呈现“从单一到多元，最终回归单一”的演变趋势。19 世纪初期迭代法独占鳌头，随着时间的推移，其余 5 种方法交替出现，到 20 世纪中期，填空法最终成为早期教科书中唯一呈现的方法，并沿用至今。

迭代法、递推法和填空法作为早期教科书中出现频率最高的三种推导方法，前两者实际上分别借用了排列数具有的 $A_n^r = nA_{n-1}^{r-1}$ 和 $A_n^r = (n-r+1)A_n^{r-1}$ 两个性质，虽然在代数推理上并不困难，但从排列是“排成一行”的角度（如表 1）看，它们不如后一者直观形象；加上自 19 世纪末期起，乘法原理开始出现在教科书中，而填空法正反映出从 n 个不同元素中取出 m 个来排列的这一事情可分为 m 步完成，所以由乘法原理运用填空法更可谓水到渠成。此外，推导方法之一的

归纳法从不完全归纳到完全归纳的转变,也体现了早期教科书中数学归纳法日臻完善的过程^[30]。

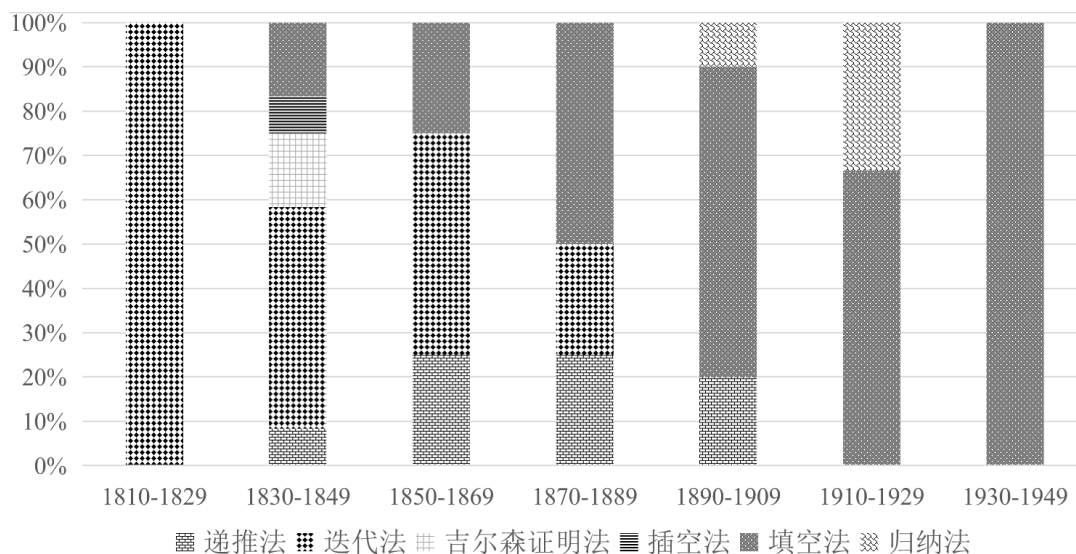


图6 排列数公式推导方法的演变

6 结论与启示

综上所述,美英早期代数教科书中四种引入排列组合内容的方式,分别为字母排序引入、二项式定理系数引入、计数问题引入及计数原理引入。在对排列概念的定义上,早期教科书中的定义允许存在重复排列和物有相同时的排列,这与我国教科书大相径庭。最后,早期教科书中有着丰富的排列数公式推导方法,即递推法、迭代法、热尔松证明法、插空法、填空法及归纳法。以上种种为今日教学带来了诸多启示。

其一,在引入并定义排列概念时,可以让学生先依据自己的生活经验和学习经验进行描述,从易到难地解决一些特殊计数问题,逐步经历排列概念从具体到抽象,从特殊到一般的形成过程。课堂上的计数问题不仅可以来源于生活,也可以来源于数学史,如希腊哲学家克里希普(Chrysippus, 280 B.C.-206 B.C.)的公理排列问题,法国数学家布丢(Buteo)的组合锁问题^[26],印度数学家婆什迦罗(Bhaskara, 1114-1185)的散卜神手握物品问题等等^[9],增加课堂的趣味性和人文性。

其二,在推导排列数公式时,填空法无疑是历史和现实交汇出的最佳选择,但其他方法中蕴含的递推、迭代及归纳等数学思想在学生的数学学习中也至关重要。研究表明,教师教学和

组合运算对学生的组合推理有显著影响^[7]，从 HPM 的角度，教师可以运用重构式，让学生基于排列数公式的推导解释排列数的性质 $A_n^r = nA_{n-1}^{r-1}$ 和 $A_n^r = (n-r+1)A_n^{r-1}$ ；也可以运用顺应式，先让学生猜想排列数公式，自主探究其推导证明，然后再古今对照，体会方法之间的异同以及乘法原理的基石作用，融合探究之乐，方法之美与能力之助，由此培养逻辑推理、数学运算等核心素养。

参考文献

- [1] 李海, 张晋宇, 王建磐. 承办 ICME-14 是中国数学教育崛起的良好契机——王建磐教授访谈[J]. 数学教育学报, 2018, 27(06): 55-59.
- [2] 刘晓燕, 徐章韬. 小学数学教科书中“组合问题”的编排[J]. 数学教育学报, 2017, 26(03): 68-72.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 46.
- [4] 许娟. 高中排列组合的教学研究与实践[D]. 西北师范大学, 2006.
- [5] 李士锜. 熟能生巧吗[J]. 数学教育学报, 1996(03): 46-50.
- [6] 方倩. HPM 视角下排列、组合和二项式定理的课例研究[D]. 华东师范大学, 2018.
- [7] 胡海霞, 汪晓勤. 影响高中生组合推理的因素[J]. 数学教育学报, 2009, 18(6): 26-29.
- [8] Dickson, L. E. *College Algebra* [M]. New York: J. Wiley & Sons, 1902: 85.
- [9] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction* [M]. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998.
- [10] Wilczynski, E. J., Slaught, H. E. *College Algebra* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1916: 352.
- [11] Euler, L., Lagrange, J. L. *Elements of Algebra* [M]. London: J. Johnson and Co, 1810: 170.
- [12] Sestini, B. *A Treatise on Algebra* [M]. Baltimore: J. Murphy & co, 1855: 94.
- [13] Fisher, G. E., Schwatt, I. J. *Elements of Algebra* [M]. New York: Macmillan, 1899: 408.
- [14] Wentworth, G. A. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1881: 316-318.
- [15] 韩豆豆. 高中排列组合内容设置之变迁研究(1951-2004 年)[D]. 内蒙古师范大学, 2019.
- [16] Loomis, E. *A Treatise on Algebra* [M]. New York: Harper & Bros, 1846: 237.

- [17] Bridge, B., Phillips, J. M., Atkinson, T. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. London: A. Scott, 1848: 120.
- [18] Docharty, G. B. *The Institutes of Algebra* [M]. New York: Harper & Brothers, 1852: 207-210.
- [19] Hill, D. H. *Elements of Algebra* [M]. Philadelphia: J.B. Lippincott, 1857: 374.
- [20] Clarke, J. B. *Algebra for the Use of High Schools, Academies and Colleges* [M]. San Francisco: A. L. Bancroft and company, 1881: 462.
- [21] Newcomb, S. *Algebra for Schools and Colleges* [M]. New York: H. Holt and Company, 1881: 273-275.
- [22] Olney, E. *A University Algebra* [M]. New York: Sheldon, 1873: 292.
- [23] Marsh, W. R. *Elementary Algebra* [M]. New York: C. Scribner's Sons, 1905: 362-364.
- [24] Venable, C. S. *An Elementary Algebra* [M]. New York: University Publishing Company, 1872: 254.
- [25] Boyd, J. H. *College Algebra* [M]. Chicago: Scott, Foresman and Company, 1901: 599-600.
- [26] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [27] Chase S. *A Treatise on Algebra* [M]. New York: Appleton, 1849: 203-204.
- [28] Durell, F., Robbins, E. R. *A School Algebra Complete* [M]. New York: Charles E. Merrill Co, 1897: 336-337.
- [29] Hawkes, H. E. *Advanced Algebra* [M]. Boston: Ginn and Company, 1905: 143-145.
- [30] 方倩, 汪晓勤. 20世纪中叶以前西方代数教科书中的数学归纳法[J]. 数学教学, 2017(11): 1-4+31.

美英早期教科书中的三角形中位线定理

秦语真

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角形中位线定理是平面几何中的重要定理, 关于该定理, 我国现行五种初中数学教材(人教版、北师大版、沪教版、浙教版以及苏教版)在内容安排上大同小异: 都安排在平行四边形章; 除人教版外, 其余四种教材均将该知识点单独列为一节; 人教版在平行四边形判定一节的例题中直接用文字语言描述该定理; 浙教版采用了现实情境引入, 其余三种教材采用剪拼法, 将三角形拼成一个平行四边形来引入; 在证明方法上: 人教版通过倍长中位线, 构造两个平行四边形进行证明, 其他教材均采用倍长中位线, 构造一个平行四边形进行证明。在已有的教学设计中, 教师大多从课本出发^{[1][2]}, 更倾向于在课堂中让学生学会在不同数学情境下添加中位线来解决几何问题, 也有教师从 HPM 视角来开展教学^{[3][4]}。

早在古巴比伦时期, 人们已经知道“等分三角形的平行线段是按照等差数列递增的”, 欧几里得在《几何原本》卷六给出如下命题(命题 2): “若一条直线平行于三角形的一边, 则该直线截另两边所得线段成比例; 若三角形两边被分割成比例的线段, 则分点连线平行于三角形第三边”, 命题的第一部分即三角形一边平行线定理, 第二部分为该定理的逆定理, 而三角形中位线定理不过是第二部分的特殊情形而已, 欧几里得却只字未提。我国三国时期的数学家在推导三角形面积公式时, 实际上也得到了三角形中位线的相关性质。

今日教科书和课堂教学中的中位线定理主要体现转化思想, 但仅局限于三角形与平行四边形之间的联系上, 人们对于该定理与其他几何定理之间的联系、在平面几何中的地位、定理证明的演进过程等知之甚少。有鉴于此, 本文聚焦三角学中中位线定理, 对美英早期教科书进行考察, 以期获得有益的教学素材和思想启迪。

2 早期教科书的选取

本文选取 1750-1950 年间出版的 68 种涉及三角形中位线定理的美英早期教科书为研究对

象，以 50 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布状况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若所涉及的内容无显著变化，则选取最早版本；若内容发生了显著变化，则将其视为不同教科书。

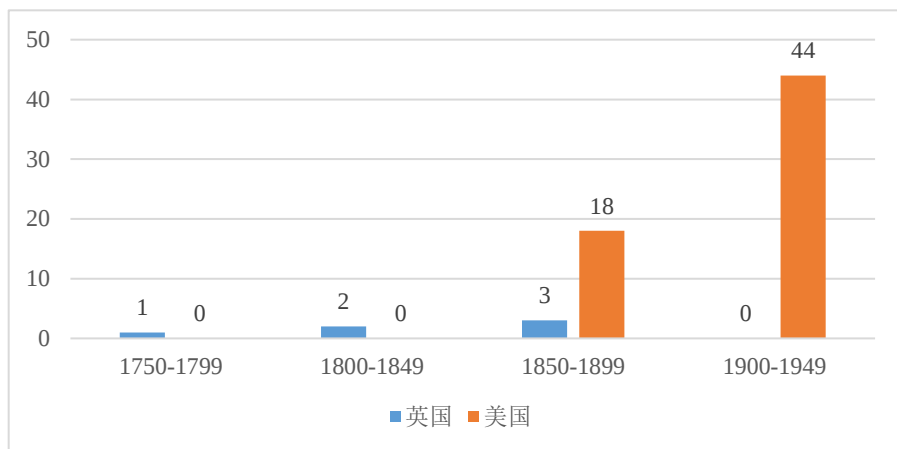


图 1 68 种教科书出版时间分布

18 世纪和 19 世纪初期的几何教科书绝大多数照搬《几何原本》的内容^[5]，没有出现三角形中位线定理，本文对此类教科书不予考虑。出版于 19 世纪中叶之前的有关教科书中，三角形中位线性质的定理的形式单独出现；而之后的教科书中，该定理大多出现在“平行四边形”或“多边形”的主题中，这与今日教科书的情形类似。

3 三角形中位线定理的呈现方式

在早期几何教科书中，三角形中位线定理出现的方式可分为三种。一是作为定理单独出现，二是作为推论出现，三是在练习题中出现，具体情况见表 1。

表 1 三角形中位线定理的呈现方式

出现方式	具体表述	教科书种数
作为定理	联结三角形两边中点的直线必平行第三边；	39
单独出现	联结三角形两边中点的线段等于第三边的一半；	
	联结三角形两边中点的直线平行于第三边且等于第三边的一半。	
作为推论	根据平行线等分线段定理或其推论得到三角形中位线	24

定理。

证明三角形中位线定理；

证明：联结三角形三边中点所形成的四个三角形两两
全等；

证明：过一边中点且平行于底边的直线必平分第三边；

5

图 2 给出了三种呈现方式的时间分布。

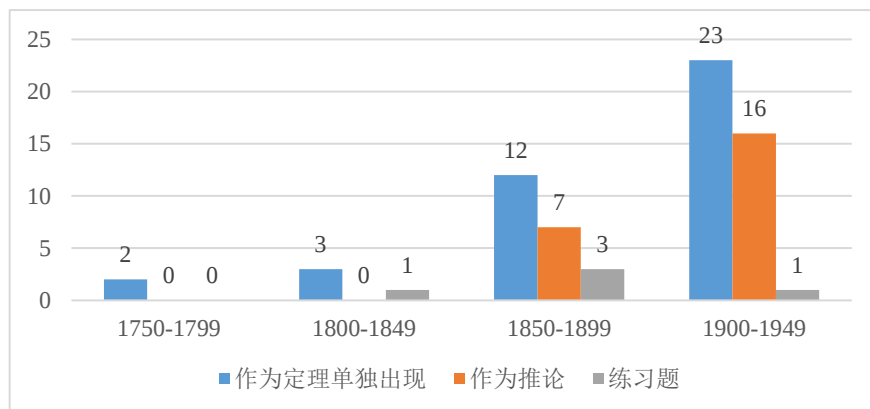


图 2 三角形中位线定理呈现方式的时间分布

从图 2 可见，19 世纪中叶之前，涉及三角形中位线定理的教科书占比较少；而 19 世纪中叶之后，绝大多数教科书中三角形中位线定理是作为一个定理独立出现的，此外还有部分教科书根据平行线等分线段定理或其推论得到三角形中位线定理，关于三角形中位线定理的诠释更加多样化。

4 三角形中位线定理的证明

4.1 面积法

有 2 种教科书采用面积法证明三角形中位线定理。1811 年，苏格兰数学家莱利斯(J. S. Leslie, 1766-1832) 单独研究了三角形中位线的情形，并给出了以下证明^[6]：如图 3，因 D 、 E 分别为

AB 、 AC 的中点，故 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$ ，即 $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，同理可得 $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，因此

$S_{\triangle BDC} = S_{\triangle BEC}$ ，即可得 $DE \parallel BC$ 。

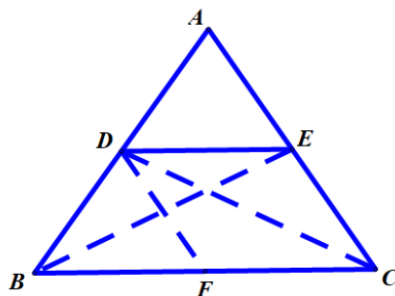


图 3 面积法

莱利斯并未涉及中位线和底边的大小关系。实际上，易证 $\triangle BDE$ 的面积等于 $\triangle BCE$ 的一半，由此得 DE 为 BC 的一半。

4.2 同一法

有 27 种教科书根据“平行线等分线段定理”或其推论，用同一法证明三角形中位线定理。如 Wentworth (1888) 首先利用平行线性质的证明了“平行线等分线段定理”^[7]：

定理：一组平行线在一条直线上截得的线段相等，则在其他直线上所截得的线段也相等。

如图 4，直线 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ ，其中 $AB = BC = CD$ ，分别过点 A' 、 B' 、 C' 作 l_1 的平行线分别交 BB' 、 CC' 、 DD' 于 E 、 F 、 G 三点，则四边形 $ABEA'$ 、 $BCFB'$ 、 $CDGC'$ 均为平行四边形，于是有 $AB = A'E$ 、 $BC = B'F$ 、 $CD = C'G$ ，从而得 $A'E = B'F = C'G$ ，利用平行线性质的知， $\triangle A'EB' \cong \triangle B'FC' \cong \triangle C'GD'$ ，因此 $A'B' = B'C' = C'D'$ 。^[7]

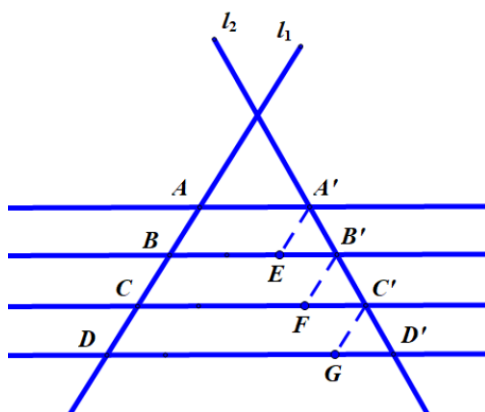


图 4 平行线等分线段定理证法 1

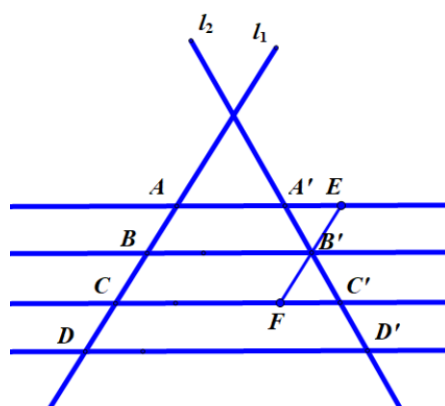


图 5 平行线等分线段定理证法 2

关于平行线等分线段定理，Dupuis (1889) 还给出了另一种证明：如图 5，直线 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ ，其中 $AB = BC = CD$ ，过点 B' 作 l_1 的平行线交 AA' 、 CC' 于点 E 、 F ，易知 $EB' = B'F$ ，

$\angle A'B'E = \angle C'B'F$, $\angle A'EB' = \angle B'FC'$, 于是, $\triangle A'B'E \cong \triangle C'B'F$, 故知 $A'B' = B'C'$, 同理可得 $B'C' = C'D'$ ^[8]。

在所考察的教科书中, 平行线等分线段定理在三角形中有以下两条推论:

推论 1: 过一边中点且平行于底边的直线必平分第三边^[9]。

如图 6 所示, 点 D 是 AB 的中点, $DE \parallel BC$, 过点 A 作直线 $l_1 \parallel DE$, 根据平行线等分线段成比例定理可得: $AE = EC$ 。

推论 2: 联结三角形两边中点的直线平行于第三边且等于第三边的一半。

证法 1: 如图 6 所示, 已知 D 和 E 分别是 AB 和 AC 的中点, 过 D 作 BC 的平行线, 交 AC 于 E' , 根据推论 1 可知, $AE' = AE$, 因此 DE 和 DE' 重合, 故有 $DE \parallel BC$ 。再由点 E 向 BC 作平行线交 BC 于 F , 易得 $DE = BF = FC = \frac{1}{2}BC$ ^[10]。

证法 2: 如图 6, 根据平行线等分线段定理, 利用同一法也可得 $AE' = AE$, 故 $DE \parallel BC$ 。又由图 4 可知: $DD' - DG = DD' - CC' = D'G = C'F$, 因此在图 6 中 $BC - DE = DE - AA = DE - 0 = DE$, 故 $BC = 2DE$ ^[11]。

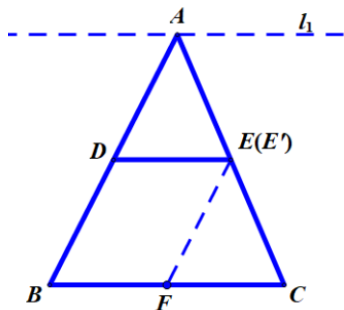


图 6 同一法

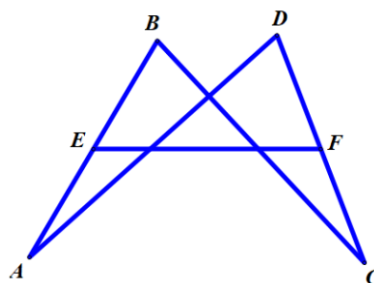


图 7 平行线等分线段定理的逆命题的反例

此外, 还有教科书指出: 当三条或三条以上的直线被截得的线段相等, 则三条直线不一定平行。如图 7: 线段 BC 、 AD 、 EF 将线段 AB 、 CD 分成了相等的部分, 但线段 BC 、 AF 、 ED 并不互相平行。因此, 同一法只适用于三角形中位线^[12]。

图 8 给出了三角形中位线定理与平行线分线段成比例、三角形一边平行线等定理之间的关系, 其中实线表示教科书明确呈现的关系, 虚线表示教科书并未涉及的关系。

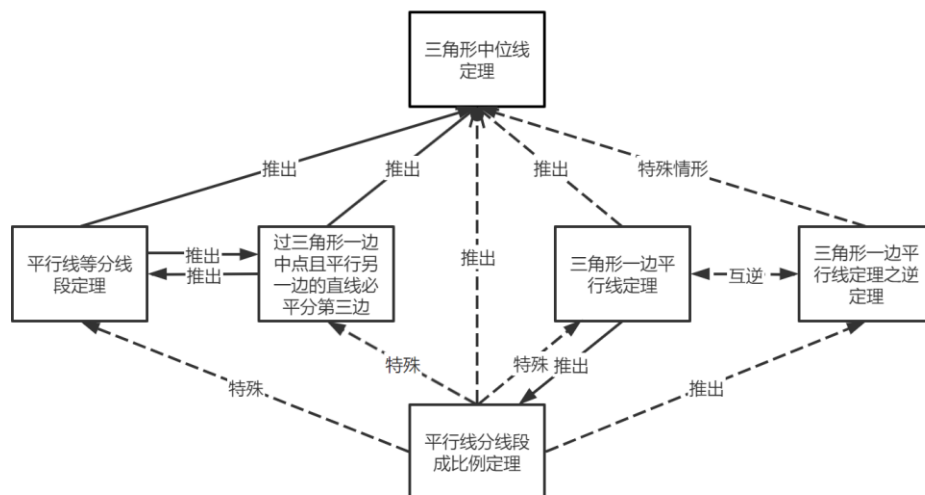


图 8 三角形中位线定理与其他几何定理之间的关系

4.3 反证法

有 8 种教科书利用反证法来证明三角形中位线定理。1798 年，法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）在其《几何基础》中给出了三角形一边平行线定理，并运用反证法证明了其逆定理^[13]，但和欧几里得一样，勒让德并未从三角形一边平行线定理或其逆定理出发，推出三角形中位线的性质。直到 20 世纪，才有教科书开始涉及该特殊情形。

如，Sykes（1918）利用反证法证明三角形中位线定理^[14]。如图 9，已知 D 和 E 分别是 AB 和 AC 的中点，即 $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ ，假设 DE 不平行于 BC ，作 $DF \parallel BC$ ，则由平行线分线段成比例定理可知： $\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{CF}$ ，与已知矛盾，故 $DE \parallel BC$ 。

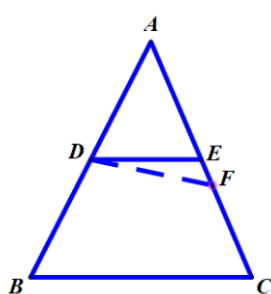


图 9 反证法

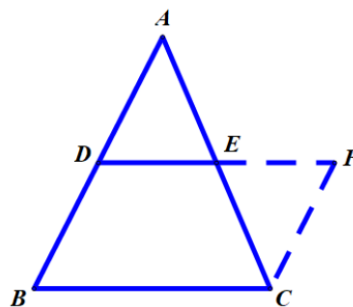


图 10 平行四边形法

4.4 平行四边形法

4.4.1 利用倍长中线构造平行四边形

有 8 种教科书通过倍长中线来证明三角形中位线定理^[15]，Bonycastle（1789）在《几何基础》中给出了如下证明：如图 10，延长中位线 DE 至 F ，使 $EF = DE$ ，联结 CF ，易证 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ ，于是有 $FC = AD = BD$ ，且 $FC \parallel AB$ ，因此，四边形 $BCFD$ 为平行四边形，故得 $DF \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

值得一提的是，Bonycastle（1789）给出了三角形中位线与底边的大小关系，从而最早完整地呈现了三角形中位线定理。

4.4.2 作平行线构造平行四边形

有 19 种教科书采用作平行线构造平行四边形的方法^[16]。如图 10，过点 C 作 $CF \parallel AB$ 交 DE 的延长线于点 F ，易证 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ ，故得 $FC = AD = BD$ ，于是，四边形 $BCFD$ 为平行四边形， $DF \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

5 证明方法的演变

以 50 年为一个时间段，图 12 给出了三角形中位线定理不同方法的分布情况，从图 12 可见，在 19 世纪中叶之前，教科书对三角形中位线定理关注甚少，19 世纪中叶之后，教科书开始采用平行四边形法和同一法证明三角形中位线定理。面积法和反证法最早均可追溯至 19 世纪，但面积法却消失于时代的浪潮中，反证法却在 20 世纪重新登场。

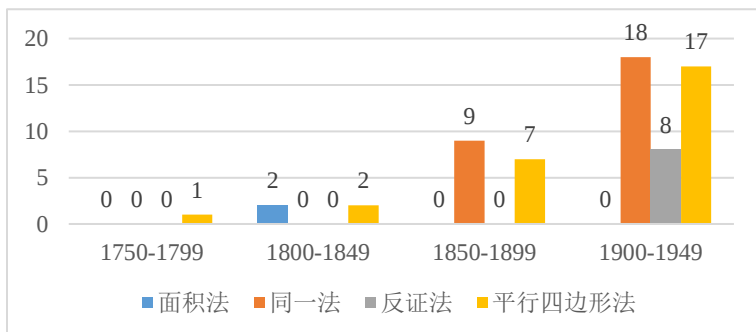


图 12 三角形中位线证明方法时间分布

19 世纪中叶前，教科书受《几何原本》影响，仅关注三角形一边平行线定理，而忽视了三角形中位线定理。在此期间，虽有几本教科书中提到了三角形中位线定理，但并未产生影响。20 世纪初，英国数学家培利（J. Perry, 1850-1920）呼吁数学教育摆脱《几何原本》的束缚，才致使教科书更多地关注三角形中位线性质。19 世纪末出版的教科书大多将三角形中位线定理纳入平行四边形或多边形的章节中，并用平行四边形法或同一法来证明该定理。

6 教学启示

历史上三角形中位线定理的证明方法的演变，可以为今日教学提供如下启示。

其一，建立知识间的联系。三角形中位线定理和平行线等分线段定理及其推论、三角形一边平行线定理等有着密不可分的关系，教师在教学中可通过三角形中位线定理建立各个定理之间的联系。此外，如图 13，教师可以让学生回顾之前学过的“证明”章内容。在早期教科书涉及的方法中，反证法和同一法属于间接证明法，平行四边形法和面积法则属于直接证明。教师可以借助直接证明、间接证明和实验法将三角形中位线定理的各种证明方法串联起来，从而建立知识点之间的普遍联系。

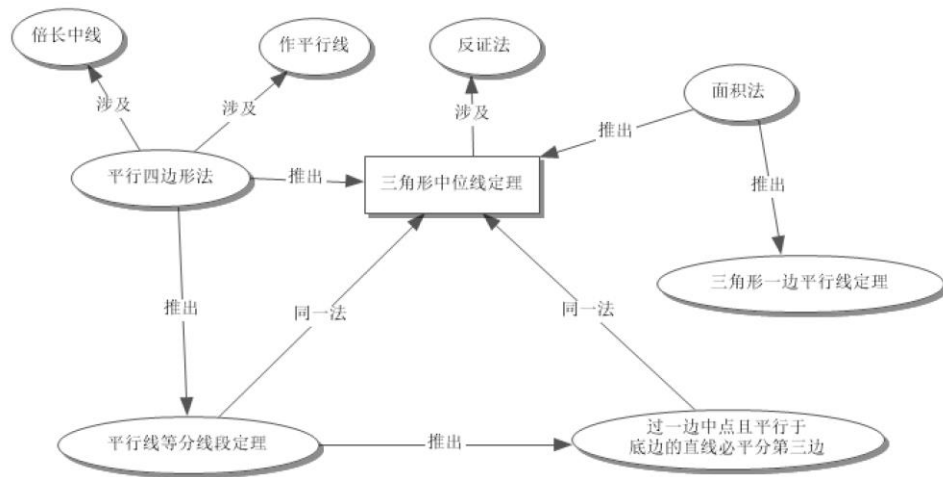


图 13 三角形中位线定理概念图

其二，编制系列数学问题。在讨论三角形中位线的性质之后，再取两腰的三等分点，让学生探究相应分点连线的大小和位置关系，让学生有机会发现更多的相关几何定理，并为梯形中

位线埋下伏笔。

其三，落实数学学科德育。通过三角形中位线定理在历史上的不同证明，培养学生的理性思维；通过定理从无到有的过程，让学生形成动态的数学观；通过不同时空数学家的探究，感受数学文化的多元性。

参考文献

- [1] 尤善培. 领悟知识意蕴, 设计教学路径——以“三角形的中位线”教学设计为例[J]. 中学数学教学参考, 2015(35): 17-19.
- [2] 王玉宏. 在数学知识学习中培养创新思维——以三角形中位线的教学为例[J]. 数学通报, 2017, 56(02): 26-29.
- [3] 张莉萍, 栗小妮. HPM 视角下的“三角形中位线定理”的教学[J]. 数学教学, 2018(07): 11-15.
- [4] 司睿. 基于线上研讨的三角形中位线定理课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(03): 5-10.
- [5] Rossignol, A. *Elements of Geometry* [M]. London: J. Johnson., 1787: 86.
- [6] Leslie, J. S. *Elements of Geometry* [M]. Edinburgh: J. Ballantyne and Co., 1811: 44.
- [7] Wentworth, G. A. *A Text-book of Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 63-64
- [8] Dupuis, N. F. *Elementary Synthetic Geometry of the Point, Line and Circle in the Plane* [M]. London: Macmillan., 1889: 46-47.
- [9] Faylor, I. N. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: The Century Company, 1906: 60
- [10] Newell, M. J., George, A. H. *Plane Geometry* [M]. Chicago: Row, Peterson & Company., 1914: 67-68.
- [11] Gore, J. W. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: Longmans, Green and Co., 1898: 38
- [12] Major, G. T. *Plane Geometry* [M]. Exeter: N. H. Edwards Brothers., 1946: 38-39.
- [13] Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge: Hilliard and Metcalf., 1825: 83.
- [14] Sykes, M., Comstock, C. E. *Plane Geometry* [M]. Chicago: Rand McNally & Co., 1918: 90-92.
- [15] Bonycastle, J. *Elements of Geometry* [M]. London: J. Johnson, 1789: 43.
- [16] Hobbs, C. A. *The Elements of Plane Geometry* [M]. New York: A. Lovell & Co., 1896: 65.

19 世纪至 20 世纪中叶英美教科书中的球体积公式

刘叶青

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

球是日常生活中常见的几何体, 它的完美与和谐激发了古今中外智者们的无穷好奇心。在探索球的性质的过程中, 他们留下了宝贵而丰富的精神财富。以球体积问题为例, 从古希腊的欧几里得、阿基米德, 到中国的刘徽、祖冲之父子, 到印度的婆什迦罗, 再到欧洲的卡瓦列里和开普勒, 他们都用自己的智慧来解决这个难题。^[1]他们所提供的精彩方法的背后蕴含着值得我们不断体会和学习的数学思想。

可是, 当把视角转向当今中国高中数学教育对球体相关知识的要求及具体的教育落实现状, 我们发现在课标、教科书、考核评价等因素的综合作用下, 高中阶段有关球的知识的教学被精简^[2]。这样的安排虽然可以降低教学难度、减轻教学负担, 但学生却错失了一次与前人跨时空交流, 进而领略数学魅力、感受数学文化、学习数学思想与方法的好机会。

在《普通高中数学课程标准》中明确提到: 数学教育应该帮助学生掌握现代生活和进一步学习所必需的数学知识、技能、思想和方法; 提升学生的数学素养, 引导学生会用数学眼光观察世界, 会用数学思维思考世界。标准同样也明确提出数学学科的核心素养, “逻辑推理”便是其中之一。逻辑推理的主要表现是: 掌握推理基本形式和规则, 发现问题和提出命题, 探索和表述论证过程, 理解命题体系, 有逻辑地表达和交流。^[3]

一方面强调数学素养, 一方面又如此精简教科书、简化教学, 这样的反差值得我们去思考: 是因为有关球的知识较多, 在教科书混编的情况下不得不精简推理论证的内容, 还是因为知识本身相对高中学生难度较大, 因此降低要求, 又或是因为实际教学的过程中, 该内容对教师的要求过高, 教学素材本身相对匮乏。带着这样的疑问, 笔者对 19 世纪至 20 世纪中叶英美两国教科书中的相关内容进行研究, 以为今日教学提供参考。

2 早期教科书的选取

本次研究以 sphere、geometry、volume 等为关键词，对有关数据库中出版于 19 世纪至 20 世纪中叶英美两国的立体几何教科书进行检索。经整理、分析，发现其中有 82 种教科书涉及球体积公式的推导或论证。对于同一作者再版的教科书，若内容无明显变化，则选择最早的版本；若内容有明显变化，则将其视为不同的教科书。82 种教科书的出版时间分布如图 1 所示，出版国家分布如图 2 所示。

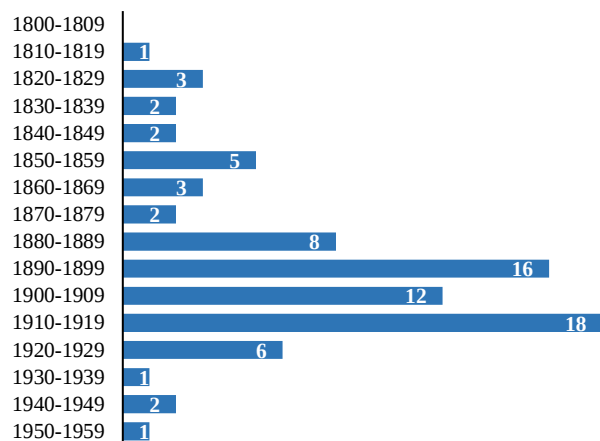


图 1 82 种教科书的时间分布情况

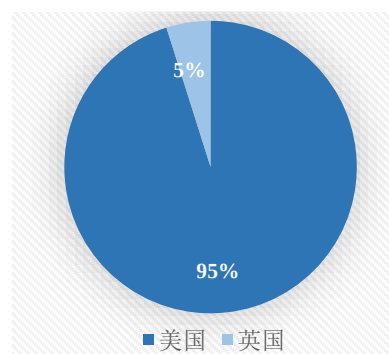


图 2 82 种教科书的国家分布

在选取的教科书中，球体积的相关知识通常编排在多面体、圆柱、圆锥的相关内容之后，这样的编排是因为球体积公式的推导是建立在多面体、圆柱、圆锥等知识的基础之上的，符合数学学科的逻辑顺序。

3 球体积公式的准备知识

预备知识包括锥体体积公式、球表面积公式以及球的定义、旋转体体积公式等。

3.1 球的定义

在所考察的 82 种教科书中，球的定义包含静态和动态两类：（1）静态定义：球是由曲面围合而成的几何体，该曲面上的任何一点到几何体内的某一点 O 的距离均相等，点 O 称为该球的球心。（2）动态定义：球是由圆心为 O 的半圆 ACB （及其内部）围绕其直径 AB 所在直线旋

转一周而形成的几何体。

这两种定义方式并不对立，教科书中通常将其中之一作为球的定义，而将另外一种作为由此得来的性质或者推论。不过，不同的定义方式一定程度上影响着教科书中的证明思路。

3.2 旋转体体积公式

假设 $\triangle ABC$ 绕着过顶点 A 的直线 MN 旋转，其所得几何体的体积公式为：

$$V_{\triangle ABC} = S_{BC} \cdot \frac{1}{3} AD^1 \quad (1)$$

其中 S_{BC} 为三角形的边 BC 绕 MN 旋转所得几何体的侧面积， AD 为 BC 边上的高。当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时，其绕过顶点 A 的直线 MN 旋转所得几何体的体积公式还可以表示为：

$$V_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \pi AD^2 \cdot EF \quad (2)$$

其中 AD 为 BC 边上的高， EF 为边 BC 在旋转轴上的投影。

4 球体积公式的推导

在所选 82 种教科书中，球体积推导或论证方法包括多面体逼近法、旋转体逼近法、祖暅原理（西方称为卡瓦列里原理）、锥体分割法、双向归谬法及微元比例法。由于后两者仅有极少数教科书采用，故笔者统计时将其并为“其他”类，如图 3 所示。在所有论证中，有 73 次证明以球的表面积公式作为前置知识，如图 4 所示。

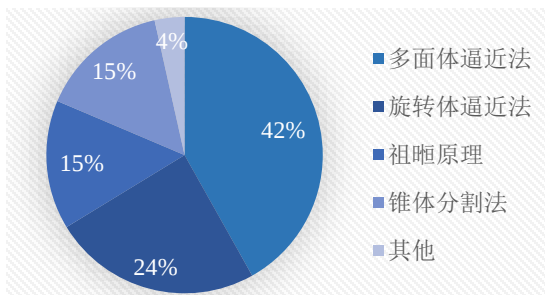


图 3 各种证明方法占比

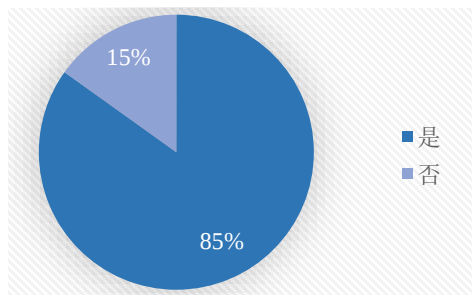


图 4 是否以球表面积为基础知识

¹ $\triangle ABC$ 绕直线旋转形成的几何体体积记作 $V_{\triangle ABC}$ ，其余平面图形旋转时也采用此标记方法，全文同。

4.1 旋转体逼近法

旋转体逼近法立足于球的动态定义，综合了极限及化归的数学思想，具体又分三类。

4.1.1 内接旋转体逼近法

共有 14 种教科书利用了此法。以下是 Loomis (1849) [4] 的推导过程。

如图 5 所示，半圆 ADG 的圆心为 O ，半径为 R ，多边形 $ABCDEFG$ 内接于半圆，且 $AB = BC = CD = DE = EF = FG$ ，联结 BO 、 CO 、 DO 、 EO 、 FO ，过 O 作 OH 垂直于 AB 于点 H 。当半圆绕直线 AG 旋转得到球 O 时，内接多边形 $ABCDEFG$ 同时旋转得到一个旋转体，且其体积为 $V_{\text{球内接旋转体}} = V_{\triangle AOB} + V_{\triangle BOC} + \cdots + V_{\triangle FOG}$ 。

由公式 (1) 知 $V_{\triangle AOB} = S_{AB} \cdot \frac{1}{3}OH$ ， $V_{\triangle BOC} = S_{BC} \cdot \frac{1}{3}OH$ ， $\cdots$ ， $V_{\triangle FOG} = S_{FG} \cdot \frac{1}{3}OH$ 。故得

$$V_{\text{球内接旋转体}} = \frac{1}{3}OH \cdot (S_{AB} + S_{BC} + \cdots + S_{FG})$$

随着多边形边数的增加，球内接旋转体的体积越来越接近球的体积。当边数无限增加时， OH 无限逼近球半径 R ， $S_{AB} + S_{BC} + \cdots + S_{FG}$ 无限逼近球的表面积。故得球体积

$$V = \frac{1}{3}R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

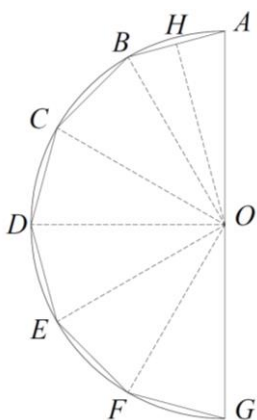


图 5 Loomis (1849) 中的证明

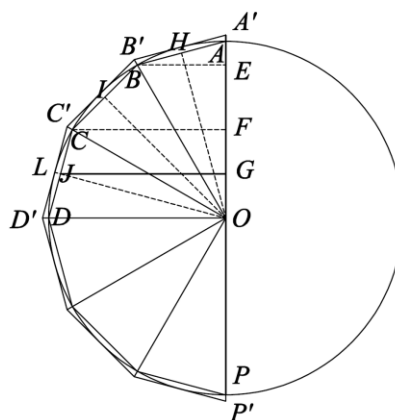


图 6 Hayward (1829) 中的证明

4.1.2 内接和外切旋转体双向逼近法

Hayward (1829) [5] 采用了此方法。该方法与内接旋转体逼近法有两点不同：该方法的侧重点在于球外切和内接旋转体与球自身体积的大小关系；该方法无需以球的表面积公式为基础。

如图 6 所示， AOD 为四分之一圆，半径 $OA = R$ 。作其内接多边形 $ABCDO$ ，其中 $AB = BC = CD$ ，同时作其外切多边形 $A'B'C'D'O$ ，其中 $A'B' = B'C' = C'D'$ 。

将 AOD 绕 AO 旋转，形成半球，相应地，五边形 $ABCDO$ 和 $A'B'C'D'O$ 分别形成半球的内接和外切旋转体。

五边形 $ABCDO$ 所形成的旋转体体积等于由等腰 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 旋转所得几何体的体积之和。由公式 (2) 知：

$$V_{\triangle AOB} = \frac{2}{3} \pi \cdot OH^2 \cdot AE$$

$$V_{\triangle BOC} = \frac{2}{3} \pi \cdot OI^2 \cdot EF$$

$$V_{\triangle COD} = \frac{2}{3} \pi \cdot OJ^2 \cdot FO$$

又因为 $OH = OI = OJ$ ，所以，该旋转体的体积 $V_{\text{半球内接旋转体}} = \frac{2}{3} \pi R \cdot OH^2$ 。若多边形内接于整个半圆，则相应的球内接旋转体体积为 $V_{\text{球内接旋转体}} = \frac{4}{3} \pi R \cdot OH^2$ 。

同理可得，球外切旋转体的体积为 $V_{\text{球外切旋转体}} = \frac{2}{3} \pi \cdot OL^2 \cdot A'P' = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot A'P'$ ，其中边心距 OL 等于半径 R 。

随着内接多边形边数的无限增多， OH 无限逼近半径 R ，因此球内接旋转体的体积将无限逼近 $\frac{4}{3} \pi R^3$ 。类似地，随着外切多边形边数的无限增多， $A'P'$ 无限逼近直径 $2R$ ，因此球外切旋转体的体积也将无限逼近 $\frac{4}{3} \pi R^3$ 。于是，球体积 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ 。

4.1.3 球心角法

有 6 种教科书中利用此法。如图 7，Wells (1886) [6] 给出了以下推导过程。

- (1) 将球看作是由半圆围绕其直径所在直线旋转而得到的几何体；
- (2) 半圆可看作是特殊的扇形，半圆旋转形成的球可看作是扇形绕其所在圆的某条直径所

在直线（不穿过扇形内部）旋转所得几何体（球心角体）的特殊情况。于是，球体积问题便可转化为球心角体体积问题，然后在此基础上再求特殊解；

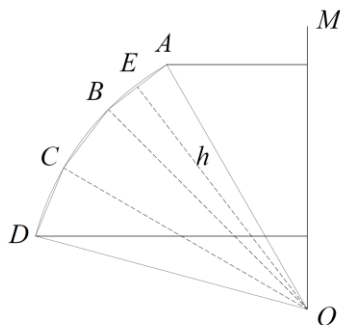


图 7 Wells (1886) 中的推导方法

(3) 类比“边数无限增加时，圆内接正多边形无限逼近圆”的思想。将扇形的圆弧若干等分，依次联结等分点，与两条半径构成一个多边形。随着等分数量的无限增加，该多边形将无限接近于扇形。于是，球心角体体积问题又可转化为该多边形旋转所得旋转体的体积及其极限的问题；

(4) 分别联结诸等分点与圆心，将多边形分割为若干等腰三角形。多边形旋转所得旋转体可以看作是若干等腰三角形旋转所得旋转体体积之和，结合公式(1)以及无穷的思想，最终推导出球心角体的体积公式，即 $V_{\text{扇形}AOD} = S_{AD} \cdot \frac{1}{3}h$ 。将此结论用于半圆，即得球体积公式。

4.2 多面体逼近法

4.2.1 内接多面体逼近法

该方法仅出现在 Davies (1841)^[7]中，相比于旋转体逼近法，该方法立足于球的静态定义，更多地强调直观理解，但并未给出严格意义上的证明。

(1) 在球内作一个内接的多面体，比如六面体；

(2) 联结多面体的各个顶点与球心，于是该多面体便被分成若干个以球心为顶点的棱锥，且每个棱锥的底面积为多面体的对应面的面积，每个棱锥的体积可求出；

(3) 随着内接多面体面数的增加，多面体的体积也逐渐增加，但始终小于球体积。当多面体各个面的面积无限缩小时，棱锥数目将无限增加，多面体将无限逼近球；

(4) 由部分和整体的关系得知, 将无限个棱锥的体积求和便可以得到球的体积。这无限个棱锥的高均为球的半径, 其底面积之和等于球的表面积。由此可得球体积公式为

$$V = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3。$$

4.2.2 外切多面体逼近法

有 35 种教科书采用了此法。该方法立足于球的静态定义, 类似于“雕塑”的方法, 通过对球外切正方体的切割, 结合极限思想, 最终推导出球体积公式。例如, Wentworth (1880) [8] 中的推导过程如下。

(1) 如图 8, 作球的外切正方体, 将正方体分割成 6 个以球心为顶点、各面为底面的四棱锥, 其高均为球半径 R 。于是知, 正方体的体积等于其表面积乘以 $\frac{1}{3}R$;

(2) 模仿雕塑的方法, 作球的切平面, 割去 8 个以正方体顶点为顶点的三棱锥, 得到球的一个外切十四面体。联结球心与该十四面体的诸顶点, 将其分割成 14 个以球心为顶点、以十四面体各面为底面的棱锥, 其高均为球的半径 R 。该十四面体的体积等于其表面积乘以 $\frac{1}{3}R$;

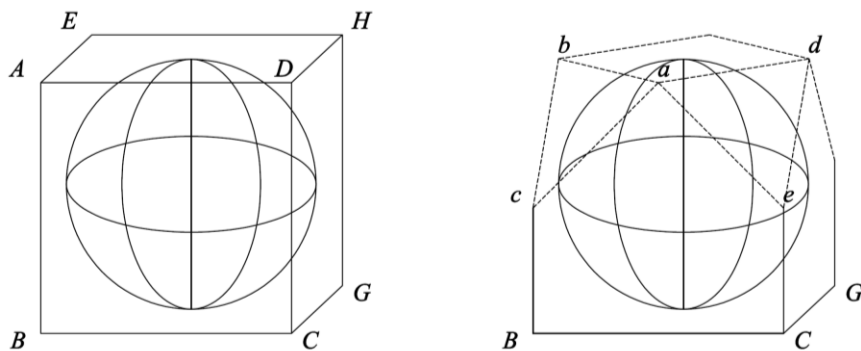


图 8 Wentworth (1880) 中的证明

(3) 作球的切平面, 相继割去以上一个多面体顶点为顶点的棱锥, 得到面数更多的多面体, 其体积等于其表面积乘以 $\frac{1}{3}R$;

(4) 当切割次数无限增加时, 多面体的体积趋向于球体积, 故球体积等于其表面积乘以 $\frac{1}{3}R$ 。

4.3 祖暅原理

共有 13 种教科书采用此法。该方法并非直接从球的定义与性质出发，而是根据祖暅原理去构造与球等积的几何体，从而将未知的球体积问题转化为已知的几何体体积问题。

4.3.1 利用圆柱和圆锥构造等积几何体

11 种教科书采用了该方法，包括 Playfair (1829)、Grund (1832) 等。以下是 Beman & Smith (1900)^[9]的推导过程。

如图 9，以球 O 的大圆为底面，球的直径为高，作球的外切圆柱体，其中含有两个以球心为顶点、分别以圆柱上、下底面为底面的圆锥。

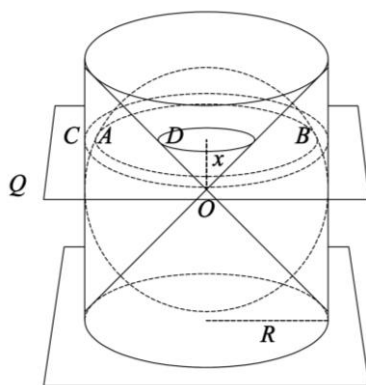


图 9 Beman & Smith (1900) 中的证明

用任意一个与底面平行的平面 Q 截该几何体，设球心到该平面的距离为 x ，易知圆锥的截面圆半径也是 x 。因此，截面中圆环 CD （圆柱与圆锥之间）的面积等于 $\pi(R^2 - x^2)$ 。因球截面的半径为 $\sqrt{R^2 - x^2}$ ，故其面积也等于 $\pi(R^2 - x^2)$ 。根据祖暅原理，球体积为 $V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \times \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3$ 。

4.3.2 利用四面体构造等积几何体

仅 Halsted (1885) 与 Dupuis (1893) 采用此法。以 Halsted (1885)^[10]为例。如图 10，球 O 内切于平行平面 α 与 β 之间， DT 是其直径。假设在平面 α 与 β 之间构造四面体 $EFGH$ ，使其满足：(1) $EF = GH$ 且 $EF \perp GH$ ， EF 与 GH 的中点的连线 KJ 满足 $KJ \perp EF$ 且 $KJ \perp GH$ ，

则 $KJ = DT$ ；(2) 某一平行于 α 的平面截球与四面体所得截面 $\odot I$ 与 $\square MWOZ$ 的面积相等。然后，任作另外一个平行截面 $ACBLSN$ 。

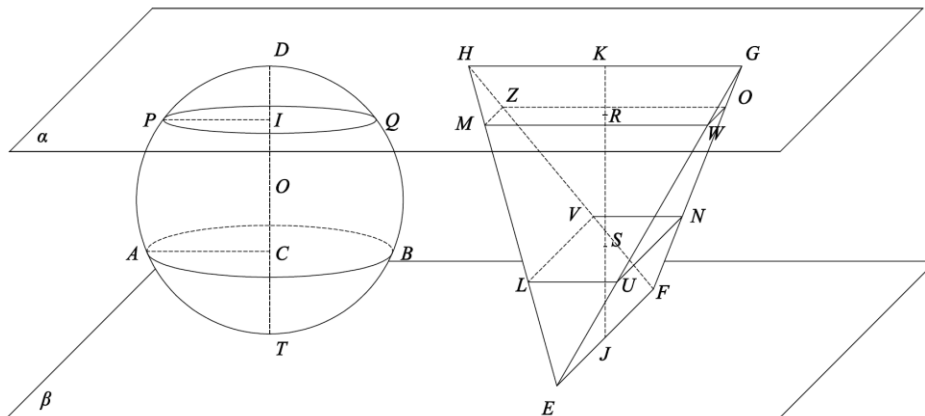


图 10 Halsted (1885) 中的证明

因为 $\triangle LEU \sim \triangle MEW$ ， $\triangle LHV \sim \triangle MHZ$ ，所以 $MW:LU = ME:LE = RJ:SJ$ ， $MZ:LV = HM:HL = KR:KS$ ，将两式对应相乘得： $\frac{MW \cdot MZ}{LU \cdot LV} = \frac{RJ \cdot KR}{SJ \cdot KS}$ 。

又因为截面 $\square MWOZ$ 与 $\square LUNV$ 均是矩形 ($EF \perp HG$)，故 $MW \cdot MZ$ 与 $LU \cdot LV$ 分别为两者的面积。所以 $\frac{S_{\square MWOZ}}{S_{\square LUNV}} = \frac{RJ \cdot KR}{SJ \cdot KS}$ ，而在球体当中， $\frac{S_{\odot I}}{S_{\odot C}} = \frac{PI^2}{AC^2} = \frac{IT \cdot DI}{CT \cdot DC}$ ，而 $RJ = IT$ ，

$KR = DI$ ， $SJ = CT$ ， $KS = DC$ ，故得 $\frac{S_{\odot I}}{S_{\odot C}} = \frac{S_{\square MWOZ}}{S_{\square LUNV}}$ 。

根据假设 $S_{\odot I} = S_{\square MWOZ}$ ，故 $S_{\odot C} = S_{\square LUNV}$ ，即任意处球与四面体的截面面积相等。

根据祖暅原理，球的体积等于所构造的四面体的体积。根据四面体体积公式 $V = \frac{1}{4}a(B + 3T)$ ，其中 a 为其高， B 为底面面积， T 为 $\frac{2}{3}$ 高处截面的面积。在上图中， $a = 2R$ ， $B = 0$ ，

$T = \pi \cdot \frac{2}{3}R \cdot \frac{4}{3}R = \frac{8}{9}\pi R^2$ 代入公式得 $V = \frac{1}{4} \times 2R \cdot \frac{8}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，于是得球体积公式。

由于上述构造和推导过程较为复杂，故该方法仅出现在极少数教科书中。

4.4 锥体分割法

共有 13 种教科书选择了锥体分割法。该方法立足于球的静态定义，运用了无穷分割思想。

如 Walker (1829) [11] 的推导过程如下。

(1) 如图 11, 将球看作是由曲面围成的几何体, 该曲面上的任何一点到球心的距离均相等;

(2) 将球面分割为若干球面多边形, 相应地, 将球分割成若干以球心为顶点、球面多边形为底面的几何体, 这些几何体的形状近似于棱锥, 它们的体积之和即为球体积;

(3) 将球面分割得越来越细, 则球面多边形越来越接近平面多边形, 相应地, 分割成的几何体越来越接近棱锥, 其高为球半径, 底面积为平面多边形面积;

(4) 借助锥体体积公式及球表面积公式, 推导出球的体积公式。

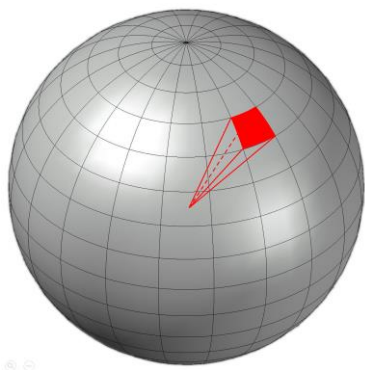


图 11 Walker (1829) 中的锥体分割法

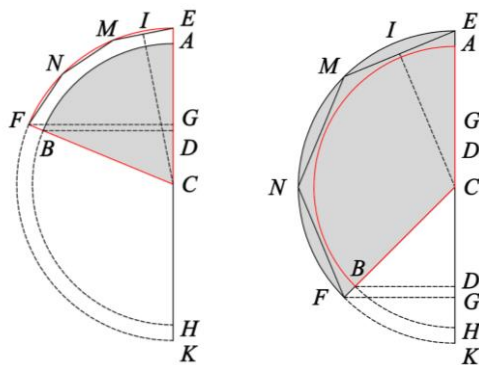


图 12 Perkins (1850) 中的双向归谬法

4.5 双向归谬法

仅 Legendre (1819) [12] 和 Perkins (1850) [13] 采用此方法。该方法首先通过归谬推导出球心角体的体积公式, 然后再推广得到球体积公式。

如图 12 左图所示, 扇形 ACB 绕 AC 所在直线 AH 旋转形成一个球心角体, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D 。

假设 $\frac{2}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AD$ 并不等于 $V_{\text{扇形}ACB}$, 而等于一个更大的球心角体的体积, 比如图中与扇形

ACB 相似的扇形 ECF 旋转后所得的体积, 即 $V_{\text{扇形}ECF} = \frac{2}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AD$ 。

在扇形 ECF 中作内接多边形 $EMNFC$, 使得 $EM = MN = NF$, 过点 C 作 $CI \perp ME$ 于点 I , 过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G 。根据公式 (2), 多边形 $EMNFC$ 绕 AH 旋转所得几何体体积为:

$$V_{\text{多边形}EMNFC} = \frac{1}{3}(S_{ME} + S_{MN} + S_{NF}) \cdot CI = \frac{2}{3}\pi \cdot CI^2 \cdot EG。 \text{因 } \triangle EFG \sim \triangle ABD, \text{ 故 } \frac{EG}{AD} = \frac{FG}{BD} = \frac{CF}{CB} > 1, \text{ 故}$$

$EG > AD$ ，又因为 $CI > AC$ ，所以 $\frac{2}{3}\pi \cdot CI^2 \cdot EG > \frac{2}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AD$ ，即 $V_{\text{多边形}EMNFC} > V_{\text{扇形}ECF}$ 。

而由图可知多边形 $EMNFC$ 是内接于扇形 ECF 中的，故其旋转所得的体积满足 $V_{\text{多边形}EMNFC} < V_{\text{扇形}ECF}$ ，此与前述论证矛盾。

所以，假设不成立，即 $\frac{2}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AD$ 不能表示一个更大的球心角体的体积。

同理，如图 12 右图所示，扇形 ECF 绕 AC 所在直线旋转形成一个球心角体，可证得 $\frac{2}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot EG$ 不能表示一个更小的球心角体的体积。

因此，球心角体的体积只能是公式(2)的表示形式，即也是公式(1)中的表示形式 $V = S \cdot \frac{1}{3}R$

其中 S 为该扇形旋转所形成的曲面的侧面积， R 为扇形的半径。

当扇形为半圆时，所得几何体的体积即为球体积： $V = \frac{1}{3}S_{\text{半圆}} \cdot R = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$ 。

4.6 微元比例法

仅 Dupuis (1893) [14] 采用此法。该方法虽然同样立足于球的动态定义，但是在推导球体积的过程中，重点是采用了微元的思想。

如图 13 所示，四分之一圆 DPA 的半径为 r ，作其外接正方形 $ABDC$ 。在圆周 DA 上任取相邻两点 P 和 Q ，要求两点尽可能接近。过点 P 作 $PR \perp CD$ ， $PT \perp BD$ ，过点 Q 作 $QS \perp CD$ ， $QV \perp BD$ 。在 DC 的延长线上，截取 $CG = CD$ ，联结 PD 、 PG 。当四分之一圆 DPA 绕 AC 旋转形成一个半球时，正方形 $ABDC$ 将形成一个圆柱。

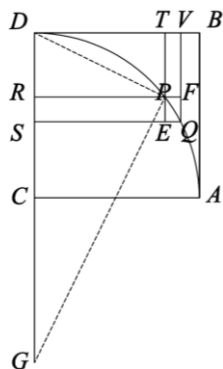


图 13 Dupuis (1893) 中的微元比例法

因为矩形 $PRSE$ 为四分之一圆 DPA 的一部分，所以其旋转所得几何体将构成半球的一部分；

矩形 $PTVF$ 为图形 $DPAB$ 中的一部分（正方形 $ABDC$ 内，四分之一圆 DPA 以外），所以其旋转所得几何体将构成圆柱以内，半球以外的一部分。此时，易得

$$\frac{V_{\text{矩形}PRSE}}{V_{\text{矩形}PTVF}} = \frac{(\pi CR^2 - \pi CS^2) \cdot PR}{(\pi CD^2 - \pi CR^2) \cdot PF}$$

$$= \frac{\pi(CR + CS) \cdot RS \cdot PR}{\pi(CD + CR) \cdot PT \cdot PF}$$

$$= \frac{PR}{PT} \cdot \frac{RS}{PF} \cdot \frac{CR + CS}{CR + CD},$$

又因 $\triangle DPR \sim \triangle PGR$, 故有 $\frac{PR}{PT} = \frac{PR}{RD} = \frac{GR}{PR} = \frac{CR + CD}{PR}$; 当 P 和 Q 无限接近时, $PQ \perp CP$,

$CR + CS = 2CR$, 此时 $\triangle PEQ \sim \triangle PRC$, 所以 $\frac{RS}{PF} = \frac{PE}{EQ} = \frac{PR}{CR}$, 代入可得 $V_{\text{矩形}PRSE} = 2V_{\text{矩形}PTVF}$ 。

将 $V_{\text{矩形}PRSE}$ 与 $V_{\text{矩形}PTVF}$ 看作是构成半球及半球外几何体的两个微元, 因为 P 和 Q 为任取的无限接近的两点, 故四分之一圆 DPA 旋转形成的半球体积也等于图形 $DPBA$ 旋转形成几何体体积的两倍, 因此, 球体积为 $V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。

4.6 证明方法小结

以 20 年为一个时间段, 分析不同时期教科书采用的推导方法的情况。如图 14 所示, 整

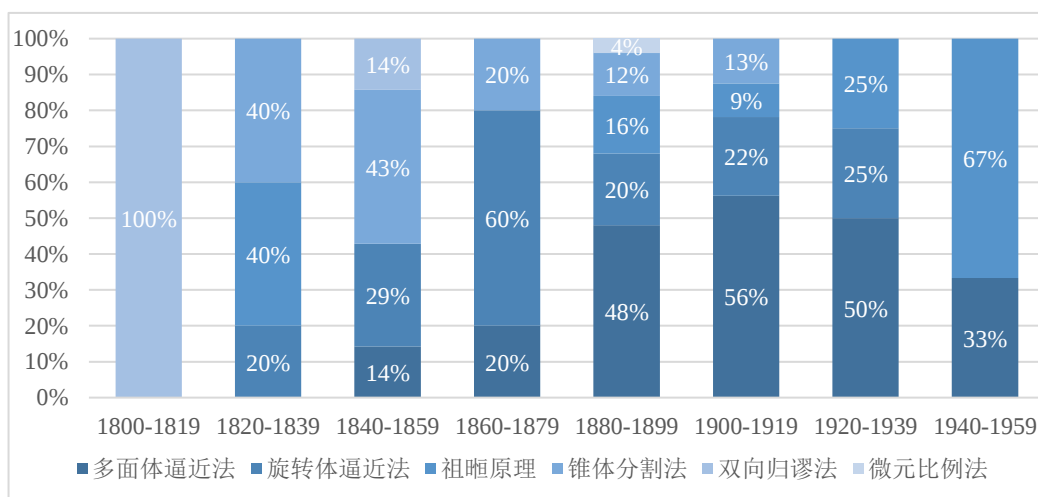


图 14 球体积推导方式年代分布图

体来看, 19 世纪至 20 世纪中叶, 几乎所有的教科书都不再像古希腊数学家那样去回避无穷概念, 因此类似于穷竭法的双向归谬法仅出现在两本教科书中; 大多数教科书在论证方法上采用的是涉及极限思想的锥体分割法、祖暅原理、多面体逼近法、旋转体逼近法等。19 世纪, 以极限思想为基础的微积分理论得到了迅速发展, 并最终建立了严格的逻辑基础, 因此利用极限工具的方法也被大家广泛认同, 最终发展成为主流的方法。具体到不同时间段来看, 锥体分割法虽然比较直观、也更容易理解, 但是相比于多面体或旋转体逼近法和祖暅原理而言严谨性稍欠缺, 因此逐渐被多面体或旋转体逼近法及祖暅原理所取代。不过, 从所选取教科书的相关内容的篇幅安排来看, 锥体分割法最为简洁。相比之下, 多面体或旋转体逼近法、祖暅原理等方法, 因为涉及的知识较多, 教科书中编排的篇幅也较长。

5 结论与启示

根据以上考察和分析, 除了当下我国高中教科书中采用的祖暅原理, 历史教科书中提供了多种球体积论证的方法。随着 19 世纪微积分理论的严密化和极限概念的日益完善, 其中的双向归谬法、微元比例法、锥体分割法等逐渐退出历史舞台。不过, 不管是什么方法, 其论证主体均是建立在初等数学中的几何知识基础之上, 只是需要结合极限的思想, 因此对高中生而言未必不可以讲解。但从历史教科书中的内容编排来看, 不得不承认详细的推导论证过程涉及的知识点较多, 编排所需篇幅较长。在我国教科书混编的前提下, 缩减其详细证明的内容, 具有一定的合理性。

从早期教科书关于球积公式的推导方法中, 我们获得以下启示。

其一, 历史教科书为球体积公式的推导论证提供了丰富而有趣的方法, 这些方法背后蕴含着无穷、类比、化归等数学思想。这些思想是与数学核心素养高度匹配的。因此, 对于这些方法的了解、探究、学习具有很大的价值: 一方面, 教师对于这些方法及思想的学习与研究, 有助于加深自身对相关知识的融会贯通, 提高自己的数学专业素养, 拓宽自己的教学思路, 扩充教学素材。另一方面, 教师在教学的过程中, 通过适当的课程设计及安排, 带领学生探索不同的论证方法, 深入比较不同方法之间的异同与优缺点, 有助于学生培养辩证思维, 体会方法之妙, 领略数学思想的神奇, 感受数学之美, 同时也为学生在将来的高等教育中系统学习微积分的知识积累数学经验;

其二，在探索球体积的历史进程中，无数数学家及数学教育工作者坚持不懈、艰辛探索，为之贡献了自己的数学智慧。在教学的过程中，可以尝试结合丰富的历史素材，比如阿基米德、刘徽、祖氏父子等人的故事，既可以增强课堂的趣味性，也可以赋予课堂以人文性，在引导学生感悟数学发展中的人文精神时，激励学生创新，将德育工作融入数学教学。

总之，考虑到我们现行高中教科书混编的现状，结合发展学生数学思维，培养科学精神，提升数学学科核心素养的要求，在不改变教科书编排的前提下，笔者建议可以根据学生的发展情况，适当增加锥体分割法、旋转体或多面体逼近法的讲解与探讨，满足学生追求知识的好奇心，对于学习能力较强的学生而言，则可以进一步提供阅读材料，要求他们自主学习、主动探究，以此实现人人都能获得良好的数学教育，不同的人数学上得到不同的发展。

参考文献

- [1] 齐丹丹. HPM 视角下球体积公式的教学[D]. 上海: 华东师范大学, 2018.
- [2] 陈晓宇. “人教版”高中数学教科书中空间几何体内容变迁研究[D]. 内蒙古: 内蒙古师范大学, 2019.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民出版社, 2017.
- [4] Loomis, E. *Elements of Geometry and Conic Sections* [M]. New York: Harper & Brothers, 1849.
- [5] Hayward, J. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829.
- [6] Wells, W. *The Elements of Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886.
- [7] Davies, C. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841.
- [8] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1880.
- [9] Beman, W. W. & Smith, D. E. *New Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1900.
- [10] Halsted, G. B. *The Elements of Geometry* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1885.
- [11] Walker, T. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson & Lord, 1829.
- [12] Legendre, A. M. *Elements of Geometry and Trigonometry* [M]. Cambridge: The University Press, 1819.
- [13] Perkins, G. R. *Elements of Geometry* [M]. New York: D. Appleton & Company, 1850.
- [14] Dupuis, N. F. *Elements of Synthetic Solid Geometry* [M]. New York: Macmillan Company, 1893.

美英早期几何教科书中的二面角概念

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

由点到线, 由线到面, 由面到体, 点、线、面作为构成几何体的基本元素, 其中所蕴含的线线关系、线面关系以及面面关系架起了平面几何和立体几何之间的桥梁。《普通高中数学课程标准》(2017 年版) 指出: “帮助学生以长方体为载体, 认识和理解空间点、直线、平面的位置关系。”^[1]作为立体几何的基础知识, 对于培养学生的数学抽象、直观想象及逻辑推理等数学学科核心素养有着十分重要的价值。

二面角既是立体几何中的重要知识之一, 也是提高学生整体数学素养的几何素材。HPM 视角下的数学教学可以让学生站在古人的角度, 跟随古人的足迹探索知识的发生和发展过程, 从而为学生创造学习动机, 激发学习兴趣。因而教师有必要了解二面角及其平面角背后更广阔的历史背景, 为充满数学文化的课堂积累数学史材料。早在公元前 3 世纪, 古希腊数学家欧几里得 (Euclid) 在《几何原本》第 XI 卷的定义中由线面角到面面角, 但此时还没有二面角的概念, 只是提出 “从两个相交平面的交线上同一点, 分别在两平面内各作交线的垂线, 这两条垂线所夹的锐角叫做该两平面的倾角。”^[2]到了 18 世纪末, 法国数学家勒让德 (A. M. Legendre, 1752-1833) 从面面平行到面面相交, 将二面角定义为两平面的发散量, 并定义这个发散量等于在两平面上的两条垂直于交线同一点的直线的夹角^[3]。

关于二面角及其平面角的内容, 现行人教版、沪教版和苏科版教科书分别从大坝外侧与水平面、门与门框和卫星轨道平面与赤道平面、笔记本电脑开合的现实情境引入二面角的定义, 人教版和苏科版教科书将二面角定义为一条直线和由这条直线出发的两个半平面所组成的图形, 沪教版则是设两平面相交形成交线, 交线将两平面分割成两半平面, 于是交线和两半平面所组成的空间图形叫做二面角。与此同时, 三种教科书均把二面角的平面角定义为: 从二面角棱上任意一点在两平面上作垂直于棱的射线, 两射线所成角叫做二面角的平面角。

数学史告诉我们, 任何数学概念、公式、定理、思想都不是天上掉下来的, 都有其自然发

生发展的过程,但迄今我们对此知之甚少^[4]。鉴于此,本文对 19-20 世纪美英几何教科书中所呈现的二面角及其平面角的定义进行考察,试图回答以下问题:如何让二面角的出现显得自然流畅?历史上如何定义二面角及其平面角,其定义又会如何演变?为何要以这种方式定义二面角的平面角?通过对以上问题进行研究,以期为今日教师教学提供有益参考。

2 早期教科书的选取

本文选取 1819-1958 年间出版的 85 种美英早期几何教科书作为研究对象,以 20 年为一个时间段进行划分,其出版时间分布情况如图 1 所示。其中,对于同一作者再版的教科书,若内容无显著变化,则选取最早的版本,若内容有显著变化,则将其视为不同的教科书。

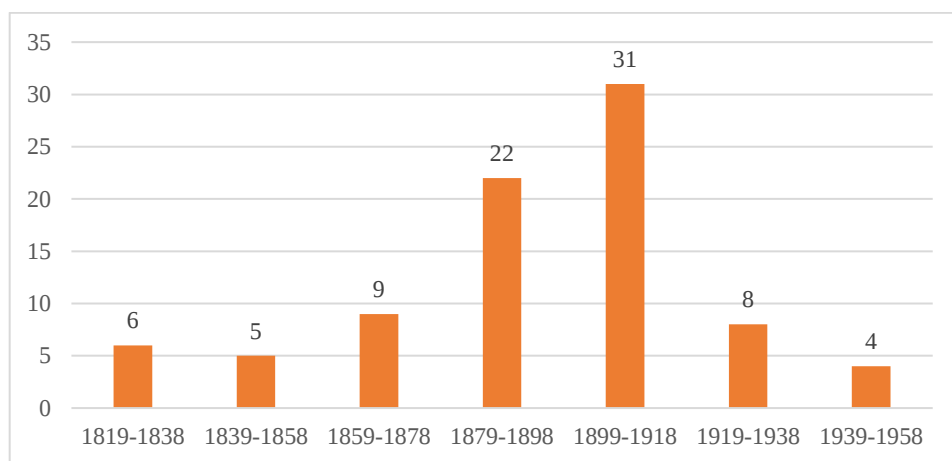


图 1 85 种美英早期几何教科书的出版时间分布

关于二面角及其平面角定义的内容主要位于“空间中的直线和平面”“直线和平面”“平面和多面角”“空间中的直线、平面和角度”“平面和立体角”等章节,此部分内容又大多归于“二面角”一节中。与此同时,二面角及其平面角的定义通常处在立体几何部分靠前的位置,由此可见,掌握点、线、面的基本概念及三者之间的位置关系是进一步学习柱、锥、台等基本立体图形的重要一环。

3 二面角的引入

在 85 种早期几何教科书中,有 23 种教科书直接给出二面角的定义,在其余 62 种教科书中,二面角的引入方式可以分为现实情境、动态法和线面及面面关系三类。表 1 给出了二面角

引入方式的分类情况。其中，联系学生的学习、生活实际，6 种教科书常用到门的开关以及书本的开合；考虑二面角产生的动态过程，35 种教科书常用到平面旋转；类比线、面之间的关系，22 种教科书常从线面角或面面平行入手。

表 1 二面角引入方式的分类

类别	描述	教科书
现实情境	二面角就好比一扇门在转动，门的每个位置都会垂直于地板和天花板。当门转动时，门和墙的夹角则会改变，二面角等于门的上边缘和门框上边缘的夹角。 ^[5]	Tappan (1864)
	以折叠的纸、门、书的封面或盒子的盖子为例。 ^[6]	Stewart (1891)
	几何中有许多角度，如两相交直线在交点处形成一个角，房间的墙和地板提供了一个由两相交平面形成的角度的例子，这样的角称为二面角。墙和地板及其交线代表二面角的面和棱。 ^[7]	Cowley (1934)
动态法	书中两张纸的夹角、房间两面墙的夹角、屋顶两个平面的夹角、桌面被抬起或门被打开时的各种夹角等。 ^[8]	Smith & Metzler (1913)
	假设有两个重合平面及平面上一直线，让一个平面绕这条直线旋转，于是会形成一个二面角。 ^[9]	Schuyler (1876)
线面及面面关系	类比线面相交形成线面角，于是面面相交形成二面角。 ^[10]	Playfair (1829)
	由两面平行到两面相交形成二面角。 ^[11]	Davies (1841)

图 2 为二面角引入方式的时间分布情况。由图可见，19 世纪下半叶以来，采用线面及面面关系的教科书逐渐减少，而采用动态法或现实情境引入二面角定义的教科书逐步增多，这主要源于 19 世纪末的数学教育近代化运动。当时，社会生产力和科学技术的迅猛发展推动着数学教育近代化运动如火如荼地开展，1901 年，英国数学家培利坚定地指出数学应面向大众，数学教育必须重视应用，1905 年，德国数学家克莱因又提出数学教材应顺应学生的心理发展水平、关注实用方面，因而，实践性和应用性随之成为数学教育的两大关键词^[12]。

虽然线面及面面关系的引入方式中蕴藏着类比的思维方式，能够让学生理解为什么会继续

研究二面角，但这样引入较为直接，并不能让学生感受到二面角的来龙去脉。相反，动态法和现实情境可以很好的弥补这一缺陷，借助于两平面的运动，既对培养学生的空间想象能力有着不可忽视的作用，又帮助学生从动态的角度来理解二面角的产生过程，这种为定义套上实际生活的外衣的方式，真正让学生体会到数学知识来源于生活，服务于生活的道理。

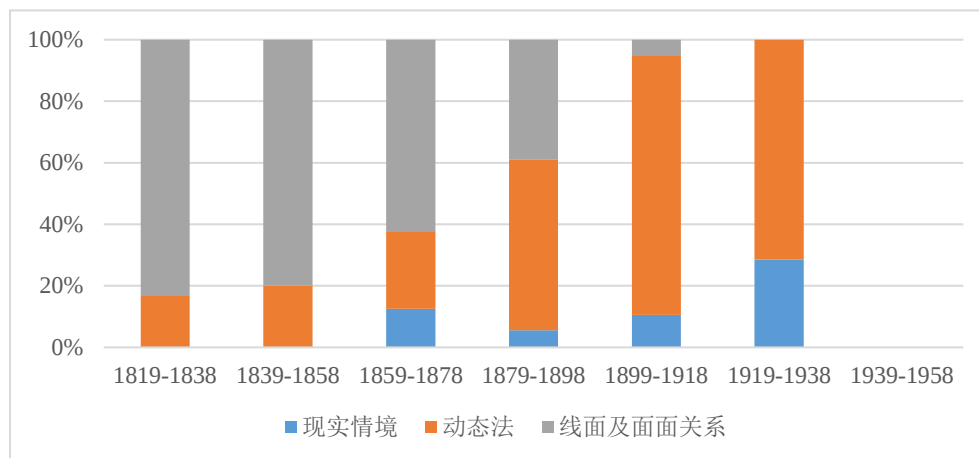


图 2 二面角引入方式的时间分布情况

4 二面角的定义

在 76 种给出二面角定义的教科书中，二面角的定义方式可以分为静态定义和动态定义两类。其中，只有 1 种教科书采用动态定义，其来自于 Schultze & Sevenoak 所撰写的《平面与立体几何》（1922）一书中，具体表述为一个平面绕这一平面上的直线旋转到另一位置，那么这个旋转量就是二面角^[13]。

根据几何教科书中定义的关键词，静态定义可以分为开口（opening）定义、夹角定义、倾角（inclination）定义、差异（difference/divergence）定义、平面束（pencil of planes）定义和半平面（half-plane）定义六类。表 2 给出了二面角静态定义的分类情况。

表 2 二面角静态定义的分类

类别	描述	教科书	数量
开口定义	两个相交平面所形成的开口。 ^[14]	Walker (1829)	13
夹角定义	两个相交平面所成角。 ^[5]	Tappan (1864)	38
倾角定义	两个相交平面之间的倾角。 ^[15]	Perkins (1855)	2

差异定义	两个相交平面在角度上的差异。 ^[9]	Schuyler (1876)	10
平面束定义	任意两个平面的平面束形成一个二面角。 ^[16]	Beman & Smith (1900)	2
半平面定义	相交于同一直线的两半平面所成角。 ^[7]	Cowley (1934)	11

图 3 为二面角静态定义及其图示方式的时间分布情况。从柱状图中可以看出，定义方法呈现出从单一走向多元，最终又回归单一的趋势，其中，夹角定义和半平面定义分别为 20 世纪前后教科书中的主流定义方法。从折线图中看出，除去 1839-1858 年教科书样本数量较少的一个时间段，19 世纪中叶以后采用两个平面直接相交形成二面角的全平面图示逐步减少，而采用半平面相交的半平面图示逐渐增多。

夹角定义作为教科书中的主流定义方法，虽然表述较为简洁，但是平面是可以无限延伸的，如果光看定义，学生则会理解成两平面形成四个二面角的图形，因此，为了二面角定义的准确性，越来越多的教科书还会画出两个半平面相交形成一个二面角的图形，半平面图示随之成为教科书中的主流。除半平面定义的其余几种定义方法只是在单词的选取上有所不同，但本质上所要表达的含义均与夹角定义类似。因此，19 世纪下半叶，夹角定义及其相关的定义方式的出现频次逐渐减少，而表述更加完善的半平面定义在教科书中逐渐增多，并在 20 世纪的几何教科书中占据主流。

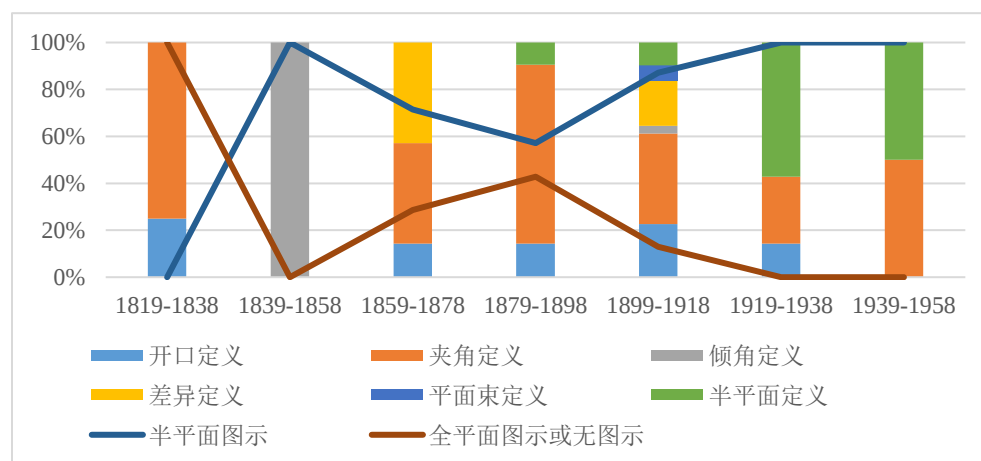


图 3 二面角静态定义及其图示方式的时间分布情况

图 4 为二面角的定义及其表示方法的时间分布情况。从折线图上可以看出，总体上涉及

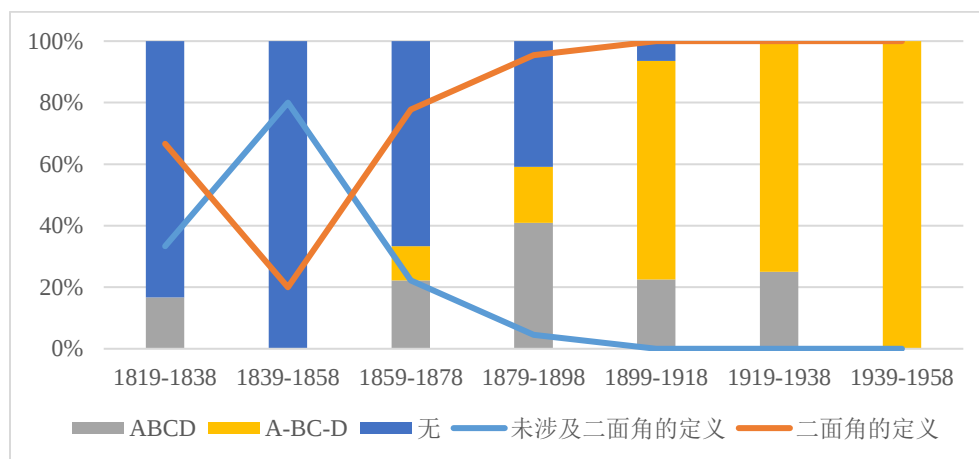


图 4 二面角的定义及其表示方法的时间分布情况

二面角定义的教科书逐步增多，而没有二面角定义的教科书越来越少。事实上，19 世纪中叶前的多数教科书中并没有出现二面角一词的翻译，随之也就没有出现二面角的定义，即使给出了二面角的定义，Walker (1829)^[14]和 Peirce (1837)^[17]也只是将二面角翻译为“plane angle”，这种二面角的翻译方式并不准确，容易与二面角的平面角一词相混淆。因而，20 世纪以来，随着教科书内容的不断完善，“dihedral angle”一词逐渐被所有教科书所使用。

在二面角的表示方法上，对于两个相交面 ABC 、 BCD 所组成的二面角可以用 4 个字母表示，其中首尾两个字母分别来自两个平面，中间两个字母来自二面角的棱。从图 4 的柱状图中可以看出，20 世纪以前，超半数的几何教科书并没有给出二面角的表示方法或是将二面角表示为 $ABCD$ ，但此后随着二面角表示方法的不断改进，越来越多的教科书将其表示为二面角 $A-BC-D$ ，从而有效的避免与四边形的表示方法相一致而引起歧义的问题，这种表示方法与现行教科书中的表示方法相一致。

5 二面角的平面角

为了得到二面角的大小，于是教科书引入了二面角的平面角的定义，其定义方法可以分为线线角定义、截面角定义和法线定义三类。表 3 给出了二面角的平面角的定义的分类情况，有 81 种教科书从与交线垂直的直线出发采用线线角定义，13 种教科书从与交线垂直的平面出发采用截面角定义，4 种教科书从二面角内一点向两平面引法线出发采用法线定义，其中，有 13 种教科书涉及 2 种定义方法。

表 3 二面角的平面角的定义的分类

类别	描述	教科书
线线角定义	二面角的平面角是两直线的夹角，其中这两条直线分别在两平面中并且垂直于两平面的交线上同一点（same point）。 ^[6]	Stewart（1891）
	在两平面交线上任取（any point）一点，过此点在两平面上分别作两条与交线垂直的直线，这两条直线所构成的夹角是二面角的平面角。 ^[10]	Playfair（1829）
	两条分别在两平面中且垂直于两平面交线的直线所成角。 ^[5]	Tappan（1864）
截面角定义	过两平面交线上一点作与交线垂直的平面，此平面与二面角的两平面相交形成两条直线，这两条直线所夹角是二面角的平面角。 ^[18]	Shutts（1905）
法线定义	从二面角内任意一点向两个平面画法线，两条法线所夹的角（或其补角）等于二面角的平面角。 ^[19]	Robbins（1907）

在线线角定义中，62 种教科书表述为过同一点的两直线所成角，16 种教科书则表述为过任意一点的两直线所成角。虽然采用后一种表述方式的教科书较少，但是这种表述却隐含着“二面角的平面角的大小不会随顶角位置的改变而改变”的本质，现行教科书中正是采用这种表述方式来定义二面角的平面角。

图 5 是二面角的平面角一词及其定义的时间分布情况。从折线图中看出，给出二面角的平面角一词的教科书逐渐增多，而没有给出该词的教科书逐渐减少并最终趋向于零。20 世纪以前，教科书多用到“measured by”一词，即“两平面的夹角被测量为”，此后，二面角的平面角一词的逐渐出现在教科书中，并被翻译为“the plane angle of the dihedral angle”。

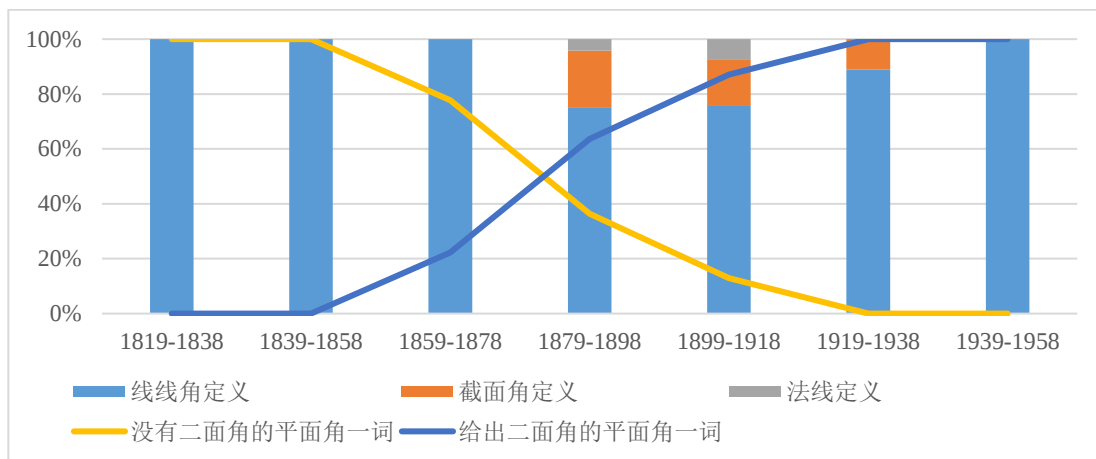


图 5 二面角的平面角一词及其定义的时间分布情况

由图 5 柱状图可以看出，线线角定义一直是早期教科书中的主流定义方法，因为教科书编者通常将角定义为具有公共端点的两条射线组成的图形，于是采用线线角定义显得水到渠成。与此同时，截面对于学生认识几何图形起到了非常重要的作用，例如，从圆柱的斜截面中发现椭圆，从圆锥的截面中发现双曲线，自然也可以类比用截面来定义二面角的平面角，由这一想法出发，因而早期教科书也用到了截面角定义。

6 二面角的平面角的合理性

二面角的平面角的出现让二面角的大小得以测量，而以线线角定义或截面角定义的方式，不仅使二面角的平面角的作出更易于操作、计算更加简洁，即具有方便性，也使得二面角的平面角具有唯一性、确定性和最值性的特点。

6.1 唯一性

所谓唯一性，即过二面角棱上任意一点在两平面内作垂线或垂面，所形成的二面角的平面角的度数与点的位置无关。有 44 种教科书证明了二面角的平面角具有唯一性。Wells (1886) 分别过 F 和 I 两点在两平面 AC 和 CD 中作垂直于棱 BC 的射线，取 $FE=IH$ 及 $FG=IJ$ (图 6(a))。由 $FE \perp BC$ 、 $IH \perp BC$ 且 FE 、 IH 在同一平面内，则 $FE \parallel IH$ ，同理 $FG \parallel IJ$ 。因为 $FE=IH$ 、

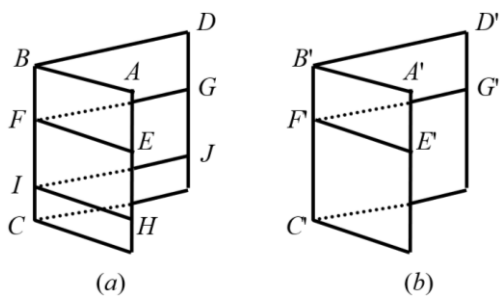


图 6 二面角与其平面角之间的关系

$FG=IJ$, 所以四边形 $FIHE$ 和 $FIJG$ 是平行四边形。又因为 EH 平行且等于 GJ , 则四边形 $EHJG$ 是平行四边形, 故 $EG=HJ$ 。由全等三角形判定定理可知 $\triangle EFG \cong \triangle HIJ$, 于是 $\angle EFG = \angle HIJ$ 。^[20] 若采用截面角定义, 垂面上下移动同样不会改变所截二面角的平面角的大小。

6.2 确定性

所谓确定性包含两层含义, 第一, 二面角是由其平面角的度数所确定, 第二, 二面角及其平面角的度数是由平面的位置所确定。在 85 种教科书中, 有 43 种教科书证明命题“若两个二面角的平面角相等, 则二面角对应相等”, 有 22 种教科书不仅证明了这一命题, 还证明其逆命题。在图 6 中, Bowser (1890) 令 $\angle EFG$ 的顶点和 $\angle E'F'G'$ 的顶点重合, 于是面 EFG 和 $E'F'G'$ 重合。因为直线 $BC \perp$ 面 EFG , $B'C' \perp$ 面 $E'F'G'$, 故直线 BC 与 $B'C'$ 重合, 又因为射线 FG 与 $F'G'$ 重合, 射线 FE 与 $F'E'$ 重合, 所以面 AC 与 $A'C'$ 重合, 面 CD 与 $C'D'$ 重合, 则二面角 $A-BC-D$ 和 $A'-B'C'-D'$ 重合, 于是二面角对应相等^[21]。以此类推, 同样运用重合法可以完成其逆命题的证明。

有 36 种教科书证明两个二面角的度数之比等于其对应的平面角的度数之比。例如, 1899 年, 美国数学家温特沃斯 (G. A. Wentworth, 1835-1906) 在《立体几何》中, 将二面角的平面角之比分成可公度比和不可公度比的情况进行讨论^[22]。在图 7 中, 令 $\angle ABD$ 和 $\angle A'B'D'$ 分别是二面角 $A-BC-D$ (以下简记为 $A-BC-D$) 和 $A'-B'C'-D'$ 的平面角。

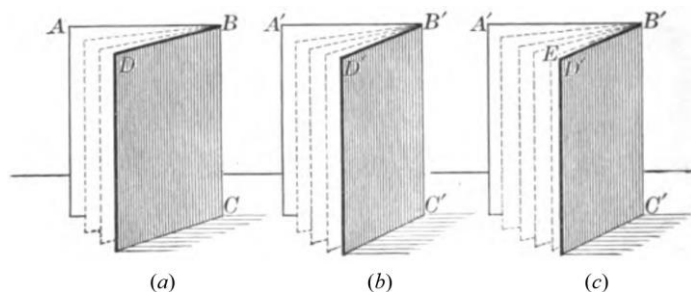


图 7 二面角的平面角之比

假设 $\angle ABD$ 和 $\angle A'B'D'$ 可公度比 (图 7(a)(b))。分别过两个二面角的平面角的顶点 B 和 B'

作射线, 将 $\angle ABD$ 和 $\angle A'B'D'$ 进行 n 等分和 m 等分, 此时有 $\frac{\angle ABD}{\angle A'B'D'} = \frac{m}{n}$ 。过 $A-BC-D$ 中的射

线和棱 BC 作平面, 于是 $A-BC-D$ 被分成 n 等份, 同样在 $A'-B'C'-D'$ 中过射线和棱 $B'C'$ 作平面,

于是 $A'-B'C'-D'$ 被分成 m 等份, 所以 $\frac{A-BC-D}{A'-B'C'-D'} = \frac{m}{n}$, 则 $\frac{A-BC-D}{A'-B'C'-D'} = \frac{\angle ABD}{\angle A'B'D'}$ 。

假设 $\angle ABD$ 和 $\angle A'B'D'$ 不可公度比 (图 7(a)(c))。将 $\angle ABD$ 划分成若干等份, 并将其中的一部分放入 $\angle A'B'D'$ 中得到 $\angle A'B'E$, 余下 $\angle EB'D'$, 此时 $A-BC-D$ 和 $A'-B'C'-E$ 的平面角可公度比,

所以 $\frac{A-BC-D}{A'-B'C'-E} = \frac{\angle ABD}{\angle A'B'E}$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 即 $\angle ABD$ 无限等分, 于是射线 $B'E$ 将无限趋向于

$B'D'$, 则 $\frac{A-BC-D}{A'-B'C'-E} \rightarrow \frac{A-BC-D}{A'-B'C'-D'}$ 且 $\frac{\angle ABD}{\angle A'B'E} \rightarrow \frac{\angle ABD}{\angle A'B'D'}$, 所以 $\frac{A-BC-D}{A'-B'C'-D'} = \frac{\angle ABD}{\angle A'B'D'}$ 。

从以上 3 个命题进而可以得到推论“平面角可以作为二面角的度量”, 即二面角的度数由它的平面角的度数所确定。

Walker (1829) 从二面角的动态产生过程入手, 说明平面旋转形成的圆弧所对圆心角的度数等于二面角的度数^[14]。有 5 种教科书对此进行了详细说明。两重合平面 AC 和 CD 绕棱 BC 旋转形成二面角 $A-BC-D$ (图 8), 假设直线 $FG \subseteq$ 面 CD 且 $FG \perp BC$, 当两平面重合时, 直线 FG 和

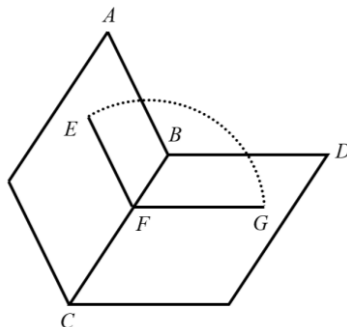


图 8 二面角动态产生过程

FE 重合。随着面 AC 绕棱 BC 的旋转, 点 G 所形成的轨迹是以 F 为圆心、 FG 为半径的 $\widehat{GE}$ 。

$\widehat{GE}$ 随二面角开口的增加而增加, 因此可以用 $\widehat{GE}$ 所对圆心角度数测量二面角度数, 即 $\angle EFG$ 的度数等于二面角 $A-BC-D$ 的度数。由此可以推出二面角的度数由两平面的位置所确定, 这一

结论也直接出现在 Tappan (1864) [5] 等人所出版的 15 种教科书中。

6.3 最值性

1886 年, 数学家奥尔尼 (E. Olney, 1827-1887) 在《几何基础》一书中提出“铁丝弯曲”问题, 即在图 9(a) 中, 直线 EG 、 EF 分别垂直于正方体的棱, HK 、 HJ 位于与棱垂直平面的同侧, 而 IM 、 IJ 位于与棱垂直平面的异侧, 则 $\angle KHJ$ 和 $\angle MIL$ 的度数为多少。[23] 由这一问题出发, 不难发现 $\angle FEG$ 具有最值性, 即二面角的平面角具有最值性。[24-25]

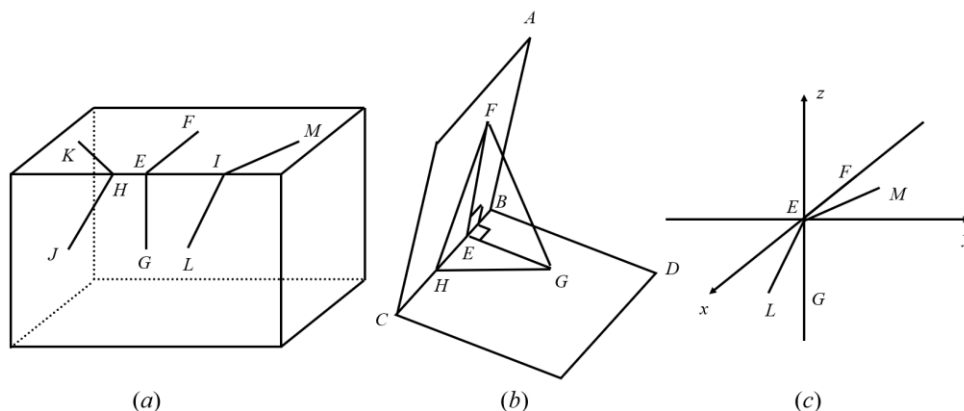


图 9 二面角的平面角的最值性

若 HK 、 HJ 位于面 FEG 的同侧, 将 HK 和 HJ 平移, 使得点 K 和 F 重合, 点 J 和 G 重合 (图 9(b))。设 $EF=a$ 、 $FG=b$ 、 $\angle FHE=\beta_1$ 、 $\angle EFB=\beta_2$ 且 $\beta_1, \beta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 于是 $FH = \frac{a}{\sin \beta_1}$,

$HG = \frac{b}{\sin \beta_2}$ 。由余弦定理, 在 $\triangle FEG$ 中, $FG^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle FEG$ 。在 $\triangle FHG$ 中,

$$\begin{aligned} \cos \angle FHG &= \frac{\left(\frac{a}{\sin \beta_1}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin \beta_2}\right)^2 - (a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle FEG)}{2 \cdot \frac{a}{\sin \beta_1} \cdot \frac{b}{\sin \beta_2}} \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \beta_2 + b^2 \sin^2 \beta_1 - a^2 \cdot \sin^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \beta_2 - b^2 \cdot \sin^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \beta_2}{2ab \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \angle FEG \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \beta_2 + b^2 \cdot \sin^2 \beta_1 \cdot \cos^2 \beta_2}{2ab \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \angle FEG \end{aligned}$$

因为

$$HE = a \cdot \cot \beta_1 = b \cdot \cot \beta_2$$

即

$$a \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin \beta_2 = b \cdot \cos \beta_2 \cdot \sin \beta_1$$

所以

$$\begin{aligned} \cos \angle FHG &= \frac{2a^2 \cdot \cos^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \beta_2}{2ab \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \angle FEG \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos^2 \beta_1 \cdot \sin \beta_2}{\sin \beta_1} + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \angle FEG \\ &= \frac{\cos \beta_2 \cdot \sin \beta_1}{\cos \beta_1 \cdot \sin \beta_2} \cdot \frac{\cos^2 \beta_1 \cdot \sin \beta_2}{\sin \beta_1} + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \angle FEG \\ &= \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \angle FEG \end{aligned}$$

又因为面 $AC \perp$ 面 CD ，所以 $\angle FEG = \frac{\pi}{2}$ ，于是 $\cos \angle FHG = \cos \beta_1 \cos \beta_2$ ，故 $\cos \angle FHG > 0 = \cos$

$\angle FEG$ ，则 $\angle FHG < \angle FEG = \frac{\pi}{2}$ 。

若 IM 、 IL 位于面 FEF 的异侧，则将 $\angle FEG$ 的顶点和 $\angle MIL$ 的顶点重合，并以 FE 为 x 轴、长方体的棱为 y 轴、 GE 为 z 轴建立空间直角坐标系（图 9(c)）。设 $EM=c$ 、 $EL=d$ 、 $\angle FEM=\theta_1$ 、

$\angle LEG=\theta_2$ 且 $\theta_1, \theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，于是 $M(-c\cos\theta_1, c\sin\theta_1, 0)$ 、 $L(0, -d\sin\theta_2, -d\cos\theta_2)$ ，由夹角公

式可知

$$\cos \angle LEM = \frac{\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EL}}{|\overrightarrow{EM}| \cdot |\overrightarrow{EL}|} = -\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 < 0$$

此时

$$\cos \angle LEM < 0 = \cos \angle FEG$$

则

$$\angle LEM > \angle FEG = \frac{\pi}{2}$$

同理，当二面角为锐角或钝角时也可以得到上述结果。因此，二面角的平面角的大小总存在最值，其最值等于垂直于棱的平面角 $\angle FEG$ 的值，取这个最值作为二面角的平面角的这一定义方式，符合数学定义的一般规定。

7 教学启示

综上所述，历史上二面角生动的引入方式，二面角及其平面角多样的定义方式，为今日二面角及其平面角定义的教学提供了如下启示。

其一，任何新知识的产生都应该符合学生的认知发展规律。数学来源于生活，又为生活服务，现实生活中所产生的诸多问题及现象都与数学有着千丝万缕的关系。数学作为一门问题驱动型的学科，不同的问题为学生创造学习动机，学生在解决问题的过程中又可以加深对于知识的理解。因此，教师可以充分利用现实情境中的实例，特别是课堂中触手可得的情景，例如静态上墙壁与天花板、地板的夹角，动态上门窗、书本、笔记本电脑、粉笔盒盖的开合所形成的夹角来引入新知，从而激发学生探究二面角知识的欲望。与此同时，教师通过证明二面角的平面角的具有确定性、唯一性和最值性，从而让学生明白其合理性、拨开学生心中的疑云，有助于构建知识之谱。

其二，任何数学概念都是在历史的长河中不断完善的。数学是不断发展的学科，数学概念则在数学发展中不断趋于完善。历史上从古希腊时期没有二面角一词，到 18 世纪用全平面相交定义二面角，再到今日用半平面相交定义二面角，教师可以引导学生像数学家一样“创造”数学概念，在二面角定义不断完善的过程中，给予学生探究定义的机会，师生或生生之间通过多次的探索 and 讨论，每个学生不仅可以经历思考的过程，还可以体会到成功带来的喜悦、提高数学学习的兴趣，有助于营造探究之乐。

其三，数学概念中蕴含着极为丰富的数学思想及数学文化。从圆锥曲线的产生类比二面角的平面角的产生，体会类比思想；从二面角的形到二面角的平面角的数，体会数形结合的思想；从二面角的三维到二面角的平面角的二维，体会化归思想，教师在引导学生完善二面角及其平面角定义的过程中，学生会经历数学概念不断抽象的过程，培养学生的数学学科核心素养。与

此同时,教师还可以借助于微视频,介绍不同时空的数学家对二面角及其平面角定义的贡献,反映数学文化的多元性,有助于实现能力之助,展示文化之魅。

其四,数学概念的演进过程充满着数学家的理性精神。通过对历史上不完善的二面角定义的辨析,鼓励学生不盲从权威、敢于质疑、勇于追寻真理,一方面加深学生对于数学概念的理解和记忆,更重要的是培养学生的理性精神。二面角及其平面角定义的缓慢而艰辛的产生及发展过程,还有助于让学生树立动态的数学观,最终达成德育之效。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 27.
- [2] 欧几里得. 几何原本(兰纪正, 朱恩宽译)[M]. 南京: 译林出版社, 2014.
- [3] Legendre, A. M. *Elements of geometry and trigonometry* [M]. New York: Chicago, 1798: 157.
- [4] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 20.
- [5] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 185-195.
- [6] Stewart, S. T. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1891: 311.
- [7] Cowley, E. B. *Solid Geometry* [M]. New York, Silver, Burdett and Company. 1934: 47-48.
- [8] Smith, E. R., Metzler, W. H. *Solid geometry* [M]. New York: American Book Company, 1913: 254-256.
- [9] Schuyler, A. *Elements of Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1876: 241-242.
- [10] Playfair, J. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. Walker, 1829: 147.
- [11] Davies, C. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 116.
- [12] 包蕾. 二十世纪以来的数学教育改革及启示[J]. 牡丹江教育学院学报, 2008: 82-83.
- [13] Schultze, A., Sevenoak, F. L. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1922: 321.
- [14] Walker, T. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson & Lord, 1829: 53-57.
- [15] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. Appleton & Company, 1855: 137-

138.

- [16] Beman, W. W., Smith, D. E. *New Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 265-266.
- [17] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: James Munroe & Company, 1837: 100-101.
- [18] Shutts, G. C. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Atkinson, Mentzer & Grover, 1905: 242.
- [19] Robbins, E. R. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1907: 273-283.
- [20] Wells, W. *The Elements of Geometry* [M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886: 240-243.
- [21] Bowser, E. A. *The Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. van Nostrand Company, 1890: 264-266.
- [22] Wentworth, G. A. *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1899: 269-273.
- [23] Olney, E. *Elementary geometry: including plane, solid and spherical geometry : with practical exercises* [M]. New York : Sheldon and Company, 1886: 245.
- [24] 陶兴模, 曾昌涛. 二面角教学中值得探讨的一个问题[J]. 上海中学数学, 2006: 10-11.
- [25] 谢林, 王跃辉. 对二面角的平面角定义合理性的探究[J]. 上海中学数学, 2013: 89-90.

英美早期几何教科书中的相似三角形判定

孔雯晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

相似三角形是几何课程的重要内容, 是从恒等变换到相似变换的一个转折点, 体现从特殊到一般的数学思想。早在公元前 3 世纪, 古希腊数学家欧几里得就在《几何原本》第六卷中记载了关于相似三角形判定的命题。《义务教育数学课程标准》^[1] (2011 年版) (以下简称《课标》) 要求学生“了解相似三角形的判定定理: 两角相等的两个三角形相似; 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似; 三边成比例的两个三角形相似。了解相似三角形判定定理的证明。”

在《课标》要求的基础上, 部分现行教科书中包含其他的判定定理。例如, 沪教版类比全等三角形给出直角三角形相似的判定定理(HL 定理), 人教版同样采用类比思想将其作为思考题。在不同教科书中, 关于相似三角形判定定理的证明有详有略, 如苏科版和北师大版的定理证明过程较完整, 沪教版和人教版中的部分定理证明由学生自行探索完成。已有的教学案例大多采用和教科书类似的方式开展相似三角形判定定理的教学, 主要有类比全等三角形的判定定理进行猜想或从三角形中边和角的条件进行探究, 鲜有 HPM 视角下的教学设计。

翻开历史的画卷, 我们发现相似三角形的判定方法多种多样, 其证明方法也丰富多彩。因此, 本文聚焦相似三角形的判定, 梳理 1760-1925 年间的 82 种英美早期几何教科书, 试图回答以下的问题: 英美早期几何教科书中含有哪些判定定理? 证明方法有哪些? 以为课堂教学提供丰富的素材。

2 研究对象

本文从相关数据库中选取 82 种英美早期几何教科书, 其中, 73 种出版于美国, 9 种出版于英国。对于同一作者再版的教材, 若内容无显著改动, 则视为同一种教材, 选取最早的一版; 若内容有显著改动, 则视为不同的教材。以 30 年为一个时间段, 教科书的时间分布如图 1 所

示。

在 82 种教科书中，部分教科书没有明确的章节划分，仅以命题的形式罗列知识内容。“相似三角形的判定”主要位于“比例”、“比例和相似”、“比例和相似多边形”、“相似图形”、“相似多边形”和“测量，比例和相似图形”等章节，早期教科书的编写者大多把“比例”和“相似”置于同一章节，将“相似”内容建立在“比例”的基础上，这与现行的教科书无异。

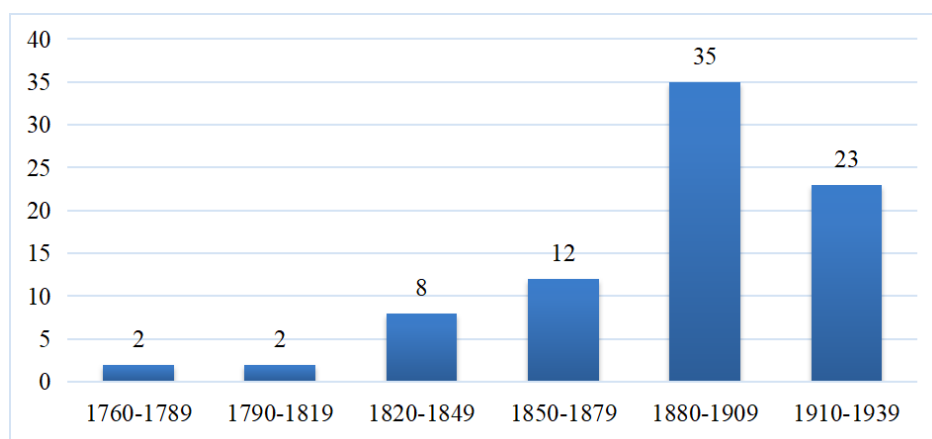


图 1 82 种教科书的时间分布情况

3 相似三角形的判定定理

3.1 判定定理的种类

考察发现，在早期几何教科书中，相似三角形的判定方法均以定理或推论的形式呈现，82 种教科书中共出现了以下 12 种判定方法。

方法 1：平行于三角形一边的直线与其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似（下文简称“平行分割”定理）^[2]；

方法 2：对应角分别相等的两个三角形相似（下文简称“三角”定理）^[2]；

方法 3：两角相等的两个三角形相似（下文简称“两角”定理）^[3]；

方法 4：两边成比例且夹角相等的两个三角形相似（下文简称“两边夹一角”定理）^[2]；

方法 5：三边成比例的两个三角形相似（下文简称“三边”定理）^[3]；

方法 6：各边分别相互垂直或平行的两个三角形相似（下文简称“垂直或平行”定理）^[3]；

方法 7: 直角三角形斜边上的高将直角三角形所分出的两个三角形与原直角三角形相似(下文简称“高线分割”定理)^[2];

方法 8: 两个三角形中有一个角对应相等, 其夹另一个角的对应边成比例, 第三个角的类型相同(都是锐角、都是直角或都是钝角), 则两个三角形相似(下文简称“边边角”定理)^[4];

方法 9: 两个三角形中有一个角对应相等, 其夹另一个角的对应边成比例, 则第三个角相等或互补, 当相等时两个三角形相似^[5];

方法 10: 两个三角形中有一个角对应相等, 该角的邻边和对边成比例, 且对边比邻边长或和邻边相等, 则两个三角形相似^[6];

方法 11: 底角或顶角相等的两个等腰三角形相似^[3];

方法 12: 一个锐角相等的两个直角三角形相似^[3];

方法 13: 相似于同一个三角形的两个三角形相似^[3];

方法 14: 等边三角形相似^[3];

方法 15: 两条直角边分别对应成比例的两个直角三角形相似^[7];

方法 16: 斜边和直角边对应成比例的两个直角三角形相似^[7];

《几何原本》给出了“三角”、“两边夹一角”、“三边”、“边边角”和“高线分割”这五个判定命题^[8], 早期教科书对这五个命题的沿用情况互有不同。由图 2 可以看出, 超过九成的教科书给出了“三角”、“两边夹一角”、“三边”这三个判定定理, 超过七成的教科书含有“高线分割”定理, 而仅有四种教科书给出“边边角”定理。

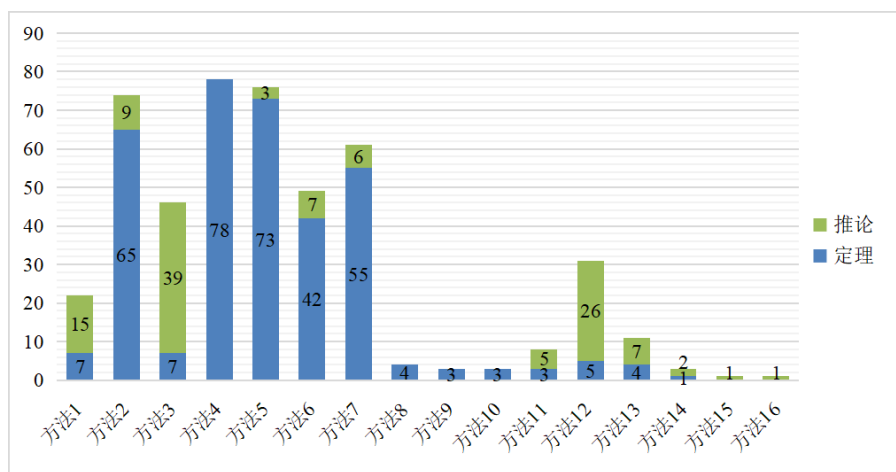


图 2 相似三角形判定方法的数量

方法 9、10 与方法 8 有相同之处，都是以有一个角对应相等，该角的邻边和对边成比例为前提，而第三个条件在“角”或“边”的限制上有所差别。其中，McMahon（1903）在方法 9 中未明确指出相等时两个三角形相似^[5]。

值得一提的是，Betz & Webb（1912）是判定方法数量最多的教科书。在此书中，上述方法 2、6（平行和垂直分开）、11、12 和 14 是“三角”定理的推论，由此可见，这五种判定方法的本质就是三角形的角对应相等。在“两边夹一角”定理后有两个推论，分别是上述方法 15 和 16，显然前者是“两边夹一角”定理在直角三角形中的特殊情形，后者可由勾股定理得到前者^[7]。

3.2 判定定理的演变

以 30 年为一个时间段，图 3 呈现了相似三角形判定定理在不同时间段的分布情况，“三角”定理、“两边夹一角”定理和“三边”定理一直是主流的判定定理。可以看出，判定定理的种类是随着时间的推移逐渐丰富起来的。“边边角”定理在 19 世纪 40 年代之后就消失了，“平行分割”和“两角”等其他判定定理逐渐占据一定的比重。20 世纪 10 年代后，判定定理呈现多元化的情形。

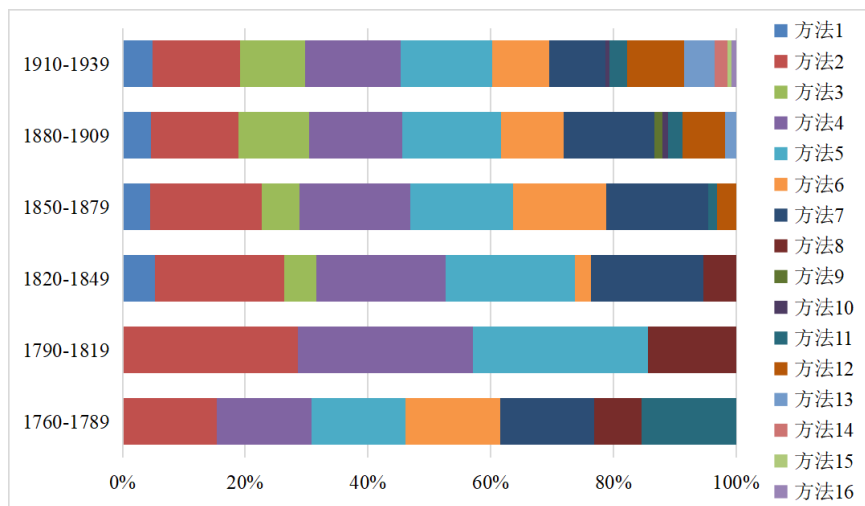


图 3 判定定理的演变

4 相似三角形判定定理的证明

“平行分割”、“三角”、“两角”、“两边夹一角”、“三边”、“垂直或平行”和“高

线分割”这七个判定定理出现的频次较高。其中，“高线分割”可以由“三角”定理直接推出，故本文梳理前六个定理的证明方法（“两角”定理与“三角”定理又可合并）。“三角”、“两边夹一角”和“三边”这三大判定定理的证明方法的分类大致相同，为避免重复和便于阅读，下文将一起整理统计。

下述证明多次利用了《几何原本》卷六命题 2：“若一条直线平行于三角形的一边，则该直线截另两边所得线段成比例；若三角形两边被分割成比例的线段，则分点连线平行于三角形第三边。”该命题的第一部分即“三角形一边平行线定理”，第二部分为该定理的逆定理。

4.1 “平行分割”定理的证明

有 5 种教科书证明了“平行分割”定理，由于定理在书中所处的位置不同，产生两种不同的证明方法：用定义证明（3 种）和用“三角”定理证明（2 种）。

（一）用定义证明

如图 4，已知 $DE \parallel BC$ 。过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，交 BC 于 F ，则四边形 $DBFE$ 是平行四边形，由“三角形一边平行线定理”得： $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ， $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ ，由于 $DE = BF$ ，则 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ，故 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 对应边成比例，由定义证得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ^[2]。

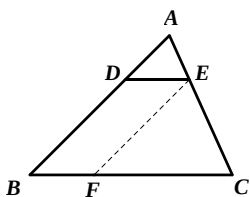


图 4 用定义证明

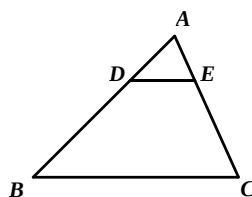


图 5 用“三角相等”定理证明

（二）用“三角”定理证明

如图 5，已知 $DE \parallel BC$ 。由 $DE \parallel BC$ 可知 $\angle ADE = \angle ABC$ ， $\angle AED = \angle ACB$ ， $\angle A$ 是公共角，由“三角”定理知， $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ^[9]。

4.2 “三角”、“两边夹一角”和“三边”定理的证明

Walker (1829)^[10]和 Palmer & Taylor (1915)^[3]直接定义“对应角相等的三角形相似”，

未提到边的关系, 则默认“三角”定理的合理性。通过考察, 这三个判定定理的证明可大致归纳为欧氏证法、叠合法、一等边与一平行线法、二等边法、其他证法(定义法、反证法)。采用各类证法的教科书数量如表 1 所示。

表 1 采用不同证法的教科书数量

	欧氏证法	叠合法	一等边与一平行线法	二等边法	其他证法
“三角”定理	7	38	3	18	2
“两边夹一角”定理	2	36	7	23	0
“三边”定理	14	0	13	43	2

(一) 欧氏证法

欧氏证法指的是《几何原本》中的证明。

• “三角”定理

如图 6, 已知 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ 。将 BC 和 EF 置于同一直线上, 点 B 和点 F 重合。延长 CA 和 ED 交于点 G , 易证四边形 $AGDB$ 是平行四边形, 则 $AB = DG$, $AG = BD$, 再由“三角形一边平行线定理”, 可得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 对应边成比例, 由定义知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ^[11]。

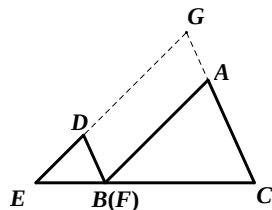


图 6 欧氏证法 (“三角”定理)

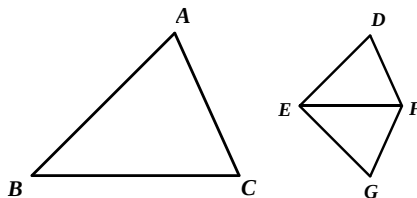


图 7 欧氏证法 (“两边夹一角”和“三边”定理)

• “两边夹一角”定理

如图 7, 已知 $\angle B = \angle DEF$, $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ 。作 EG 使得 $\angle FEG = \angle B$, 作 FG 使得 $\angle EFG = \angle ACB$, EG 与 FG 交于点 G , 由“两角”定理知, $\triangle GEF \sim \triangle ABC$, 于是有 $\frac{EG}{AB} = \frac{FG}{AC} = \frac{EF}{BC}$, 故得 $EG = ED$, 又 $EF = EF$, $\angle FEG = \angle FED$, 则 $\triangle GEF \cong \triangle DEF$, 故 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ^[3]。

• “三边”定理

如图 7, 已知 $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ 。与上述证明类似, 可得 $\triangle GEF \sim \triangle ABC$, 则 $\frac{EG}{AB} = \frac{FG}{AC} = \frac{EF}{BC}$, 再

由已知条件可得 $FG = DF$, $EG = DE$, 则 $\triangle GEF \cong \triangle DEF$, 那么 $\angle GEF$ 和 $\angle DEF$ 是等角的, 则 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 也是等角的, 故 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ^[4]。其中, Palmer (1915) 等四种教科书直接由 $\triangle GEF \cong \triangle DEF$ 和 $\triangle GEF \sim \triangle ABC$ 推出 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ^[3]。

(二) 叠合法

如图 8, 平移 $\triangle DEF$ 使 $\angle D$ 与 $\angle A$ 重合, 点 E 和 F 分别落在线段 AB 和 AC 上。

• “三角”定理

已知 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ 。由已知条件中的角相等可证 $EF \parallel BC$, 由“三角形一边平行线定理”可得 $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, 再平移 $\triangle DEF$ 使 $\angle E$ 与 $\angle B$ 重合, 同理可证 $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB}$, 由定义可证 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ^[2]。

• “两边夹一角”定理

已知 $\angle A = \angle D$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ 。由“三角形一边平行线定理”的逆定理可证 $EF \parallel BC$, 再证 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ^[2]。

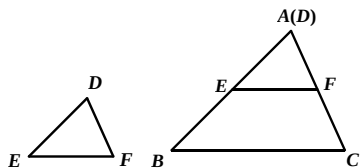


图 8 叠合法

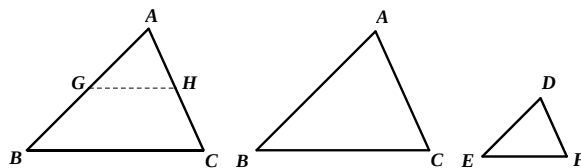


图 9 一等边与一平行线法和二等边法

(三) 一等边与一平行线法

如图 9, 在线段 AB (假设 $AB > DE$) 上截取 $AG = DE$, 过点 G 作 $GH \parallel BC$, 交 AC 于点 H 。证明思路都是先通过 $GH \parallel BC$ 证明 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$, 再证明 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$, 从而 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ 。证明 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ 的方法见表 2。

表 2 证明 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ 的方法

“三角”定理	根据 ASA 定理证明 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ ^[4] 。
“两边夹一角”定理 (设 $\angle A = \angle D$, $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$)	由 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ 可得 $\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC}$, 结合条件可知 $DF = AH$, 由 ASA 定理证明 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ ^[5] 。

“三边”定理 由 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ 可得 $\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC}$, 再结合题目条件可知 $DF = AH, EF = GH$, 由 SSS 定理证 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ ^[2]。

(四) 二等边法

如图 9, 在线段 AB (假设 $AB > DE$) 上截取 $AG = DE, AH = DF$, 连接 GH 。与上述证明类似, 证明 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ 和 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$, 从而 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ 。

• “三角”定理

已知 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ 。先证 $\triangle AGH \cong \triangle ABC$, 得到角相等, 结合已知条件, 证明 $GH \parallel BC$, 再证 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ ^[12]。

• “两边夹一角”定理

已知 $\angle A = \angle D, \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$ 。先证 $\triangle AGH \cong \triangle ABC$, 则 $AG = DE, AH = DF$, 则 $\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC}$, 由“三角形一边平行线定理”的逆定理, 可证 $GH \parallel BC$, 再证 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ ^[11]。

• “三边”定理

已知 $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ 。先证 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$, 则 $\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC}$, 结合已知条件, 可证 $EF = GH$, 故得 $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ 。关于 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ 的证明, 16 种教科书直接用方法 4 来证明 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ ^[7], 有 21 种教科书用“三角形一边平行线定理”的逆定理来证明 $GH \parallel BC$, 再证 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ ^[13]。

(五) 其他证法 (定义法、反证法)

有个别教科书采用其他证法, 其中, 由于教科书对相似的定义不同, 所以判定定理的证明方法随着定义改变。

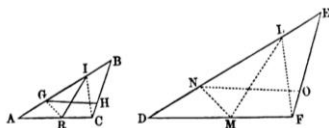
• “三角”定理

Tappan (1864) 定义相似多边形为“在一个图形中, 由顶点在三角形边上的折线段组成的每个角都在另一个图形中有相等且位置相似的角与之对应, 则这两个图形相似”, 如图 10 所示, 教材采用折线段分割三角形的方法用定义证明“三角”定理^[13]。

如图 11, Beman & Smith (1895) 用“位似”定义相似, 在证明过程中, 将一角相等用作重合, 另一角相等得到平行, 证明 OA_1 和 OB_1 上的任意一点都能都在 OA_2 和 OB_2 上找到对应点, 故

由定义可证明相似^[14]。

Let the angles A, B, and C be respectively equal to



the angles D, E, and F. Suppose GH and IR to be any two lines in the triangle ABC.

Join IC and GR. From F, the point homologous to C, extend FL, making the angle LFE equal to ICB.

Now, the triangles LFE and ICB have the angles B and E equal, by hypothesis, and the angles at C and F equal, by construction. Therefore, the third angles, ELF and BIC, are equal (262). By subtraction, the angles AIC and DLF are equal, and the angles ACI and DFL.

From L extend LM, making the angle FLM equal to CIR. Then the two triangles FLM and CIR have the angles at C and F equal, as just proved, and the angles at I and L equal, by construction. Therefore, the third angles, LMF and IRC, are equal.

Join RG. Construct MN homologous to RG, and NO homologous to GH. Then show, by reasoning in the same manner, that the angles at N are equal to the corresponding angles at G; and so on, throughout the two figures.

The demonstration is similar, whatever lines be first made in one of the triangles.

Therefore, the relative directions of all their points are the same in both triangles; that is, they have the same form. Therefore, they are similar figures.

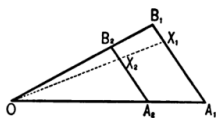
图 10 定义法（折线段分割三角形）

Theorem 8. *Triangles are similar if they have two angles of the one equal to two angles of the other, respectively.*

Given the $\triangle A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$,
with $\angle A_1 = \angle A_2, \angle C_1 = \angle C_2$.

To prove that $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Proof. 1. Place one $\triangle$ on the other so that $\angle C_1$ coincides with $\angle C_2$, as at O, OA_2 falling on OA_1 . Let OX_2X_1 be any line through O, cutting A_2B_2 at X_2 , and A_1B_1 at X_1 .



2. Then $\angle A_2 = \angle A_1, A_2B_2 \parallel A_1B_1$. I, th. 16, cor. 1

3. $\therefore OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2 = OX_1 : OX_2 = \dots = r$.

Th. 1, cor. 4

4. And all points on OA_1 and OB_1 have their corresponding points on OA_2 and OB_2 , respectively. .

Def. sim. figs., cor. 2

5. $\therefore$ the $\triangle$ are similar, O being the center of similitude. Defs.

COROLLARIES. 1. *Mutually equiangular triangles are similar.*

2. *If two triangles have the sides of the one respectively parallel or perpendicular to the sides of the other, they are similar. (Why?)*

图 11 定义法（位似）

• “三边”定理

如图 12, Petersen & Steenberg (1880) 用“位似”定义相似, 已知 $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = m$. 构造

新的 $\triangle D_1E_1F_1$ 与 $\triangle ABC$ 位似, 且 $\frac{D_1E_1}{AB} = \frac{D_1F_1}{AC} = \frac{E_1F_1}{BC} = m$, 再证 $\triangle D_1E_1F_1 \cong \triangle DEF$ ^[6].

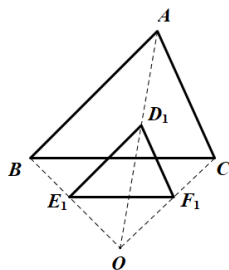


图 12 定义法（位似）

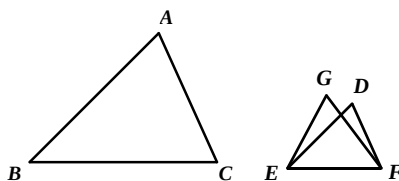
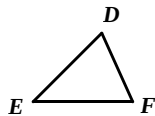


图 13 反证法

如图 13, Perkins (1847) 采用反证法。当 $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ 时, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 不相似, 则

取点 G 使得 $\triangle ABC \sim \triangle GEF$, 则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle GEF$ 是等角的, 且 $\frac{GE}{AB} = \frac{GF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, 则 $DE = GE, DF = GF$.

$= GF$ ，于是得 $\triangle GEF \cong \triangle DEF$ ，故 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ^[12]。

(六) 小结

叠合法、一等边与一平行线法和二等边法都具备了“平行分割”定理的图形特征，一等边与一平行线法和二等边法的核心思路都是在大三角形内构造一个新的三角形，令其与小三角形全等且与大三角形相似，叠合法省去了其中证明全等的过程。在证明过程中，关于“通过平行证明新的三角形与大三角形相似”的部分，第 4.1 节呈现了两种方法：用相似三角形的定义证明和用“三角相等”定理证明，且第 4.1 节证明的“平行分割”定理是第三种证明方法。采用不同证明法的教科书数量见表 3，由于绝大部分的早期教科书将“三角”定理放在第一个位置，所以这些教科书大多采用相似三角形的定义证明。由此可见，“平行分割”定理适合放在靠前的位置，为后续定理的证明提供便利，这与部分现行教科书的编排顺序吻合。

表 3 由平行证明三角形相似的证法及教科书数量

证明方法	三角	两边夹一角	三边
用相似三角形的定义证明	54	0	0
用“三角”定理证明	0	44	32
用“平行分割”定理证明	3	12	18

4.3 “垂直或平行”定理的证明

该定理的证明方法有假设法和等角法。其中，有 22 种教科书采用假设法，有 12 种教科书采用等角法，有 5 种教科书在证明垂直时用假设法，证明平行时用等角法。

(一) 假设法

引理：当两个角的两边分别平行或相互垂直时，那么这两个角相等或互补。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，根据引理，有以下几种可能性：① $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle E = 180^\circ$ ， $\angle C + \angle F = 180^\circ$ ；② $\angle A = \angle D$ ， $\angle B + \angle E = 180^\circ$ ， $\angle C + \angle F = 180^\circ$ ；③ $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C + \angle F = 180^\circ$ 。因 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的内角总和不超过 360° ，所以第 3 种情况成立。则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是等角的，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ^[13]。

(二) 等角法

如图 14（中），当对应边互相垂直时，延长 ED 和 DF ，分别交 AB 和 AC 于点 H 和点 G ，

则 $EH \perp AB$, $DG \perp AC$, 易证 $\angle DFE = \angle ACB$ (都与 $\angle EFG$ 互补), $\angle EDF = \angle A$ (都与 $\angle HDG$ 互补), 则三角对应相等, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。如图 14 (右): 当对应边相互平行时, 利用同位角和内错角易证三角对应相等, 则 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ^[15]。

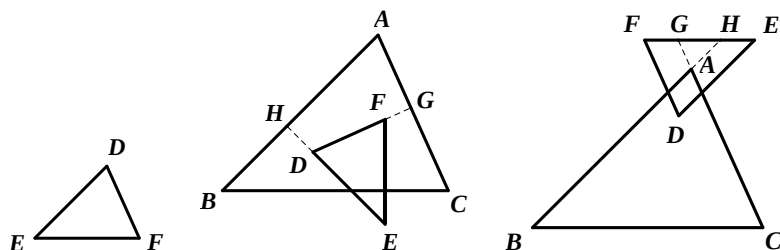


图 14 假设法和等角法

4.4 不同判定定理之间的逻辑关系

根据上述不同的证明方法可知, 部分判定定理可由其他判定定理证明。图 15 给出了各判定定理之间的逻辑关系, 三大定理的顺序是“三角”定理、“两边夹一角”定理和“三边”定理。

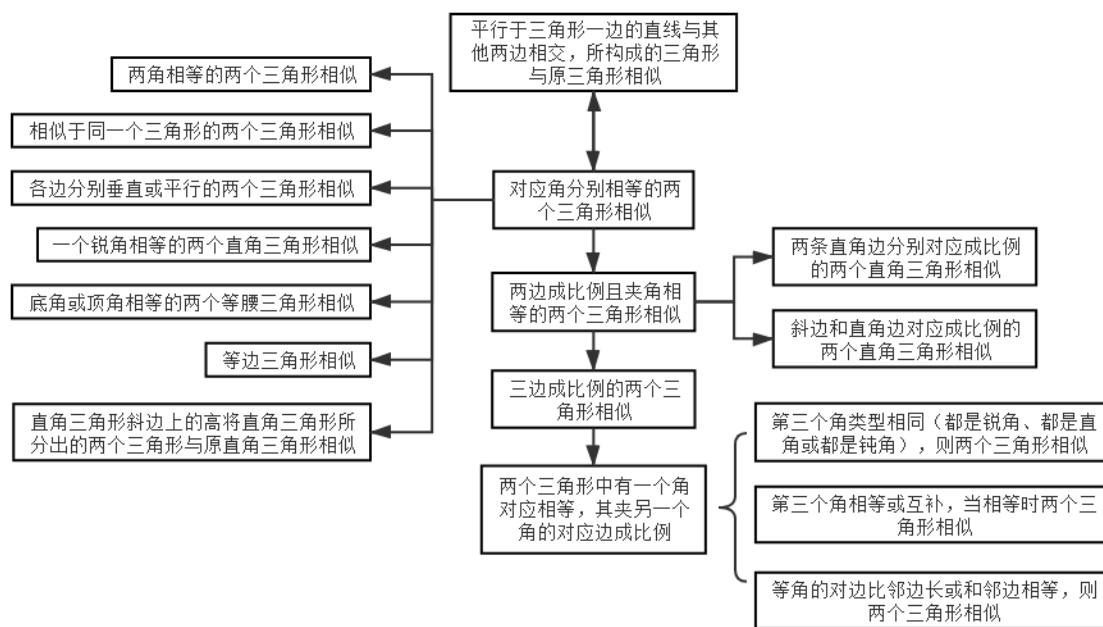


图 15 各判定定理的逻辑关系图

5 结论和启示

综上所述，早期教科书中的“三角”定理、“两边夹一角”定理和“三边”定理是相似三角形的主流判定定理。在历史的长河里，判定定理逐渐呈现多样化。早期教科书的定理证明方法也比现行教科书更丰富，三大定理的证明包括“欧氏证法”、“叠合法”、“一等边与一平行线法”、“二等边法”、“定义法”和“反证法”。判定定理的演变过程和证明方法的丰富性对今天相似三角形判定的教学有所启示。

首先，在早期教科书中，“两角”定理逐渐出现、作为“三角”定理的推论，甚至替代“三角”定理，现行教科书也采用的是“两角”定理。这启示了在学生通过相似三角形的定义探索判定条件时，教师要引导学生思考命题中“条件”的数量为什么是恰到好处的，缺失就不能达到判定的要求，多余就变得累赘，加强学生对判定条件的认识。

其次，“高线分割”定理在早期教科书中出现的频次仅次于三大定理，同时是推导出射影定理的重要定理。虽然射影定理在《课标》中已不作要求，但关于比例线段的题目常会涉及这一知识点，教师可以在教学中补充“高线分割”定理和射影定理，扩充学生的知识储备，简化学生的答题过程。

再次，教师在设计相似三角形判定定理的教学时，可以参照逻辑关系图（图 15），把“平行分割”定理作为铺垫，以“三角”定理、“两边夹一角”定理、“三边”定理为主线，再拓展“边边角”定理和相似的传递性，最后追问学生三大定理在直角三角形、等腰三角形和等边三角形等特殊三角形中的情况，锻炼学生的数学语言表达能力。除此以外，教师可以引导学生通过类比三角形全等的判定方法推理得到三角形相似的判定方法，使学生更好地把握知识的内在联系，掌握类比的数学思想方法。

最后，在现行教科书中，如人教版仅呈现“一等边与一平行线法”证明“三边”定理，苏科版采用“叠合法”证明“两角”定理，利用“一等边与一平行线法”证明“两边夹一角”定理和“三边”定理。每版教科书最多呈现一种方法证明单个定理，但课堂并不会局限在教科书的篇幅中，教师应当让学生成为课堂的主人，合作探究证明方法。学生在添加辅助线时会遇到一定的困难，教师可以带领学生观察“平行分割”定理的基本图形结构，启发学生猜想，引导学生发现新构造的三角形在大三角形和小三角形之间起的“桥梁”作用，帮助学生深入理解知识，实现“能力之助”。学生能够在观察、猜想和归纳的过程中获得“探究之乐”，在证明方法的分享交流中发现“方法之美”，增强学习数学的信心。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准 (2011 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.
- [2] Grund, F. J. *First Lessons in Plane Geometry* [M]. Boston: Carter and Hendee, 1830: 82-90.
- [3] Palmer, C. I., Myers, G. W., Taylor, D. P. *Plane Geometry* [M]. Chicago: Scott, Foresman, 1915: 201-209.
- [4] Leslie, J. *Elements of Geometry* [M]. Edinburgh: James Ballantyne and Co., 1809: 193-198.
- [5] McMahon, J. *Elementary geometry: Plane* [M]. New York: American Book Company, 1903: 289-292.
- [6] Petersen, J., Steenberg, R. *Text-book of Elementary Plane Geometry* [M]. London: Sampson Low, Marston, Searle & Rivington, 1880: 41-44.
- [7] Betz, W., Webb, H. E. *Plane Geometry* [M]. Boston: Ginn and Company, 1912: 244-248.
- [8] 欧几里得. 几何原本[M]. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2003.
- [9] Robbins, E. Rutledge. *Robbin's new Plane geometry* [M]. New York: American Book Company, 1915: 157.
- [10] Walker, T. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson, Lord & Holbrook; Munroe and Francis, 1829: 47-49.
- [11] Young, J. R. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: Carey, Lea & Blanchard, 1833: 91-94.
- [12] Perkins, G. R. *Elements of Geometry* [M]. Utica: H.H. Hawley, 1847: 98-107.
- [13] Tappan, E. T., Ray, J. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 101-118.
- [14] Beman, W. W., Smith, D. E. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1895: 157-169.
- [15] Wentworth, G. A. *Plane Geometry* [M]. Boston: Ginn and Company, 1899: 148-154.

教学实践

HPM 视角下的“二面角概念”教学

高振严¹, 韩嘉业²

(1 上海市行知中学, 上海, 201900; 2 上海市格致中学, 上海, 200001)

1 引言

“二面角”是沪教版教材第 14 章“空间直线与平面”的第 4 节“空间平面与平面的位置关系”的第一节课, 是继空间内异面直线所成角、直线与平面所成角之后的又一个空间角。教材在引入二面角的概念之后, 直接构造二面角的平面角, 然后证明二面角平面角的唯一性, 即二面角平面角的大小不随顶点位置的变化而变化。遗憾的是, 教材并没有探讨二面角平面角定义的合理性, 即为什么可以用二面角平面角的大小来度量二面角的大小。

历史上, 法国数学家勒让德 (A. M. Legendre, 1752-1833) 曾经论证过二面角的平面角定义的合理性, 但勒让德的论证对高中学生来说并不易理解。基于以上原因, 本节课从帮助学生构建数学理解的角度, 设计二面角的数学探究活动, 以及蛋糕块模拟二面角的直观模型, 从定性和定量两个方面让学生理解二面角的平面角定义的合理性。本节课的重点是“二面角和二面角的平面角概念”, 难点是“二面角的平面角概念的形成过程”。具体的教学目标是:

- 观察现实生活的情境, 抽象出二面角的概念, 培养数学抽象素养;
- 探究“二面角的平面角”的定义, 发展逻辑推理素养;
- 感悟数学概念背后所蕴含的理性精神。

2 数学史料及应用

为了更好地帮助学生构建对二面角概念的理解, 并向学生解释二面角平面角定义的合理性, 本节课需要用到以下四个方面的数学史料。

2.1 二面角概念的形成

古希腊数学家欧几里得在其《几何原本》第 11 卷中给出面面倾角的定义：从两个相交平面交线上的同一点，分别在两平面内各作交线的垂线，这两条垂线所夹的锐角叫做该两平面的倾角（或称交角）^[1]。欧几里得并没有提出二面角的概念，他考虑的仅仅是两个平面之间的一种关系。这也是今日课堂上的学生最容易出现的对二面角概念的错误理解。以史为鉴，我们应向学生解释，作为空间图形的二面角与面面夹角之间是有区别的。

1829 年，美国数学家沃克（T. Walker, 1802-1856）在其《几何基础》中，提出了平面角（plane angle）的概念^[2]。但沃克对二面角的认识还是模糊的，仍然聚焦于两个平面夹角的度量。二面角及其棱和面的概念以及二面角的记号等都付之阙如。这一历史素材表明，人类对二面角概念的认识是从具体到抽象的，所以在教学中也应该遵循这一原则。

1859 年，美国数学家格林利夫（B. Greenleaf, 1786-1864）在其《几何基础》中指出，二面角是由两个相交平面所形成的角，并给出示意图（图 1）。编者虽未指明“半平面”，但其示意图显示的是两个半平面所形成的角^[3]。书中提出了一些新的名称，如二面角（dihedral angle）、二面角的面（face）、二面角的棱（edge），还给出了二面角的字母表示法。至此，二面角作为几何图形的概念登上了数学历史舞台。但可以预见的是，学生在学习二面角概念时，也很有可能忽视定义中的“半平面”。

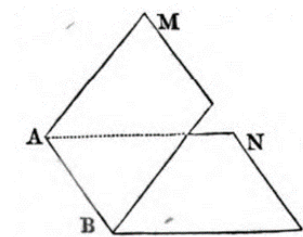


图 1 格林利夫《几何基础》（1859）中的二面角示意图

1922 年，美国数学家赛克斯（M. Sykes, 1868-1938）和康斯托克（C. E. Comstock, 1867-1948）在他们合著的《立体几何》中给出二面角的定义：“两个具有公共边界的半平面所形成的图形称为二面角。”^[4]同时，书中给出面和棱的概念，以及二面角的命名方式，与今日教科书一致。

2.2 二面角的平面角概念

关于二面角的测量，赛克斯和康斯托克在《立体几何》中提出了“平面角”的概念：从两个平面的交线上任取一点，过该点分别在两个平面内作交线的垂线，垂线形成的夹角称为平面角。书中给出了两个定理^[4]：

定理 1：一个二面角的所有平面角都相等；

定理 2：如果一个平面垂直于二面角的棱，它与两个面的交线形成平面角。

定理 2 是用于寻找二面角的平面角的一种好的方法。另外，编者还设计了一个操作活动：通过剪切、折叠卡纸来制作一个二面角，并展示测量该二面角大小的过程（图 2）。这一活动可以让学生直观地感受二面角的图形概念，并启发学生思考如何用符合直觉的、合理的方式来度量二面角的大小。

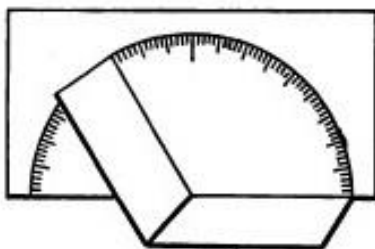


图 2 赛克斯和康斯托克设计的操作活动示意图

2.3 二面角平面角合理性之定量研究

勒让德在《几何基础》（1794）中提出，为了说明二面角平面角定义的合理性，需要证明：若二面角以一定的比例增大或减小，则相应的平面角将以相同的比例增大或减小^[5]。因此，若两个二面角的平面角是可公度的，则它们所对应的二面角具有相同的比例。然后，勒让德将证明从平面角可公度的情形扩展到了平面角不可公度的情形。现代教科书常常利用极限的手段来达成这一扩展。勒让德的证明方法涉及可公度的概念，不易为高中生所理解，但教师可以让学生通过观察实物来直观感受“二面角与它的平面角对应成比例”的结论，由此理解二面角平面角定义的合理性。

2.4 二面角平面角合理性之定性研究

1879 年, 美国数学家温特沃斯 (G. A. Wentworth, 1835-1906) 在其《平面与立体几何基础》中讨论了“平面角的边必须垂直于棱”的缘故。如图 3, 在长方体中, 二面角 $F-AB-H$ 是一个直二面角, $\angle CED$ 的两条边分别在平面 AF 和平面 AG 上, 并且它们都垂直于直线 AB , 所以 $\angle CED$ 是二面角 $F-AB-H$ 的平面角。注意到, 图中另外画出的两个角, 它们的两条边均不垂直于直线 AB , 由观察可知, $\angle C'E'D'$ 是锐角, $\angle C''E''D''$ 是钝角, 都不能合理地刻画直二面角 $F-AB-H$ 。这样的定性说明, 对高中生来说是易于理解的。

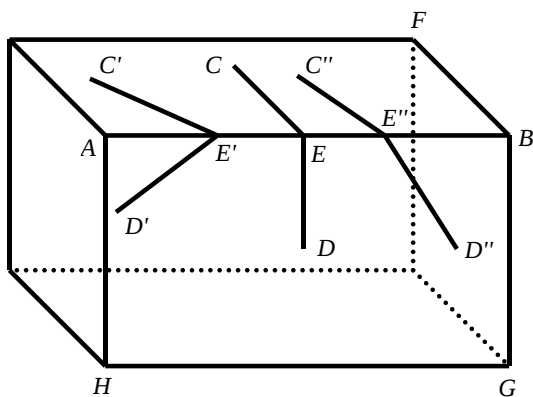


图 3 温特沃斯《平面与立体几何》(1879) 中的示意图

3 教学设计与实施

3.1 情境引入

教师借助生活中的 3 个情境: 翻开的书页、墙面与天花板、打开的笔记本电脑, 引入二面角。

师: 借助上述生活中的情境, 大家可以抽象出怎样的数学问题?

生: 两个平面的夹角。

师: 两个平面的夹角的概念最早由古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中给出。

(教师在 PPT 上展示两平面夹角的概念。)

师: 两平面所成的对顶角有两对, 选哪一对作为它们的夹角?

生: 较小的一组。

师：那么，两平面夹角的范围应该是多少？

生： $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

师：如果两平面的夹角范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，那么它就不能表示笔记本电脑开合程度较大的情况。

我们应该怎样修正一下定义？

（学生陷入思考）

师：如果我们给出一个新的概念：平面上的一条直线将平面分成两个半平面。我们怎样用数学语言描述刚才的情境？

生：两个半平面所成的图形。

师：还有补充吗？

生：两个半平面及其交线所组成的空间图形。

师：所以我们将由两个半平面 α 和 β 及其交线 AB 所组成的空间图形称为二面角，记作 $\alpha-AB-\beta$ 。两个半平面 α 和 β 称为二面角的面，交线 AB 叫做二面角的棱。下面请同学们画出开合程度较小和较大两种情形的二面角。

【设计意图】从学生熟悉的生活情境入手，学生可以非常容易地抽象出两个平面的夹角这一数学模型，这与欧几里得的想法有相似之处。但是，通过分析前面的生活情境，发现这一模型不能表示开合程度较大的笔记本电脑，所以需要引入一个不同于两平面夹角的新概念，即二面角。在这一过程中，学生会注意到二面角的定义中“半平面”的重要性。

3.2 探究发现

本教学环节设置了三个探究活动：（1）通过测量折纸所形成的二面角的大小，引出研究平面角的必要性；（2）通过三种特殊的二面角（ 0° 、 90° 、 180° ）与其对应的平面角大小的比较探究，定性分析二面角平面角定义的合理性；（3）通过在内部测量二面角大小的活动，自然地引出二面角平面角的唯一性问题，并加以证明。

探究活动 1

师：请大家用手中的 A4 纸折出一个二面角，并用量角器测量它的大小。

（学生所折的二面角分成了两类：一类是将 A4 纸对折，纸的边缘与折痕垂直；另一类是斜折，纸的边缘与折痕不垂直。）

师：大家是怎样折的二面角？又是如何测量的？

生 1：我将 A4 纸对折，然后将量角器紧贴二面角的边缘的两边测量。

师：还有不同的折法吗？

生 2：我将 A4 纸斜折，然后也是将量角器紧贴二面角边缘的两边测量。

师：我看到有同学也是斜折，但测量方法不同。

生 3：我也是将 A4 纸斜折，但我觉得测量边缘不方便，所以我把纸再次折叠，这次是对折，使上一次的折痕重叠，此时新的折痕垂直于原来的折痕，测量新折痕的夹角即可。

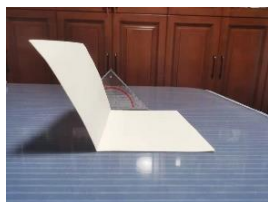


图 4 对折 A4 纸



图 5 斜折 A4 纸

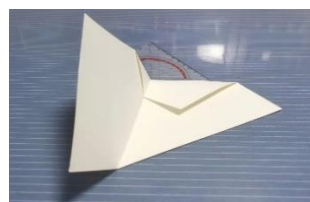


图 6 在斜折基础上再次折叠

师：大家的做法非常好，二面角是一个空间图形，这几位同学测量的的是一个平面角还是空间角？

生（齐答）：平面角。

师：为什么是平面角？

生 4：几位同学所量的角都是纸的边缘或折痕的夹角，是两条交于一点的射线所成的角，符合平面角的定义。

师：前几节课，我们在度量异面直线所成角、线面角等空间角时，都是把空间角转化成平面角进行度量。正如刚刚同学所说的，二面角也不例外。

【设计意图】度量是测量在数学中的抽象，测量是度量在现实世界的应用。本环节通过动手测量二面角的大小，引导学生思考并发现，测量的角其实是平面角而非空间角，从而得出立体几何中空间角度量的本质是平面角的度量，让学生体会到引入二面角平面角的必要性。

探究活动 2

师：刚刚三位同学选择的平面角有何不同？

生 5：同学 1 和 3 所选平面角的两边都垂直于二面角的棱，同学 2 选的平面角的两边与棱不垂直。

师：你观察得很仔细。大家觉得应该选择哪一种平面角来度量二面角呢？

（大部分同学选择垂直的情况，也有一部分同学觉得垂直、倾斜都可以，还有极少数同学选择倾斜的情况。）

师：大部分同学的选择与历史上数学家欧几里得的选择相同，他就是用这种垂直于棱的平面角来度量两个平面所成角的大小。但是我们不禁要问，为什么欧几里得选择了垂直的情况，舍弃了倾斜的情况？理由是什么？

（学生开始思考，并转动手中的二面角模型与同学讨论。）

生 6：如果是倾斜的情况，二面角的两个半平面重合时，两条倾斜的边并不重合。（图 7）

生 7：不对，这种情况下，两条倾斜的边可以重合，例如两边与棱的夹角都是 30° 。

生 6：那在这种情况下，将二面角“摊平”，两个半平面在同一平面上，二面角是平角，此时两条倾斜的边并不在同一条直线上。（图 8）



图 7 反例 1



图 8 反例 2

师：两位同学举的反例都非常好。现在我们知道，如果平面角的两边不与二面角的棱垂直，平面角不能正确地表示二面角的开合程度。

生 8：有没有这种可能，倾斜的情况只是不能表示两个半平面重合以及摊平的情况，但是其他情况是可行的？

生 9：不对，倾斜的情况也不能正确地表示两个半平面相互垂直的情况。

（该生通过测量两个半平面相互垂直时，两种倾斜程度不同的平面角的大小，一种情况大

于 90° ，另一种情况小于 90° 。这与历史上美国数学家温特沃斯的例证有异曲同工之妙。)

师：综上可知，倾斜的平面角不能正确地反映二面角的开合程度。那么垂直的平面角能正确地反映二面角的开合程度吗？

生 10：可以，我可以用对折的纸来演示说明。

(学生用对折的纸演示平面角垂直于棱的情况。当两个半平面重合时，平面角的两边重合；当两个半平面垂直时，平面角的两边垂直；当两个半平面共面时，平面角的两边共线。)

师：通过刚才的演示可见，平面角的两边均垂直于棱时，它的开合程度与二面角一致。因此，我们选择两边均垂直于棱的平面角来度量二面角。

【设计意图】通过问题串，引发学生对二面角平面角的定义合理性的思考。学生在交流环节相互质疑、相互启发，从而引发进一步深入的思考。最后，通过生生交流、师生交流的若干次循环，学生定性地得到了二面角平面角的定义合理性。在这一环节中，学生逐步体会到一个良好的数学定义不是凭空产生的。

探究活动 3

师：刚才大家所演示的平面角都位于折纸的边缘，然而我看到有的同学构造了位于折纸内部的平面角。

(学生演示将直角三角板置于折纸内部来构造直二面角的情形。)

师：平面角有时在边缘，有时在内部，随着位置的变化，它的大小会发生变化吗？

(教师在 PPT 上展示两个位置不同的平面角。)

生 1：不会发生变化。

师：理由？

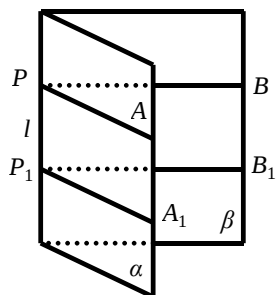


图 10 两个位置不同的平面角

生 1: 如图, $PA \perp l$, $P_1A_1 \perp l$, 且 PA 与 P_1A_1 共面, 故 $PA \parallel P_1A_1$, 同理 $PB \parallel P_1B_1$, 根据空间等角定理可得 $\angle APB = \angle A_1P_1B_1$

生 2: 不对, 根据等角定理, 这两个角也有可能互补。

生 1: 两组射线 PA 和 P_1A_1 、 PB 与 P_1B_1 方向分别相同, 所以两角只能相等。

师: 由此可见, 二面角平面角的大小和它的顶点在棱上的位置无关。请大家总结一下二面角的平面角的定义。

生 3: 在二面角的棱上任取一点, 过该点在两个半平面内分别作棱的垂线, 所得平面角即为二面角的平面角。

(教师在 PPT 上展示二面角平面角的概念, 学生修正自己提出的概念。)

【设计意图】如何自然地引入二面角平面角的唯一性证明, 这是一个教学中的难题。本节课的折纸活动中, 当折纸的边缘与折痕不垂直时, 有些学生感到无法测量二面角, 但学生想到了将三角板内移, 让折痕垂直于三角板, 从而构造 45° 或 90° 的二面角。这样就自然地产生了在二面角的棱上选取位置不同的平面角顶点时, 平面角是否相等的问题, 从而顺利地引入平面角唯一性的证明。

3.3 深化理解

折纸活动通过几个特殊情况, 说明了平面角为什么不采用倾斜的情况来定义, 也初步让学生认识到了垂直情形的合理性。上述环节是对合理性的定性探究, 本教学环节继续深入研究, 对平面角定义的合理性进行定量分析。

师: 刚才我们通过三种特殊的二面角, 初步体会了平面角定义的合理性, 但是还不够严密。数学史上有严格的证明来论证二面角平面角定义的合理性, 但由于证明比较复杂, 我们仅用实物来演示证明过程中一种情况: 可公度的情况。

教师拿出三块大小一样的楔形蛋糕, 向学生展示一块蛋糕的两个侧面构成了一个二面角, 而蛋糕上沿的两条棱构成了该二面角的平面角。教师拿出两块蛋糕拼在一起, 此时两块蛋糕的不重合的两个侧面构成了一个新的二面角, 相应地, 蛋糕上沿两条不重合的棱构成了新的二面角的平面角。



图 11 实物蛋糕模型

师：新二面角是原二面角的几倍？

生：两倍。

师：新二面角的平面角是原二面角的平面角的几倍？

生：两倍。

师：我再拿一块蛋糕拼在一起，现在二面角与平面角分别是原来的几倍？

生：三倍。

师：由此我们可以得出什么结论？

生：二面角大小的变化与平面角大小的变化是同比例的！

师：当平面角为 0° 时，二面角的两个半平面重合；当平面角为 90° 时，二面角的两个半平面垂直；当平面角为 180° 时，二面角的两个半平面也是平的。又因为二面角大小的变化与平面角大小的变化是同比例的，所以我们可以用二面角的平面角来度量二面角的大小。当平面角为 n° 时，二面角的大小也为 n° ，所以二面角的范围是 $0^\circ \leq n^\circ \leq 180^\circ$ 。

【设计意图】数学史上对该定义合理性的定量证明，分为可公度情形和不可公度情形两种情况。因为高中生没有接触过公度的概念，所以具体证明过程对他们来说不易理解。但是，蛋糕模型作为可公度情形的一个简单的、直观的例子，可以让学生从定量的角度来理解平面角与二面角大小变化的同比例关系。

3.4 例题应用

本环节教师用两道典型例题（等腰型的二面角、全等型的二面角），让学生掌握二面角平面角的作图方法，以及如何计算二面角的大小。具体例题讲解过程略。根据单元教学设计的规划，更多的应用问题将会在下一课时中讲解、分析。

3.5 课堂小结

师：本节课大家有什么收获？

生 1：学习了二面角的概念以及两种典型二面角的平面角的作图方法。

师：这位同学谈到了知识和方法上的收获，那么大家在数学思想上有何收获？

生 2：学习到了化归思想。

生 3：体会到了学习立体几何时，实践操作的重要性，以及给出数学定义的时候需要考虑严谨性、合理性。

生 4：数学的发展不是一蹴而就的，数学家也会犯错误、走弯路，但是数学家们的不懈努力造就了现在的数学大厦。

师：大家总结得非常好！我再补充一点，立体几何的概念大都是从现实生活中抽象出来的，因此我们也要重视数学抽象的重要性。最后有一首诗送给大家，作为学习二面角的纪念。

《双面》

抛一枚硬币在空中翻转

猜不出它的两面

解不开人生的方程

总在虚实之间

心中思绪万千

却不能化方为圆

凭添了几许白发

却减了壮志少年

何事空思虑

何必愁满面

夜总会变为昼

沧海也可桑田

虽然我们总是处在选择的两面

但每一面都通向无限！

【设计意图】在教师引导下，让学生从知识、方法、数学思想三个层面总结本节课的收获，

充分挖掘本节课的教育价值。

4 结 语

课后问卷调查显示, 97.8%的学生认为这节课中数学史的内容对学习有帮助, 93.3%的学生正确地掌握了二面角、二面角平面角的定义; 88.9%的同学能够在立方体中正确地作出给定二面角的平面角; 84.4%的学生能够解释二面角平面角定义的合理性, 包括从不变性、等比例变化等角度来解释。关于本节课印象最深的地方, 有同学表示: 用蛋糕演示二面角定义的合理性, 非常形象生动、直观明显, 它直观地展示了二面角转化为平面角的过程; 二面角定义形成的过程, 这让我更深刻地了解了二面角的特征, 也让我领略到了数学的严谨性; 二面角定义的由来, 让我感受到了数学家在研究时的探索精神, 概念的演变体现了数学的进步。关于本节课中数学史料的作用, 有同学表示: 数学史解释了二面角的度量; 数学史让我重新思考了二面角的定义, 并将它更好地记住; 课上介绍了二面角的发展, 拓宽了我的视野; 数学史引发了我对相关知识的兴趣; 数学史启示我们如何寻求严谨的数学定义, 能够体现二面角定义不断完善的过程。

总体来说, 本节课的亮点和价值可以用五个“一”来概括, 即一个预测的窗口、一条有效的路径、一个探究的机会、一次突破的尝试、一节难忘的课堂。

(1) 一个预测的窗口。欧几里得曾经给出了不完善的二面角定义, 这也是学生在理解二面角概念过程中的一个常见错误。数学史上的谬误, 为教师预测学生学情和潜在的学习困难打开了一扇窗户。

(2) 一条有效的路径。数学史料中对于二面角平面角的定义合理性的论述, 作为教材的补充材料, 为学生发展逻辑推理的核心素养提供了一条有效的路径。学生通过这节课的学习, 初步接触了如何讨论数学定义的合理性问题, 或者说一个定义怎样才是良好的。

(3) 一个探究的机会。为了落实“把课堂还给学生”的教学理念, 本节课为学生提供了丰富的探究机会, 而探究的问题则取材于历史的素材, 或者由学生在前序的探究过程中自然地提出新的探究问题。

(4) 一次突破的尝试。融入数学史的二面角概念教学并不常见, 而在概念教学中加入关于二面角平面角定义合理性的探究, 更是一次突破性的尝试。这对于数学基础较好的同学来说, 是基于学情的一次合理突破, 也是提升学生能力的一次有效尝试。

(5) 一节难忘的课堂。从课后学生的反馈来看,学生对数学史的内容以及直观的蛋糕模型都有非常深刻的印象,这说明本节课精心设计的亮点得到了学生们的肯定,而这些亮点也会逐步改变数学课在学生心中枯燥乏味的刻板印象。

参考文献

- [1] 欧几里得著. 兰纪正, 朱恩宽译. 几何原本[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003: 505.
- [2] Walker, T. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson & Lord, 1829: 26-33.
- [3] Greenleaf, B. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Robert S. Davis & Company, 1859: 165-166.
- [4] Sykes, M., Comstock, C. E. *Solid Geometry* [M]. Chicago: Rank McNally & Company, 1922: 21-31.
- [5] Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge, N. E.: The University Press, 1794.

活动讯息

一叶荣华春秋意，回首研修共思量

——首期数学史与数学教育 (HPM) 高中教师网络研修班结业仪式举行

雷沛瑶

(华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

2021 年 8 月 22 日晚上, 首期数学史与数学教育 (HPM) 高中教师网络研修班结业仪式在线上举行。来自全国 22 个省、自治区和直辖市的高中教师和研修班的指导专家、工作成员相聚云端, 共同对一年的研修学习进行了总结。

本次结业仪式由研修班负责人、华东师范大学博士生雷沛瑶主持, 雷沛瑶首先回顾了研修班创立的初衷, 即构建“一个专业学习共同体”。随后, 以“一段 HPM 网络研修之旅”总结了学员们在研修班组织下参加的线上活动。接着, 介绍了研修班的学员们在全国各地开展的 HPM 课例实践, 展现了学员们对“一种教育理念的践行”。最后, 分享了学员们“一份特别的收获”, 学员们各抒己见, 表达了在研修班的收获和对专业成长的反思。



图 1 雷沛瑶博士主持



图 2 学员收获分享

紧接着, 是学员分享环节。来自华东师范大学附属天山学校的方元沁老师、江西省德兴市第一中学的汪霞老师、上海市延安中学的朱荣华老师、河南省汝州市实验中学的胡正波老师以及四川省成都市新都一中的王贤华老师作为学员代表同大家讲述了在研修班研修期间自己教学理念的转变, 以及自己对 HPM 教学实践的展望等。各学员代表们的真挚发言, 引起了其它学员的共鸣, 大家也纷纷在留言区内表达自己的收获感想。

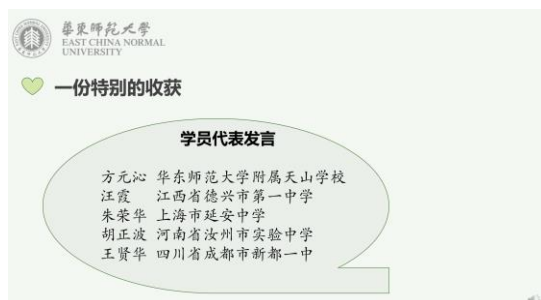


图 3 学员代表发言



图 4 课例照片展示

随后，华东师范大学教师教育学院的邹佳晨老师作为专家代表，对研修班进行了总结致辞，并介绍了 HPM 教研基地的发展情况。邹佳晨老师表示，希望有更多的老师能够加入 HPM 专业学习共同体中，在祖国的大江南北共同进行 HPM 课例实践。



图 5 邹佳晨老师致辞

最后，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授为大家带来了“HPM 的若干研究课题”的结业讲座，为学员们介绍了一些 HPM 研究课例，包括“基于数学史的问题提出/作业设计”、“实施数学学科德育的课例研究”、“HPM 视角下的数学教学评价”、“HPM 视角下的高中数学复习课教学研究”、“HPM 视角下的留白式教学研究”、“培养数学核心素养的 HPM 路径”以及“跨学科教学研究”等课题，期望学员们以研修班为起点，感受 HPM 的魅力！



图 6 汪晓勤老师讲座

四时俱可喜，最好新秋时。通过一年的研修学习，希望学员们能够在秋天收获专业成长，并在未来积极实践 HPM 的教学理念。



图 7 致谢